MATEMATIKA 1 za Tehniško varnost

Naloge z rešitvami*

Darja Govekar Leban
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2023

*Tehniška varnost, Fakulteta za kemijo in kemisjko tehnologijo, Univerza v Ljubljani

Kazalo

1 Števila

Princip popolne indukcije: Pri dokazovanju neke trditve S_n za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ si pomagamo s principom popolne indukcije, kar pomeni, da pokažemo:

- veljavnost trditve S_n za $n = 1$,
- veljavnost trditve S_{n+1} ob predpostavki, da velja trditev S_n.

1. Z matematično indukcijo dokaži, da velja za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1 + 5 + 12 + \cdots + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Rešitev: 1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.

$$1 = \frac{1^2(1+1)}{2}.$$

2. korak: Denimo, da trditev velja za nek $n \in \mathbb{N}$, to je,

$$1 + 5 + 12 + \cdots + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

za nek $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da trditev velja za $n + 1$, to je,

$$1 + 5 + 12 + \cdots + \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{2}.$$

Zapišimo levo stran te enačbe in upoštevajmo indukcijsko predpostavko

$$\begin{aligned}
&1 + 5 + 12 + \cdots + \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} \\
&= 1 + 5 + 12 + \cdots + \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+3n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

2. Dokaži s pomočjo matematične indukcije, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

   (a) Število 64 deli število $2^{2n+3} + 40n - 27$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   (c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

   (d) Število 133 deli število $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Rešitev:

(a) Dokažimo trditev: $64|\left(3^{2n+3} + 40n - 27\right)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.

$$3^{2\cdot 1+3} + 40 \cdot 1 - 27 = 243 + 40 - 27 = 265 = 64 \cdot 4.$$

2. korak:

$$\text{Denimo} \quad 64|\left(3^{2n+3} + 40n - 27\right) \quad \text{za} \quad \text{nek} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo

$$64|\left(3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27\right).$$

Ker $64|\left(3^{2n+3} + 40n - 27\right)$, obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da velja $3^{2n+3} + 40n - 27 = 64k$, oziroma $3^{2n+3} = -40n + 27 + 64k$.

$$3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27 = 3^{2n+3}3^2 + 40n + 40 - 27.$$

Ob uporabi indukcijske predpostavke, od tod sledi

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27 &= (-40n + 27 + 64k)\, 3^3 \\ &\quad + 40n - 27 \\ &= -40n\left(3^2 - 1\right) + 27 3^2 \\ &\quad + 40 - 27 + 64k3^2 \\ &= 64\left(3k^2 - 5n + 4\right), \end{aligned}$$

oziroma $64|\left(3^{2(n+1)+3} + 40(n+1) - 27\right)$ kot smo želeli pokazati.

(b) Dokažimo, da velja enakost $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{2} = 2.$$

2. korak: Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pokažimo, da velja naslednja enakost

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n+1)(n+1+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Zapišimo levo stran te enakosti

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n+1)(n+1+1) = 1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+1+1)$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n+1)(n+1+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+1+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Dokažimo, da velja $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{1}.$$

2. korak: Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Pokažimo, da velja naslednje neenakost za $n+1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n}.$$

Zapišemo levo stran te neenakosti, uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&\geq \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&=\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}\\
&\geq \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}\\
&=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.
\end{aligned}$$

(d) Dokažimo, da velja število 133 deli število $11^{n+1}+12^{2n-1}$.
1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n=1$.

$$11^{1+1}+12^{2\cdot 1-1}=133.$$

2. korak:

$$\text{Denimo}\quad 133|\left(11^{n+1}+12^{2n-1}\right)\quad \text{za}\quad \text{nek}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Dokažimo

$$133|\Big(11^{(n+1)+1}+12^{2(n+1)-1}\Big).$$

Ker $133|\left(11^{n+1}+12^{2n-1}\right)$, obstaja tak $k\in\mathbb{N}$, da velja $11^{n+1}+12^{2n-1}=133k$, torej

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+1}+12^{2(n+1)-1} &= 11^{(n+1)}11+12^{2n+1}\\
&= 11^{(n+1)}11+12^{2}12^{2n-1}\\
&= 11^{(n+1)}11+112^{2n-1}\\
&\quad -112^{2n-1}+12^{2}12^{2n-1}\\
&= 11\left(112^{2n-1}\right)\\
&\quad +12^{2n-1}\left(2^{2}-11\right).
\end{aligned}$$

Ob uporabi indukcijske predpostavke, od tod sledi

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+1}+12^{2(n+1)-1} &= 11\cdot 133k+12^{2n-1}\left(12^{2}-11\right)\\
&= 133\left(11k+12^{2n-1}\right),
\end{aligned}$$

oziroma $133|\left(11^{(n+1)+1}+12^{2(n+1)-1}\right)$, kot smo želeli pokazati.

3. Z matematično indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$3 \ \text{ deli } \ (n^3 + 11n).$$

Rešitev:

1. korak: Preverimo, da trditev velja za $n = 1$.

$$1^3 + 11 \cdot 1 = 12 = 4 \cdot 3.$$

2. korak: Denimo, da trditev velja za nek $n \in \mathbb{N}$, to je,

$$3 \ \text{ deli } \ (n^3 + 11n).$$

za nek $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da trditev velja za $n + 1$, to je,

$$3 \ \text{ deli } \ \big((n+1)^3 + 11(n+1)\big),$$

oziroma pokažimo, da

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = 3l,$$

za nek $l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 11(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= n^3 + 11n + 3n^2 + 3n + 12 \\ &= 3k + 3(n^2 + n + 4) \\ &= 3(k + n^2 + n + 4) \\ &= 3l,\end{aligned}$$

kjer je $l = k + n^2 + n + 4$.

4. Dana je neenačba

$$3x - 7 < 8.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:

$$3x - 7 < 8.$$

$$3x - 7 + 7 < 8 + 7,$$

$$3x < 15,$$

$$x < 5.$$

$\mathcal{R} = (-\infty, 5)\,.$

5. Dana je neenačba
$$5(x-1) > 12-(17-3x).$$
Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:
$$5(x-1) > 12-(17-3x),$$
$$5x-5 > 12-17+3x,$$
$$2x > 0,$$
$$x > 0.$$
$\mathcal{R} = (0, \infty)\,.$

6. Dana je neenačba
$$\frac{2x+1}{3-x} > 0.$$
Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Takoj ugotovimo, da $3 \notin \mathcal{R}$.
$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{2x+1}{3-x} > 0,\ 3-x > 0\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{2x+1}{3-x} > 0,\ 3-x < 0\}$$
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$
Poiščimo najprej $\mathcal{R}_1$:
Naj bo torej $3-x > 0 \iff 3 > x$. Celo neenačbo
$$\frac{2x+1}{3-x} > 0,$$
pomnožimo s $(3-x)$ in upoštevamo pogoj $3-x > 0$ in dobimo
$$2x+1 > 0,$$
$$x > -\frac{1}{2}.$$
Ker mora biti hkrati izpolnjen pogoj $3 > x$ od tod dobimo
$$-\frac{1}{2} < x < 3,$$

$$\mathcal{R}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 3\right).$$

Poiščimo še $\mathcal{R}_2$:
Naj bo torej $3 - x < 0 \iff 3 < x$. Celo neenačbo

$$\frac{2x+1}{3-x} > 0,$$

pomnožimo s $(3-x)$ in upoštevamo pogoj $3 - x < 0$ in dobimo

$$2x + 1 < 0,$$

$$x < -\frac{1}{2}.$$

Hkrati mora biti izpolnjen še pogoj $3 < x$ sledi

$$\mathcal{R}_2 = \emptyset.$$

$\mathcal{R} = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

7. Dana je neenačba

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:

Takoj ugotovimo, da $-2 \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3},\ x + 2 > 0\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3},\ x + 2 < 0\}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Poiščimo najprej $\mathcal{R}_1$:
Naj bo torej $x + 2 > 0 \iff x > -2$. Celo neenačbo

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3},$$

pomnožimo s številom $3(x+2)$ in upoštevamo pogoj $x + 2 > 0$ in dobimo

$$3(2x-3) < x + 2,$$

$$5x < 11,$$

$$x < \frac{11}{5}.$$

Ker mora biti hkrati izpolnjen pogoj $x > -2$ od tod dobimo

$$-2 < x < \frac{11}{5}.$$

$$\mathcal{R}_1 = \left(-2, \frac{11}{5}\right).$$

Poiščimo še $\mathcal{R}_2$:
Celo neenačbo

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3},$$

pomnožimo s številom $3(x+2)$ in upoštevamo pogoj $x+2 < 0$ in dobimo

$$3(2x-3) > x+2,$$

$$5x > 11,$$

$$x > \frac{11}{5}.$$

Hkrati mora biti izpolnjen še pogoj $x < -2$ sledi

$$\mathcal{R}_2 = \emptyset.$$

$$\mathcal{R} = \left(-2, \frac{11}{5}\right).$$

8. Dana je neenačba

$$\frac{x^2+2x+2}{2-x} < 1.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Gotovo velja $2 \notin \mathcal{R}$. Pišimo

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2+2x+2}{2-x} < 1, 2-x > 0\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2+2x+2}{2-x} < 1, 2-x < 0\},$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Poiščimo najprej $\mathcal{R}_1$:
Naj bo torej $2 - x > 0 \iff 2 > x$. Celo neenačbo

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{2 - x} < 1$$

pomnožimo s številom $2-x$ in upoštevamo pogoj $2-x > 0$ in dobimo

$$x^2 + 2x + 2 < 2 - x,$$

$$x^2 + 3x < 0,$$

$$x(x + 3) < 0,$$

$$x \in (-3, 0),$$

dodaten pogoj $2 > x$ je izpolnjen, torej

$$\mathcal{R}_1 = (-3, 0).$$

Poiščimo še $\mathcal{R}_2$:
Celo neenačbo

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{2 - x} < 1$$

pomnožimo s številom $2-x$ in upoštevamo pogoj $2-x < 0$ in dobimo

$$x^2 + 2x + 2 > 2 - x,$$

$$x^2 + 3x > 0,$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty),$$

hkrati moramo upoštevati še pogoj $2 < x$, od koder sledi

$$\mathcal{R}_2 = (2, \infty).$$

Torej

$$\mathcal{R} = (-3, 0) \cup (2, \infty).$$

9. Dana je neenačba

$$x^3 + 3x - 4x^2 < 0.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:

$$x^3 + 3x - 4x^2 < 0,$$
$$x(x^2 - 4x + 3) < 0,$$
$$x(x-1)(x-3) < 0,$$

Torej
$$\mathcal{R} = (-\infty, 0) \cup (1, 3)\,.$$

10. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo
$$x^2 < 2x + 8$$
in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:
$$x^2 < 2x + 8$$
$$x^2 - 2x + 8 < 0$$
$$(x-4)(x+2) < 0$$
$$x \in (-2, 4).$$
$\mathcal{R} = (-2, 4)$.

11. Reši naslednjo enačbo
$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} = x - 1.$$

Rešitev: Enačbo kvadriramo in dobimo
$$3x^2 - 7x + 3 = (x-1)^2$$
$$3x^2 - 7x + 3 = x^2 - 2x + 1$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$
Poglejmo ali dobljeni rešitvi rešita tudi začetno enačbo. Vstavimo v začetno enačbo $x_1 = \frac{1}{2}$. Dobimo
$$\sqrt{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\frac{1}{2} + 3} \neq \frac{1}{2} - 1.$$
$x_2 = 2$,
$$\sqrt{3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 3} = 2 - 1.$$
Torej množica rešitev je $\mathcal{R} = \{2\}$.

12. Reši naslednjo enačbo

$$\sqrt{2x^2 - 10x + 8} = 1 - x.$$

Rešitev: Enačbo kvadriramo in dobimo

$$2x^2 - 10x + 8 = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-7)(x-1) = 0$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 7$. Preverimo ali ti dve rešitvi kvadrirane enačbe rešita tudi začetno enačbo. Vstavimo v enačbo $x_1 = 1$.

$$\sqrt{2 - 10 + 8} = 1 - 1.$$

Vstavimo v enačbo $x_2 = 7$.

$$\sqrt{2 \cdot 7^2 - 10 \cdot 7 + 8} \neq 1 - 7,$$

torej $x_2 = 7$ ni rešitev. Množica rešitev je $\mathcal{R} = \{1\}$.

13. Dana je neenačba

$$\sqrt{1 + x^2} < x - 2.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:

Ker je $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ sledi: če je $x - 2 < 0$, sledi $x \notin \mathcal{R}$. Potrebno je poiskati tiste $x, x \geq 2$, ki rešijo neenačbo. Naj bo torej $x \geq 2$. Tedaj sta obe strani neenačbe nenegativni in zato velja

$$\sqrt{1 + x^2} < x - 2 \iff 1 + x^2 < (x-2)^2,$$

$$1 + x^2 < x^2 - 4x + 4,$$

$$4x < 3$$

$$x < \frac{3}{4} \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right).$$

$$\mathcal{R} = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cap [2, \infty) = \emptyset.$$

14. Dana je neenačba
$$\sqrt{x^2-1} < x-2.$$
Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Da bo neenačba sploh definirana, mora biti izraz pod korenom nenegativen. $x^2-1 \geq 0 \iff x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Nadalje, če je $x \in (-\infty,2) \cap ((-\infty,-1] \cup [1,\infty)) = (-\infty,-1] \cup [1,2)$, je desna stran neenačbe negativna, leva pa pozitivna, od koder sledi, da na tem intervalu neenačba nima rešitve. Torej morebitne rešitve neenačbe lahko ležijo na intervalu $[2,\infty)$. Predpostavimo, da je $x \in [2,\infty)$. Ker sta sedaj obe strani nenegativni, lahko neenačbo kvadriramo in dobimo
$$x^2-1 < (x-2)^2,$$
$$x^2-1 < x^2-4x+4$$
$$-5 < -4x$$
$$5 > 4x,$$
$$\frac{5}{4} > x \iff x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right).$$
Ker pa mora veljati še $x \in [2,\infty)$, je
$$\mathcal{R} = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cap [2,\infty) = \emptyset.$$

15. Dana je neenačba
$$\sqrt{1+x^2} < 2x-1.$$
Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Ker je $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ sledi, da neena vcbo gotovo ne rešijo števila x, za katere je $2x-1<0$. Torej $(-\infty,\frac{1}{2}) \not\subset \mathcal{R}$. Potrebno je še ugotoviti katera števila $x \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$ rešijo dano neenačbo. Naj bo torej $x \in \left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Tedaj sta obe strani neenačbe nenegativni. Tedaj neenačba
$$\sqrt{1+x^2} < 2x-1$$
velja natanko tedaj, ko velja
$$1+x^2 < (2x-1)^2$$

$$1 + x^2 < 4x^2 - 4x + 1$$

$$-3x^2 + 4x < 0$$

$$x(-3x + 4) < 0$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$$

Ker pa mora veljati še $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ sledi

$$\mathcal{R} = \left((-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, \infty)\right) \cap \left[\frac{1}{2}, \infty\right) = \left(\frac{4}{3}, \infty\right).$$

16. Dana je neenačba

$$\sqrt{1 + x^2} > 1 - 2x.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Ker je $\sqrt{1 + x^2} \geq 0$ sledi: če je $1 - 2x < 0$, sledi $x \in \mathcal{R}$, kar pomeni $\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \subset \mathcal{R}$. Torej poglejmo še kateri $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ zadoščajo neenačbi. Naj bo torej $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ Tedaj sta obe strani neenačbe nenegativni. Neenačba je ekvivalentna neenačbi

$$1 + x^2 > (1 - 2x)^2$$

$$1 + x^2 > 1 - 4x + 4x^2$$

$$-3x^2 + 4x > 0$$

$$x(-3x + 4) > 0$$

$$x \in \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

Ker pa mora veljati še $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ od tod sledi $x \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \cap (\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\mathcal{R} = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) = (0, \infty).$$

17. Dana je neenačba

$$\sqrt{x^2 - 1} < x + 2.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Da bo neenačba sploh definirana, mora biti izraz pod korenom nenegativen. $x^2-1\geq 0 \iff x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Nadalje, če je $x\in(-\infty,-2)\cap((-\infty,-1]\cup[1,\infty))=(-\infty,-1]$, je desna stran neenačbe negativna, leva pa pozitivna, od koder sledi, da na tem intervalu neenačba nima rešitve. Torej morebitne rešitve neenačbe lahko ležijo na intervalu $[2,\infty)$. Predpostavimo, da je $x\in[1,\infty)$. Ker sta sedaj obe strani nenegativni, lahko neenačbo kvadriramo in dobimo

$$x^2-1<(x+2)^2,$$

$$x^2-1<x^2+4x+4$$

$$-1<4x+4$$

$$-5>4x$$

$$-\frac{5}{4}>x \iff x\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right).$$

Ker pa mora veljati še $x\in[1,\infty)$, sledi Torej

$$\mathcal{R}=\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cap[1,\infty)=\emptyset..$$

18. Dana je neenačba

$$\sqrt{1-x^2}<x+2.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Da bo neenačba sploh definirana, mora biti izraz pod korenom nenegativen. $1-x^2\geq 0 \iff x\in[-1,1]$. Če je $x\in[-1,1]$, je desna večja od nič in sta torej v neenačbi leva in desna stran nenegativni in neenačba

$$\sqrt{1-x^2}<x+2$$

velja natanko takrat, ko velja

$$1-x^2<(x+2)^2$$

$$1-x^2<x^2+4x+4$$

$$2x^2-4x-3<0$$

$$x\in\left(-\infty,\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2},\infty\right).$$

Ker pa mora veljati še $x \in [-1,1]$, od tod dobimo

$$\in \left[-1, \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right).$$

19. Dana je neenačba

$$\sqrt{1+x^2} + 2x - 1 > 0.$$

Poišči rešitve neenačbe in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev: Zapišimo neenačbo

$$\sqrt{1+x^2} > 1 - 2x.$$

Naj bo

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R};\ 1 - 2x < 0\} = \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Naj bo

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{1+x^2} > 1 - 2x,\ 1 - 2x \geq 0\}.$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Ker je koren $\sqrt{1+x^2}$ neenegativen, neenačbo gotovo rešijo vsa števila x za katere je $1-2x < 0$, torej $\mathcal{R}_1 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \subset \mathbb{R}$. Poiščimo $\mathcal{R}_2$ oziroma poiščimo števila $x \geq \frac{1}{2}$, ki rešijo dano neenačbo. Naj bo torej $x \geq \frac{1}{2}$. Tedaj sta obe strani v neenačbi nenegativni.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &> 1 - 2x \\ 1 + x^2 &> (1-2x)^2 \\ x(3x-4) &< 0. \end{aligned}$$

Ta neenačba ima rešitve $x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$, skupaj ob upoštevanju pogoja $x \geq \frac{1}{2}$ dobimo

$$\mathcal{R}_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Torej

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] = (0, \infty).$$

20. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$\frac{x+1}{x^2 - 3x - 4} < 1.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev: $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) = 0$ za $x = 4$ in $x = -1$. Ker imenovlec ne sme biti enak nič, sledi $4, -1 \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 1,\ x^2 - 3x - 4 > 0\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R};\ \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 1,\ x^2 - 3x - 4 < 0\},$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty).$$

Pomnožimo neenačbo

$$\frac{x+1}{x^2-3x-4} < 1$$

s številom $x^2 - 3x - 4$ dobimo

$$x + 1 < x^2 - 3x - 4$$

$$0 < x^2 - 4x - 1,$$

ničli kvadratne enačbe

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

sta $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$. torej zgornjo iz zadnje neenačbe sledi

$$x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(2 + \sqrt{5}, \infty\right),$$

$$\mathcal{R}_1 = ((-\infty, -1) \cup (4, \infty)) \cap \left(\left(-\infty, 2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(2 + \sqrt{5}, \infty\right)\right) = (-\infty, -1) \cup \left(2 + \sqrt{5}\right).$$

Torej

$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, -1) \cup \left(2 + \sqrt{5}, \infty\right).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo $x^2 - 3x - 4 > 0 \iff x \in (-1, 4)$.Če neenačbo

$$\frac{x+1}{x^2-3x-4} < 1$$

pomnožimo s številom $x^2 - 3x - 4$ dobimo

$$x + 1 > x^2 - 3x - 4$$

$$x^2 - 4x - 1 < 0,$$

$$x \in \left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right),$$

$$\mathcal{R}_2 = \left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right) \cap (-1,4) = \left(2-\sqrt{5}, 4\right).$$

$$\mathcal{R} = (-\infty,-1) \cup \left(2+\sqrt{5},\infty\right) \cup \left(2-\sqrt{5},4\right) = \mathbb{R} \backslash \left(\left[-1, 2-\sqrt{5}\right] \cup \left[4, 2+\sqrt{5}\right]\right).$$

21. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x-3| > 2$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev: 1. način:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}; |x-3| > 2,\ x \geq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}; |x-3| > 2, x < 3\} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Naj bo $x \geq 3$. Tedaj

$$|x-3| > 2,$$

$$x - 3 > 2,$$

$$x > 5.$$

Torej

$$\mathcal{R}_1 = [3,\infty) \cap (5,\infty) = (5,\infty).$$

Naj bo $x < 3$. Tedaj,

$$|x-3| > 2,$$

$$-x + 3 > 2,$$

$$-x > -1,$$

$$x < 1.$$

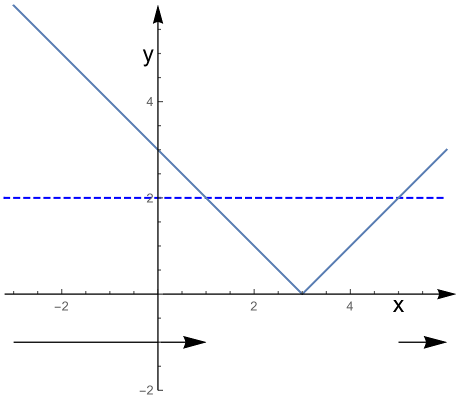
Torej

$$\mathcal{R}_2 = (-\infty,1) \cap (-\infty,3) = (-\infty,1).$$

$$\mathcal{R} = (-\infty,1) \cup (5,\infty).$$

2. način: $|x-3|$ je razdalja med številom x in številom 3. $\mathcal{R}$ je množica vseh $x \in \mathbb{R}$, ki so od števila 3 oddaljeni za več kot 2, torej $\mathcal{R} = (-\infty,1) \cup (5,\infty)$.

3. način (grafično):



22. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x+1| < x+3$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x+1| < x+3,\ x+1 \geq 0,$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; |x+1| < x+3,\ x+1 < 0,$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Naj bo $x+1 \geq 0$. Tedaj

$$|x+1| < x+3,$$

$$x+1 < x+3,$$

$$1 < 3,$$

slednjo neenačbo reši vsak $x \in \mathbb{R}$, torej

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} \cap [-1, \infty) = [-1, \infty).$$

Naj bo $x+1 < 0$. Tedaj

$$|x+1| < x+3,$$

$$-x-1 < x+3,$$

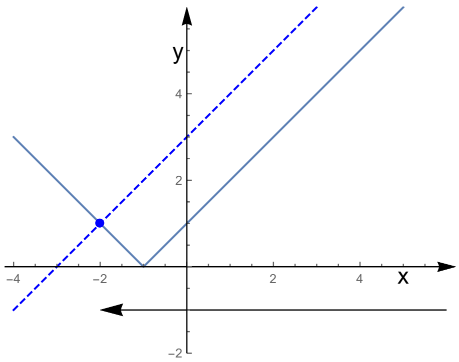
$$-2x < 4,$$

$$x > -2.$$

$$\mathcal{R}_2 = (-\infty, -1) \cap (-2, \infty) = (-2, -1).$$

$$\mathcal{R} = [-1, \infty) \cup (-2, -1) = (-2, \infty).$$

2. način (grafično):



23. Dana je enačba

$$|x+3| - (x-1)^2 = 4.$$

Poišči množico rešitev $\mathcal{R}$ v množčici realnih števil $\mathbb{R}$.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x+3| - (x-1)^2 = 4,\ x < -3\},$$

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x+3| - (x-1)^2 = 4,\ x > -3\},$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo $x < -3$.

$$|x+3| - (x-1)^2 = 4$$

$$-(x+3) - (x-1)^2 = 4$$

$$-x^2 + x - 8 = 0$$

$$x^2 - x + 8 = 0,$$

enačba nima realnih ničel, ker je diskriminanta negativna, t. j. $D = (-1)^2 - 4 \cdot 8 < 0$. Torej

$$\mathcal{R}_1 = \emptyset.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo $x \geq -3$.

$$|x+3| - (x-1)^2 = 4$$

$$x + 3 - (x-1)^2 = 4$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2) = 0$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Torej

$$\mathcal{R}_1 = \{1,2\} \cap ([-3,\infty) = \{1,2\}.$$

24. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x + 1.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1,\ x < -1\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; |x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1,\ -1 \leq x < 0\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \{x \in \mathbb{R}; |x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1,\ 0 \leq x < 4\},$$
$$\mathcal{R}_4 = \{x \in \mathbb{R}; |x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1,\ x \geq 4\},$$
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3. \cup \mathcal{R}_4.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo $x < -1$.

$$|x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1$$
$$-x - x - 1 - 2x + 8 > 2x + 1$$
$$-2x > -6$$
$$x < 3$$
$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, 3) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_2$. Torej naj bo $-1 \leq x < 0$.

$$|x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x+1$$
$$-x + x + 1 - 2x + 8 > 2x + 1$$
$$8 > 4x$$

$$2 > x$$

$$\mathcal{R}_2 = (-\infty, 2) \cap [-1, 0) = [-1, 0).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_3$. Torej naj bo $0 \leq x < 4$.

$$|x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x + 1$$

$$x + x + 1 - 2x + 8 > 1$$

$$-2x + 8 > 0$$

$$x < 4,$$

$$\mathcal{R}_3 = (-\infty, 4) \cap [0, 4) = [0, 4).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_4$. Torej naj bo $4 \leq xx$.

$$|x| + |x+1| + 2|x-4| > 2x + 1$$

$$x + x + 1 + 2x - 8 > 2x + 1$$

$$2x - 7 > 1$$

$$x > 4,$$

$$\mathcal{R}_4 = (4, \infty) \cap [4, \infty) = (4, \infty).$$

$$\mathcal{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 4) \cup (4, \infty) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty).$$

25. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$2|x-1| + |x+2| < 4.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; 2|x-1| + |x+2| < 4,\ x < -2\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; 2|x-1| + |x+2| < 4,\ -2 \leq x < 1\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{x \in \mathbb{R}; 2|x-1| + |x+2| < 4,\ 1 \leq x\},$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Torej naj bo $x < -2$.

$$2|x-1| + |x+2| < 4$$

$$-2x + 2 - x - 2 < 4$$

$$-3x < 4$$

$$x > -\frac{4}{3},$$

$$\mathcal{R}_1 = \left(-\frac{4}{3}, \infty\right) \cap (-\infty, -2) = \emptyset.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_2$. Torej naj bo $-2 \leq x < 1$.

$$2|x - 1| + |x + 2| < 4$$

$$-2x + 2 + x + 2 < 4$$

$$-x + 4 < 0$$

$$x > 0,$$

$$\mathcal{R}_2 = (0, \infty) \cap [-2, 1) = (0, 1).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_3$. Torej naj bo $1 \leq x$.

$$2|x - 1| + |x + 2| < 4$$

$$2x - 2 + x + 2 < 4$$

$$3x < 4$$

$$x < \frac{4}{3},$$

$$\mathcal{R}_3 = (-\infty, \frac{4}{3}) \cap [1, \infty) = \left[1, \frac{4}{3}\right).$$

$$\mathcal{R} = \emptyset \cup (0, 1) \cup \left[1, \frac{4}{3}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

26. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|5 - 2x| > 3|x - 1|$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |5 - 2x| > 3|x - 1|,\ x \leq 1\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; |5 - 2x| > 3|x - 1|,\ 1 < x < \frac{5}{2}\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; |5 - 2x| > 3|x - 1|,\ \frac{5}{2} \leq x\},$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$, torej naj bo $x \leq 1$. Tedaj

$$|5-2x| > 3|x-1|$$

$$5-2x > 3(-x+1)$$

$$5-2x > -3x+3$$

$$2 > -x$$

$$x > -2$$

$$\mathcal{R}_1 = (-2,\infty) \cap (-\infty,1] = (-2,1].$$

Poiščimo $\mathcal{R}_2$, torej naj bo $1 < x < \frac{5}{2}$. Tedaj

$$|5-2x| > 3|x-1|$$

$$5-2x > 3(x-1)$$

$$8 > 5x,$$

$$\frac{8}{5} > x,$$

$$\mathcal{R}_2 = \left(-\infty, \frac{8}{5}\right) \cap \left(1, \frac{5}{2}\right) = \left(1, \frac{8}{5}\right).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_3$, torej naj bo $\frac{5}{2} \leq x$. Tedaj

$$|5-2x| > 3|x-1|$$

$$-5+2x > 3(x-1)$$

$$-2 > x,$$

$$\mathcal{R}_3 = (-\infty,2) \cap \left[\frac{5}{2}, \infty\right) = \emptyset.$$

$$\mathcal{R} = (-2,1] \cup \left(1, \frac{8}{5}\right) \cup \emptyset = \left(-2, \frac{8}{5}\right).$$

27. Dana je funkcija

$$f(x) = |5-2x| - 3|x-1|.$$

Predpis $f(x)$ zapiši brez znaka absolutne vrednosti in grafično določi rešitve neenačbe

$$f(x) > 0.$$

Rešitev: Naj bo $x \leq 1$. Tedaj

$$f(x) = |5-2x| - 3|x-1| = 5 - 2x - 3(-x+1) = 2 + x.$$

Naj bo $1 < x < \frac{5}{2}$. Tedaj

$$f(x) = |5-2x| - 3|x-1| = 5 - 2x - 3(x-1) = 8 - 5x.$$

Naj bo $\frac{5}{2} \leq x$. Tedaj

$$f(x) = |5-2x| - 3|x-1| = -5 + 2x - 3(x-1) = -2 - x.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & : \quad x \leq 1 \\ 8-5x & : \quad 1 < x < \frac{5}{2} \\ -2-x & : \quad \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$

Torej $f(x) > 0$, če $x \in \left(-2, \frac{8}{5}\right)$.

28. Dana je neenačba

$$2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x.$$

Poišči rešitve neenačb in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot disjunktno unijo intervalov.

Rešitev:

Neenačbo moramo posebej obravnavati za $x \leq 0$, $0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 2$ in $x \geq 2$.

$$\mathcal{R}_1 = \{x; 2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x,\ x \leq 0\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x; 2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x,\ 0 \leq x < 1\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{x; 2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x,\ 1 \leq x < 2\},$$

$$\mathcal{R}_4 = \{x; 2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x,\ x \geq 2\}.$$

1. Naj bo $x \leq 0$.

$$2|x| + |1-x| + |x-2| \leq 4x,$$

$$-2x + 1 - x - (x-2) \leq 4x,$$

$$3 \leq 8x,$$

$$\frac{3}{8} \leq x,$$

ob upoštevanju pogoja $x \leq 0$ od tod sledi $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.

2. Naj bo $0 \leq x < 1$.

$$2|x|+|1-x|+|x-2| \leq 4x,$$

$$2x + 1 - x - x + 2 \leq 4x,$$
$$\frac{3}{4} \leq x,$$
$$x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right).$$

$\mathcal{R}_2 = \left[\frac{3}{4}, 1\right)$.

3. Naj bo $1 \leq x < 2$.

$$2|x|+|1-x|+|x-2| \leq 4x,$$

$$2x - (1-x) - (x-2) \leq 4x,$$

$$1 \leq 4x,$$
$$\frac{1}{2} \leq x,$$

$\mathcal{R}_3 = [1, 2)$.

4. Naj bo $x \geq 2$.

$$2|x|+|1-x|+|x-2| \leq 4x,$$

$$2x - 1 + x + x - 2 \leq 4x,$$

$$-3 \leq 0,$$

torej neenačbo v prejšnji vrstici reši vsak $x \in \mathbb{R}$. Ob upoštevanju pogoja $x \geq 2$, sledi

$$\mathcal{R}_4 = [2, \infty).$$
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4 = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

29. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x-2| - |x| < |x+5|$$

in množico rešitev zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

(a) Naj bo $x < -5$. Tedaj velja

$$-(x-2)-(-x) < -(x+5)$$

$$2 < -x-5$$

$$-7 > x$$

$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, -7).$$

(b) Naj bo $x \in [-5, 0)$. Tedaj velja

$$-(x-2)-(-x) < x+5$$

$$x > -3$$

$$\mathcal{R}_2 = (-3, 0).$$

(c) Naj bo $x \in [0, 2)$. Tedaj velja

$$-(x-2)-x < x+5$$

$$-x < 1$$

$$x > -1$$

$$\mathcal{R}_3 = [0, 2).$$

(d) Naj bo $x \in [2, \infty)$. Tedaj velja

$$-2 < x+5$$

$$-7 < x$$

$$\mathcal{R}_3 = [2, \infty).$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4 = (-\infty, -7] \cup (-3, 0) \cup [0, 2) \cup [2, \infty) =$$
$$= (-\infty, -7) \cup (-3, \infty).$$

30. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x+1| < 2|1-x| + 1.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev: Upoštevamo, da velja

$$|1-x| = |(-1)(x-1)| = |-1||x-1| = |x-1|.$$

Tako se neenačba poenostavi

$$-|x-1| < -1$$

$$|x-1| > 1,$$

Slednjo neenačbo rešijo vsa števila $x \in \mathbb{R}$, ki so od števila 1 oddaljena za več kot 1, to je,

$$\mathcal{R} = (\infty, 0) \cup (2, \infty).$$

31. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$|x-1| - |x+2| > 1.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

Rešitev:

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| - |x+2| > 1,\ x \leq -2\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| - |x+2| > 1,\ -2 < x \leq 1,$$

$$\mathcal{R}_3 = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| - |x+2| > 1,\ x > 1,$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$$

Poiščimo $\mathcal{R}_1$. Naj bo $x \leq -2$. Tedaj

$$|x-1| - |x+2| > 1$$

$$-x + 1 + x + 2 > 1$$

$$3 > 1,$$

slednjo neenačbo reši vsako realno število x.

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, -2] = (-\infty, -2].$$

Poiščimo $\mathcal{R}_2$. Naj bo $-2 < x \leq 1$. Tedaj

$$|x-1| - |x+2| > 1$$

$$-x + 1 - x - 2 > 1$$

$$-2x > 2$$

$$x < -1,$$

$$\mathcal{R}_2 = (-\infty, -1) \cap (-2, 1] = (-2, -1).$$

Poiščimo $\mathcal{R}_2$. Naj bo $x > 1$. Tedaj

$$|x-1| - |x+2| > 1$$

$$x - 1 - x - 2 > 1$$

$$-3 > 1,$$

ta enačba nima rešitve, torej,

$$\mathcal{R}_2 = \emptyset.$$

$$\mathcal{R} = (-\infty, -2] \cup (-2, -1) \cup \emptyset = (-\infty, -1).$$

32. Poišči množico realnih števil x, ki rešijo neenačbo

$$2|3-x| + |2x+1| < 5.$$

in množico rešitev $\mathcal{R}$ zapiši kot unijo disjunktnih intervalov.

33. Funkcijo

$$f(x) = 2|3-x| + |2x+1|$$

zapiši brez znaka absolutne vrednosti in poišči množico reštev $\mathcal{R}$ neenačbe

$$f(x) < 5.$$

Rešitev: Naj bo $x < -\frac{1}{2}$. Tedaj

$$f(x) = 2|3-x| + |2x+1| = 2(3-x) - (2x+1) = -4x + 5.$$

Naj bo $-\frac{1}{2} \leq x < 3$. Tedaj

$$f(x) = 2|3-x| + |2x+1| = 2(3-x) + (2x+1) = 6 - 2x + 2x + 1 = 7.$$

Naj bo $3 \leq x$. Tedaj

$$f(x) = 2|3-x| + |2x+1| = -2(3-x) + 2x + 1 = 4x - 5.$$

$$f(x) = \begin{cases} -4x+5 & : \quad x < -\frac{1}{2} \\ 7 & : \quad -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ 4x-5 & : \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Rešimo še neenačbo

$$f(x) < 5.$$

$$-4x + 5 < 5 \iff x > 0,$$

$$7 \not< 5,$$

$$4x - 5 < 5 \iff 4x < 10 \iff x < \frac{5}{2}.$$

$$\mathcal{R} = \emptyset.$$

2 Kompleksna števila

Poleg kartežičnega zapisa kompleksnega števila $z = x+iy$ nam pri računanju s kompleksnimi števili pride prav tudi polarni zapis kompleksnega števila

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\,,$$

kjer je

$$|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

in

$$\phi = \arg z$$

kot med pozitivnim poltrakom osi x in daljico od izhodišča do točke z, merjen bodisi v pozitivni smeri (t. j. nasprotni smeri ure), bodisi v negativni smeri (t. j. v smeri ure). Kot ϕ zadošča enačbama

$$\cos\phi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\phi = \frac{y}{|z|}.$$

Slednji enačbi sta ekvivalenti enačbi

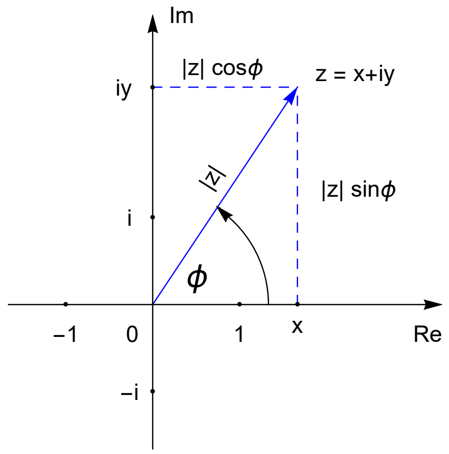
$$\tan\phi = \frac{y}{x}.$$

Velja

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} + k\pi,$$

za ustrezna števila $k \in \mathbb{Z}$.

Opomba: Vrednost $\arctan\frac{y}{x}$ leži vedno na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Torej število k, izberemo tako, da je ϕ res kot med pozitivnim poltrakom osi x in daljico od izhodišča do točke z. Takih števil k je več, ponavadi izberemo najmajše število k tako, da ϕ, merjen v pozitivni smeri (t. j. v nasprotni smeri ure) leži na intervalu $[0, 2\pi)$.



Naj bo
$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\,,$$
S pomočjo de Moivrove formule lahko izračunamo potence kompleksnega števila z. Velja
$$z^n = |z|(\cos n\phi + i\sin n\phi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Prav tako lahko s pomočjo de Moivrove formule izračunamo kvocient dveh kompleksnih števil. Naj bo
$$w = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)\,,$$
potem je
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\phi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi-\psi)\right).$$

1. Reši enačbo z realnimi koeficienti v množici kompleksnih števil.

   (a)
   $$x^2 + 9 = 0$$
   (b)
   $$x^2 - x + 4 = 0$$

   Rešitev:

   (a)
   $$x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\mathrm{i}3,$$
   (b) Diskriminanta $D = (-1)^2 - 4\cdot 4 < 0$, kar pomeni, da enačba nima realnih ničel. Ničli sta
   $$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}.$$

2. Dani sta kompleksni števili $z = 1 + \mathrm{i}$, $w = 3 - 4\mathrm{i}$.

   (a) Določi $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(\frac{w}{z})$ in $\mathrm{Im}(\frac{w}{z})$ in izračunaj $|w|$.

   (b) Izračunaj vrednost izraza $z\bar{w} + |w| + \frac{w}{z}$.

   Rešitev:

(a)

$$\bar{z} = 1 + \mathrm{i}.$$

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2} \frac{(3-4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} =$$

$$= \frac{-1-\mathrm{i}7}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\mathrm{i}.$$

(b) $\mathrm{Re}(\frac{w}{z}) = -\frac{1}{2}$. $\mathrm{Im}(\frac{w}{z}) = -\frac{7}{2}$.

$$|w| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

(c)

$$z\bar{w} + |w| + \frac{w}{z} = (1+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i}) + 5 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \frac{7}{2} + \mathrm{i}\frac{7}{2}.$$

3. Poišči množico kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$z + \bar{z} = 2.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 2$$

$$x = 1.$$

Torej

$$z = 1 + \mathrm{y}, \quad \mathrm{y} \in \mathbb{R}.$$

4. Poišči množico kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$|z| = 1 + z.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x + \mathrm{i}y,$$

enačimo realni in imaginarni del leve in desne strani in dobimo naslednji dve enačbi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x$$

$$0 = y.$$

Vstavimo $y = 0$ v prvo enačbo in dobimo

$$\sqrt{x^2} = 1 + x.$$

Upoštevamo $\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$ in dobimo

$$|x| = 1 + x.$$

Poiščimo rešitve te enačbe.
Naj bo $x \geq 0$. Tedaj

$$|x| = 1 + x$$
$$x = 1 + x,$$

ta enačba nima rešitve.
Naj bo $x < 0$. Tedaj

$$|x| = 1 + x.$$
$$-x = 1 + x$$
$$x = -\frac{1}{2}.$$

Torej edino kompleksno števil, ki reši enačbo je

$$z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}0 = -\frac{1}{2}.$$

5. Poišči množico kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$\mathrm{Imz} = |\mathrm{z} - \mathrm{i}|.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Tedaj $z - \mathrm{i} = x + \mathrm{i}(y - 1)$. Dobimo

$$y = \sqrt{x^2 + (y-1)^2},$$

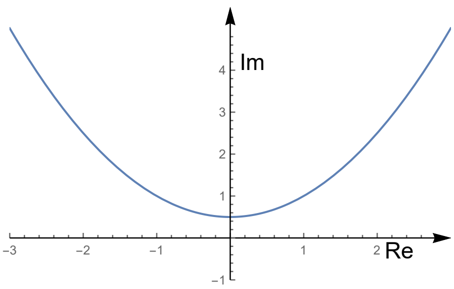
od koder sledi $y \geq 0$. Enačbo kvadriramo in dobimo

$$y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$0 = x^2 - 2y + 1$$
$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Množica rešitev je

$$\mathcal{R} = \{z \in \{\mathbb{C}; \mathrm{Im(z)} = |\mathrm{z} - \mathrm{i}|\} = \left\{ \left(\mathrm{x}, \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{R}$ je graf funkcije $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, torej, parabola.



6. (a) Dano je kompleksno število

$$w = \frac{4+2i}{-3+i}.$$

Določi $\mathrm{Re}(w)$ in $\mathrm{Im}(w)$ ter število w zapiši v polarni obliki.

(b) Poišči množico kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$z^2 + \mathrm{Re}(z) = \bar{z}.$$

Rešitev:

(a)

$$w = \frac{4+2i}{-3+i} = \frac{(4+2i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-12-4i-6i-2i^2}{9+1} = \frac{-12+2-10i}{10} = -1-i.$$

$$\mathrm{Re}\frac{4+2i}{-3+i} = -1,$$

$$\mathrm{Im}\frac{4+2i}{-3+i} = -1.$$

$$|w| = \sqrt{2},$$

$$\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4},$$

Ker se število w nahaja v tretjem kvadrantu, $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ in

$$w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

(b) Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x^2 + i2xy - y^2 + x = x - iy$$

Enačimo realna dela na levi in desni strani in dobimo

$$x^2 - y^2 + x = x,$$

$$2xy = -y$$

Iz druge enačbe $y(2x+1) = 0$ sledi $y = 0$ ali $x = -\frac{1}{2}$. Če $y = 0$, iz prve enačbe sledi $x = 0$, če pa $x = -\frac{1}{2}$, iz prve enačbe sledi $y^2 = \frac{1}{4}$ od koder dobimo $y = \pm\frac{1}{2}$. Torej

$$\mathcal{R} = \left\{(0,0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

7. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$z^2 + \mathrm{Im}(z) = -\bar{z} + 1.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + y = -(x - \mathrm{i}y) + 1$$

$$x^2 - y^2 + y + \mathrm{i}2xy = -x + 1 + \mathrm{i}y,$$

enačimo realni in imaginarni del na levi in desni strani in dobimo naslednji enačbi

$$x^2 - y^2 + y = -x + 1$$

in

$$2xy = y.$$

Iz druge enačbe $y(2x-1) = 0$ sledi $y = 0$ ali $x = \frac{1}{2}$. Če $y = 0$, iz prve enačbe sledi enačba

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2},$$

od koder sledi, da sta rešitvi

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i}0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i}0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Če pa $x = \frac{1}{2}$, iz prve enačbe sledi

$$\frac{1}{4} - y^2 + y = -\frac{1}{2} + 1$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$
$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$y = \frac{1}{2}$$

in rešitev je $z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$. Torej množica vseh rešitev je

$$\mathcal{R} = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} \right\}.$$

8. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$z^2 + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = -\bar{z} + 1.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + \mathrm{i}y = -(x - \mathrm{i}y) + 1$$

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + \mathrm{i}y = -x + \mathrm{i}y + 1,$$

enačimo realni in imaginarni del na levi in desni strani in dobimo naslednji enačbi

$$x^2 - y^2 = -x + 1$$

in

$$2xy = 0.$$

Iz druge enacbe $y(2x + 1) = 0$ sledi $y = 0$ ali $x = 0$. Če $x = 0$ iz prve enačbe sledi enačba $y^2 = -1$, ki nima rešitve. Če $y = 0$ iz prve enačbe sledi enačba

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2},$$

od koder sledi, da sta rešitvi začetne enačbe

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i}0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i}0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

9. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$z^2 + i\mathrm{Re}(z) = |z|^2.$$

Rešitev: Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + \mathrm{i}x = x^2 + y^2$$

$$-y^2 + 2\mathrm{i}xy = y^2$$

$$\mathrm{i}x\,(2y+1) = 2y^2,$$

od koder sledita enačbi

$$2y^2 = 0$$

in

$$x\,(2y+1) = 0.$$

Iz prve enačbe sledi $y = 0$, iz druge enačbe od tod sledi $x = 0$.

$$\mathcal{R} = \{(0,0)\}.$$

10. Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$2|z|^2 - z\bar{z} - |z-i|^2 = \bar{z}.$$

Rešitev: Če upoštevamo $|z|^2 = z\bar{z}$, lahko ena enačbo poenostavimo in dobimo

$$|z|^2 - |z-i|^2 = \bar{z}.$$

Pišimo $z = x + iy$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$x^2 + y^2 - (x^2 + (y-1)^2 = x - \mathrm{i}y$$

$$x^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 2y - 1 = x - \mathrm{i}y$$

$$2y - 1 = x - \mathrm{i}y,$$

od koder sledita enačbi

$$2y - 1 = x$$

$$-y = 0.$$

Od koder sledi $y = 0$ in $x = -1$. Torej $z = -1 + \mathrm{i}0 = -1$ je edina rešitev začetne enačbe.

11. Zapiši v polarni obliki število

(a) $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$,

(a) $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$,

(c) $z = -18$,

(d) $z = 3$.

Rešitev:

(a)

$$z = -\sqrt{3} + \mathrm{i},$$
$$|z| = \sqrt{3+1} = 2,$$

$\phi = \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ za ustrezna števila $k \in \mathbb{Z}$. Glede na lego točke z je lahko je npr. $k = 1$, $k = -1$. Če izberemo $k = 1$, je $\phi = \frac{5\pi}{6}$, za $k = -1$, pa je $\phi = -\frac{7\pi}{6}$. Torej

$$z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{5\pi}{6}\right)$$

oziroma lahko tudi

$$z = 2\left(\cos \frac{-7\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{-7\pi}{6}\right).$$

(b)

$$z = -\sqrt{3} - \mathrm{i},$$

oziroma

$$z = \overline{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}.$$

torej lahko uporabimo točko (a). Torej je $|z| = 2$, $\phi = -\frac{5\pi}{6}$, oziroma lahko tudi $\phi = \frac{7\pi}{6}$.

$$z = 2\left(\cos \frac{-5\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{-5\pi}{6}\right)$$

oziroma lahko tudi

$$z = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{7\pi}{6}\right).$$

(c) $z = -18$, $|z| = 18$, $\phi = \pi$ in

$$z = 18(\cos \pi + \mathrm{i} \sin \pi).$$

Lahko vzamemo tudi $\phi = -\pi$.

(d) $z = 3$. $|z| = 3$, $\phi = 0$ in

$$z = 18(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0).$$

Lahko vzamemo tudi $\phi = 2\pi$.

12. Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednja kompleksna števila.

(a) $z = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{48}$,

(b) $z = \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{16}}$,

(c) $z = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$.

Rešitev:

(a) Pišimo $w = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$. Zapišimo w v polarni obliki, to je, $w = |w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$. Sledi $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{48} = 2^{48}\left(\cos\frac{48\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{48\pi}{3}\right) = 2^{48}.$$

(b) Pišimo $w = (1 + \mathrm{i})$. Zapišimo w v polarni obliki, to je, $w = |w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$. Sledi $|w| = \sqrt{2}$ in $\phi = \frac{\pi}{4}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$\begin{aligned} z = w^{-16} &= (\sqrt{2})^{-16}\left(\cos\frac{-16\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-16\pi}{4}\right) \\ &= 2^{-8}\left(\cos(-4\pi) + \mathrm{i}\sin(-4\pi)\right) = 2^{-8}. \end{aligned}$$

(c) Pišimo $w = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$. Zapišimo w v polarni obliki, to je, $w = |w|(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$. Sledi $|w| = \sqrt{2}$ in $\phi = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.
(Opomba: Lahko bi vzeli tudi $\phi = -\arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$.) Po de Moivrovi formuli sledi

$$\begin{aligned} z &= (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{10} \\ &= 2^{10}\left(\cos\frac{10\cdot 5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{10\cdot 5\pi}{3}\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos\left(\frac{48\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{48\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

13. Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednje kompleksno število

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{(1 - \mathrm{i})^{20}}.$$

Rešitev: Pišimo

$$w_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$w_2 = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Po de Moivrovi formuli sledi

$$\begin{aligned} w_2^{20} &= (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\frac{20\cdot 7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{20\cdot 7\pi}{4}\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos 35\pi + \mathrm{i}\sin 35\pi\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos(17\cdot 2\pi + \pi) + \mathrm{i}\sin(17\cdot 2\pi + \pi)\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2^{10}. \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} z &= \frac{w_1}{w_2^{20}} = \frac{2}{2^{10}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right)\right) \\ &= 2^{-9}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{-9}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{-10}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

14. Poišči množico $\mathcal{R}$ kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$z^3 = -1 - \mathrm{i}$$

in skiciraj množico rešitev.

Rešitev:

Pišimo

$$-1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi),$$

od koder sledi

$$|z|^3 = \sqrt{2}$$

in

$$3\phi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\phi = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rešitve so

$$z_k = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

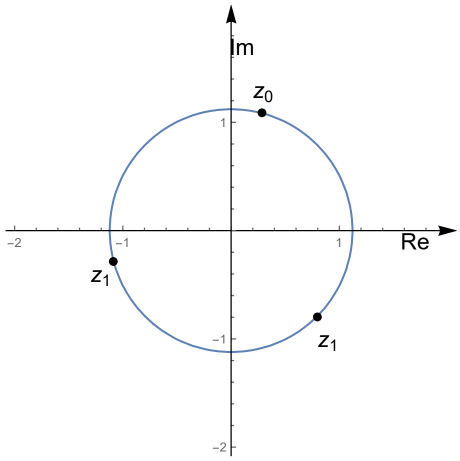
pri čemer niso vse rešitve med seboj različne. Vse različne rešitve so

$$z_k, \quad k = 0, 1, 2.$$

Zapišimo ta števila

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ z_1 &= 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right), \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Množica rešitev leži na krožnici s polmerom $2^{\frac{1}{6}}$.



15. Poišči množico $\mathcal{R}$ kompleksnih števil z, ki rešijo enačbo

$$z^4 = -16$$

in skiciraj množico rešitev.

Rešitev: Pišimo

$$-16 = 16\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right),$$

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)\,,$$

od koder sledi

$$|z|^4 = 16$$

in

$$4\phi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\phi = \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rešitve so

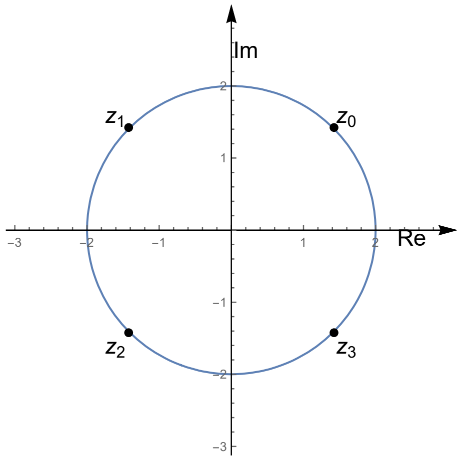
$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

pri čemer niso vse rešitve med seboj različne. Vse različne rešitve so

$$z_k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Eksplicitno so ta števila

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$



3 Zaporedja

Naj bosta a_n in b_n konvergentni zaporedji. Pri računanju limit zaporedij lahko uporabljamo osnovna računska pravila.

(1)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n),$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \lim_{n\to\infty}(b_n),$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)},$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty}(a_n).$$

(4) Naj bo $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem velja
$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p, \quad p > 0.$$
(npr. za $p = \frac{1}{2}$, velja $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a}_n = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.)

(5)
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right),$$
kjer je f zvezna funkcija. Ta lastnost pove, da je limita vrednosti zvezne funkcije na nekem zaporedju enaka vrednosti funkcije v limiti

zaporedja. Pri računanju v praksi to pomeni, da lahko zamenjamo vrstni red limite in funkcije. Iz točke (5) sledi točka (4), če vzamemo $f(x) = x^p$, kjer je $x, p > 0$.

Pri računanju limit uporabljamo znane limite:

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ za vsak $|q| < 1$.

(3) $\lim_{n\to\infty} n^s = 0$ za vsak $s > 0$.

1. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

   (a) $a_n = \frac{2n^2+n+1}{(n+2)^2}$,

   (b) $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n+7}\right)^5$.

   Rešitev:

   (a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{(n+2)^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} \\ &= \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}} \\ &= \frac{2+0+0}{1+0+0} = 2.\end{aligned}$$

   (b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+7}\right)^5 = \left(\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{7}{n}}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

2. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom $a_n = \frac{n^2-1}{n+5}$.

   Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \infty.$$

3. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom: $a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$.

   Rešitev:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n^2+1}-n^2\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\sqrt{n^2+1}-n^2\right)\left(n\sqrt{n^2+1}+n^2\right)}{n\sqrt{n^2+1}+n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2(n^2+1)-n^4}{n\sqrt{n^2+1}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\sqrt{n^2+1}+n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pri izračunu smo upoštevali, da velja $\sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$.

4. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom:

   (a) $a_n = n^3 + n^2$.

   (b) $a_n = n^3 - n^2$.

   Rešitev:

   (a) Velja
   $$\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$
   Od tod sledi, da tudi vsota $a_n = n^3 + n^2$ narašča proti ∞ in je
   $$\lim_{n\to\infty}\left(n^3+n^2\right) = \infty.$$

   (b) Ker zaporedji n^3 in n^2 nista konvergentvni
   $$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-n^2\right) \neq \lim_{n\to\infty} n^3 - \lim_{n\to\infty} n^2.$$
   Za izračun limite je potrebno izraz preurediti.
   $$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^2\left(n-1\right)\right) = \infty.$$
   Ko $n\to\infty$, obe zaporedji n^2 in $n-1$ naraščata proti ∞ in zato tudi produkt $n^2\left(n-1\right)$ narašča proti ∞.

5. Ugotovi ali je konvertgentno zaporedje podano s splošnim členom

(a) $a_n = \sin\frac{3}{n}$,

(b) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

Rešitev:

(a) (a)] Zaporedje $a_n = \sin\frac{3}{n}$ je konvergentno saj velja

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{3}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

(b)

$$a_{2k} = \sin k\pi = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_{1+4k} = \sin\left(\frac{(1+4k)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{3+4k} = \sin\left(\frac{(3+4k)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zaporedje ima tri stekališča 0, 1 in -1. Torej zaporedje ni konvergentno.

6. Podano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n-1}{n}.$$

(a) Zapiši prvih nekaj členov zaporedja in ugotovi ali je zaporedje monotono.

(b) Izračunaj limito zaporedja in določi $\inf a_n$ in $\sup a_n$.

Rešitev:

(a) $a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2}$, $a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3} = \frac{5}{3}$. Ker velja $a_1 \le a_2 \le a_3$, je zaporedje lahko samo naraščajoče. Preverimo, da velja $a_n \le a_{n+1}$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej preverimo ali velja neenakost $\frac{2n-1}{n} \le \frac{2(n+1)-1}{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To neenakost prevedimo v ekvivalentno enostavnejšo obliko

$$\frac{2n-1}{n} \le \frac{2(n+1)-1}{n+1}$$

$$(2n-1)(n+1) \le (2n+2-1)n$$

$$-1 \le 0,$$

torej je zaporedje naraščajoče.

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1} = 2.$$
Ker je zaporedje naraščajoče z limito 2, velja $\inf a_n = a_1 = 1$ in $\sup a_n = 2$.

7. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{n}{n^2+1}.$$
   (a) Zapiši prve štiri člene zaporedja in ugotovi ali je zaporedje monotono.
   (b) Izračunaj limito zaporedja.
   (c) Poišči natančno spodnjo mejo $\inf a_n$ in natančno zgornjo mejo $\sup a_n$.

Rešitev:

(a)
$$a_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10}, \quad a_4 = \frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{17}.$$
Ker velja $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$, je lahko zaporedje kvečjemu padajoče. Slednje moramo še dokazati. Dokažimo da je zaporedje naraščajoče, torej, da velja
$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
oziroma,
$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
To neenačbo preuredimo v enostavnejšo ekvivalentno obliko.
$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$
$$(n^2+1)(n+1) \leq n((n+1)^2+1)$$
$$n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n$$
$$1 \leq n^2+n,$$
Dobljena neenakost velja za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej velja $a_{n+1} \leq a_n$za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Ker je zapredje padajoče, je natančna zgornja meja $\sup a_n = a_1$. Ker velja $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je število 0 spodnja meja zaporedja. V primeru, ko je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je limita zaporedja natančna spodnja meja, torej $0 = \inf a_n$.

8. Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{-2n+5}{4n+6}.$$

(a) Zapiši prve štiri člene zaporedja in ugotovi ali je zaporedje monotono. Izračunaj limito zaporedja.

(b) Poišci natančno spodnjo mejo $\inf a_n$ in natančno zgornjo mejo $\sup a_n$.

Rešitev:

(a)

$$a_1 = \frac{3}{10}, \quad a_2 = \frac{1}{14}, \quad a_3 = \frac{3}{3^2+1} = \frac{-1}{18}, \quad a_4 = -\frac{3}{22}.$$

Ker velja $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, je lahko zaporedje kvečjemu padajoče. Slednje moramo še dokazati. Dokažimo da je zaporedje naraščajoče, torej, da velja

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

oziroma

$$\frac{-2(n+1)+5}{4(n+1)+6} \leq \frac{-2n+5}{4n+6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

To neenačbo preuredimo v enostavnejšo ekvivalentno obliko.

$$\frac{-2(n+1)+5}{4(n+1)+6} \leq \frac{-2n+5}{4n+6}$$

$$(-2n+3)(4n+6) \leq (-2n+5)(4n+10)$$

$$18 \leq 50.$$

Dobljena neenakost je pravilna. Torej res velja $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} = \frac{-2n+5}{4n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{5}{n}}{4+\frac{6}{n}} = -\frac{2}{4}.$$

Ker je zapredje padajoče, je natančna zgornja meja $\sup a_n = a_1 = \frac{3}{10}$. V primeru, ko je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je limita zaporedja natančna spodnja meja, torej $\inf a_n = -\frac{1}{2}$.

9. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{n+2}{2n-3}.$$

(a) Zapiši prve štiri člene zaporedja in ugotovi ali je zaporedje monotono.

(b) Izračunaj limito zaporedja.

(c) Ugotovi ali je pozaporedje $\{a_n, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2\}$ monotono in poišči natančno spornjo in zgornjo mejo tega podzaporedja.

(d) S pomočjo točke (c) poišci natančno spodnjo mejo $\inf a_n$ in natančno zgornjo mejo $\sup a_n$.

Rešitev:

(a)
$$a_1 = -3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{6}{5}.$$

Ker velja $a_1 < a_2$, je lahko zaporedje kvečjemu naraščajoče. Toda, ker je $a_2 > a_3$ zaporedje ni naračajoče. Torej zaporedje ni monotono.

(b)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n-3} = \frac{1}{2}.$$

(c) Če opazujemo člene zaporedja a_n od $n \geq 2$, vidimo, da velja $a_2 \geq a_3 \geq a_4$. Domnevamo, da je zaporedje $\{a_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ padajoče zaporedje. Poskusimo to še dokazat. Dokažimo da da velja
$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

oziroma
$$\frac{n+1+2}{2(n+1)-3} \leq \frac{n+2}{2n-3}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Naj bo $n \geq 2$. To neenačbo preuredimo v enostavnejčo ekvivalentno obliko.

$$\frac{n+1+2}{2(n+1)-3} \leq \frac{n+2}{2n-3},$$

$$\frac{n+3}{2n-1} \leq \frac{n+2}{2n-3} / \cdot (2n-3)(2n-1)$$

Pri množenju z izrazom $(2n-3)(2n-1)$ se neenakost ohrani, saj je $(2n-3)(2n-1) > 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{3}{2}$ in neenakost dokazujemo ob pogoju $n \geq 2$.

$$(n+3)(2n-3) \leq (n+2)(2n-1)$$

$$2n^2 - 3n + 6n - 9 \leq 2n^2 - n + 4n - 2$$

$$-9 \leq -2.$$

Slednja enakost je pravilna, torej res velja $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ker je podzaporedje $\{a_n, n \geq 2\}$ padajoče, velja $\sup\{a_n, n \geq 2\} = a_2 = 4$. Nadalje, ker je podzaporedje $\{a_n, n \geq 2\}$ padajoče z limito $\frac{1}{2}$, velja $\inf\{a_n, n \geq 2\} = \frac{1}{2}$.

(d) Ker po točki (c) velja $\inf\{a_n, n \geq 2\} = \frac{1}{2}$ in je $a_1 < \frac{1}{2}$, sledi $\inf a_n = a_1 = -3$. Ker je $\sup\{a_n, n \geq 2\} = 4$ in $a_1 = -3$ sledi $\sup a_n = 4$.

10. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4.$$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^4 = 1^4 = 1.$$

11. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n+4}.$$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n+4} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4.$$

Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^4=1^4=1.$$

in

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{6\frac{n}{2}}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{6m}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^6=e^6,$$

kjer smo vpeljali $m=\frac{n}{2}$. Torej

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n+4}=e^6\cdot 1=e^6.$$

12. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n}.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-2}{n+2}\right)^{3n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{3n}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-6+6m}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-6}\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{6m}\\
&= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)^{-6}\left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^6=1^{-6}\cdot\left(e^{-1}\right)^6=e^{-6}.
\end{aligned}$$

Vpeljali smo $m=\frac{n+2}{2}$.

13. Izračunaj limito zaporedja

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Rešitev:

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}1^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Vpeljali smo $m=2n+1$.

14. Dano je zaporedje

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zapiši prve tri člene zaporedja in pokaži, da je $a_n \geq -3$, za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(b) Ugotovi ali je zaporedje monotono.

(c) Ali je zaporedje konvergentno? V primeru pritrdilnega odgvora, izračunaj limito.

Rešitev: Zaporedje a_n je podano rekurzivno. Običajno ne moremo direktno izraziti n-ti člen z neko formulo.

(a) $a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{a_1}{3} - 2 = -2, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$.
Pokažimo z indukcijo, da velja $a_n \geq -3$, za vsak $n \in \mathbb{N}$.
1. korak: Pokažimo za $n = 1$.

$$a_1 = 0 \geq -3.$$

2. korak: Denimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \geq -3.$$

Dokažimo, da velja tudi neenakost

$$a_{n+1} \geq -3.$$

Zapišimo željeno neenakost in jo poenostavimo v ekvivalentno obliko.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2 \geq -3$$
$$a_n - 6 \geq -9,$$
$$a_n \geq -3,$$

kar pa res velja po indukcijski predpostavki.

(b) Ker velja $a_2 < a_1$, je lahko zaporedja kvečjemo padajoče, kar pa je potrebno dokazati. Pokažimo, da je zaporedje padajoče, to je, velja

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. način: Zapišimo

$$a_{n+1} \leq a_n,$$

$$\frac{a_n}{3} - 2 \leq a_n / \cdot 3$$
$$a_n - 6 \leq 3a_n$$
$$a_n \geq -3,$$

kar pa velja po točki (a). Torej res velja $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. način: Neenakost $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, dokažimo z indukcijo.
1. korak: Naj bo $n = 1$. Velja $a_1 = 0 > a_2 = -2$.
2. korak: Naj velja $a_{n+1} \leq a_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da velja tudi

$$a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Upoštevamo rekurzivno formulo

$$\frac{a_{n+1}}{3} - 2 \leq \frac{a_n}{3} - 2 \iff a_{n+1} \leq a_n,$$

kar velja po indukcijski predpostavki. Torej res velja ocena $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

(c) Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno, torej konvergentno. Torej obstaja limita $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Izračunajmo to limito L. Pri izračunu zapišimo rekurzivno formulo.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2 / \lim_{n\to\infty}$$

Ker $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, sledi $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ (saj, če $n \to \infty$, sledi $n + 1 \to \infty$.)

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{3} - 2$$
$$L = \frac{L}{3} - 2$$
$$2L = -6$$
$$L = -3.$$

Torej $\lim_{n\to\infty} a_n = -3$.

15. Zaporedje je podano rekurtzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(a_n^2 + a_n + 6\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokaži, da je to zaporedje naraščajoče, navzgor omejeno in izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Rešitev:

Pokažimo z indukcijo, da velja

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. korak: Naj bo $n = 1$. $a_1 = 1 < a_2 = \frac{1}{6}(1 + 1 + 6) = \frac{8}{6}$.
2. korak: Denimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Pokažimo, da velja

$$a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Zapišemo oba člena v neenakosti z rekurzivno formulo in dobimo, naslednjo neenkost, ki jo želimo dokazati.

$$a_n^2 + a_n + 6 \leq a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 6 \iff a_n^2 + a_n \leq a_{n+1}^2 + a_{n+1},$$

kar pa drži po indukcijski predpostavki.

Pokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno. Katero število bi lahko bilo zgornja meja? Če zapišemo prvih nekaj členov, lahko domnevamo, da je število 2 kandidat za zgornjo mejo. Dokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno s številom 2.
1. korak: $a_1 \leq 2$.
2. korak: Denimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \leq 2.$$

Pokažimo, da velja tudi

$$a_{n+1} \leq 2,$$

oziroma

$$\frac{1}{6}\left(a_n^2 + a_n + 6\right) \leq 2.$$

$$\frac{1}{6}\left(a_n^2 + a_n + 6\right) \leq 2 \iff a_n^2 + a_n + 6 \leq 12$$

kar pa velja, saj je po predpostavki $a_n \leq 2$. Izračunajmo še limito zapredja. Označimo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Potem je $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} a_n = L^2$. Velja

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(a_n^2 + a_n + 6\right) \ / \lim_{n\to\infty}$$

$$L = \frac{1}{6}\left(L^2 + L + 6\right)$$

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 3.$$

Ker je zaporedje navzgor omejeno z 2, noben člen zaporedja ni večji od 2 in zato limita ne more biti enaka 3, kar pomeni $L = 2$.Torej $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

16. Zaporedje je podano rekurzivno

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + 6\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokaži, da je to zaporedje monotono, omejeno in in izračunaj limito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Rešitev: Izračunajmo nekaj členov zaporedja $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5,5$, $a_5 = 5,75$. S pomočjo teh nekaj začetnih členov domnevamo, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno s 6. Dokažimo s pomočjo indukcije, da je zaporedje naraščajoče, to je, $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

1. korak: Naj bo $n = 1$. $a_1 = 4 < 6$.

2. korak: Denimo, da za nek n velja $a_n < a_{n+1}$ in dokažimo, da velja tudi

$$a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Izrazimo oba člena z rekurzivno formulo in dobimo

$$\frac{1}{2}\left(a_n + 6\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + 6\right) \iff a_n \leq a_{n+1}$$

kar pa velja po indukcijski predpostavki. Torej je zaporedje naraščajoče.

Dokažimo z indukcijo, da velja

$$a_n \leq 6, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. korak: Preverimo trditev za $n = 1$. $a_1 = 2 < 6$.

2. korak: Denimo, da velja za nek $a_n < 6$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo še, da velja

$$a_{n+1} < 6.$$

Zapišemo a_{n+1} z rekurzivno formulo in dobimo

$$\frac{1}{2}(a_n + 6) \leq 6 \iff a_n + 6 \leq 12 \iff a_n \leq 6$$

kar pa velja po indukcijski predpostavki. Torej velja $a_n \leq 6, \quad n \in \mathbb{N}$ in je zaporedje navzgor omejeno. Ker je zaporedje naraščajoče, je tudi navzdol omejeno. Torej zaporedje je omejeno. Vsako naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno in limita je natančna zgornja meja. Zgornja meja je število 6, ne vemo, pa če je 6 tudi natančna zgornja meja. Izračunajmo limito. Označimo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ in izračunajmo L.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + 6) \ / \lim_{n\to\infty} \\ L &= \frac{1}{2}(L+6) \\ L &= 6. \end{aligned}$$

Sledi $\sup a_n = 6$. $\inf a_n = a_1 = 2$.

17. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^4 + 3n^3 + 1}.$$

Rešitev:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^4 + 3n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^4}}.$$

Limita ne obstaja.

18. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 - (-1)^n}.$$

Rešitev: Delimo z n^2 in dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 - (-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}}{1 - \frac{(-1)^n}{n^2}} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Upoštevali smo, da velja $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$, kajti, če velja $\lim_{n\to\infty}|a_n|= 0$, sledi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

$$a_n = \frac{1+5^{n-3}}{2\cdot 5^n + 5^{n-3}}.$$

Rešitev: Števec in imenovalec delimo s številom, ki najhitreje narašča, to je, s številom 5^n.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1+5^{n-3}}{2\cdot 5^n + 5^{n-3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5^n} + \frac{5^{n-3}}{5^n}}{\frac{2\cdot 5^n}{5^n} + \frac{5^{n-3}}{5^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5^n} + 5^{-3}}{2+5^{-3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n + 5^{-3}}{2+5^{-3}} \\
&= \frac{0+5^{-3}}{2+5^{-3}} \\
&= \frac{5^{-3}}{2+5^{-3}}.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, saj velja $\frac{1}{5} < 1$.

20. Poišči stekališča zaporedje podanega s splošnim členom

(a) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$,

(b) $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$,

(c) $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Rešitev: Pri točkah (a) in (c) bomo uporabili, da velja: če je $\lim_{n\to\infty}|a_n|= 0$, od tod sledi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(a) Ker je $\lim_{n\to\infty}|(-1)^n\frac{1}{n}|= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, velja $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = 0$. Torej ima zaporedje eno samo stekališče 0, ki je enako limiti zaporedja.

(b) Zaporedje ima dve stekališči 1 in -1, kajti podzaporedje členov s sodimi indeksi ima limito 1 in pozdaporedje z lihimi indeksi ima limito -1.

(c) Ker je $\lim_{n\to\infty}|(-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$, velja $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Torej ima zaporedje eno samo stekališče 0, ki je enako limiti zaporedja.

21. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

(a) $a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$,

(b) $a_n = \frac{n^2+3n+6}{n^2+\sin n}$.

Rešitev:

(a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \,/\frac{1}{n^2}$$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ker velja $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ in $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ od tod sledi $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2} = 0$.

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+6}{n^2+\sin n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{\sin n}{n^2}} = 1.$$

Upoštevali smo, da po točki (a) velja $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^2} = 0$.

neskončne vrste

Naj bo dana vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ in naj bo $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ n-ta delna vsota. Če obstaja limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (to je, je limita s realno število), potem vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ imenujemo konvergentvno in pišemo $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Če vrsta konvergira, velja $\lim a_n = 0$.

1. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$.

   Rešitev: $a_n = \frac{n}{3n+1}$. Velja

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

   Ker $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ ne konvergira.

2. Ugotovi ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$.

   Rešitev:

   $a_n = \sqrt[n]{3}$. Velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1.$$

   Ker $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, vrsta ne konvergira.

3. Ugotovi ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 4^{1-n}.$$

   Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$$

   konvergira, če je $|q| < 1$ in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

   Če je $|q| \geq 1$, geometrijska vrsta divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 4^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3^2)^n 4 \cdot 4^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3^2)^n 4 \cdot 4^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{9}{4}\right)^n.$$

Torej $a = 4$ in $q = \frac{9}{4} > 1$ in vrsta divergira.

Primerjalni kriterij:

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse $n \geq n_0$ za nek $n_0 \in \mathbb{N}$. Velja:

- Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.
- Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.

V nalogah bomo vrste primerjali z vrstami oblike

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ in upoštevali, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$. Za $\alpha = 1$. V primeru $\alpha = 1$ dobimo znano divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ki jo imenujemo harmonična vrsta.
- geometrijsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, ki konvergira za q, za katere velja $|q| < 1$.

4. S pomočjo primerjalnega kriterija ugotovi ali konvergirajo vrste

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{n^4+2n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^5-n^3}$.

Rešitev:

(a) Uprabimo oceno
$$\frac{1}{n-\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$
Ker harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ divergira.

(b) Uprabimo oceno
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n}$ divergira, po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergira.

(c) Ocenimo

$$\frac{4n^2+1}{n^4+2n} \le \frac{4n^2+1}{n^4} \le \frac{4n^2+n^2}{n^4} = \frac{5n^2}{n^4} = \frac{5}{n^2}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2}$ konvergira, konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{n^4+2n}$. Ocenimo lahko na več načinov npr. tudi na naslednji način

$$\frac{4n^2+1}{n^4+2n} \le \frac{4n^2+1}{n^4} \le \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4}.$$

Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergirata, zato konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{n^4+2n}$.

(d) Ocenimo

$$\frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergira, po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ divergira.

(e) Ocenimo

$$\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergira, po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergira.

(f) Ocenimo

$$\frac{n^3+1}{n^5-n^3} \le \frac{n^3+n^3}{n^5-n^3} = \frac{2n^3}{n^3(n^2-1)} = \frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{(n-1)^2}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2}$ konvergira, konvergira tudi vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^5-n^3}$. Pri izračunu smo vpeljali $m = n - 1$.

5. Z uporabo korenskega kriterija ugotovi ali konvergira vrsta

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

Rešitev:

Korenski kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty}$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

- Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
- Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
- Če je $L = 1$, ne vemo, je vrsta konvergentna ali divergentna. Da ugotovimo, ali vrsta konvergira ali ne, je potrebno uporabit drug kriterij.

(a) $a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$. Torej izračunajmo naslednjo limito

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right) = 1.$$

Torej korenski kriterij ne da odgovora o konvecrgenci. Toda

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0.$$

Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$ ne konvergira.

(b) $a_n = \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n(n+1)}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-4}{n+1}\right)^{(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+1}\right)^{(n+1)} \\ &= e^{-4} < 1.\end{aligned}$$

Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ konvergira.

6. Ob uporabi kvocientnega kriterija ugotovi ali konvergira vrsta

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Rešitev:

Kvocientni kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
- Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
- Če je $L = 1$, ne vemo, je vrsta konvergentna ali divergentna.

(a) $a_n = \frac{n}{9^n}$. Tedaj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)9^n}{9^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}\frac{1}{9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1}\frac{1}{9} = \frac{1}{9} < 1,$$

kar pomeni, da vrsta konvergira.

(b) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$. Tedaj

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1+1)(n^2+1)}{\left((n+1)^2+1\right)(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+n+2}{n^3+3n^2+4n+2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Torej korenski kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste. Uporabiti je potrebno drug kriterij. Ker velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

tudi korenski kriterij ne bi dal odgovora o konvergenci vrste. Uporabili bomo primerjalni kriterij. Ocenimo

$$\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{2}{n^2+n} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Ker harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, tudi vrsta divergira. (Opomba: Lahko bi tudi ocenili

$$\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1}$$

in ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ne konvergira, tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.)

(c) $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n 2 \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\
&= 2 \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-1} \\
&= 2 \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1} \\
&= 2e^{-1} < 1,
\end{aligned}$$

kar pomeni, da vrsta konvergira.

7. Ugotovi ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6^n}.$$

Ali vrsta konvergira absolutno?

Rešitev: Vrsta je alternirajoča. Uporabili bomo naslednje: Alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots, \quad (a_n > 0, n \in \mathbb{N}),$$

konvergira, če velja

$$a_{n+1} \le a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Torej $a_n = \frac{n}{6^n}$. Preverimo, da velja

$$a_{n+1} \le a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preveriti je potrebno naslednjo neenakost

$$\frac{(n+1)^2}{6^{n+1}} \le \frac{n^2}{6^n}$$

$$6^n (n+1)^2 \le n^2 6^{n+1}$$

$$n^2 + 2n + +1 \leq 6n^2$$

$$0 \leq 5n^2 - 2n - 1,$$

ta neenakost je pravilna, ker $5x^2-2x-1 \geq 0$, za vsak $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{5}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{5}, \infty)$ in $n \in (\frac{1+\sqrt{3}}{5}, \infty)$, za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{5} \leq n,$$

zadnja neenakost je pravilna, ker je $n \in \mathbb{N}$. Ker velja tudi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{6^n} = 0,$$

vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{6^n}$$

konvergira. Preverimo še ali konvergira vrsta absolutno, torej ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n^2}{6^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6^n}.$$

Uporabimo kvocientni kriterij

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 6^n}{6^{n+1} n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} < 1,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6^n}$ absolutno konvergira.

4 Funkcije realne spremenljivke

1. Ugotovi ali so funkcije lihe, sode?

   (a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

   (b) $f(x) = 3x - x^3$,

   (c) $f(x) = x \sin(x^3)$,

   (d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$,

   (e) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$.

   (f) $f(x) = \frac{e^x}{x}$,

   (g) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

   Rešitev:

   (a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

   $$f(-x) = \frac{-x+2}{-x-2} = \frac{-(x-2)}{-(x+2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)}.$$

   $$-f(x) = -\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+2}{-x+2},$$

   Torej $f(-x) =\neq -f(x)$ in $f(-x) \neq f(x)$. Funkcija $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ni ne liha in ne soda.

   (b) $f(x) = 3x - x^3$

   $$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -(3x - x^3) = -f(x).$$

   Torej $f(x) = 3x - x^3$ je liha funkcija.

   (c) $f(x) = x \sin x^3$

   $$\begin{aligned} f(-x) &= -x \sin(-x)^3 \\ &= (-x) \sin(-x^3) = x \sin x^3 = f(x), \end{aligned}$$

   kar pomeni, da je $f(x) = x \sin(x^3)$ soda funkcija.

   (d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

   $$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

(e) $f(x) = \frac{\sin x+1}{\cos x}$.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)+1}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x + 1}{\cos x}.$$

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x+1}{\cos x}$ ni ne liha ne soda.

(f) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x}.$$

Funkcija $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ni ne liha ne soda.

(g) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

$$f(-x) = -x\sqrt{2-(-x)^2} = -x\sqrt{2-x^2}.$$

Funkcija $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ je liha.

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}.$$

Določi definicijsko območje in ugotovi ali je morebiti funkcija f soda oz. liha.

Rešitev: $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - x \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^3-(-x)} = -\frac{x^2+1}{x^3-x} = -f(x).$$

3. Dana je funkcija

$$f : (0,1) \to \mathbb{R},$$

s predpisom

$$f(x) = 4x + 1.$$

Določi zalogo vrednosti funkcije f. Ali je $f : (0,1) \to Z_f$ bijektivna in v primeru pozitivnega odgovora poišči inverzno funkcijo f^{-1}.

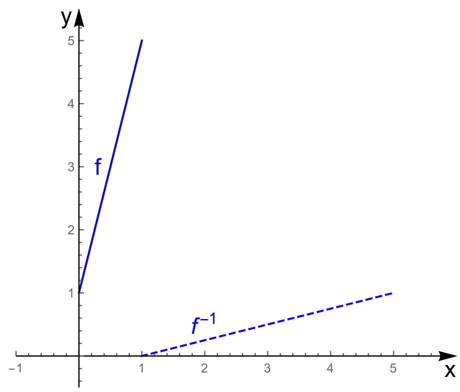
Rešitev: Funkcija f je strogo naraščajoča, $f(0) = 1$ in $f(1) = 5$, od koder sledi $Z_f = (1,5)$. Funkcija $f : (0,1) \to (1,5)$ je bijektivna, ker je strogo naraščajoča. Torej obstaja inverzna funkcija $f^{-1} : (1,5) \to (0,1)$. Poiščimo predpis za inverzno funkcijo f^{-1}.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad y \in (1,5),\ x \in (0,1).$$

$$y = 4x + 1$$
$$x = \frac{y-1}{4} = f^{-1}(y).$$

Zamenjajmo še spremenljivki x in y in dobimo

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}, \quad x \in (1, 5)$$



.

4. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{4x-5}{x-3}.$$

Določi definicijsko območje funkcije f in zalogo vrednosti funkcije f. Ugotovi ali je f injektivna in v primeru pozitivnega odgovora določi inverzno funkcijo.

Rešitev:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Pokažimo, da je f injektivna. Naj bo $x_1, x_2 \in D_f$ in naj velja $f(x_1) = f(x_2)$. Pokažimo, da od sledi $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{4x_1-5}{x_1-3} = \frac{4x_2-5}{x_2-3} \iff$$
$$(x_2-3)(4x_1-5) = (x_1-3)(4x_2-5) \iff$$
$$4x_1x_2 - 12x_1 - 5x_2 + 15 = 4x_1x_2 - 12x_2 - 5x_1 + 15 \iff$$
$$-7x_1 = -7x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Torej f je injektivna, kar pomeni, da je $f : D_f \to \mathbb{R}$ bijektivna in obstaja inverzna funkcija $f^{-1} : Z_f \to D_f$. Poiščimo predpis za inverzno funkcijo

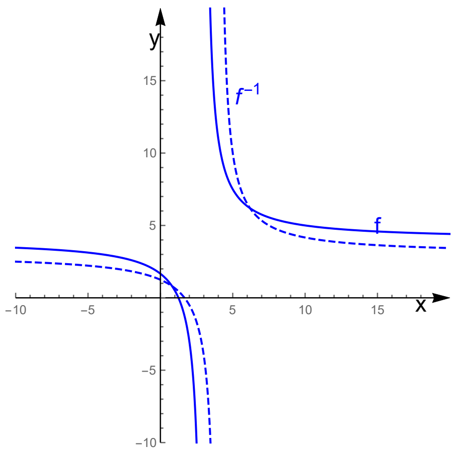
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad y \in Z_f,\ x \in D_f.$$

$$y = \frac{4x-5}{x-3}$$
$$y(x-3) = 4x-5$$
$$yx - 4x = 3y - 5$$
$$x = \frac{-5+3y}{y-4} = f^{-1}(y).$$

Zamenjajmo še spremenljivki x in y in dobimo

$$f^{-1}(x) = \frac{-5+3x}{x-4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

$D_{f^{-1}} = Z_f$ in $Z_{f^{-1}} = D_f$.



5. Dana je funkcija

$$f(x) = e^{\sin x}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Določi zalogo vrednosti funkcije f in poišči inverzno funkcijo.

Rešitev:

$Z_f = \left[e^{-1}, e\right]$. Poiščimo še inverzno funkcijo.

$$y = e^{\sin x}, \quad y \in \left[e^{-1}, e\right], x \in x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
$$y = e^{\sin x} \; /\ln$$
$$\ln y = \ln e^{\sin x} = \sin x$$
$$x = \arcsin(\ln y) = f^{-1}(y).$$

Zamenjajmo še spremenljivki x in y in dobimo

$$f^{-1}(x) = \arcsin(\ln x), \quad x \in \left[e^{-1}, e\right].$$

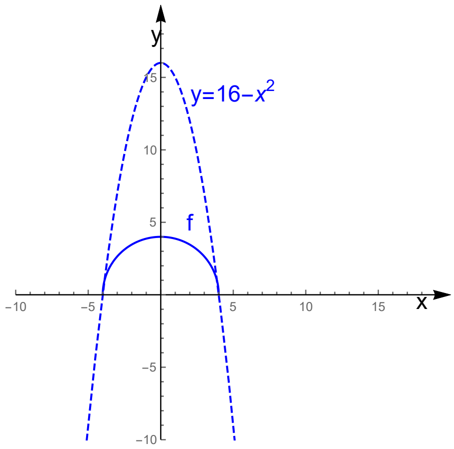
6. Dana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}.$$

Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f.

Rešitev:

$D_f = \{x, 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$. Kvadratna funkcija $y = 16 - x^2$ ima teme v točki $(0, 16)$. Torej je pravokotna projekcija grafa funkcije $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ na os y enaka intervalu $[0, 4]$, kar pomeni, da je $Z_f = [0, 4]$.



7. Poišči množico rešitev naslednjih enačb oziroma neenačb:

(a) $\ln(5 - 2x) = -3$.

(b) $e^{2x+3} - 7 = 0$.

(c) $e^{2-3x} > 4$.

Rešitev: Uporabili bomo enakosti

- $\ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$,
- $e^{\ln x} = x, \quad x > 0$.

(a) Funkcija $\ln(x-1)$ je definirana za$x$ za $x < \frac{5}{2}$, torej moramo reševat enačbo pri tem pogoju. $\mathcal{R} = \{x, \ln(5 - 2x) = -3,\ 5 - 2x > 0\} = \{x, \ln(5 - 2x) = -3,\ x < \frac{5}{2}\}$. Naj bo $x < \frac{5}{2}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \ln(5 - 2x) &= -3 \iff 5 - 2x = e^{-3} \\ &\iff 5 - e^{-3} = 2x \qquad (1) \\ &\iff x = \frac{5 - e^{-3}}{2}. \end{aligned}$$

$\mathcal{R} = \{\frac{5-e^{-3}}{2}\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{x, e^{2x+3} - 7 = 0\}$.

$$e^{2x+3} - 7 = 0 \iff 2x + 3 = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7 - 3}{2}.$$

$\mathcal{R} = \{\frac{\ln 7-3}{2}\}$.

(c) Pišimo $\mathcal{R} = \{x, e^{2-3x} > 4\}$. Uporabili bomo dejstvo, da je $\ln x$ naraščajoča funkcija, kar pomeni, če je $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ in $x_1 \le x_2$, velja $\ln x_1 \le \ln x_2$.

$$e^{2-3x} > 4 \ /\ln$$

$$2 - 3x > \ln 4$$

$$2 - \ln 4 > 3x$$

$$\frac{2 - \ln 4}{3} > x.$$

$$\mathcal{R} = \left(-\infty, \frac{2 - \ln 4}{3}\right).$$

8. Poišči množico rešitev naslednjih enačb oziroma neenačb:

(a) $\ln(x - 1) = 5$.

(b) $e^{1-5x} > 2$,

(c) $\ln(2x^2 - 1) > 3$.

Rešitev:

(a) Naj bo $\mathcal{R} = \{x; \mathbb{R}; \ln(x-1) = 5\}$. Funkcija $\ln(x-1)$ je definirana za $x > 1$, torej moramo reševat enačbo pri tem pogoju. Naj bo $x > 1$. Tedaj velja

$$\ln(x - 1) = 5 \iff x - 1 = e^5 \iff x = 1 + e^5.$$

Torej $\mathcal{R} = \{1 + e^5\}$.

(b) Naj bo $\mathcal{R} = \{x; \mathbb{R}; e^{1-5x} > 2\}$. Upoštevajmo, da je $\ln x$ naraščajoča funkcija

$$e^{1-5x} > 2$$

$$1 - 5x > \ln 2$$

$$x < \frac{\ln 2}{5} - \frac{1}{5}.$$

$$\mathcal{R} = \left(-\infty, \frac{\ln 2}{5} - \frac{1}{5}\right).$$

(c) Naj bo $\mathcal{R} = \{x;\mathbb{R};\ \ln(2x^2-1) > 3\}$. Funkcija je $\ln(2x^2-1)$ je definirana za x, $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Torej neenačbo bomo reševali pri pogoju $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Uporabili bomo dejstvo, da je e^x naraščajoča funkcija, kar pomeni, če je $x_1,\ x_2 \in (0,\infty)$ in $x_1 \leq x_2$, velja $e^{x_1} \leq e^{x_2}$.

$$\begin{aligned} \ln(2x^2-1) > 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{\ln(2x^2-1)} > e^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x^2-1 > e^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x^2 > e^3-1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{e^3-1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{e^3-1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{e^3-1}{2}}, \infty\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{R} = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{e^3-1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{e^3-1}{2}}, \infty\right).$

9. Poišči definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij ter njihove inverzne funkcije in definicijsko območje in zalogo vrednosti inverznih funkcij.

   (a) $f(x) = \sqrt{3-e^{2x}}$,

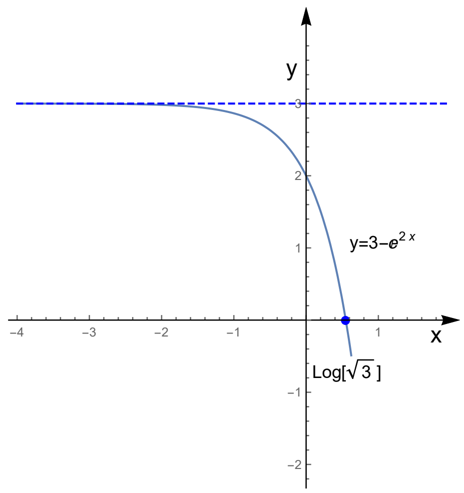
   (b) $f(x) = \ln(2+\ln x)$.

Rešitev:

(a) $f(x) = \sqrt{3-e^{2x}}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 3-e^{2x} \geq 0\} = \left(-\infty, \frac{\ln 3}{2}\right]$, kjer smo upoštevali, da velja

$$3-e^{2x} \geq 0 \iff \ln 3 \geq 2x \iff \frac{\ln 3}{2} \geq x.$$

Ker je funkcija e^{2x} naraščajoča in velja, $\lim_{x\to-\infty} = 0$, je funkcija $3-e^{2x}$ padajoča in velja $\lim_{x\to-\infty}(3-e^{2x}) = 3$. Torej $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{3}$. Ker je $f(x) = \sqrt{3-e^{2x}}$ padajoča, velja $Z_f = [0, \sqrt{3})$. Za nazornejšo predstavo si oglejmo še graf funkcije $y = 3-e^{2x}$. V našem primeru pride v poštev del grafa, ki leži v zgornji polravnini.



Naj bo $x \in D_f$ in $y \in Z_f$.

$$y = \sqrt{3 - e^{2x}}$$

$$y^2 = 3 - e^{2x}$$

$$2x = \ln(3 - y^2)$$

$$x = \frac{\ln(3 - y^2)}{2} = f^{-1}(y), \quad y \in \left[0, \sqrt{3}\right).$$

Zamenjamo spremenljivki x in y in dobimo

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(3 - x^2)}{2} = \ln\sqrt{3 - x^2}, \quad x \in [0, \sqrt{3})$$

in $D_{f^{-1}} = [0, \sqrt{3})$, $Z_{f^{-1}} = \left(-\infty, \ln\sqrt{3}\right]$.

(b) $f(x) = \ln(2 + \ln x)$. $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0, 2 + \ln x > 0\} = \left(e^{-2}, \infty\right)$, kjer smo uporabili

$$2 + \ln x > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > e^{-2}.$$

Če upoštevamo, da je $\ln x$ naraščajoča funkcija in $\lim_{x\to\infty} = \infty$ in $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, ugotovimo $Z_f = (-\infty, \infty)$. Poiščimo še inverzno funkcijo. Naj bo $x \in D_f$ in $y \in Z_f$ in

$$\begin{aligned} y = \ln(2 + \ln x) \quad &\iff \quad e^y = 2 + \ln x \\ &\iff \quad \ln x = e^y - 2 \\ &\iff \quad x = e^{e^y - 2} = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Zamenjamo spremenljivki x in y in dobimo

$$f^{-1}(x) = e^{e^x - 2}, \quad x \in Z_f = \mathbb{R}$$

ter $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

10. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Izračunaj limite

(a)

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

(b)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

(c)

$$\lim_{x \to 2} f(x).$$

Rešitev:

(a)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{u \to \infty} \frac{-u}{\sqrt{u^2 - 1}} = \lim_{u \to \infty} -\frac{u}{u\sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}} = -1.$$

(c)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

11. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \ln(x + 5).$$

Določi definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f ter ugotovi ali je f injektivna funkcija. Ali je $f : D_f \to Z_f$ bijektivna? V primeru pozitivnega odgovora, poišči inverzno funkcijo f^{-1} ter določi definicijsko območje in zalogo vrednosti inverzne funkcije.

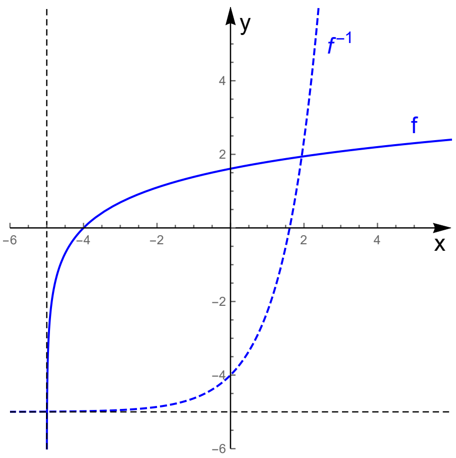
Rešitev: $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x+5 > 0\} = (-5, \infty)$ in $Z_f = \mathbb{R}$. Ker je $\ln x$ injektivna funkcija je tudi funkcija f injektivna, torej je $f : D_f \to Z_f$ bijektivna in obstaja inverzna funkcija $f^{-1}. : Z_f \to D_f$. Poiščimo inverzno funkcijo. Naj bosta $y \in Z_f$ in $x \in D_f$ in

$$y = \ln(x+5) \iff x = e^y - 5 = f^{-1}(y).$$

Zamnejamo spremenljivki x in y in dobimo

$$y = f^{-1}(x) = e^x - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$D_{f^{-1}} = Z_f = \mathbb{R}$ in $Z_{f^{-1}} = D_f = (-5, \infty)$.



12. Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{1}{3}\ln(2x+1) - 4.$$
Določi definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f ter ter poišsči inverzno funkcijo f^{-1}. Določi ničle funkcije f. Ugotovi ali je f injektivna funkcija ter poišsči inverzno funkcijo f^{-1}.

Rešitev:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; 2x+1 > 0\} = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ in $Z_f = \mathbb{R}$. Ker je $\ln x$ injektivna funkcija je tudi funkcija f injektivna. Določimo ničlo funkcije f.

$$f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\ln(2x+1)-4=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln(2x+1)=4\\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(2x+1)^{\frac{1}{3}}=4\\
&\Longleftrightarrow \quad (2x+1)^{\frac{1}{3}}=e^4\\
&\Longleftrightarrow \quad 2x+1=e^{12}\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{e^{12}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Poiščimo inverzno funkcijo. Naj bosta $y \in Z_f$ in $x \in D_f$ in

$$\begin{aligned}
y=\frac{1}{3}\ln(2x+1)-4 \quad &\Longleftrightarrow \quad y=\ln(2x+1)^{\frac{1}{3}}-4\\
&\Longleftrightarrow \quad e^{y+4}=e^{\ln(2x+1)^{\frac{1}{3}}}=(2x+1)^{\frac{1}{3}}\\
&\Longleftrightarrow \quad e^{3(y+4)}=2x+1\\
&\Longleftrightarrow \quad x=\frac{e^{3y+12}-1}{2}=f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

Zamnejamo spremenljivki x in y in dobimo

$$y=f^{-1}(x)=\frac{e^{3x+12}-1}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$D_{f^{-1}}=Z_f=\mathbb{R}$ in $Z_{f^{-1}}=D_f=\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

13. Določi definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f funkcije

$$g(x)=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}.$$

Rešitev:

$D_f=\{x \in \mathbb{R}; \frac{5x-x^2}{4}>0, \ln\frac{5x-x^2}{4}\geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\ln\frac{5x-x^2}{4}\geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{5x-x^2}{4}\geq 1\\
&\Longleftrightarrow \quad x^2-5x+4\leq 0\\
&\Longleftrightarrow \quad (x-1)(x-4)\leq 0\\
&\Longleftrightarrow \quad x\in[1,4].
\end{aligned}$$

Nadalje

$$\frac{5x-x^2}{4}>0 \Longleftrightarrow 5x-x^2>0 \Longleftrightarrow x(x-5)>0 \Longleftrightarrow x\in(0,5).$$

Torej

$$D_f=[1,4]\cap(0,5)=[1,4].$$

Kvadratna funkcija $\frac{5x-x^2}{4}$ ima teme v točki $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{16}\right)$ in ima ničli v točkah $x = 1$ in $x = 4$. Torej $Z_f = \left[\ln 1, \ln\left(\frac{25}{16}\right)\right]$.

14. Določi definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f funkcije

$$g(x) = \arcsin \frac{x-1}{2x}.$$

Rešitev: Funkcija $\frac{x-1}{2x}$ je definirana na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Velja

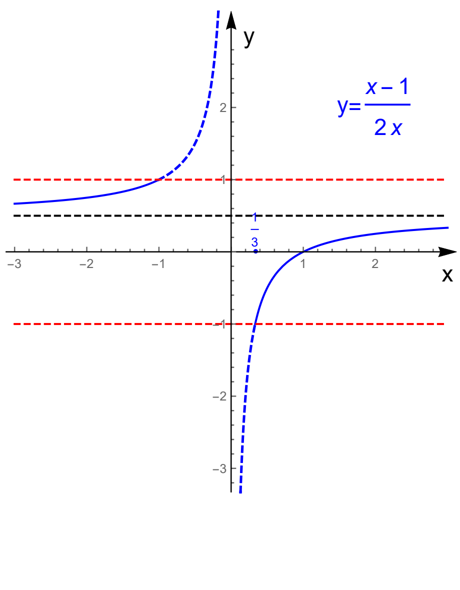
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Torej je premica $y = \frac{1}{2}$ asimptota funkcije $\frac{x-1}{2x}$, ko $x \to \pm\infty$. Od tod sledi, da $y = \frac{1}{2}$ ni vsebovana v zalogi vrednosti funkcije $\frac{x-1}{2x}$. Funkcija $\frac{x-1}{2x}$ narašča na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$. Funkicja $\frac{x-1}{2x}$ interval $(-\infty, 0)$ preslika bijektivno na interval $(\frac{1}{2}, \infty)$ in interval $(0, \infty)$ bijektvino na interval $(-\infty, \frac{1}{2})$. Funkcija $\arcsin x$ je definirana na $[-1, 1]$. Ugotoviti je potrebno za katere x ležijo funkcijske vrednosti funkcije $y = \frac{x-1}{2x}$ na intervalu $[-1, 1]$. Poiščimo tak x_1, da bo veljalo $\frac{x_1-1}{2x_1} = -1$ in tak x_2, da bo veljalo $\frac{x_2-1}{2x_2} = 1$.

$$\frac{x_1-1}{2x_1} = -1 \iff x_1 - 1 = 2x_1 \iff x_1 = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{x_2-1}{2x_2} = 1 \iff x_2 - 1 = 2x_2 \iff x_2 = -1.$$

Za nazornejšo predstavo si oglejmo še graf funkcije $y = \frac{x-1}{2x}$. Del grafa, ki leži med premicama $y = -1$, $y = 1$ je označen z neprekinjeno črto.



Torej funkcijske v vrednosti $\frac{x-1}{2x}$ ležijo na intervalu $[-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, če $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$. Torej $D_f = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ in $Z_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{\arcsin \frac{1}{2}\}$.

15. Izračunaj limite funkcij

(a) $\lim_{x\to 2}\left(3x^2 + 4x + 3\right)$,

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x-\cos x}$,

(c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$,

(d) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)$,

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$,

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 5x + 6} - 2x\right)$,

(g) $\lim_{x\to\infty} \arctan\left(x^4 - x^2\right)$.

Rešitev: Limite funkcij računamo podobno kot limite zaporedij. Velja

- Če je funkcija f zvezna v točki a, je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Če želimo izračunati $\lim_{x\to a} f(x)$ in funkcija f ni definirana v točki a, poskušamo predpis za funkcijo f preurediti, da dobimo predpis za funkcijo g, ki je definirana tudi v točki a in za x blizu a ($x \neq a$) velja $f(x) = g(x)$.
- Če velja $\lim_{x\to a}|f(x)|= 0$, od tod sledi $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(a)

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2 + 4x + 3\right) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = 23,$$

kjer smo upoštevali, da je polinom $3x^2 + 4x + 3$ zvezna funkcija v točki 2.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2 - \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x^2}}{1 - \frac{\cos x}{x^2}} = 1.$$

Upoštevali smo, da velja $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$. Namreč za vsak $x > 0$ velja

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \;/ \lim_{x\to\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} 0 \leq \lim_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$0 \leq \lim_{x\to\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq 0,$$

od koder sledi $\lim\limits_{x\to\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| = 0$ in od tod sledi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$.

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x+3)} \\
&= \frac{-1-1}{-1+3} = -1.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x^2} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1-x}{1-x^2} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1-x}{(1-x)(1+x)} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3+x}-2\right)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3+x-4}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{3+1}+2\right)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(f)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+2x\right)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+6-4x^2}{\sqrt{4x^2-5x+6}+2x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{4x^2-5x+6}+2x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+2}=\frac{-5}{3}.
\end{aligned}
$$

(g)

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(x^4-x^2\right)=\frac{\pi}{2},$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to\infty}\left(x^4-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2(x^2-1)\right)=\infty$.

16. Izračunaj limito $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$.

Rešitev:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{5}.$$

Pri izračunu smo uporabili naslednje

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1,$$

kjer smo vpeljali $u=3x$.

17. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

Rešitev:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin 3x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{2\sin 2x}{2x}}{1+\frac{3\sin 3x}{3x}}=\frac{-1}{4}.$$

18. Ugotovi ali je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-12}{x+3} & : \ x\neq -3\\ -5 & : \ x=-3\end{cases}$$

zvezna v točki $x=-3$.

Rešitev:

Funkcija f zvezna je v točki $x = -3$, če obstaja limita $\lim_{x\to-3} f(x)$ in velja $\lim_{x\to-3} f(x) = f(-3) = -5$. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{x^2 - x - 12}{x+3} = \lim_{x\to-3} \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to-3} (x-4) = -7.$$

Ker $\lim_{x\to-3} f(x) \neq f(-3)$, funkcija f ni zvezna v točki $x = -3$.

19. Ugotovi ali je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & : \quad x < 1 \\ 4 - x & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 1$.

Rešitev:

Funkcija f je zvezna v to vcki $x = 1$, če obstajata leva in desna limita v to vcki $x = 1$ in sta ti dve limiti enaki. Limiti sta

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (4 - x) = 3,$$

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} (1 + x^2) = 2.$$

Ker $\lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$, funkcija f ni zvezna v točki $x = 1$.

20. Določi število A tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & : \quad x \neq 0 \\ A & : \quad x = 0 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 0$.

Rešitev: Da bo f zvezna v točki $x = 0$ mora veljati $\lim_{x\to0} f(x) = A$.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2},$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$. Torej $A = \frac{1}{2}$.

21. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} & : \quad x \neq 2 \\ A & : \quad x = 2 \end{cases}$$

Določi A, da bo f zvezna v $x = 2$.

Rešitev: Funkcija f je zvezna v točki $x = 2$, če obstaja limita $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$ in $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} = f(0) = A$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-2x}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

22. Dana je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$. Ugotovi ali ima f vodoravno asimptoto, ko $x \to \infty$ in, ko $x \to -\infty$.

Rešitev:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} &= \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{2(-u)^2+1}}{3(-u)-5} = \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{2u^2+1}}{-3u-5} = \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{u\left(\sqrt{2+\frac{1}{u^2}}\right)}{-u\left(3-\frac{5}{u}\right)} = -\frac{\sqrt{2+\frac{1}{u^2}}}{3-\frac{5}{u}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali $u = -x$. Funkcija f ima vodoravno asimptoto $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ko $x \to \infty$ in vodoravno asimptoto $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, ko $x \to -\infty$.

23. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$. Izračunaj limito $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ in $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in ugotovi ali ima f morebiti navpično oziroma vodoravno asimptoto.

Rešitev:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Funkcija $\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ ima navpično asimptoto $x = -1$, ko $x \to -1^+$. Vodoravne asimptote nima.

24. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$. Določi definicijsko območje ter levo in desno limito v $a = 1$ in $a = -1$, ter izračunaj limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Rešitev:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{2(-u)^2}{(-u)^2-1} = \lim_{u\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{u^2}} = 2,$$

kjher smo vpeljali $u = -x$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x+1)} \frac{1}{(x-1)},$$

kjer

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{(x-1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{2x^2}{(x+1)} = \frac{2\cdot1^2}{1+1} = 1.$$

Od tod sledi

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x+1)} \frac{1}{(x-1)} = -\infty.$$

Podobno izračunamo naslednjo limito

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x^2}{(x+1)} \frac{1}{(x-1)}$$

kjer

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{(x-1)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{2x^2}{(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{2x^2}{(x+1)} = \frac{2\cdot1^2}{1+1} = 1.$$

Od tod sledi

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x+1)} \frac{1}{(x-1)} = \infty.$$

Podobno izračunamo tudi še naslednjo limito.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2}{(x-1)} \frac{1}{(x+1)},$$

kjer

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2}{(x-1)} = \frac{2\cdot 1^2}{-1-1} = -1.$$

Od tod sledi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{(x-1)} \frac{1}{(x+1)} = \infty.$$

Izračunajmo še

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{(x-1)} \frac{1}{(x+1)},$$

kjer

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2}{(x-1)} = \frac{2\cdot 1^2}{-1-1} = -1.$$

Od tod sledi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{(x-1)} \frac{1}{(x+1)} = -\infty.$$

25. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x})$.

Rešitev: Pri računanju te limite ne moremo uporabiti lastnosti zveznosti, ker funkcija $\cos(\frac{1}{x})$ ni zvezna v točki $x = 0$, niti ni v točki $x = 0$ definirana. Uporabili bomo naslednje: Če je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ in velja za x blizu a in $x \neq a$ ocena $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, tedaj obstaja tudi $\lim_{x\to a} g(x)$ in je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ (tako imenovani izrek o ¨sendviču¨). Torej ocenimo

$$-1 \leq \cos(\frac{1}{x}) \leq 1.$$

Naj bo $x \neq 0$. Tedaj velja

$$-x^2 \leq x^2 \cos(20\pi x) \leq x^2.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0$ in $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, od tod sledi $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x}) = 0$.

26. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos(20\pi x)$.

Rešitev:

Funkcija $f(x) = x^2\cos(20\pi x)$ je zvezna v točki $x = 0$ in saj je produkt dveh zveznih funkcij v točki $x = 0$. Torej je $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos(20\pi x) = 0^2\cos 0 = 0.$$

27. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}.$$

Izračunaj $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Ali obstaja limita $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Rešitev:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} = \begin{cases} x+1 & : \quad x > 1 \\ -(x+1) & : \quad x < 1 \end{cases}$$

Torej

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

in

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-(x+1)) = -2.$$

Ker $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ ne obstaja.

28. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{(x-1)^2}.$$

Rešitev: $\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{(x-1)^2} = \infty$, kajti $\lim\limits_{x\to 1}(2-x) = 2-1 = 1$ in $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

29. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2(x+2)}.$$

Rešitev:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2}\frac{1}{x+2} = -\infty,$$

kjer upoštevamo

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2} = \frac{(-2)-1}{(-2)^2} = -\frac{3}{4}$$

in

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2} = \infty.$$

30. Dana je funkcija

$$f(x = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & : \quad x < 0 \\ 3 - x & : \quad 0 \leq x \leq 3 \\ (x-3)^2 & : \quad x > 3 \\ 1 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

Izračunaj levo in desno limito v točkah $a = 0$ in $a = 3$ ter ugotovi ali je funkcija f zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 3$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (3 - x) = 3, \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0, \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} (x-3)^2 = 0, \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} (3 - x) = 0. \end{aligned}$$

Ker $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ne obstaja in funkcija ne more biti zvezna v točki $a = 0$. Ker velja $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$, je $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$, toda $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(0)$, od koder sledi, da funkcija f ni zvezna v točki $a = 3$.

31. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}.$$

Rešitev:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{1 + \sin 3xx} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3\sin 3x3x} = -\frac{1}{4}.$$

32. Izračunaj limiti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 9}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 9}.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 9} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{9}{x^2})}}{2x - 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{2x - 9} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{2x - 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{2 - \frac{9}{x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-9} &= \lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{(-u)^2(1-\frac{9}{u^2})}}{-2u-9} = \lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{u^2}\sqrt{1-\frac{9}{u^2}}}{-2u-9} = \\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{u\sqrt{1-\frac{9}{u^2}}}{-2u-9} = \lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{9}{u^2}}}{-2-\frac{9}{u}} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali $u=-x$.

33. Dana je funkcija $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$.

    (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti Z_f funkcije f.

    (b) Ali obstaja limita $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Rešitev:

(a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}, x\neq 0\}$. $Z_f=(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$.

(b)

$$\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to-\infty}\arctan u=-\frac{\pi}{2},$$

kjer smo vpeljali spremenljivko $u=\frac{1}{x}$. Torej $Z_f=(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$. Ker $\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}$, limita $\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}$ ne obstaja.

34. Dana je funkcija $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene limite na robu definicijskega območja.

Rešitev:

Funkcija $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ jedefinirana na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Torej je potrebno izračunati limite $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$ in $\lim_{x\to0^-}f(x)$. Vpeljimo novo spremenljivko $u=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{u\to0}\frac{1}{1+e^u}=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2},$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+e^u}=0,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{1 + e^u} = 0,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

5 Odvod

Izračunaj odvode funkcij:

1. (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,

   (b) $f(x) = \sin\left(x^2 + 4\right)$,

   (c) $f(x) = e^{x^2+x}$,

   (d) $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$,

   (e) $f(x) = \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

   Rešitev:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

   $$f'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

   (b) $f(x) = \sin\left(x^2 + 4\right)$.

   $$f'(x) = \cos\left(x^2 + 4\right) 2x.$$

   (c)

   $$f'(x) = e^{x^2+x}\left(2x + 1\right).$$

   (d)

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)' \\ &= \frac{x-1}{x} \left(\frac{x - 1 - x}{(x-1)^2}\right) \\ &= \frac{-1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

   (e)

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + (x-1)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

2. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$. Zapiši enačbo tangente v točki $(1, f(1))$.

Rešitev: Odvod funkcije f je

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{4}{3}}(2x+1) = -\frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^4}}.$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad f'(1) = -\frac{2}{3}.$$

Enačba tangente je

$$y - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\frac{2}{3}(x-1)\,.$$

3. Dana je funkcija $f(x) = 9 - 2x^2$. Določi smerni koeficient tangente v točki $(2, f(2)$ in enačbo tangente tudi zapiši.

Rešitev:

Odvod funkcije f je $f'(x) = -4x$. Smerni koeficient tangente v točki $(2, f(2)$ je enak $f'(2) = -8$. Ena v cba tangene je $y - 1 = -8(x-2)$ oz. $y = -8x + 17$.

4. Dana je funkcija

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x + 1}.$$

   (a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f in zalogo vrednosti Z_f funkcije f. Odgovore ustrezno utemelji!

   (b) Ali je funkcija f injektivna. Odgovor utemelji!

   (c) Določi vrednost odvoda funkcije f v točki $x_0 = 0$.

   (d) Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(0, f(0))$.

Rešitev:

   (a) $D_f = \mathbb{R}$, saj sta funkciji $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$ definirani za vsa realna števila. $Z_f = [0, \sqrt[3]{2}]$, saj je zaloga vrednosti $\sin x + 1$ enaka $[0, 2]$ in $\sqrt[3]{x}$ preslika interval $[0, 2]$ v interval $[0, \sqrt[3]{2}]$.

   (b) Funkcija ni injektivna. Npr. $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2})$. (Lahko tudi kak drug primer točk, ki se preslikajo v isto točko).

(c) Odvod je

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\sin x + 1\right)^{-\frac{2}{3}}\cos x = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\left(\sin x + 1\right)^2}},$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{3}.$$

(d) Enačba tangente v to $(0, f(0))$: $y = 1 + \frac{1}{3}x$.

5. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{2}{1-3x}.$$

(a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f in zalogo vrednosti Z_f funkcije f. Odgovore ustrezno utemelji!

(b) Ali je funkcija f injektivna. Odgovor utemelji!

(c) Določi vrednost odvoda funkcije f v točki $x_0 = 0$ in v točki $x = -1$.

(d) Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(0, f(0))$ in točki $(-1, f(-1))$.

Rešitev:

(a) $D_f = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$. $Z_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) Funkcija ni injektivna, saj velja

$$\frac{2}{1-3x_1} = \frac{2}{1-3x_2} \iff 2(1-3x_2) = 2(1-3x_1) \iff x_1 = x_2.$$

(c)

$$f'(x) = -\frac{2}{(1-3x)^2}(-3) = \frac{6}{(1-3x)^2}.$$

$$f'(0) = 6, \quad f'(-1) = \frac{6}{16}.$$

(d) Enačba tangente v to $(0, f(0))$: $y - 1 = 6x$. Enačba tangente v to $(-1, f(-1))$: $y - \frac{1}{2} = \frac{6}{16}(x+1)$.

6. S pomočjo L´Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - x)$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$,
(d) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$,
(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$,
(f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln(1+2e^x)}$,
(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$,
(h) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) =$,
(i) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$,
(j) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$.

Rešitev:

L´Hospitalovo pravilo: Naj bosta f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v a) in naj gresta obe hkrati proti 0 ali obe hkrati proti $\pm\infty$. Č e obstaja limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki, torej $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. L´Hospitalovo pravilo velja tudi za leve in desne limite in limite v neskončnosti.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{1} = \infty$.

(b) $\lim_{x\to\infty} (e^x - x) = \lim_{x\to\infty} (\dfrac{e^x}{x} - 1) = \infty$, kjer smo upoštevali točko (a).

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \infty$.

(d) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$.

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1$.

(f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln(1+2e^x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\frac{2e^x}{1+2e^x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1+2e^x}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2e^x} + 1\right) = 1$.

(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

(h) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = \infty$, kjer smo upoštevali, da po točki (g) velja $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \left(1 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

(i)

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{x}\right) = 0.$$

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\infty$, kjer smo upštevali, da $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x = 0$, in $\cos x < 0$,ko $x \to \frac{\pi}{2}^+$

7. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$. Ali smemo pri izračunu limite $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ uporabiti L´Hospitalovega pravilo?

Rešitev: Funkcija $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ je zvezna v točki $x = \pi$ in je zato limita $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ enaka kar funkcijski vrednosti $\frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = 0$. Enako potem velja tudi za levo limito $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = 0$.. Odgovor je ne, saj velja $\lim\limits_{x\to\pi^-}\sin x = 0$ in $\lim\limits_{x\to\pi^-}(1-\cos x) = 1-\cos\pi = 2$. Če izračunamo limito s pomočjo L´Hospitalovega pravila dobimo napačen rezultat:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} \neq \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{\sin x} = \infty.$$

8. Silos je sestavljen iz valjastega telesa in polsferne kupole (brez tal in stropa) z radijem r. Cena pleskanja kupole na m^2 je dvakrat večja od cene pleskanja plašča valja na m^2. Silos mora imeti fiksno prostornino V. Kolikšna morata biti radij r kupole in višina v valjastega dela, da bo cena pleskanja silosa najmanjša.

Rešitev: Označimo s C ceno pleskanja plašča valja na m^2. Površina polovice sfere z radijem r je enaka $2\pi r$. Označimo z v višino kupole. Cen pleskanja celotne površine silosa je je

$$C(r) = 2\pi rvC + 2\pi r^2 2C + 2\pi r^2 2C, \quad r \in (0,\infty)$$

Volumen silosa je

$$V = \pi r^2 v + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$v = \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2},$$

$$v = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r.$$

$$C(r) = C2\pi r\left(\frac{1}{\pi}\frac{V}{r^2} - \frac{2}{3}r\right) + 2C2\pi r^2 = C\left(\frac{2V}{r} + \frac{8\pi r^2}{3}\right).$$

Poiščimo stacionarne točke. Prvi odvod je

$$C'(r) = C\left(-\frac{2V}{r^2} + \frac{2\cdot 8\cdot r}{3}\right).$$

Poiščimo stacinarne točke.

$$\begin{aligned}
C'(r) &= 0,\\
C\left(-\frac{2V}{r^2} + \frac{2\cdot 8\cdot r}{3}\right) &= 0\\
C\left(-\frac{2V}{r^2} + \frac{16r}{3}\right) &= 0\\
\left(\frac{-6V + 16\pi r^3}{3r^2}\right) &= 0\\
16\pi r^3 &= 6V\\
r^3 &= \frac{3V}{8\pi}.\\
r &= \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}.
\end{aligned}$$

Potrebno je še ugotoviti ali v tej stacionarni točki nastopa ekstrem. Oglejmo si znak odvoda v točkah, ki so levo in desno od stacionarne točke.

$$\begin{array}{rcl}
C'(r) & > & 0 \iff\\
C\left(-\frac{2V}{r^2} + \frac{2\cdot 8\cdot r}{3}\right) & > & 0 \iff\\
\frac{2C\left(-3V + 8\pi r^3\right)}{3r^2} & > & 0 \iff\\
-V3 & > & -8\pi r^3 \iff\\
\sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} & < & r.
\end{array}$$

Torej

$$C'(r) > 0, \quad 0 < \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} < r$$

in

$$C'(r) < 0, \quad \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} > r.$$

Torej ima $P(r)$ lokalni minumum v točki $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}$. Ali ima $C(r)$ v tej točki tudi globalni miminum? Funkcija $C(r)$ na interavlu $\left(0, \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}\right)$ pada in na intervalu $\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}, \infty\right)$ narašča. Velja

$$\lim_{r\to 0+} C(r) = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} C(r) = \infty.$$

Torej ima $C(r)$ v točki $\sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}$ globalni minimum.

9. Iz kvadratnega kartona s stranico a izrežemo štiri ogliščen kvadrate s stranico x ($x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$) in dobljen karton prepognemo v škatlo v obliki kvadra brez pokrova. Pri katerem x bo imel kvader največjo prostornino?

Rešitev: Ploščina osnovne ploskve škatle je $(a-2x)(a-2x)$, višina škatle pa je x. Volumen kvadra je

$$V(X) = (a-2x)^2 x, \quad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

Poiščimo pri katerem x doseže $V(x)$ globalni maksimum. Poiščimo najprej stacionarne točke.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2(a-2x)(-2)x + (a-2x)^2 \\ &= -4x(a-2x) + a^2 - 4xa + 4x^2 \\ &= 12x^2 - 8xa + a^2 \end{aligned}$$

Stacionarne točke so ničle odvoda, ki ležijo v definicijskem območju funkcije $V(x)$.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 12x^2 - 8xa + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$12\left(x^2 - \frac{8xa}{12} + \frac{a^2}{12}\right) = 0$$

$$12\left(x - \frac{a}{6}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$$

Rešitvi te enačbe sta

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{6}.$$

Torej stacionarna točka je $x = \frac{a}{6}$. Odvod $V'(x)$ pri prehodu skozi točko $x = \frac{a}{6}$ spremeni predznak. Velja

$$V'(x) > 0, \quad x \in \left(0, \frac{a}{6}\right),$$

$$V'(x) < 0, \quad x \in \left(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}\right).$$

Ker velja še dodatno $V(0) = 0$ in $V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, je v točki $x = \frac{a}{6}$ dosežen globalni maksimum.

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2\frac{a}{6}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{a^3}{9}.$$

10. Dan je enakokraki trikotnik z osnovnico a in višino v. V dani trikotnik položimo pravokotnik, vzporedno z osnovno stranico trikotnika. Določi stranici pravokotnika, ki ima največjo ploščino.

Rešitev:

Izberimo koordinatni sistem tako, da je izhodišče razpoloišče osnovne stranice trikotnika. Stranico pravokotnika, ki je vzporedna osnosvni stranici a označimo z x. Premica na kateri leži desni krak trikotnika gre skozi točki $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ in $(0, v)$. Smerni koeficient te premice je $k_d = \frac{0-v}{\frac{a}{2}-v} = -\frac{2v}{a}$. Enačba premice, na kateri leži desni krak trikotnika je

$$y = -\frac{2v}{a}x + v.$$

Stranici pravokotnika sta velikosti $2x$ in $-\frac{2v}{a}x + v$. Ploščina trikotnika je

$$P = 2x\left(-\frac{2v}{a}\right) = -\frac{4vx^2}{a} + 2xv, \quad x \in [0, \frac{a}{2}]$$

Odvod je

$$P'(x) = -\frac{8vx}{a} + 2v = 2vx\left(1 - \frac{4x}{a}\right).$$

Stacionarna to vcka je rešitev naslednje enačbe

$$P'(x) = 0, \quad x \in [0, \frac{a}{2}].$$

Stacionarna točka je

$$x = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}.$$

Velja

$$P'(x) > 0, \quad x \in [0, \frac{a}{4}],$$

$$P'(x) < 0, \quad x \in [\frac{a}{4}, \frac{a}{2}].$$

Odvod pri prehodu skozi točko $x = \frac{a}{4}$ spremeni predznak, od koder sledi, da v stacionarni točki nastopi lokalni ekstrem. Predznak odvoda nam pove, da je v točki $\frac{a}{4}$ lokalni maksimum. Ker je $P(0) = 0$ in $P(\frac{a}{2}) = 0$ ima funkcija f v točki $x = \frac{a}{4}$ tudi globalni maksimum. Torej pravokotnik z največjo ploščino ima stranico, ki je vzporedna osnovnici trikotnika, enako $2\frac{a}{4} = \frac{a}{2}$, druga stranica je velikosti $-\frac{2v}{a}\frac{a}{4} + v = \frac{v}{2}$.

6 Grafi funkcij

1. Dana je funkcija

$$f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}.$$

   (a) Določi definicijsko območje in morebitne ničle.
   (b) Izračunaj limite na robu definicijskega območja ter določi morebitne asimptote.
   (c) Poišči morebitne stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter določi morebitne lokalne ekstreme
   (d) Določi morebitne prevoje in določi intervale konkavnosti oziroma konveksnosti.
   (e) Skiciraj graf.

Rešitev:

   (a) Funkcija je definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V točki $x = -2$ ima ničlo.
   (b) Določimo limite na robu definicijskega območja. Iščemo limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ in $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x+2)\, e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} (-x+2)\, e^{\frac{1}{-x}} = -\infty.$$

   Torej funkcija f nima vodoravnih asimptot, ko $x \to \infty$ in $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+2)\, e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)\, e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

   od koder sledi, da je $x = 0$ navpična asimptota funkcije f, ko $x \to 0^+$.
   (c) Odvod funkicje f je enak

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)\, e^{\frac{1}{x}} \left(-x^{-2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2)}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}\right).$$

Stacionarni točki sta $x = 2$ in $x = -1$. Za vsak $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ je $f'(x) > 0$ in za vsak $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$ je $f'(x) < 0$. Funkcija je naraščajoča na $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ in padajoča na $(-1, 0) \cup (0, 2)$. V točki $x = -1$ ima lokalni maksimum in v točki $x = 2$ ima lokalni minimum.

(d) Drugi dvod funkicje f je enak

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}\right)\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)\frac{(x-2)(x+1)}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}\frac{4+x}{x^3} = e^{\frac{1}{x}}\frac{2+5x}{x^4}.$$

Drugi odvod ima ničlo v točki $x = -\frac{2}{5}$. Preverimo ali ima funkcija f v točki $x = -\frac{2}{5}$ prevoj. Za vsak $x \in (-\infty, -\frac{2}{5})$ je

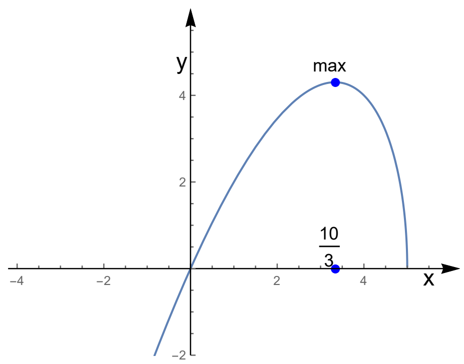
$$f''(x) < 0$$

in za vsak $x \in (-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, \infty)$ je

$$f''(x) > 0.$$

Od tod sledi, da je f konveksna na $(-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, \infty)$ in konkavna na $(-\infty, -\frac{2}{5})$, v točki $x = -\frac{2}{5}$ pa ima prevoj.

(e) Graf funkcije $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$.



2. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = xe^x.$$

Rešitev:

(a) Funkcija je definirana na $D_f = \mathbb{R}$.V točki $x = 0$ ima ničlo.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja, to je, limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{-u}{e^u} == \lim_{u\to\infty} \frac{-1}{e^u} = 0,$$

kjer smo uporabili L Hospitalovo pravilo. Torej je x os vodoravna asimptota, ko $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty.$$

(c) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x.$$

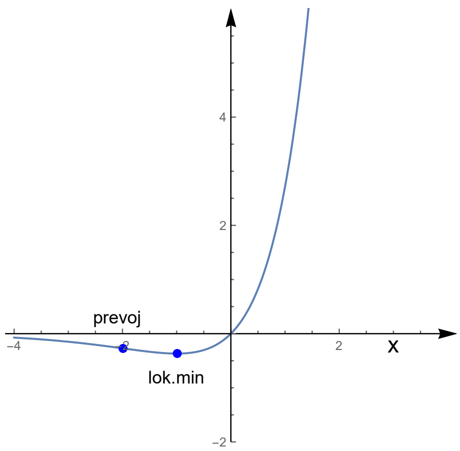
Stacionarna točka je $x = -1$. Ker je $e^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (-1, \infty)$ in f je naraščajaoča na $(-1, \infty)$) in padajoča na $(-\infty, -1)$. Ker je $f'(-1) = 0$ in f' spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega v točki $x = -1$, ima f v $x = -1$ lokalni minimum.

(d) Drugi dvod funkcije f je enak

$$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x.$$

Za vsak $x \in (-\infty, -2)$ je $f''(x) < 0$ in za vsak $x \in (-2, \infty)$ je $f''(x) > 0$. $f''(-2) = 0$. f je konveksna na $(-2, \infty)$ in konkavna na $(-\infty, -2)$ in v točki $x = -2$ ima f prevoj.

(e) Graf funkcije $f(x) = xe^x$.



3. Skiciraj graf funkcije
$$f(x) = x\sqrt{5-x}.$$

Rešitev:

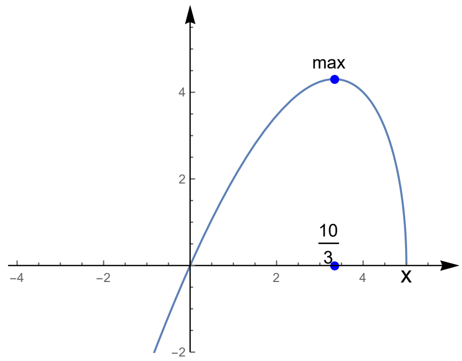
(a) Funkcija je definirana na $D_f = (-\infty, 5]$. V točki $x = 0$ in $x = 5$ ima ničlo.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja. Iščemo limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 5^-} f(x)$.
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x \lim_{x\to 5^-} \sqrt{5-x} = 5 \cdot \sqrt{5-5} = 0.$$
Od tod sledi, da ni navpične asimptote, ko $x \to 5, x < 5$.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to\infty} -u\sqrt{5+u} = -\infty.$$
Od tod sledi, da ni vodoravne asimptote, ko $x \to -\infty$.

(c) Odvod funkicje f je enak
$$f'(x) = \sqrt{5-x} + \frac{-x}{2\sqrt{5-x}} = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}.$$
Poiščimo stacionarne točke, to je, točke $x \in D_f$, za katere velja $f'(x) = 0$. Stacionarna točka je $x = \frac{10}{3}$. Za vsak $x \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ je $f'(x) > 0$ in za vsak $x \in \left(\frac{10}{3}, 5\right)$ je $f'(x) < 0$. Funkcija je naraščajoča na $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ in padajoča na $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$. V točki $x = \frac{10}{3}$ ima funkcija lokalni maksimum in $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \sim 2,5$. Ko $x \to 5, x < 5$, velja $f'(x) = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}} \to -\infty$, zato je tangenta na graf funkcije f v točki $x = 5$ navpična.

(d) Drugi dvod funkicje f je enak
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}\right)' \\ &= \frac{-3\sqrt{5-x} - (10-3x)\frac{2(-1)}{2\sqrt{5-x}}}{4\sqrt{5-x}} \\ &= \frac{-20+3x}{4(5-x)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$
Drugi odvod $f''(x)$ ima ničlo v točki $x = \frac{20}{3}$, katera pa ne leži v D_f. Torej f nima prevoja. Za vsak $x \in D_f$ je $f''(x) < 0$, saj je $4(5-x)^{\frac{3}{2}} \geq 0$ za vsak $x \in D_f$ in $4(5-x)^{\frac{3}{2}} < 0$ za vsak $x < \frac{20}{3}$. Torej je f konkavna povsod na D_f.

(e) Graf funkcije $f(x) = x\sqrt{5-x}$.



4. Skiciraj graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$. **Rešitev:**

(a) Funkcija je definirana na $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x+1 \geq 0\} = (-1, \infty)$. Funkcija f ima ničlo $x = 0$.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja. Iščemo limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}} = \infty.$$

Torej ni vodoravne asimptote, ko $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty,$$

saj $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$ in $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$. Funkcija f ima navpično asimptoto $x = -1$, ko $x \to -1^+$.

(c) Izračunajmo odvod funkcije f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{\frac{4x(x+1)-x^2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Poiščimo stacionarne točke funkcije f.

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, \quad x = -\frac{4}{3}.$$

Stacionarna točka je samo $x = 0$, saj točka $x = -\frac{4}{3}$ ne leži v definicijskem območju funkcije f. Velja

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-1, 0),$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (0, \infty).$$

Torej f je padajoča na intervalu $(-1, 0)$ in naraščajoča na intervalu $(0, \infty)$. Ker je $f'(x) = 0$ in f' spremeni predznak pri prehodu skozi točko $x = 0$, ima funkcija $f(x)$ minimum v točki $x = 0$.

(d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x^2 + 8x}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} \right)' \\ &= \frac{(6x+8)2(x+2)^{\frac{3}{2}} - (3x^2+8x)2\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+2)^3} \\ &= \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}} \big((6x+8)2(x+1) - (3x^2+4x)3\big)}{4(x+1)^3} \\ &= \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}} \big(12x^2 + 40x + 32 - 9x^2 - 24x\big)}{4(x+1)^3} \\ &= \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Velja

$$f''(x) \geq 0, \quad x \in D_f,$$

saj je imenovalec povsod na D_f pozitiven in ima kvadratna funkcija $3x^2+8x+8$ negativno diskriminanto in je zato $3x^2+8x+8 \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Funkcija f je torej povsod na D_f konveksna.

5. Skiciraj graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$.

Rešitev:

(a) Funkcija f je definirana na $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x+ \geq 0\} = (-2, \infty)$. Funkcija f ima ničlo $x = 0$.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja. Iščemo limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-2^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}} = \infty.$$

Torej ni vodoravne asimptote, ko $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \infty,$$

saj $\lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = (-1)^2 = 1$ in $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \infty$. Funkcija f ima navpično asimptoto $x = -1$, ko $x \to -2^+$.

(c) Izračunajmo odvod funkcije f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x+2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} \\ &= \frac{\frac{4x(x+2)-x^2}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} \\ &= \frac{x(8+3x)}{2(2+x)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Stacionarna točka je samo $x = 0$, saj točka $x = -\frac{8}{3}$ ne leži v definicijskem območju funkcije f. Velja

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-2, 0),$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (0, \infty).$$

Torej f je padajoča na intervalu $(-2, 0)$ in naraščajoča na intervalu $(0, \infty)$. Ker je $f'(x) = 0$ in f' spremeni predznak pri prehodu skozi točko $x = 0$, ima funkcija $f(x)$ minimum v točki $x = 0$.

(d)

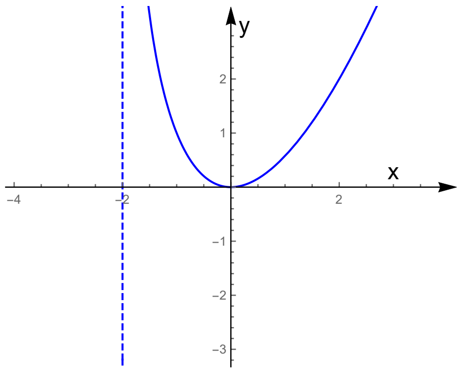
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x^2+8x}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}\right)' \\ &= \frac{(6x+8)2(x+2)^{\frac{3}{2}} - (3x^2+8x)2\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+2)^3} \\ &= \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}\big((6x+8)2(x+2) - (3x^2+8x)3\big)}{4(x+2)^3} \\ &= \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}\big(12x^2+40x+32-9x^2-24x\big)}{4(x+2)^3} \\ &= \frac{3x^2+16x+32}{4(x+2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Velja

$$f''(x) > 0, \quad x \in D_f,$$

saj je imenovalec povsod na D_f pozitiven in ima kvadratna funkcija $3x^2+16x+32$ negativno diskriminanto in je zato $3x^2+1632+8 \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Funkcija f je torej povsod na D_f konveksna.

(e) Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$.



6. Skiciraj graf funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Rešitev:

(a) Funkcija f je definirana na $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$. Funkcija f nima ničel.

(b) Izračunajmo limite na robu definicijskega območja in določimo morebitne vertikalne in horizontalne asimptote, to je, limite $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ in $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ ter limiti $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$ in $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}$. Vpeljimo novo spremenljivko $u = \frac{1}{x}$. Potem velja

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} e^u = \infty,$$

kjer smo upoštevali, da velja: če $x \to 0^+$, potem $u = \frac{1}{x} \to \infty$..

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0,$$

kjer smo vpeljali spremenljivko $u = \frac{1}{x}$ in upoštevali, da velja: če $x \to 0^-$, potem $u = \frac{1}{x} \to -\infty$. Nadalje, ko $x \to \infty$, potem $u = \frac{1}{x} \to 0$ in velja

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0} e^u = e^0 = 1.$$

Od tod sledi, da je premica $y = 1$ vodoravna asimptota, ko $x \to \pm\infty$.

(c)
$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Velja
$$f'(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

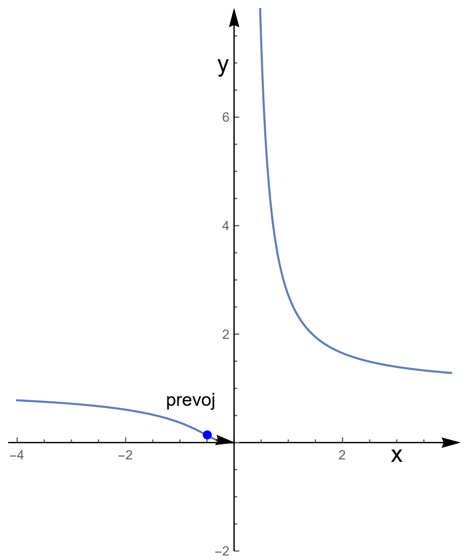
Torej je f padajoča funkcija povsod na D_f. Funkcija nima stacionarnih točk od koder sledi, da ff nima lokalnih ekstremov.

(d)
$$f''(x) = \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - e^{\frac{1}{x}}2x}{x^4} =$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}.$$

Velja
$$f''(x) > 0, \quad x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty),$$
$$f''(x) < 0, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{2}).$$
$$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Ker drugi odvod, pri prehodu skozi točko $x = -\frac{1}{2}$ spremeni predznak, ima funkcija f v točki $x = -\frac{1}{2}$ prevoj.

(a) Graf funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.



7. Skiciraj graf funkcije $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Rešitev:

(a) Definicijsko območje funkcije f je $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 1 - x^2 > 0\} = (-1, 1)$. Poiščimo ničle funkcije f.

$$\ln(4 - x^2) = 0 \iff 4 - x^2 = 1 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

Torej f ima ničli v točkah $x = \pm\sqrt{3}$.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja, to je, limiti $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ in $\lim_{x \to -2^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty,$$

kar pomeni, da sta premici $x = -2$ in $x = 2$ navpični asimptoti. Graf funkcije $f(x)$ se premici $x = -2$ približuje, ko $x \to x \to -2^+$ in graf funkcije $f(x)$ se premici $x = 2$ približuje, ko $x \to 2^-$.

(c) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}.$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-2, 0),$$

$$f'(x) < 0, \quad x \in (0, 2),$$

$$f'(0) = 0.$$

Točka $x = 0$ je stacionarna točka. Ker odvod $f'(x)$ spremeni predznak pri prehodu skozi točko $x = 0$, ima funkcija v točki $x = 0$ lokalni ekstrem. Na intervalu $(-2, 0)$ funkcija f narašča in na intervalu $(0, 2)$ funkcija f pada in ima funkcija f v točki $x = 0$ lokalni maksimum.

(d)

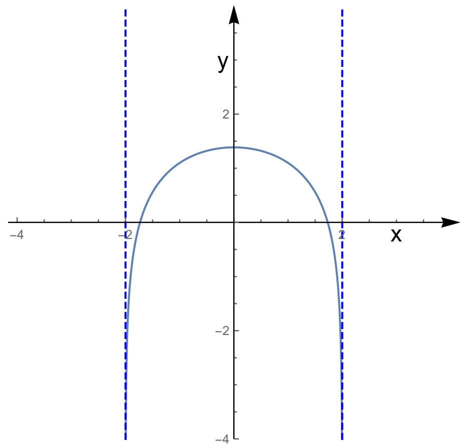
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2}.$$

Velja

$$f''(x) < 0, \quad x \in (-2, 2),$$

kar pomeni, da je funkcija f povsod konkavna.

(e) Graf funkcije $f(x) = \ln(4 - x^2)$.



8. Skiciraj graf funkcije $f(x) = x \ln^2 x$.

Rešitev:

(a) Definicijsko območje funkcije f je $D_f = (0, \infty)$. f ima ničlo v točki $x = 1$.

(b) Določimo limite na robu definicijskega območja, to je, limiti $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ in $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln^2 x = \infty.$$

Funkcija f nima vodoravne asimptote, ko $x \to \infty$ in prav tako nima navpične asimptote, ko $x \to 0^+$.

(c) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x 2 \ln x \frac{1}{x} = \ln x\,(\ln x + 2)\,.$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$$

in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. Stacionarne točke so rešitve enačbe

$$f'(x) = 0, \quad x \in D_f.$$

Stacionarni točki sta $x = e^{-2}$ in $x = 1$ Ker odvod $f'(x)$ spremeni predznak pri prehodu skozi točko $x = e^{-2}$, ima funkcija v točki

$x = e^{-2}$ lokalni ekstrem in sicer lokalni maksimum. Prav tako odvod spremeni predznak pri prehodu skozi $x = 1$ in funkcija f ima lokalni minimum. Opazimo še naslednje: Graf funkcije f ima v točki $x = 0$ navpično tangento, saj velja

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x\,(\ln x + 2) = \infty.$$

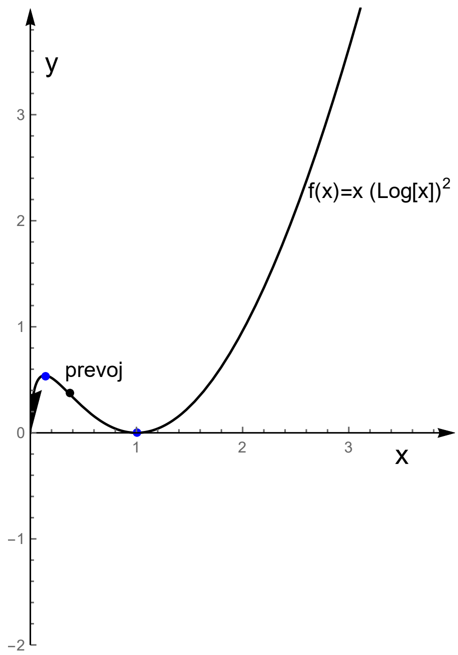
(d) Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2\ln x\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}\,(\ln x + 1)\,.$$

Velja

$$f''(x) < 0, \quad x \in (0, e^{-1}),$$
$$f''(x) >, \quad x \in (e^{-1}, \infty).$$

Funkcija f je konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$. V točki $x = e^{-1}$ ima prevoj.



9. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}.$$

(a) Določi definicijsko območje, ničle, limite na robu definicijskega območja ter morebitne asimptote.

(b) Določi intervale naraščanja oziroma padanja ter poišči morebitne stacionarne točke in lokalne ekstreme.

Rešitev:

(a) Definicijsko območje funkcije f je $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 9 \geq 0, x - 4 \neq 0\} = (-\infty, -3] \cup [3, 4) \cup (4, \infty)$. Ničle so rešitve enačbe $x^2 = 9$, torej sta ničli $x = \pm 3$. Izračunajmo limite na robu definicijskega območja in določimo morebitne vodoravne oziroma navpične asimptote. Točki $x = \pm 3$ sta sicer robni, a vemo, da ima funkcija f ničli v točkah $x = \pm 3$. Poiskati je treba naslednje limite: $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ in $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ ter $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ in $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Torej

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4} = \lim_{u \to \infty} \frac{\sqrt{(-u)^2 - 9}}{(-u) - 4} = \lim_{u \to \infty} \frac{\sqrt{u^2 - 9}}{-u - 4} = -\lim_{u \to \infty} \frac{\sqrt{u^2 - 9}}{u + 4} =$$

$$= -\lim_{u \to \infty} \frac{u\sqrt{1 - \frac{9}{u^2}}}{u + 4} = -\lim_{u \to \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{u^2}}}{1 + \frac{4}{u}} = -1,$$

kjer smo vpeljali spremenljivko $u = -x$. Torej premica $y = \frac{1}{2}$ je vodoravna asimptota, ko $x \to \infty$ in premica $y = -\frac{1}{2}$ je vodoravna asimptota, ko $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x^2 - 9}{x - 4} = -\infty,$$

saj velja $\lim_{x \to 4^-}(x^2 - 9) = 7$ in $\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$. Podobno dobimo

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x^2 - 9}{2x - 8} = \infty,$$

saj velja $\lim_{x \to 4^-}(x^2 - 9) = 7$ in $\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = \infty$. Torej premica $x = 4$ je navpična asimptota, ko $x \to 4^-$ in $x \to 4^+$.

(b)

$$f'(x) = \frac{9 - 4x}{(x - 4)^2\sqrt{9 - x^2}}.$$

Poiščimo stacionarne točke, to je točke $x \in D_f$, za katere velja $f'(x) = 0$.

$$\frac{9 - 4x}{(x - 4)^2\sqrt{9 - x^2}} = 0 \iff x = \frac{9}{4}.$$

Točka $\frac{9}{4}$ ne leži v definicijskem območju, kar pomeni, da ni stacionarna točka. Funkcija torej nima lokalnih ekstremov. Funkcija f narašča na $(-\infty,-3]$ in pada na $[3,4)\cup(4,\infty)$.

10. Skiciraj graf funkcije $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

Rešitev:

(a) Definicijsko območje funkcije f je $D_f=\{x\in\mathbb{R};\frac{x+1}{x-1}>0\}=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Izračunajmo limite na robu definicijskega območja, to je, limite $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)$ in $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ ter $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ in $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Torej

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=\lim_{u\to\infty}\ln\frac{-u+1}{-u-1}=\ln\left(\lim_{u\to\infty}\frac{-u+1}{-u-1}\right)=\ln 1=0,$$

kjer smo vpeljali spremenljivko $u=-x$. Torej premica $y=0$ je vodoravna asimpotota, ko $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to 1^+}\ln\frac{x+1}{x-1}=\infty,$$

ker $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\infty$, in $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\ln\frac{x+1}{x-1}=-\infty,$$

ker $\frac{x+1}{x-1}\to 0^+$, ko $x\to(-1)^+$, pri tem sklepu uporabimo, da je $x+1<0$ in $\frac{1}{x-1}<0$ za $x<-1$. Ugotovimo, da sta premici $x=1$ in $x=-1$ navpični asimptoti.

(b) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+1}\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Velja

$$\frac{2}{1-x^2}>0\iff x\in(-1,1),\qquad\frac{2}{1-x^2}<0\iff x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty).$$

Interval $(-1,1)$ ni vsebovan v definicijskem območju in je funkcija naraščajoča povsod na D_f.

(c) Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \left(\frac{2}{1-x^2}\right)' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

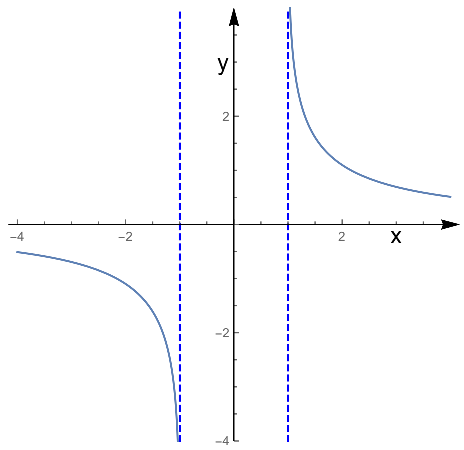
Poglejmo kakšnega predznaka je funkcija f'' na množici D_f.

$$f''(x) > 0, \quad x \in (1, \infty),$$

$$f''(x) < 0, \quad x \in (-\infty, 1),$$

Prevojnih točk ni, saj je $\frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \iff x = 0$ in točka $x = 0$ ni vsebovana v množici D_f.

(d) Graf funkcije $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.



11. Skiciraj graf funkcije $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$.

Rešitev:

(a) Funkcija f je definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ni(b)čel nima.

(b)

$$\lim_{x \to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Ko se x z desne približuje točki 0, se graf približuje z desne točki $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ko se x z leve približuje točki 0, se graf približuje z leve točki $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

(c) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Za vsak $x \in D_f$ velja $f'(x) < 0$, torej je funkcija f povsod padajoča. Velja

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -1,$$

kar pomeni, da se graf funkcije f približuje točkama $(0, \frac{\pi}{2})$ in $(0, -\frac{\pi}{2})$ pod kotom $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(d) Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

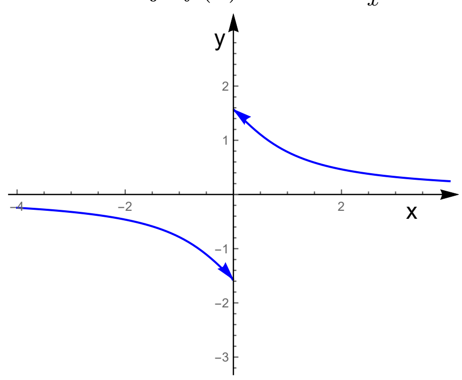
Od tod sedi, da je

$$f''(x) > 0, \quad x \in (0, \infty),$$

$$f''(x) < 0, \quad x \in (-\infty, 0).$$

Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na $(0,\infty)$ in konkavna na $(-\infty, 0)$. Prevojev nima. Točka $x = 0$ v kateri je $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ enak nič, ne leži v definicijskem območju funkcije f.

(e) Graf funkcije $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$.



12. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-9}.$$

(a) Določi definicijsko območje in morebitne ničle.

(b) Izračunaj limite na robu definicijskega območja ter določi morebitne asimptote.

(c) Poišči morebitne stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter določi morebitne lokalne ekstreme

(d) Skiciraj graf.

Rešitev:

(a) Funkcija je definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Ničel nima.

(b) Izračunajmo limite na robu definicijskega območja

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x),$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x), \quad \lim_{x\to 3^-} f(x),$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x), \quad \lim_{x\to(-3)^-} f(x).$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

kjer smo uorabili L Hospitalovo pravilo.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{-u}}{(-u)^2-9} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{-u}}{\lim_{u\to\infty}} \frac{1}{u^2-9} = 0 \cdot \frac{1}{0^2-9} = 0,$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $u = -x$.

(d)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{e^x}{x+3} \frac{1}{x-3} = \infty,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to 3^+} \frac{e^x}{x+3} = \frac{e^3}{6}$ in $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty$.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{e^x}{x+3} \frac{1}{x-3} = -\infty,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to 3^-} \frac{e^x}{x+3} = \frac{e^3}{6}$ in $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

$$\lim_{x\to(-3)^+} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{x\to(-3)^+} \frac{e^x}{x-3} \frac{1}{x+3} = -\infty,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to(-3)^+} \frac{e^x}{x-3} = \frac{e^{-3}}{-6}$ in $\lim_{x\to(-3)^+} \frac{1}{x+3} = \infty$.

$$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{e^x}{x^2-9} = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{e^x}{x-3}\frac{1}{x+3} = \infty,$$

kjer smo upoštevali, da velja $\lim_{x\to(-3)^-} \frac{e^x}{x-3} = \frac{e^{-3}}{-6}$ in $\lim_{x\to(-3)^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$.

(c) Odvod je

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2-9\right) - e^x 2x}{\left(x^2-9\right)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x-9\right)}{x^2-9}.$$

Poiščimo stacionarne točke

$$f'(x) = 0 \iff x^2-2x-9 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{40}}{2} = 1\pm\sqrt{10}.$$

Velja

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty,-3)\cup(-3,1-\sqrt{10})\cup(1+\sqrt{10},\infty).$$

$$f'(x) < 0, \quad x \in (1-\sqrt{10},3)\cup(3,1+\sqrt{10}).$$

Torej f je naraščajoča na $(-\infty,-3)\cup(-3,1-\sqrt{10})\cup(1+\sqrt{10},\infty)$.
f je padajoča na $(1-\sqrt{10},3)\cup(3,1+\sqrt{10})$.

7 Nedoločeni integral

Naj bo f zvezna funkcija definirana na nekem intervalu I. Nedoločeni integral funkcije f je vsaka funkcija F, definirana na intervalu I, za katero velja $F'(x) = f(x), \quad x \in I$ in pišemo

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x).$$

Če je F nedoločeni integral funkcije f, definirane na intervalu I, je tudi funkcija $F + C$ nedoločeni integral funkcije f za vsako konstanto C. Če je F nedoločeni integral funkcije f, dobimo vsak drug njen nedoločeni integral tako, da funkciji F prištejemo konstanto.

Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral:

$$\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u,$$

kjer izberemo

$$u = g(x), \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Npr. če $f(x) = \frac{1}{x}$, z uvedbo nove spremenljivke izračunamo naslednji integral.

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

kjer

$$u = g(x), \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Integracija racionalnih funkcij: Racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ integriramo po naslednjem postopku:

- če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q, najprej delimo polinom $p(x)$ s polinomom $q(x)$ in zapišemo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

  kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.

- racionalno funkcijo $\frac{s(x)}{q(x)}$ razcepimo na delne ulomke. V nadaljevanju bomo integrirali le racionalne funkcije, kjer je imenovalec $q(x)$ produkt linearnih členov oblike $(x - a)^k$, $k \in \mathbb{N}$ in nerazcepnih kvadratnih polinomov druge stopnje ax^2+bx+c. Na parcialne ulomke razcepimo s pomočjo naslednjih nastavkov:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \longrightarrow \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_1}{(x-a)^k},$$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \longrightarrow \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}.$$

Integracija po delih: Pri integraciji po delih uporabimo formulo

$$\int u \ \mathrm{d}v = uv - \int v \ \mathrm{d}u,$$

kjer za funkcijo u izberemo funkcijo, ki se pri odvajanju poenostavi, za $\mathrm{d}v$ pa izberemo izraz, ki ga znamo integrirati.

1. Izračunaj integrale

   (a) $\int \left(x^5 - x\right) \ \mathrm{d}x$,

   (b) $\int (\sqrt{x}+1) \ \mathrm{d}x$,

   (c) $\int \left(\frac{1}{x^3} + e^x\right) \ \mathrm{d}x$,

   (d) $\int 2^x \ \mathrm{d}x$,

   (e) $\int \frac{x^2+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x$

   Rešitev:

   (a)
   $$\int \left(x^5 - x\right) \ \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} + C.$$

   (b)
   $$\int \left(\sqrt{x}+1\right) \ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C.$$

   (c)
   $$\int \left(\frac{1}{x^3} + e^x\right) \ \mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + e^x + C.$$

   (d)
   $$\int 2^x \ \mathrm{d}x = \int e^{x\ln 2} \ \mathrm{d}x = \frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

   (e)
   $$\begin{aligned}\int \frac{x^2+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 - x^{-\frac{1}{2}}\right) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{+}x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

2. Izračunaj integrale

   (a) $\int x^3 \cos(x^4+2)\ \mathrm{d}x$,
   (b) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$,
   (c) $\int \frac{1}{2x+1}\ \mathrm{d}x$,
   (d) $\int \sqrt{1+x^2}x^5\ \mathrm{d}x$,
   (e) $\int \tan x\ \mathrm{d}x$,
   (f) $\int \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$,
   (g) $\int \sin 3x\ \mathrm{d}x$,
   (h) $\int \frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}x$.

   Rešitev:

   (a)

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4+2)\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4}\cos u\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\cos u\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\sin u + C \\ &= \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C,\end{aligned}$$

   kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = x^4+2, \qquad \mathrm{d}u = 4x^3\ \mathrm{d}x, \quad x^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ \mathrm{d}u.$$

   (b)

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\ &= \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C,\end{aligned}$$

   kjer smo izbrali novo spremenljivko

$$u = 1+x^2, \qquad \mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C\\ &= \ln|2x+1| + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = 2x+1, \qquad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x.$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}x^5\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\,(u-1)^2\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}(1+x^2)^{\frac{7}{2}} - 2\frac{2}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right) + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = 1+x^2, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x, \quad x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u.$$

(e)

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = \cos x, \qquad \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x.$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = \ln x, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(g)

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3} \sin u \, \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko z

$$u = 3x, \quad \mathrm{d}u = 3 \, \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \, \mathrm{d}u,$$

(h)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{u}{1-u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{u}{1-u} + \frac{u}{1-u}\right) \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = \sin x, \quad \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x,$$

3. Izračunaj integral

$$\int \frac{8x}{1-4x} \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Ker sta polinoma v števcu in imenovalcu iste stopnje, polinoma najprej delimo.

$$\frac{8x}{1-4x} = -2 + \frac{2}{1-4x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{1-4x} \, \mathrm{d}x &= \int \left(-2 + \frac{2}{1-4x}\right) \, \mathrm{d}x \\ &= -2\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1-4x} \, \mathrm{d}x \\ &= \\ &= -2x - \frac{1}{2}\ln|1-4x| + C,\end{aligned}$$

kjer si pri izračunu pomagamo z vpeljavo nove spremenljivke

$$u = 1 - 4x, \qquad \mathrm{d}u = -4\ \mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-4x}\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{4}\ \ln|u| + C \\ &= -\frac{1}{4}\ \ln|1-4x| + C.\end{aligned}$$

4. Izračunaj integral

$$\int \frac{x+7}{x^2+x-20}\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Imenovalec razstavimo

$$x^2 + x - 20 = (x-4)(x+5).$$

Razcepimo integrand na parcialne ulomke.

$$\frac{x+7}{x^2+x-20} = \frac{11}{9}\frac{1}{x-4} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+5}.$$

$$\int \frac{x+7}{x^2+x-20}\ \mathrm{d}x = \frac{11}{9}\ln|x-4| - \frac{2}{9}\ln|x+5| + C.$$

5. Izračunaj integral

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-20}\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Ker je števec višje stopnje kot imenovalec, moramo najprej deliti števec z imenovalcem.

$$\frac{x^3}{x^2+x-20} = x - 1 + \frac{-20+21x}{-20+x+x^2},$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-20}\ \mathrm{d}x = \int (x-1)\ \mathrm{d}x + \int \frac{-20+21x}{-20+x+x^2}\ \mathrm{d}x,$$

kjer integral $\int \frac{-20+21x}{-20+x+x^2}\ \mathrm{d}x$ izračunamo s pomočjo razcepa na parcialne ulomke.

$$\frac{-20+21x}{-20+x+x^2} = \frac{64}{9}\frac{1}{x-4} + \frac{125}{9}\frac{1}{5+x}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+x-20}\ \mathrm{d}x &= \int (x-1)\ \mathrm{d}x + \frac{64}{9}\int \frac{1}{x-4}\ \mathrm{d}x + \frac{125}{9}\int \frac{1}{5+x} \\ &= \ln|x-1| + \frac{64}{9}\ln|x-4| + \frac{125}{9}\ln|x+5| + C.\end{aligned}$$

6. Izračunaj integral
$$\int \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Imenovalec razstavimo in integrand razcepimo na delne ulomke
$$\int \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(1-x)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$$
Kvadratna funkcija x^2+x+1 ima negativno diskriminanto in zato ni razcepna.
$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\\ &= \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(1-x)}{(1-x)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{x^2(A-B)+x(A+B-C)+A+C}{(1-x)(x^2+x+1)}.\end{aligned}$$
Tako dobimo sistem enačb
$$\begin{array}{ccccccc} A & & & - & B & = & 0\\ A & + & B & - & C & = & 1\\ A & & & + & C & = & 0.\end{array}$$
Rešitve sistema so
$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=-\frac{1}{3}.$$
$$\int \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$
Izračunajmo prvi integral v zadnji vsoti
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = -\ln|w|+E\\ &= -\ln|1-x|+E,\end{aligned}$$
kjer smo vpeljali novo spremenljivko
$$w = 1-x,\qquad \mathrm{d}w = -\,\mathrm{d}x.$$
Izračunajmo še drugi integral v zadnji vsoti
$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u-\frac{1}{2}-1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u\\ &= \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u - \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

kjer smo izrazili

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

in vpeljali spremenljivko

$$u = x + \frac{1}{2}, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad x = u - \frac{1}{2}.$$

Izračunajmo še oba integrala v zadnji enakosti.

$$\begin{aligned}
\int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v} \\
&= \frac{1}{2}\ln|v| + G \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2 + \frac{3}{4}\right| + G,
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$v = u^2 + \frac{3}{4}, \quad \mathrm{d}v = 2\,\mathrm{d}u.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{\frac{3}{4}} + 1\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3\cdot 2}\int \frac{1}{w^2+1}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan w + F \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}u + G,
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$w = \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \mathrm{d}w = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}u, \quad \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}w.$$

Torej

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u - \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}u + K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1-x^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \\
&\quad + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + H \\
&= -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1) + H
\end{aligned}$$

7. Izračunaj integral

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Imenovalec ima negativno diskriminanto, torej ga ne moremo razstaviti na linearne člene.

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1,$$

$$u = x+1, \quad x = u-1, \quad 2x+1 = 2(u-1)+1 = 2u-1,$$

$$du = dx,$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2u-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln u^2+1| - \arctan u + C \\
&= \ln|(x+1)^2+1| - \arctan(x+1) + C \\
&= \ln|x^2+2x+2| - \arctan(x+1) + C.
\end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \ln|v| + D \\ &= \ln|u^2+1| + D,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$v = u^2 + 1, \qquad \mathrm{d}v = 2u\ \mathrm{d}u$$

8. Izračunaj integral

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Imenovalec ima negativno diskriminanto, torej ga ne moremo razstaviti na linearne člene.

$$x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 5,$$

$$u = x+1, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad x = u-1, \quad 3x+1 = 3(u-1)+1 = 3u-2,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3u-2}{u^2+5}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{3u}{u^2+5}\,\mathrm{d}u - \int \frac{2}{u^2+5}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{3}{2}\ln|u^2+5| + \frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + +C \\ &= \frac{3}{2}\ln|(x+1)^2+5| - \frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C,\end{aligned}$$

kjer

$$\begin{aligned}\int \frac{3u}{u^2+5}\,\mathrm{d}u &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{3}{2}\ln|v| + D \\ &= \frac{3}{2}\ln|u^2+5| + D,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$v = u^2 + 5, \qquad \mathrm{d}v = 2u\ \mathrm{d}u.$$

Izračunajmo še integral

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{u^2+5}\,\mathrm{d}u &= \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{u^2}{5}+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{w^2+1}\,\mathrm{d}w = \frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan w + C = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + E\end{aligned}$$

kjer

$$w = \frac{u}{\sqrt{5}}, \qquad \mathrm{d}w = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}u.$$

9. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{4}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C,\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$\frac{x}{2} = u, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x.$$

10. Izračunaj integral

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Razcepimo integrand na parcialne ulomke

$$\frac{x-1}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \ln|x+1| - 2\frac{1}{x+1} + C.$$

11. Izračunaj integral

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+2x+6)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integrand razcepimo na parcialne ulomke.

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+2x+6},$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{-1}{6}, \quad C = \frac{4}{6}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(x^2+2x+6)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{4-x}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+5| + \sqrt{5}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + D \\ &= \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{12}\ln|x^2+2x+6| + \frac{\sqrt{5}}{6}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + D.\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali naslednji izračun drugega integrala na desni strani zadnje enakosti.

$$x^2+2x+6=(x+1)^2+5, \quad u=x+1, x=u-1.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{4-x}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{5-u}{u^2+5}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int \frac{u}{u^2+5}\,\mathrm{d}u + \frac{5}{u^2+5}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+5| + \sqrt{5}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int \frac{u}{u^2+5}\,\mathrm{d}u &= = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{2}\ln|v| + C_1 \\
&= -\frac{1}{2}\ln|u^2+5| + C_1
\end{aligned}$$

kjer

$$v=u^2+5, \quad \mathrm{d}v=2u\,\mathrm{d}u.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{5}{u^2+5}\,\mathrm{d}u &= 5\int \frac{1}{u^2+5}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{1}{\frac{u^2}{5}+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{5}\int \frac{1}{w^2+1}\,\mathrm{d}w \\
&= \sqrt{5}\arctan w + C_2 \\
&= \sqrt{5}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + C_2
\end{aligned}$$

kjer

$$w=\frac{u}{\sqrt{5}}, \quad \mathrm{d}w=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}u.$$

12. Izračunaj integral

$$\int \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko

$$u=\sin x, \quad \mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}+u}\right]\,\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}-u| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}+u| + D = \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}-\sin x| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}+\sin x| + D = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{|\sqrt{2}+\sin x|}{|\sqrt{2}-\sin x|} + D.
\end{aligned}$$

13. Izračunaj integral

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Upoštevamo

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right).$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{2} + C.
\end{aligned}$$

14. Izračunaj integral

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(-\cos u)+C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

15. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Vpeljemo novo spremenljivko

$$u = \sin x, \qquad \mathrm{d}u = \cos x \ \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} \ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-u^2} \ \mathrm{d}u \\
&= \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}\right] \ \mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + D \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + D \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|} + D.
\end{aligned}$$

16. Izračunaj integral

$$\int \cos^5 x \sin x \ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Vpeljemo novo spremenljivko

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x \ \mathrm{d}x,$$

$$\int \cos^5 x \sin x \ \mathrm{d}x = -\int u^5 \ \mathrm{d}u = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{(\sin x)^6}{6} + C.$$

Integracija iracionalnih funkcij: Integral $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \ \mathrm{d}x$ prevedemo z vpeljavo nove spremenljivke na integral oblike

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+A}} \ \mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+A}\right), \quad a > 0$$

in

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ \mathrm{d}u = \arcsin u + C, \quad a < 0.$$

Katero spremenljivko vpeljemo je razvidno iz izraza pod korenom v imenovalcu, ki ga dopolnimo do popolnega kvadrata.

17. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}} \ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Zapišemo

$$x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 5,$$

uvedemo novo spremenljivko

$$u = x + 1, \qquad du = dx,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2+5}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2+5}\right) + D \\ &= \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right) + D.\end{aligned}$$

18. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10x-1}}\,dx.$$

Rešitev:

Zapišemo

$$x^2 + 10x - 1 = (x+5)^2 - 25 - 1 = (x+5)^2 - 26,$$

uvedemo novo spremenljivko

$$u = x + 5, \qquad du = dx,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10x-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-26}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2-26}\right) + D \\ &= \ln\left(x+5+\sqrt{(x+5)^2-26}\right) + D.\end{aligned}$$

19. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+6}}\,dx.$$

Rešitev:

Zapišemo

$$-x^2 + 2x + 6 = -(x^2 - 2x - 6) = -((x-1)^2 - 7) = 7 - (x-1)^2,$$

vpeljemo novo spremenljivko

$$u = x - 1, \qquad du = dx.$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+6}}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{7-u^2}}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{7}}}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{7} \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ \mathrm{d}v \\
&= \arcsin v + C \\
&= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{7}} + C,
\end{aligned}
$$

kjer smo vpeljali

$$v = \frac{u}{\sqrt{7}}, \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{7}}\ \mathrm{d}u.$$

20. Izračunaj integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x+5}}\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Zapišemo

$$-x^2+6x+5 = -(x^2-6x-5) = -((x-3)^2-14) = -(x-3)^2+14,$$

vpeljemo novo spremenljivko

$$u = x-3, \qquad \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x.$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x+5}}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{14-u^2}}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{14}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{14}}}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{14} \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ \mathrm{d}v \\
&= \arcsin v + C \\
&= \arcsin \frac{x-3}{\sqrt{14}} + C,
\end{aligned}
$$

kjer smo vpeljali

$$v = \frac{u}{\sqrt{14}}, \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{14}}\ \mathrm{d}u.$$

21. Izračunaj integral

$$\int (x^2+2x+2)\sin 3x\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Integral rešujemo po metodi per partes oziroma z integracijo po delih

$$u = x^2 + 2x + 2, \qquad \mathrm{d}v = \sin 3x \ \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = 2x + 2, \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x,$$

$$\int (x^2+2x+2)\sin 3x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(x^2+2x+2)\cos 3x + \frac{1}{3}\int (2x+2)\cos 3x \ \mathrm{d}x$$

Za izračun integrala

$$\int (2x+2)\cos 3x \ \mathrm{d}x$$

ponovno uporabimo metodo per partes.

$$u = 2x + 2, \qquad \mathrm{d}v = \cos 3x \ \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = 2 \ \mathrm{d}x, \quad v = \frac{1}{3}\sin 3x,$$

$$\begin{aligned} \int (2x+2)\cos 3x \ \mathrm{d}x &= (2x+2)\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x \ \mathrm{d}x = \\ &= (2x+2)\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C. \end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned} &\int (x^2+2x+2)\sin 3x \ \mathrm{d}x = \\ = \ & -\frac{1}{3}(x^2+2x+2)\cos 3x + \frac{1}{3}\left((2x+2)\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\right) + D \\ = \ & \frac{1}{27}\left[-\big(9x^2+18x+16\big)\cos 3x + 6(1+x)\sin 3x\right] + D. \end{aligned}$$

22. Izračunaj integral

$$\int x^2 e^{-x} \ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integral rešujemo z integracijo po delih

$$u = x^2, \qquad \mathrm{d}v = e^{-x} \ \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = 2x \ \mathrm{d}x, \quad v = -e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} \ \mathrm{d}x &= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} \ \mathrm{d}x = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} \ \mathrm{d}x \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + E. \end{aligned}$$

kjer integral

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

ponovno rešujemo z metodo per partes.

$$u = x, \qquad \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad v = -e^{-x}.$$

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + D.$$

23. Izračunaj integral

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Integral izračunamo z integracijo po delih. Vpeljimo

$$u = \arcsin x, \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,\mathrm{d}x &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

kjer velja

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{2}2u^{\frac{1}{2}} + D\\ &= -\sqrt{1-x^2} + D.\end{aligned}$$

$$u = 1 - x^2, \quad -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u.$$

24. Izračunaj integral

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Integral bomo izračunali z integracijo po delih. Vpeljimo

$$u = x, \qquad \mathrm{d}v = \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= x\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.\end{aligned}$$

25. Izračunaj integral
$$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integral bomo izračunali z integracijo po delih. Naj bo
$$u=\arctan x, \qquad \mathrm{d}v=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\mathrm{d}u=\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x, \quad v=\sqrt{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x &= \arctan x\sqrt{x^2+1}-\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\\ &= \arctan x\sqrt{x^2+1}-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x\\ &= \arctan x\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

26. Izračunaj integral
$$\int x^2\ln(x+2)\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Integral bomo izračunali z integracijo po delih. Naj bo
$$u=\ln(x+2), \quad x^2\ \mathrm{d}x=\ \mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}u=\frac{1}{x+2}\ \mathrm{d}x, \quad v=\frac{x^3}{3}.$$

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x+2)\ \mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+2}\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+4x-8\ln(x+2)\right]+C\\ &= \frac{1}{3}\left(x^3+8\right)\ln(x+2)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{3}+C.\end{aligned}$$

8 Določeni integral

Naj bo f zvezna funkcija definirana na intervalu I. Določeni integral funkcije f označimo z $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ in ga izračunamo s pomočjo naslednje tako Newton-Leibnizeve formule

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kjer je F poljuben nedoločeni integral funkcije f. Uporabljali bomo tudi oznako

$$F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Uvedba nove spremenljivke v določeni integral:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ \mathrm{d}u,$$

kjer je

$$u = g(x), \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Integracija po delih: Pri integraciji po delih uporabimo formulo

$$\int_a^b u\ \mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\ \mathrm{d}u,$$

kjer za funkcijo u izberemo funkcijo, ki se pri odvajanju poenostavi, za $\mathrm{d}v$ pa izberemo izraz, ki ga znamo integrirati.

1. Izračunaj določene integrale

   (a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x$,

   (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$,

   (c) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ \mathrm{d}x$,

   (d) $\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\ \mathrm{d}x$,

   (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$,

   (f) $\int_1^e \ln x\ \mathrm{d}x$.

   Rešitev:

   (a)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = -\ln|u|\Big|_1^{\frac{1}{2}} + C = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + \ln|1| = \ln|1-x| + C,$$

kjer je

$$u = 1 - x = g(x), \qquad \mathrm{d}u = -\ \mathrm{d}x, \quad g(0) = 1, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Če izračunamo brez uvedbe nove spremenljivke, dobimo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x = -\ln|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| + \ln|1| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right|.$$

(b) Izračunajmo integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$. Ker je števec iste stopnje kot imenovalec, najprej delimo števec z imenovalcem in dobimo

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}.$$

Razcepimo na delne ulomke

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-x^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&= \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \\
&= \frac{x(A-B)+A+B}{(1-x)(1+x)}.
\end{aligned}$$

Sledita dve enačbi

$$0 = A + B, \quad 2 = A + B.$$

Od tod dobimo

$$A = 1, \quad B = 1.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \ln|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln|1+x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} + 0 - \ln|1-\frac{1}{2}| + \ln|1-0| + \ln|\frac{1}{2}+1| - \ln|0+1| \\
&= -\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_0^9 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{9^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right),
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$u = 2x{+}1 = g(x), \quad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u, \quad g(0) = 1, \quad g(4) = 9.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\ \mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{u}\right)\Bigg|_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali

$$u = 3{-}5x = g(x), \quad \mathrm{d}u = -5\,\mathrm{d}x, \quad -\frac{1}{5}\,\mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x, \quad g(1) = -2, \quad g(2) = -7.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x &= -\int_1^0 \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = -\arctan u\Bigg|_1^0 \\
&= -\arctan 0 + \arctan 1 = 0 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2. Izračunaj integral
$$\int_1^e x^2 \ln x\ \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integral rešujemo po metodi per partes.

$$u = \ln x, \quad \mathrm{d}v = x^2\ \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x, \quad v = \frac{x^3}{3},$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x &= \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} \\
&= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^e \\
&= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

3. Izračunaj integral

$$\int_0^1 x \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integral rešujemo po metodi per partes.

$$u = \arctan x, \qquad \mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x,$$

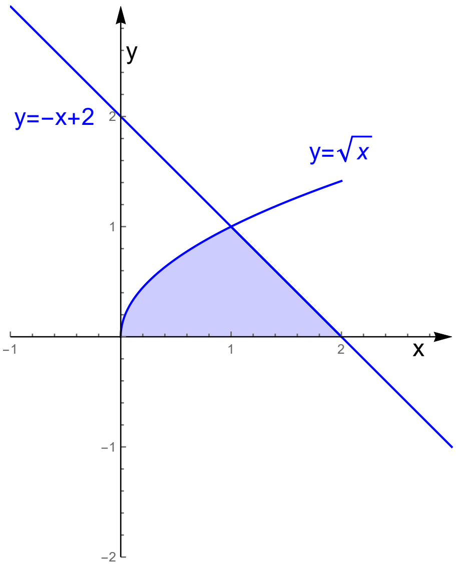
$$\mathrm{d}u = \frac{1}{1+x^2},$$

$$v = \frac{x^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arctan x \, \mathrm{d}x &= \left(\frac{x^2}{2}\arctan x\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(1 - \arctan 1\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

9 Uporaba določenega integrala

1. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$, $y = 0$.



Izračunajmo presečišče krivulj $y = \sqrt{x}$ in $y = -x + 2$.

$$\sqrt{x} = -x + 2,$$

torej

$$-x + 2 \geq 0, \quad x \leq 2,$$
$$x = x^2 - 4x + 4,$$
$$0 = x^2 - 5x + 4,$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = 1, 4.$$

Ob upoštevanju pogoja $x \leq 2$, ugotovimo, da je edina rešitev $x_1 = 1$. Ploščina lika je torej

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 (-x + 2)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\Big|_0^1 + \left(\frac{-x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2$$
$$= \frac{2}{3} + \left((-2+4) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)\right) = \frac{7}{6}.$$

2. Izraŭnaj ploščino lika omejenega s krivuljami $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{2}$.

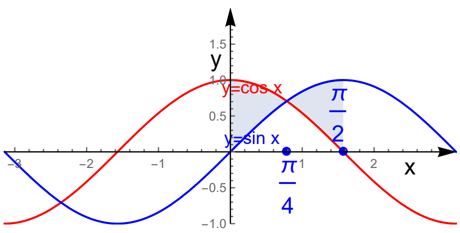
Rešitev:

Označimo s $Pl(S)$ ploščina lika S.

$$\begin{aligned} Pl(S) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos - \sin x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\ \mathrm{d}x \\ &= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) - \left(0 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Opomba: Ker je lik simetričen glede na premico $x = \frac{\pi}{4}$, bi lahko pri izračunu upoštevali, da je ploščina lika enaka

$$Pl(S) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\ \mathrm{d}x.$$

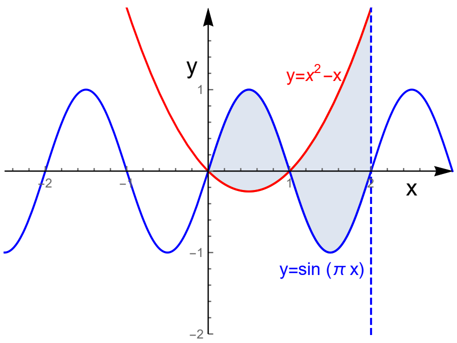


3. Lik S je omejen s krivuljami $y = \sin(\pi x)$, $y = x^2 - x$ in $x = 2$. Skiciraj lik S in izračunaj njegovo ploščino.

Rešitev: Ničli kvadratne funkcije $g(x) = x^2 - x = x(x-1)$ sta $x = 0$ in $x = 1$. Grafa funkcij $f(x) = \sin(\pi x)$ in $g(x) = x^2 - x$ se sekata v točkah $x = 0$ in $x = 1$. Naj bo $Pl(S)$ ploščina lika S. Izračunajmo

$Pl(S)$.

$$\begin{aligned}
&Pl(S) = \\
= \ & \int_0^1 \left(\sin(\pi x) - (x^2 - x)\right) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \left((x^2 - x) - \sin(\pi x)\right) \, \mathrm{d}x \\
= \ & \left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right)\Bigg|_1^2 \\
= \ & \left(\frac{\cos\pi}{\pi} + \frac{\cos 0}{\pi}\right) - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + \frac{\cos(2\pi)}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\cos\pi}{\pi}\right)\right] \\
= \ & 1 + \frac{4}{\pi}.
\end{aligned}$$



4. Določi ploščino lika , ki ga omejujejo krivulje $y = x + 3$, $y = 9 - x^2$, $x = 1$ in $x = 3$. Lik tudi skiciraj.

Rešitev: Določimo presečišče grafov funkcij $y = x + 3$ in $y = 9 - x^2$.

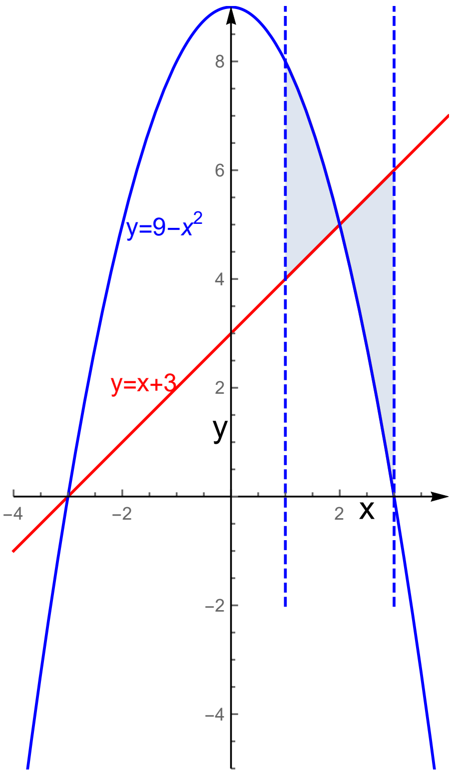
$$x + 3 = 9 - x^2,$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3.$$

Na intervalu $[1, 2]$ je graf funkcije $y = 9 - x^2$ nad premico z enčbo $y = x + 3$. Na intervalu $[2, 3]$ je premica z enačbo $y = x + 3$ nad graf0m funkcije $y = 9 - x^2$. Torej je ploščina lika $Pl(S)$ enaka

$$\begin{aligned} Pl(S) &= \int_1^2 \left((9-x^2)-(x+3)\right)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \left((x+3)-(9-x^2)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(-x^2-x+6\right)\,\mathrm{d}x + \int_2 3\left(x^2+x-6\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right)\Big|_2^3 \\ &= \frac{13}{6}+\frac{17}{6}=\frac{30}{6}. \end{aligned}$$



5. Izračunaj dolžino krivulje

$$y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Rešitev:

Dolžina krivulje je

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Prvi odvod je

$$y'(x) = 6\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{18}{2}x^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1+(9\sqrt{x})^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+81x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_1^8 2\sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\frac{1}{82}\Big|_1^{82} \\
&= \frac{2}{3\cdot 81}\left(82^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{243}\left(82\sqrt{82}-1\right),
\end{aligned}$$

pri čemer smo vpeljali novo spremenljivko

$$u = 1+81x = g(x), \qquad \mathrm{d}u = 81\ \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{81},$$

$$g(0)=1, \quad g(1)=82.$$

6. Določi volumen, ki ga dobimo z vrtenjem okoli x-osi funkcije $y=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-(0+0)\right) = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

7. Izračunaj ploščino lika S, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x+1$ in $y = x-1$.

Rešitev: Izračunajmo presečiča krivulj. V ta namen izrazimo spremenljivko x iz obeh enačb.

$$x = \frac{y^2-1}{2}, \quad x = y+1,$$

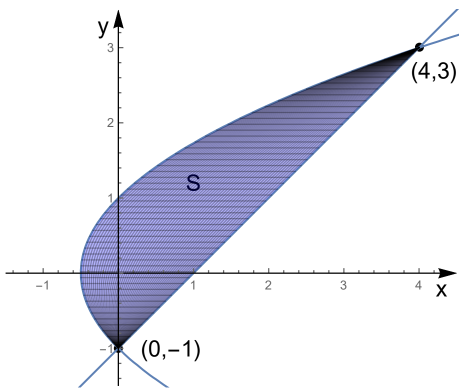
od tod dobimo

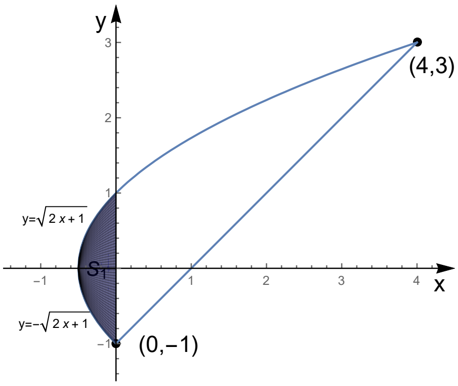
$$\frac{y^2-1}{2} = y+1,$$

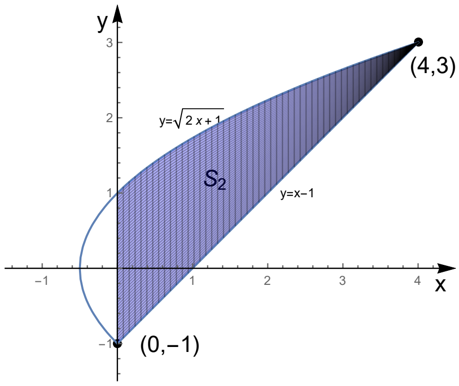
$$\begin{aligned} y^2 - 1 &= 2y + 2, \\ y^2 - 2y + 3 &= 0, \\ y_1 &= -1, y_2 = 3. \end{aligned}$$

Krivulji se sekata v točkah $(0,-1)$ in $(4,3)$. Spodnji rob lika sestoji iz krivulje $y = -\sqrt{2x+1}$ na intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ in krivulje $y = x - 1$ na intervalu $[0,4]$. Zgoraj del roba sestoji iz krivulje $y = \sqrt{2x+1}$ na intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$. Lik S razdelimo na dva lika S_1 in S_2, kar zapišemo $S = S_1 \cup S_2$. Lika S_1 in S_2 imata vsak zase to lastnost, da spodnji rob lika sestoji iz ene krivulje in zgornji del roba iz ene krivulje, kjer sta obe krivulji definirani na pravokotni projekciji danega lika na x os. Računajmo

$$\begin{aligned} Pl(S) &= Pl(S_1) + Pl(S_2) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x+1} - \left(-\sqrt{2x+1}\right)\right)\, \mathrm{d}x + \int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right)\, \mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\, \mathrm{d}x + \int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - x + 1\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^4 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left((27 - 8 + 4) - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{40}{3}. \end{aligned}$$





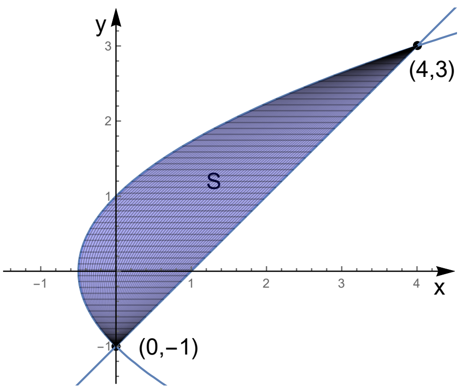


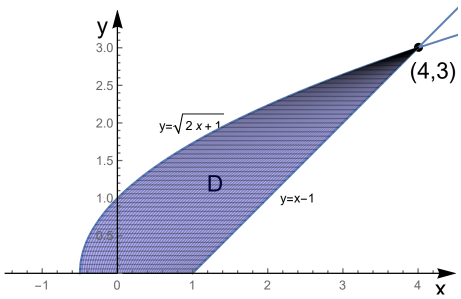
8. Lik S omejujeta krivulji $y^2 = 2x+1$ in $y = x-1$.

   (a) Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika S okrog x osi.

   (b) Izračunaj površino telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika S okrog x osi.

Rešitev: V rešitvi naloge (7) smo izraŭnali presečišča krivulj $y^2 = 2x+1$ in $y = x-1$ ter skicirali lik S. Naj bo D del lika S, ki leži nad x osjo.





(a) Volumen telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika S okrog osi x je enak volumnu telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika D okrog osi x, kjer je lik D omejen s krivuljami $y = 0$, $y = \sqrt{2x+1}$ in $y = x-1$.

Volumen lika telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika D okrog osi x je

$$
\begin{aligned}
& V = \\
= \quad & \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_{1}^{4} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x \\
= \quad & \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} |2x+1| \,\mathrm{d}x - \pi \int_{1}^{4} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x \\
= \quad & \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} (2x+1) \,\mathrm{d}x - \pi \int_{1}^{4} \left(x^2-2x+1\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
= \quad & \pi \left(2\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} - \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{1}^{4} \\
= \quad & \pi \left[(4^2+4) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right] - \pi \left[\left(\frac{4^3}{3} - 2\frac{4^2}{2} + 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\frac{1^2}{2} + 1\right)\right] \\
= \quad & \pi\frac{81}{4} - 9\pi = \pi\frac{45}{4}.
\end{aligned}
$$

(b) Površina telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika S okrog osi x je enaka površini telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika D okrog osi x, kjer je lik D omejen s krivuljami $y=0$, $y=\sqrt{2x+1}$ in $y=x-1$.

Površina lika telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika D okrog osi x je

$$
\begin{aligned}
&P = \\
= \quad & 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{2x+1}\right)'\right]^2}\ \mathrm{d}x + 2\pi \int_1^4 (x-1)\sqrt{1+\left[(x-1)'\right]^2}\ \mathrm{d}x \\
= \quad & 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right]^2}\ \mathrm{d}x + 2\pi \int_1^4 (x-1)\sqrt{1+1^2}\ \mathrm{d}x \\
= \quad & 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\frac{1}{2x+1}}\ \mathrm{d}x + 2\pi \int_1^4 (x-1)\sqrt{2}\ \mathrm{d}x \\
= \quad & 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}\ \mathrm{d}x + 2\sqrt{2}\pi \int_1^4 (x-1)\ \mathrm{d}x \\
= \quad & 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+2}\ \mathrm{d}x + 2\sqrt{2}\pi \int_1^4 (x-1)\ \mathrm{d}x \\
= \quad & 2\pi\frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right) + 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^4 \\
= \quad & 2\pi\frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right) + 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{4^2}{2}-4-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right) \\
= \quad & 2\pi\frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right) + 2\pi\frac{9}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+2}\ \mathrm{d}x &= \int_1^{10} \frac{1}{2}\sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10} \\
&= \frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right),
\end{aligned}
$$

kjer smo vpeljali novo spremeljivko

$$u = 2x+2 = g(x), \qquad \mathrm{d}u = 2\ \mathrm{d}x$$

in so meje po vpeljavi nove sprmenljivke

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad g(4) = 10.$$