MATEMATIKA II za Kemijske inženirje

Naloge z rešitvami*

Darja Govekar Leban
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2023

*Kemijsko inženirstvo , Fakulteta za kemijo in kemisjko tehnologijo, Univerza v Ljubljani

Kazalo

1 Krivulje in ploskve **4**
1.1 Parametrizacija krivulj . . . 4
1.2 Tangenta na krivuljo . . . 8
1.3 Dolžina krivulje in naravna parametrizacija . . . 11
1.4 Ploskve . . . 18
1.5 Tangentna ravnina na ploskev . . . 21

2 Dvojni in trojni integrali **27**
2.1 Dvojni integrali v kartezičnih koordinatah . . . 27
2.2 Uvedba novih koordinat . . . 30
2.3 Dvojni integrali v polarnih koordinatah . . . 32
2.4 Trojni integrali v kartezičnih koordinatah . . . 34

3 Trojni integrali v cilindričnih koordinatah **35**
3.1 Trojni integrali v sferičnih koordinatah . . . 38

4 Krivuljni integrali **41**
4.1 Krivuljni integrali vektorskega polja . . . 41
4.2 Krivuljni integrali skalarnega polja . . . 46

5 Ploskovni integrali **50**
5.1 Ploskovni integral skalarnega polja . . . 50
5.2 Ploskovni integral vektorskega polja . . . 62

6 Integralski izreki **65**
6.1 Gaussov izrek . . . 65
6.2 Stokesov izrek . . . 67
6.3 Greenova formula . . . 73
6.4 Krivuljni integral potencialnega polja . . . 75

7 Fourireove vrste **79**
7.1 Fourireova vrsta na intervalu $[-l, l]$ . . . 79
7.2 Sinusna in kosinusna vrsta na intervalu $[0, l]$ . . . 85

8 Parcialne diferencialne enačbe **88**
8.1 Valovna enačba - nihanje neskončne strune . . . 88
8.2 Valovna enačba - nihanje končne strune . . . 89

8.3 Toplotna enačba 99
8.4 Dirichletova naloga za pravokotnik 101

9 Verjetnost 103
9.1 Verjetnost vsote dogodkov 103
9.2 Pogojna verjetnost 104

1 Krivulje in ploskve

1.1 Parametrizacija krivulj

1. Naj bo $f :\to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Krivulja C naj bo graf funkcije $G(f) = \{(x, f(x); x \in [a, b]\}$, Parametriziraj krivuljo C.

   Rešitev:

   Parametrizacija je naslednja

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to \vec{r}(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a, b].$$

2. Krivulja C je lok na paraboli $y = x^2$ med točkama $(-1, 1)$ in $(1, 1)$. Parametriziraj krivuljo C.

   Rešitev:

   Krivulja C je graf $G(f) = \{(x, x^2), x \in [-1, 1]\}$. Parametrizacija je torej naslednja

$$\vec{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to \vec{r}(x) = (x, x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

3. Krivulja C naj bo krožnica s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišču. Parametriziraj krivuljo C.

   Rešitev: Parametrizacija

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

4. Krivulja C_1 naj bo zgornja polovica krožnice s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišču in Krivulja C_2 naj bo spodnja polovica krožnice s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišč Parametriziraj krivulji C_1 in C_2.

   Rešitev:

   Parametrizacija krivulje C_1:

   1. način:

$$\vec{r} : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to \vec{r}(x) = (x, \sqrt{R^2 - x^2}), \quad x \in [-R, R].$$

2. način:

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Parametrizacija krivulje C_2:

1. način:

$$\vec{r} : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to \vec{r}(x) = (x, -\sqrt{R^2 - x^2}), \quad x \in [-R, R].$$

2. način:

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \varphi \in [\pi, 2\pi].$$

5. Krivulja C_1 naj bo desna polovica krožnice s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišču in Krivulja C_2 naj bo leva polovica krožnice s polmerom R in s središčem v koordinatnem izhodišč Parametriziraj krivulji C_1 in C_2.

Rešitev:

Parametrizacija krivulje C_1:

1. način:

$$\vec{r} : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$$

$$y \to \vec{r}(y) = (\sqrt{R^2 - y^2}, y), \quad y \in [-R, R].$$

2. način:

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Parametrizacija krivulje C_2:

1. način:

$$\vec{r} : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$$

$$y \to \vec{r}(y) = (-\sqrt{R^2 - y^2}, y), \quad y \in [-R, R].$$

2. način:

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

6. Krivulja C naj bo krožnica s polmerom R in s središčem v točki (x_0, y_0). Parametriziraj krivuljo C.

   Rešitev: Parametrizacija krivulje C je

   $$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

   Opomba: Naj bo $(x, y) = (x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)$. Kot φ je kot med pozitivnim poltrakom, ki je vzporeden osi x z začetkom v točki y_0 in poltrakom, ki gre skozi točko (x, y) z začetkom v točki (x_0, y_0).

7. Določi krivuljo, ki je podana s parametrizacijo

   $$\begin{aligned} \varphi \to \vec{r}(\varphi) &= (x(\varphi), y(\varphi)) \\ &= (4\cos\varphi, 3\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

   Enačbo krivulje zapiši tudi v implicitni obliki.

   Rešitev: Velja

   $$\left(\frac{x(\varphi)}{4}\right)^2 + \left(\frac{y(\varphi)}{3}\right)^2 = 1,$$

   torej krivulja je elipsa z enačbo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

8. Krivulja C naj bo elipsa s središčem v točki (x_0, y_0) in polosema a in b. Parametriziraj krivuljo C.

   Rešitev: Parametrizacija je

   $$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (x_0 + a\cos\varphi, y_0 + b\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

9. Poišči kakšno parametrizacijo krivulje $\mathcal{K}$, ki je presek sfere z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in ravnine $x + z = 1$.

   Rešitev:

   Krivulja $\mathcal{K}$ je krožnica-rob kroga, kajti presek dane ravnine in sfere je krog. Izrazimo z: $z = 1 - x$, vstavimo v enačbo sfere, in dobimo $x^2 + y^2 + (1 - x)^2 = 1$:

   $$x^2 + y^2 + 1 - 2x + x^2 = 1,$$

   $$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2},$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1,$$
$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1.$$

Pravokotna projekcija krivulje $\mathcal{K}$ v ravnino $z=0$ je elipsa s središčem $(\frac{1}{2},0)$ in polosema $a=\frac{1}{2}$ in $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Parametriziramo elipso, to je, uvedemo koordinate $x(t)$ in $y(t)$ na naslednji način

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,$$
$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t.$$

Tretjo koordinato $z(t)$ točke $(x(t),y(t),z(t))$ na krivulji $\mathcal{K}$ izrazimo z $x(t)$ in $y(t)$ s pomočjo enačbe $z=1-x$. In dobimo parametrizacijo

$$t\to\vec{r}(t)=\left(\frac{1+\cos t}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\frac{1-\cos t}{2}\right),\quad t\in[0,2\pi].$$

10. Za dano parametrizacijo krivulje C,

$$t\to\vec{r}(t)=\left(\frac{1-\cos t}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\frac{1+\cos t}{2}\right),\quad t\in[0,2\pi)$$

poišči vrednost parametra t_0, da velja

$$\vec{r}\,(t_0)=T_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right).$$

Rešitev: Veljati mora

$$\frac{1-\cos t_0}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_0=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1+\cos t_0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dobimo

$$t_0=\frac{\pi}{2}.$$

11. Krivulja C naj bo daljica od točke A do točke B, kjer je $A=(-1,2,0)$ in $B=(-7,2,8)$. Parametriziraj daljico C.

Rešitev:

Parametrizacija

$$t\to\vec{r}(t)=\vec{r}_A+t\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right),\quad t\in[0,1],$$

kjer sta $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_B$ krajevna vektorja do točke A oziroma do točke B.

$$t\to\vec{r}(t)=(-1,2,0)+t\left(-6,0,8\right),\quad t\in[0,1],$$

12. Poišči kakšno parametrizacijo krivulje C v $\mathbb{R}^2$, ki je podana z enačbo $x^2 + y^2 = 2x$.

    Rešitev:

    $$C = \{(x, y), x^2 + y^2 = 2x\}.$$

    Pretvorimo enačbo $x^2+y^2 = 2x$ v ekvivalentno obliko $(x-1)^2+y^2 = 1$. Slednja enačba predstavlja krožnico s polmerom 1 in s središčem v v točki $(1, 0)$.

    1. možnost parametrizacije:

    Tocka $(x-1, y)$ leži na krožnici s polmerom 1 in s središčem v izhodišču. Vpeljemo polarne koordinate

    $$x(\varphi) - 1 = \cos\varphi, \quad y(\varphi) = \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

    Imamo torej parametrizacijo

    $$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (1 + \cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

    2. možnost parametrizacije:

    Vpeljimo polarne koordinate

    $$x(\varphi) = R(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = R(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

    kjer se radij $R(\varphi)$ spreminja s kotom φ. Poiščimo $R(\varphi)$. Vstavimo $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ v enačbo krožnice $x^2 + y^2 = 2x$ in dobimo

    $$R^2(\varphi)\cos^2\varphi + R(\varphi)^2\sin^2\varphi = 2R(\varphi)\cos\varphi,$$

    $$R^2(\varphi) = 2R(\varphi)\cos\varphi,$$

    $$R(\varphi) = 2\cos\varphi.$$

    Torej imamo parametrizacijo

    $$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = \left(2\cos^2\varphi, 2\cos\varphi\sin\varphi\right), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

1.2 Tangenta na krivuljo

Enačba tangente na krivuljo $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ v točki $\vec{r}\,(t_0)$ je

$$\vec{R}\,(\lambda) = \vec{r}\,(t_0) + \lambda\dot{\vec{r}}\,(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

kjer je $\vec{R}\,(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ točka na tangenti.

1. Izračunaj enačbo tangente na

   (a) krožnico K z enačbo $x^2+y^2=1$ v točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   (b) krivuljo s parametrizacijo $\vec{r}\,(t)=\left(e^t,\frac{1}{1+t},\sin t\right)$ v točki $(1,1,0)$.

Rešitev:

(a) 1. način: Krožnico K parametriziramo na naslednji način:

$$\varphi\to r(\vec{\varphi})=(\cos\varphi,\sin\varphi)\,,\quad \varphi\in[0,2\pi].$$

Poiščimo φ_0 za katerega velja

$$\vec{r}(\varphi_0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dobimo

$$\varphi_0=\frac{3\pi}{4}.$$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi)=(-\sin\varphi,\cos\varphi)\,,$$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi_0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\vec{R}\,(\lambda)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

2. način: Točka $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ leži na zgornji polovici krožnice. Da poiščemo tangento v točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ je dovolj parametrizirat zgornjo polovico krožnice, kjer lahko uporabimo kar kartezične koordinate. Parametrizacija zgornje polovice krožnice je naslednja:

$$x\to\vec{r}(x)=(x,\sqrt{1-x^2}),\quad x\in[-1,1].$$

Poiščimo x_0 za katerega velja

$$\vec{r}(x_0)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$x_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\dot{\vec{r}}(x)=\left(1,-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\dot{\vec{r}}(x_0)=\dot{\vec{r}}(-\frac{1}{\sqrt{2}})=(1,1)\,,$$

Enačba tangente:

$$\vec{R}\,(\lambda) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \lambda\,(1,1)\,, \lambda \in \mathbb{R},$$

kjer je

$$\vec{R}\,(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda)).$$

Lahko pa tudi tudi zapišemo enačbo tangente na graf funkcije f, kjer je $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ v točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tedaj $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ in $y'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$ in enačba tangente je

$$y = x + \sqrt{2}$$

oziroma v vektorski obliki

$$\vec{R}(\lambda) = (0, \sqrt{2}) + \lambda(1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Poiščimo točko t_0 za katero velja

$$\vec{r}(t_0) = (1,1,0).$$

Dobimo

$$t_0 = 0.$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(e^t, -\frac{1}{(1+t)^2}, \cos t\right),$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (1,-1,1),$$

$$\vec{R}\,(\lambda) = (1,1,0) + \lambda\,(1,-1,1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

oziroma $x - 1 = 1 - y = z$.

2. Na krivulji, ki je podana s prametrizacijo

$$t \to \vec{r}(t) = \left(\cos t, \sin t, e^t\right),$$

določi vsaj eno točko, v kateri je tangenta na to krivuljo vzporedna ravnini

$$\sqrt{3}x + y - 4 = 0.$$

Rešitev: Normala ravnine je vektor $(\sqrt{3}, 1, 0)$. Tangenta na krivuljo v točki t_0 ima enačbo

$$\vec{R}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) = \vec{r}(t_0) + \lambda\dot{\vec{r}}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Iščemo točko t_0, za katero velja

$$\dot{\vec{r}}(t_0)\vec{n} = 0.$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \left(-\sin t_0, \cos t_0, e_0^t\right)$$

$$\left(-\sin t_0, \cos t_0, e_0^t\right)\left(\sqrt{3}, 1, 0\right) = 0,$$

$$-\sqrt{3}t_0 + \cos t_0 = 0,$$

$$\tan t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Npr: $t_0 = \frac{\pi}{6}$. V točki $T_0 = \vec{r}(t_0) = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}, e^{\frac{\pi}{6}}\right)$ je tangenta vzporedna z ravnino $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

1.3 Dolžina krivulje in naravna parametrizacija

Dolžina krivulje s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$, $t \in [a, b]$, je enaka

$$\int_a^b \left|\dot{\vec{r}}\,(t)\right| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{x}\,(t)^2 + \dot{y}\,(t)^2 + \dot{z}\,(t)^2} \,\mathrm{d}t.$$

Naravni parameter krivulje s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ in začetno točko $\vec{r}\,(t_0)$ je enak

$$s\,(t) = \int_{t_0}^t \left|\dot{\vec{r}}\,(u)\right| \,\mathrm{d}u.$$

Če je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom, velja $\|\vec{r}\,'(s)\| = 1$. **Upognjenost (fleksijska ukrivljenost)** krivulje s parametrizacijo $\vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ je enaka

$$\kappa = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t_0)\right|^3}.$$

Če je parametrizacija naravna, je $\kappa = |\vec{r}\,''(s_0)|$.

Zvitost (torzijska ukrivljenost) krivulje s parametrizacijo $\vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ je enaka

$$\omega = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right) \cdot \dddot{\vec{r}}\,(t_0)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right\|^2} = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(t_0), \ddot{\vec{r}}(t_0), \dddot{\vec{r}}\,(t_0)\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right\|^2}.$$

Če je parametrizacija naravna, je

$$\omega = \frac{(\vec{r}\,'(s_0) \times \vec{r}\,''(s_0)) \cdot \vec{r}\,'''(s_0)}{\|\vec{r}\,''(s_0)\|^2}.$$

1. Naj bo $a > 0$ in $\mathcal{K} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2,\, z = 0\}$ krožnica.

   (a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ z naravnim parametrom.

   (b) Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) in zvitost (torzijsko ukrivljenost) krivulje $\mathcal{K}$.

Rešitev:

(a) Parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$ je

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Odvod je

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, 0)\,,$$

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t a\ \mathrm{d}\tau = at.$$

$$t = \frac{s}{a}.$$

Naravna parametrizacija je

$$s \to \vec{r}(s) = \left(\cos\frac{s}{a}, \sin\frac{s}{a}, 0\right), \quad s \in [0, 2\pi a].$$

(b) Flkesijska ukrivljenost v pljubni točki $\vec{r}(s)$ je

$$\kappa(s) = |\vec{r}''(s)|.$$

$$\vec{r}'(s) = \left(-a\sin\frac{s}{a}, a\cos\frac{s}{a}, 0\right),$$

$$\vec{r}''(s) = \frac{1}{a^2}\left(-a\cos\frac{s}{a}, -\sin\frac{s}{a}, 0\right),$$

$$\kappa(s) = |\vec{r}''(s)| = \frac{1}{a^2}a = \frac{1}{a}.$$

Torzjska ukrivljenost $\omega(s)$ v poljubni točki na krivulji je

$$\omega(s) = 0,$$

ker krivulja leži v ravnini.

2. Parametriziraj daljico od točke $A(-1,2,0)$ do točke $B(-7,2,8)$ z naravnim parametrom.

   Rešitev: Označimo z $\vec{r}_T$ krajevni vektor do točke T in z $\overrightarrow{AB}$ vektor od točke A do točke B. Daljico parametriziramo na naseldnji način:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1],$$

$$\vec{AB} = (-6,0,8),$$

$$\vec{r}(t) = (-1,2,0) + t(-6,0,8).$$

   Zapišimo enačbo premice še v parametrični obliki

$$x(t) = -1 - 6t, \quad y(t) = 2, \quad z(t) = 8t.$$

   Poiščimo še naravno parametrizacijo

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-6,0,8),$$

$$s(t) = \int_0^t \dot{\vec{r}}(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)}\ \mathrm{d}\tau =$$

$$\int_0^t \sqrt{100}\ \mathrm{d}\tau = 10t.$$

$$s = 10t,$$

$$x(t(s)) = -1 - 6\frac{s}{10},$$

$$y(t(s)) = 2,$$

$$z(t(s)) = 8\frac{s}{10}.$$

$$s \to \vec{r}(s) = \left(-1 - \frac{3s}{5}, 2, \frac{4}{5}s\right), \quad s \in [0,10].$$

3. Krivulja K je določena kot presek ploskev z enačabama $x^2 = 3y$ in $2xy = 9z$.

   (a) Določi naravni parameter za krivuljo K in dolžino odseka krivulje K med točkama $(0,0,0)$ in $(3,3,2)$.

   (b) Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) in zvitost (torzijsko ukrivljenost) krivulje $\mathcal{K}$ v točki $(0,0,0)$.

   (c) Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) v točki $(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{27})$.

Rešitev: Izrazimo

$$y = \frac{x^2}{3}, \quad z = 2xy = \frac{2x^3}{27},$$

in dobimo parametrizacijo krivulje K. Vlogo parametra igra spremenljivka x. Pišemo t namesto x.

$$t \to \vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{3}, 2\frac{t^3}{27}\right), \quad t \in [0,3].$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{2t}{3}, \frac{6t^2}{27}\right),$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \frac{1}{9}\sqrt{4t^4 + 36t^2 + 81} = \frac{1}{9}\sqrt{(2t^2+9)^2} = \frac{1}{9}\left(2t^2+9\right),$$

(a) Izračunajmo dolžino krivulje

$$L = \int_0^3 |\dot{\vec{r}}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = \int_0^3 \frac{1}{9}\left(2\tau^2+9\right)\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{9}\left[\frac{2\tau^3}{3} + 9\tau\right]_0^3 = 5.$$

Poiščimo naravno parametrizacijo

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{1}{9}\left(2\tau^2+9\right)\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{9}\left[\frac{2\tau^3}{3} + 9\tau\right]_0^t = \frac{2t^3}{27} + t.$$

Vemo, da je $s = s(t)$, $t \in [0,3]$, naraščajoča funkcija, zato obstaja inverzna funkcija $t = t(s)$, $s \in [0,5]$, ki jo v našem primeru ne znamo eksplicitno poiskati. Inverzna funkcija $t = t(s)$ ustreza enačbi

$$s = s(t(s)) = \frac{2(t(s))^3}{27} + t(s), \quad s \in [0,5].$$

Izrazimo parametrizacijo z naravnim parametrom

$$s \to \vec{r}(s) = \left(t(s), \frac{t(s)^2}{3}, \frac{2(t(s))^3}{27}\right), \quad s \in [0,5].$$

(b) Izračunajmo še fleksijsko ukrivljenost v točki $(0,0,0)$.

$$\vec{r}(t_0) = (0,0,0).$$

Od tod dobimo

$$t_0 = 0,$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{2t}{3}, \frac{6t^2}{27}\right),$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t_0) &= (1,0,0)\,,\\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \left(0,\frac{2}{3},\frac{12t}{27}\right),\\
\ddot{\vec{r}}(t_0) &= \left(0,\frac{2}{3},0\right),\\
\dddot{\vec{r}}(t) &= \left(0,0,\frac{12}{27}\right),\\
|\dot{\vec{r}}(t_0)| &= 1,\\
\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0) &= \left(0,\frac{2}{3},0\right),\\
|\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)| &= \frac{2}{3},\\
\kappa(t_0) &= \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t_0)\right|^3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Izračunajmo še torzijsko ukrivljenost v točki $\vec{r}(t_0) = (0,0,0)$, kjer je $t_0 = 0$.

$$\omega(t_0) = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(t_0),\ddot{\vec{r}}(t_0),\dddot{\vec{r}}(t_0)\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right\|^2}.$$

$$\left(\dot{\vec{r}}(t_0),\ddot{\vec{r}}(t_0),\dddot{\vec{r}}(t_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{12}{27}\end{vmatrix} = \frac{8}{27}.$$

$$\left\|\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right\|^2 = \frac{4}{9}.$$

Torzijska ukrivljenost v toški $(0,0,0)$ je $\frac{2}{3}$.

(c) Izračunajmo še fleksijsko ukrivljenost v točki $(1,\frac{1}{3},\frac{2}{27})$. Poščimo t_0 za katero velja

$$\vec{r}(t_0) = (1,\frac{1}{3},\frac{2}{27}).$$

Dobimo $t_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t_0) &= \left(1,\frac{2}{3},\frac{6}{27}\right),\\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \left(0,\frac{2}{3},\frac{12t}{27}\right),
\end{aligned}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t_0) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{12}{27}\right),$$

$$\kappa(t_0) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}{|\dot{\vec{r}}(t_0)|^3} =$$

$$|\dot{\vec{r}}(t_0)| = \frac{11}{9},$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0) = (4/27, -(4/9), 2/3),$$

$$|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)| = \sqrt{\frac{16}{27^2} + \frac{16}{81} + \frac{4}{9}} = \frac{22}{27}.$$

Fleksijska ukrivljenost v točki $(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{27})$ je

$$\kappa(t_0) = \frac{\frac{22}{27}}{\frac{11^3}{9^3}} = \frac{54}{121}.$$

4. Naj bosta $a, b > 0$. Krivulja $\mathcal{K}$ je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = \left(b \sin t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, a \cos t\right)$$

Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) krivulje $\mathcal{K}$ v točki $(0, 1, a)$.
Rešitev:

Poiščimo točko t_0 za katero velja $\vec{r}\,(t_0) = (0, 1, a)$. Dobimo $t_0 = 0$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(b \cos t, \frac{e^t - e^{-t}}{2}, -a \sin t\right),$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left(-b \sin t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, -a \cos t\right),$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (b, 0, 0),$$

$$\ddot{\vec{r}}(t_0) = (0, 1, -a),$$

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0) = (b, 0, 0) \times (0, 1, -a) = (0, ab, b),$$

$$\left|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right| = |(0, ab, b)| = b\sqrt{1 + a^2},$$

$$\left|\dot{\vec{r}}(t_0)\right| = b,$$

$$\kappa\,(t_0) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t_0)\right|^3} = \frac{b\sqrt{1 + a^2}}{b^3} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{b^2}.$$

5. Krivuljo C, ki je podana s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ z začetno točko $(1,0,0)$ parametriziraj z naravnim parametrom in izračunaj fleksijsko ukrivljenost v točki $T_1(0,1,\frac{\pi}{2})$.
Rešitev: Iz enakosti $\vec{r}(t_0) = (1,0,0)$, dobimo $t_0 = 0$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)\,,$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2},$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\vec{r}}(\tau)|\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{2}\ \mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t,$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}},$$

Dobimo naslednjo parametrizacijo z naravnim parametrom

$$s \to \vec{r}(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Izračunajmo še fleksijsko ukrivljensot v točki $T_1(0,1,\frac{\pi}{2})$ s pomočjo naravne parametrizacije. Poiščimo točko s_0 za katero velja $\vec{r}(s_1) = T_1$. Dobimo $s_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$\kappa(s_1) = |\ddot{\vec{r}}(s_1)|,$$

$$\dot{\vec{r}}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\ddot{\vec{r}}(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\ddot{\vec{r}}(s_1) = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\kappa(s_1) = |\ddot{\vec{r}}(s_1)| = \left|\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)\right| = \frac{1}{2}.$$

Opomba: Fleksijsko ukrivljensot v točki $T_1(0,1,\frac{\pi}{2})$ bi lahko izračunali tudi s pomočjo začetne prarametrizacije $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Poiščemo točko t_1 za katero velja $\vec{r}(t_1) = T_1$. Dobimo $t_1 = \frac{\pi}{2}$. Fleksijska ukrivljenost v točki $T_1(0,1,\frac{\pi}{2})$ je potem enaka

$$\kappa(t_1) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t_1) \times \ddot{\vec{r}}(t_1)\right|}{\left|\dot{\vec{r}}(t_1)\right|^3}.$$

1.4 Ploskve

Normala tangentne ravnine na ploskev ima normalo

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, če je ploskev podana s parametrizacijo $(x, y, z) = \vec{r}\,(u, v)$,
- $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, če je ploskev podana kot graf funkcije $z = f\,(x, y)$,
- $\operatorname{grad}(F)$, če je ploskev podana kot v implicitni obliki $F\,(x, y, z) = 0$.

1. Poišči kakšno parametrizacio ploskve P v $\mathbb{R}^3$, ki je podana z enačbo $x^2 + y^2 = 2x$.

   Rešitev: Ploskev P je množica točk.

   $$P = C = \{(x, y, z)\,, x^2 + y^2 = 2x\}.$$

   Enačba $x^2 + y^2 = 2x$ je ekvivalentna enačbi $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Ploskev P prestavlja plašč neskončnega valja (cilindra), katerega os je os z in ima polmer enak 1. Pravokotna projekcija ploskve P v ravnino $z = o$ je enaka krožnici C s polmerom 1 in s središčem v izhodišču.

   1. možnost parametrizacije:

   Tocka $(x-1, y, z)$ leži na krožnici s polmerom 1 in s središčem v točki $(0, 0, z)$. Pravokotna projekcija te krožnice je krožnica C. Torej lahko vpeljemo cilindrične koordinate

   $$x(\varphi, z) - 1 = \cos\varphi, \quad y(\varphi, z) = \sin\varphi, \quad z(\varphi, z) = z, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

   Imamo torej parametrizacio

   $$(\varphi, z) \to \vec{r}(\varphi, z) = (x(\varphi, z), y(\varphi, z), z(\varphi, z)) = (1 + \cos\varphi, \sin\varphi, z)\,,$$

   $$\varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

   2. možnost parametrizacije:

   Vpeljimo koordinate

   $$x(\varphi, z) = R(\varphi, z)\cos\varphi, \quad y(\varphi, z) = R(\varphi, z)\sin\varphi, \quad z(\varphi, z) = z,$$

   $$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad z \in \mathbb{R}.$$

kjer se radij $R(\varphi, z)$ pri fisknem z spreminja s kotom φ. Poiščimo $R(\varphi, z)$. Vstavimo $x(\varphi, z)$, $y(\varphi, z)$ v enačbo krožnice $x^2 + y^2 = 2x$ in dobimo

$$R^2(\varphi, z)\cos^2\varphi + R(\varphi, z)^2\sin^2\varphi = 2R(\varphi, z)\cos\varphi,$$

$$R^2(\varphi, z) = 2R(\varphi, z)\cos\varphi,$$

$$R(\varphi, z) = 2\cos\varphi.$$

Torej imamo parametrizacijo

$$\begin{aligned}(\varphi, z) \to \vec{r}(\varphi, z) &= (x(\varphi, z), y(\varphi, z), z(\varphi, z),) \\ &= \left(2\cos^2\varphi, 2\cos\varphi\sin\varphi, z\right), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Parametriziraj ploskev P v prostoru , ki je podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

   Rešitev: Enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ploskve P preuredimo in dobimo ekvivalentno enačbo

   $$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4},$$

   kar predstavlja sfero s središčem v točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ in polmerom $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Naj bo (x, y, z) poljubna točka na sferi P, točka $\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}\right)$ leži sferi s središčem v koordinatnem izhodišču in s polmerom $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vpeljemo sferične koordinate in dobimo

   $$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\cos\theta, \quad y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\theta, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,$$

   $$\theta \in [0, 2\pi], \quad \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

   Tako dobimo željeno parametrizacijo

   $$(\varphi, \theta) \to \vec{r}\,(\varphi, \theta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\cos\theta, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin, \theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right),$$

   $$\theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Parametriziraj ploskev P v prostoru , ki je podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Rešitev: Enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ploskve P preuredimo in dobimo ekvivalentno enačbo

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

kar predstavlja sfero s središčem v točki $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ in polmerom $\frac{1}{2}$.

1. način parametrizacije:

Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na sferi P. Točka $\left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$ leži na sferi s polmerom $\frac{1}{2}$ in s središčem v koordinatnem izhodišču. Vpeljemo sferične koordinate in dobimo

$$x = \frac{1}{2}\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\theta, \quad z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\varphi,$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

φ je kot med ravnino $z = \frac{1}{2}$ in daljico od točke $(0, 0, \frac{1}{2})$ (središča sfere do točke T.

2. način parametrizacije:

Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na sferi P. Vpeljemo koodrinate

$$x(\varphi, \theta) = r(\varphi, \theta)\cos\varphi\cos\theta, \quad x(\varphi, \theta) = r(\varphi, \theta)\cos\varphi\sin\theta, \quad z(\varphi, \theta) = r(\varphi, \theta)\sin\varphi,$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

φ je kot med ravnino $z = 0$ in daljico od izhodišča do točke T. Velja $r = r\,(\varphi, \theta)$. Poglejmo kako se radij spreminja s kotom φ in s kotom θ.

$$(r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r\sin\varphi,$$

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r\sin\varphi,$$

$$r^2 = r\sin\varphi,$$

$$r = \sin\varphi.$$

Torej r je odvisen od kota φ, kar lahko ugotovimo tudi geometrijsko. Tako imamo parametrizacijo

$$(\varphi, \theta) \to \vec{r}(\varphi, \theta) = \left(\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, \sin^2\varphi\right),$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

1.5 Tangentna ravnina na ploskev

4. Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ v točki $(1, 1, f(1, 1))$.

Rešitev:

Pišimo $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Ploskev P je graf funkcije f, torej

$$P = \{(x, y, f(x, y))\, ;(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Normala na ploskev P v točki $((x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y,$$

od koder dobimo da je normala na ploskev P v točki $(1, 1, f(1, 1))$ enaka $(-2. - 4, 1)$.

Enačba tangentne ravnine na ploskev P v točki $(1, 1, f(1, 1)$ je

$$((x, y, z) - (1, 1, 3))\,(-2, -4, 1) = 0,$$

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + (z - 3) = 0,$$

$$-2x - 4y + z = -3.$$

5. Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev, ki je podana s predpisom

$$(u, v)\,(u, v) \to \left(u^2, v^2, u + 2v\right)$$

v točki $T_0\,(1, 1, 3)$.

Rešitev:

Poiščimo točko $(u_0,\, v_0)$, za katero velja

$$\vec{r}(u_0, v_0) = (1, 1, 3)$$

. Torej $u_0^2 = 1$,$v_0^2 = 1$, $u_0 + 2v_0 = 3$. Od tod dobimo $u_0 = 1$, $v_0 = 1$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,(u, v) = (2u, 0, 1),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = (0, 2v, 2).$$

Normalni vektor na tangentno ravnino v točki $(1,1,3)$ je vektor

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(1,1)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(1,1) = (2,0,1)\times(0,2,2) = (-2,-4,4).$$

Enačba tangente ravnine v točki $(1,1,3)$ je

$$(x-1, y-1, z-3)(-2,-4,4) = 0.$$

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0.$$

$$-2x - 4y + 4z - 12 + 6 = 0,$$

$$-x - 2y + 2z = 3.$$

6. Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev, ki je implicitno podana z enačbo

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$$

v točki $(1,2,-1)$.

Rešitev: Pišimo

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6.$$

Enačba ploskve S se glasi

$$F(x,y,z) = 0.$$

Gradient $\nabla F(x,y,z)$ je normala na ploskev S v točki (x,y,z). Izračunajmo gradient

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + yz \\ 3y^2 + xz \\ 3z^2 + xy, \end{bmatrix}$$

$$\nabla F((1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zapišimo enačbo tangentne ravnine v točki $T(-2,1,-3)$.

$$((x,y,z) - (1,2,-1))\,\nabla F(-2,1,-3) = 0,$$

$$(x-1, y-2, z+1)\,(1,11,5) = 0$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

7. Parametriziraj ploskev $x^2 + y^2 = z^2$ in jo skiciraj. Izračunaj površino tistega dela ploskve, ki leži med ravninama $z = 0$ in $z = 1$.

   Rešitev: Uvedemo koordinate

$$x(\varphi, z) = r(z)\cos\varphi, \quad y(\varphi, z) = r(z)\sin\varphi, \quad z(\varphi, z) = z,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R},$$

$$x^2(\varphi, z) + y^2(\varphi, z) = r^2(z).$$

   Od tod dobimo $r(z)^2 = z^2$, od koder sledi $r(z) = |z|$. Paramterizacijo ploskve P je torej naslednja

$$(\varphi, z) \to \vec{r}\,(\varphi, z) = (|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi, z)\,,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]\,, \quad z \in \mathbb{R}.$$

   in imamo torej

$$\begin{aligned} x\,(\varphi, z) &= |z|\cos\varphi, \\ y\,(\varphi, z) &= |z|\sin\varphi, \\ z\,(\varphi, z) &= z, \\ \varphi \in [0, 2\pi]&, \; z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8. Parametriziraj ploskev, ki je podana z enačbo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Rešitev:

   1. način:

   V kartezičnih koordinatah imamo parametrizacijo

$$(x, y) \to \vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   2. način:

   V ravnini xy vpeljemo polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi].$$

   Velja $x^2+y^2 = r^2$. Tretjo koordinato točke (x, y, z) na ploskvi določimo iz enačbe $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$. Tako dobimo

$$(r, \varphi) \to \vec{r}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)\,, \quad r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi].$$

3. način:

Vpeljemo sferične koordinate. Kot φ_0 med vektorjem $\overrightarrow{0T}$ in ravnino $z = 0$ je isti za vse točke $T(x, y, z)$ na ploskvi in velja

$$x = r\cos\varphi_0\cos\theta, \quad y = r\cos\varphi_0\sin\theta, \quad z = r\sin\varphi_0,$$

$$r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Iz enačbe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dobimo

$$r\sin\varphi_0 = \sqrt{r^2\cos^2\varphi_0} = r|\cos\varphi_0| = r\cos\varphi_0,$$

od koder sledi

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Torej imamo parametrizacijo

$$(r, \theta) \to \vec{r}(r, \theta) = \left(r\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta, r\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta, r\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

9. Parametriziraj sfero $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ s sferičnimi koordinatami in poišči ploskovni element v sferičnih koordinatah.

Rešitev: Poljubno točko na sferi parametriziramo s kotoma φ in θ. Glede na način merjenja kota φ imamo dva načina izražanja koordinat točke (x, y, z) na sferi.

1. način: Naj bo $T(x, y, z)$ točka, ki leži na sferi z enačbo $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Točka T' naj bo pravokotna projekcija točke T v ravnino $z = 0$. θ naj bo kot, ki ga oklepa pozitiven poltrak osi x z vektorjem $\overrightarrow{0T'}$, φ pa naj bo kot med pozitivnim poltrakom osi z in vektorjem $\overrightarrow{0T}$. Tedaj lahko koordinate toke T izrazimo kot

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, \quad y = a\sin\varphi\sin\theta, \quad z = a\cos\varphi,$$

oziroma imamo parametrizacijo

$$(\varphi, \theta) \to \vec{r}\,(\varphi, \theta) = (a\sin\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi)\,,$$

$$\theta \in [0, 2\pi]\,, \quad \varphi \in [0, \pi]\,.$$

$$\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial r}{\partial\theta}\right)(\varphi, \theta) = (a\sin\varphi)\,\vec{r}\,(\varphi, \theta)\,.$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\varphi,\theta) = (a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, -a\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\varphi,\theta) = (-a\sin\varphi\sin\theta, a\sin\varphi\cos\theta, 0),$$

$$\mathrm{d}S = \left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right)(\varphi,\theta)\right| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = |(a\sin\varphi)\,\vec{r}(\varphi,\theta)|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

2. način:

Naj bo $T(x,y,z)$ točka, ki leži na sferi z enačbo $x^2+y^2+z^2=a^2$. Točka T' naj bo pravokotna projekcija točke T v ravnino $z=0$. θ naj bo kot, ki ga oklepa pozitiven poltrak osi x z vektorjem $\overrightarrow{0T'}$, φ pa naj bo kot med vektorjem $\overrightarrow{0T'}$ in vektorjem $\overrightarrow{0T}$. Tedaj lahko koordinate toke T izrazimo kot

$$x = a\cos\varphi\cos\theta, \quad y = a\cos\varphi\sin\theta, \quad z = a\sin\varphi,$$

oziroma imamo parametrizacijo

$$(\varphi,\theta) \to \vec{r}(\varphi,\theta) = (a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, a\sin\varphi),$$

$$\theta \in [0,2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-a\sin\varphi\cos\theta, -a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-a\cos\varphi\sin\theta, a\cos\varphi\cos\theta, 0),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = -(a\cos\varphi)\,\vec{r}(\varphi,\theta).$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| \,\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}\theta = |(-a\cos\varphi)\,\vec{r}(\varphi,\theta)|\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}\theta = a^2\cos\varphi\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}\theta.$$

10. Parametriziraj ploskev P v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki je podana z enačbo $z=x^2$.

Rešitev:

Pravokotna projekcija ploskve P v ravnino $z=0$ je celotna ravnina $z=0$. Pišimo $z=f(x,y)=x^2$. Če ploskev parametriziramo s kartežičnimi kooordinatami, dobimo naslednjo parametrizacijo

$$(x,y) \to \vec{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)) = \left(x,y,x^2\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

11. Parametriziraj rotacijsko ploskev P, ki jo dobimo, če graf funkcije $z = f(x)$, $x \in [a, b]$ zavrtimo okrog osi z.

Rešitev:

Pri vrtenju okrog osi z se točka $(x, 0, f(x))$ zavrti v točko $T_1\,(x_1, y_1, f(x))$, kjer je

$$x_1 = x\cos\varphi, \quad y_1 = x\sin\varphi, \quad (x_1)^2 + (y_1)^2 = x^2,$$

x je oddaljenost točke $(x, 0, f(x))$ od osi z oziroma oddaljenost točke $T_1\,(x_1, y_1, f(x))$ od z osi. Kot φ je kot med pozitivnim poltrakom osi x in vektorjem $\overrightarrow{OT}$, kjer je $T\,(x_1, y_1, 0)$. Tako imamo parametrizacijo

$$(x, \varphi) \to \vec{r}\,(x, \varphi) = (x\cos\varphi, x\sin\varphi, f(x))\,, \quad x \in [a, b], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Bolj običajno je, da pišemo r namesto x in imamo tako parametrizacijo

$$(r, \varphi) \to \vec{r}\,(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, f(r))\,, \quad r \in [a, b], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Primera ploskev, ki ju dobimo, če graf funkcije $z = f(x)$ zavrtimo okrog osi z.

(a) Sfera z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ je rotacijska ploskev , ki jo dobimo tako, da graf funckije $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ zavrtimo okrog z osi in imamo tako parametrizacijo sfere

$$(r, \varphi) \to \vec{r}\,(r, \varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{a^2 - r^2}\right)\,, \quad r \in [0, a], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

oziroma

$$x = x\,(r, \varphi) = r\cos\varphi, \quad y = y\,(r, \varphi) = r\cos\varphi, \quad z = z\,(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2},$$

kjer velja

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(b) Rotacijski paraboloid, določen z enačbo $z = x^2 + y^2$ dobimo tako, da graf funkcije $z = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, zavrtimo okrog osi z.

Parametrizacija je naslednja

$$(r, \varphi) \to \vec{r}\,(r, \varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2\right)\,, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

2 Dvojni in trojni integrali

2.1 Dvojni integrali v kartezičnih koordinatah

Uvedba nove spremenljivke: Naj bo

$$\vec{r} : \widetilde{D} \to D$$

preslikava podana s predpisom

$$(u,v) \to \vec{r}\,(u,v) = (x(u,v), y(u,v))\,,$$

$$\int\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\int_{\widetilde{D}} f(\vec{r}(u,v))\,|\det J(u,v)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

kjer je

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

1. Izračunaj.

   (a) Integral funkcije $f(x,y) = \cos x \cos y$ po trikotniku D z oglišči $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

   (b) Integral funkcije $f(x,y) = x + 3y^2$ po paralelogramu z oglišči $(1,2)$, $(1,4)$, $(3,4)$ in $(3,6)$.

   (c) Integral funkcije $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$, $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$.

   Rešitev:

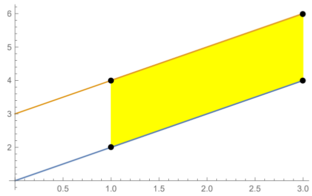
   (a)

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^x f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^x \cos x \cos y\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left[\int_0^x \cos y\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, [\sin y]_0^x\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $u = \sin x$. Za vajo izračunajmo se integral v obratnem vrstnem redu.

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_y^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left[\int_y^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,[\sin x]_y^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,[1-\sin y]\,dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\ \mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \sin y\ \mathrm{d}y \\
&= [\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Premica skozi točki $(1,2)$, $(3,4)$ ima enačbo $y = x+1$. Premica skozi točki $(1,4)$ in $(3,6)$ ima enačbo $y = x+3$.



Pravokotna projekcija paralelograma na os x je interval $[1,3]$.

$$D = \{(x,y)\,,1 \leq x \leq 3, x+1 \leq x+3\}.$$

$$
\begin{aligned}
&\int\int_D \left(x+3y^2\right) dxdy = \\
&= \int_1^3 \int_{x+1}^{x+3} \left(x+3y^2\right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(xy+y^3\right)\Big|_{x+1}^{x+3} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(x\,(x+3)+(x+3)^3-x\,(x+1)-(x+1)^3\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(2x+(x+1+2)^3-(x+1)^3\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(2x+(x+1)^3+6\,(x+1)^2+12\,(x+1)+8-(x+1)^3\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(6x^2+26x+26\right) \, \mathrm{d}x = 208.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^3 \left(x^2 \int_1^2 y \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 x^2 \left(\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^3}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo še v obratnem vrstnem redu

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_1^2 y \left(\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 y \left(\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=3}\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 9y \, \mathrm{d}y = \frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 2x$ in $y^2+4y = 2x$.

Rešitev:

Izračunajmo presečišče obeh krivulj $y^2 = 4x + 4$ in $y^2 = -2x + 4$. Iz obeh enačb izrazimo x in dobimo $x = \frac{y^2}{4} - 1$ in $x = -\frac{y^2}{2} + 2$. Enačbi izenačimo in dobimo $y = \pm 2$, $x = 0$ in imamo presečišči $(0, 2)$ in $(0, -2)$.

1. način:

Pravokotna projekcija lika D na os y je enaka $[-2, 2]$. Ker je plošča homogena, je gostota $\varrho(x, y) \equiv 1$. Izračunajmo maso plošče D

$$\begin{aligned} m &= \int\int_D \varrho(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= = \int_{-2}^{2} \left(\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{-\frac{y^2}{2}+2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{y^2}{2} + 2 - \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{-3y^2}{4} + 3 \right) \mathrm{d}y = 8. \end{aligned}$$

2. način:

Pravokotna projekcija lika D na os x je enaka intevalu $[-1, 2]$.

$$\begin{aligned} m &= \int\int_D \varrho(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{-2x+4}}^{\sqrt{-2x+4}} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = ... \end{aligned}$$

2.2 Uvedba novih koordinat

1. Z uvedbo ustreznih novih koordinat izračunaj integral funkcije $f(x, y) = x + 3y^2$ po paralelogramu z oglišči $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ in $(2, 5)$.

   Rešitev:

   Premica skozi točki $(1, 2)$, $(2, 3)$ ima enačbo $y = x + 1$. Premica skozi točki $(1, 4)$ in $(2, 5)$ ima enačbo $y = x + 3$. Pravokotna projekcija paralelograma na os x je interval $[1, 2]$. Območje D je omejeno s premicami $x = 1$, $y = x + 1$, $x = 2$ in $y = x + 3$.

$$D = \{(x, y), 1 \le x \le 2, x + 1 \le x + 3\}.$$

Glede na območje D izberimo $u = y-x$, $v = x$, od koder sledi $y = v+u$, $x = v$. Poiščimo območje $\widetilde{D}$, ki se pri preslikavi $(u,v) \to \vec{r}(u,v) = ((x(u,v), y(u,v))$ preslika v območje D. Območje $\widetilde{D}$ je v uv ravnini omejeno s premicami $v = 1$, $v = 2$, $u = 1$ in $u = 3$.

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej $\det J(u,v) = -1$.

$$\widetilde{D} = \{(u,v)\,; 1 \le v \le 2, \quad 1 \le u \le 3\}.$$

Naj bo

$$\vec{r} : \widetilde{D} \to D$$

preslikava podana s predpisom

$$(u,v) \to \vec{r}\,(u,v) = (v, v+u)\,,$$

$$\int\!\!\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\!\!\int_{\widetilde{D}} f(\vec{r}(u,v))\,|\det J(u,v)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v =$$
$$= \int\!\!\int_{\widetilde{D}} \left(v + 3\,(v+u)^2\right)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v =$$
$$= \int_1^2\!\!\int_1^3 \left(v + 3\left(v^2 + 2uv + u^2\right)\right)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v =$$

2. Izračunaj dvojni integral

$$\int\!\!\int_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

kjer je D trapez z oglišči $A(1,0)$, $(2,0)$, $C(0,-2)$ in $D(0,-1)$.

Rešitev:

Trapez D je omejen s krivuljami $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 2$ in $x - y = 1$. Glede na območje po katerem integriramo in glede na funkcijo, ki jo integriramo vpeljemo koordinate

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Izrazimo

$$x = \frac{1}{2}\,(u+v)\,, \quad y = \frac{1}{2}\,(u-v)\,,$$

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Torej $\det J(u,v) = -\frac{1}{2}$. Poiščimo območje $\widetilde{D}$, ki se pri preslikavi $(u,v) \to \vec{r}(u,v) = ((x(u,v), y(u,v))$ preslika v območje D.

$y = 0 \iff u = v, \quad x = 0 \iff u = -v, \quad x-y = 2 \iff v = 2, \quad x-y = 1 \iff v = 1.$

Območje $\widetilde{D}$ je trapez z oglišči $(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ in $(-1,1)$. V novih koordinatah je integracijsko območje še vedno trapez, toda funkcijo je veliko enostavnejša in jo je v novih koordinatah lažje integrirat.

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int\int_{\widetilde{D}} e^{\frac{u}{v}} \left|-\frac{1}{2}\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2} v e^{\frac{u}{v}} \Bigg|_{u=-v}^{u=v} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(e - e^{-1}\right) v\, \mathrm{d}v \\
&= \frac{3}{4}\left(e - e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Integral bi lahko izračunali tudi v obratnem vrstnem redu

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int\int_{\widetilde{D}} e^{\frac{u}{v}} \left|-\frac{1}{2}\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_{-2}^{-1}\int_{-u}^{2} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\, \mathrm{d}u + \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\, \mathrm{d}u + \int_{1}^{2}\int_{u}^{2} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\, \mathrm{d}u = \cdot.
\end{aligned}$$

2.3 Dvojni integrali v polarnih koordinatah

1. Izračunaj ploščino lika D omejenega s krivuljami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ in $y = 0$.

Rešitev: Enačbo

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

dopolnimo do popolnega kvadrata in dobimo

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

oziroma

$$x^2 + y^2 = 4x,$$

dopolnimo do popolnega kvadrata in dobimo

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Vpeljimo polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

kjer je

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Na krožnici $x^2 + y^2 = 2x$ in $x^2 + y^2 = 4x$ se radij r spreminja s kotom φ, torej na krožnici velja $r = r(\varphi)$. Vstavimo

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi,$$

v enačbo krožnice $x^2 + y^2 = 2x$ in dobimo

$$r(\varphi)^2\cos^2\varphi + r(\varphi)^2\sin^2\varphi = 2r(\varphi)\cos\varphi,$$

od koder dobimo

$$r(\varphi) = 2\cos\varphi.$$

Vstavimo

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi,$$

v enačbo krožnice $x^2 + y^2 = 4x$ in dobimo

$$r(\varphi)^2\cos^2\varphi + r(\varphi)^2\sin^2\varphi = 4r(\varphi)\cos\varphi,$$

od koder dobimo

$$r(\varphi) = 4\cos\varphi.$$

Torej

$$D_1 = \{(r,\varphi)\,;\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi\}.$$

Imamo torej preslikavo

$$\vec{r} : D_1 \to D,$$

podano s predpisom

$$(r,\varphi) \to \vec{r}\,(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.$$

$$\det J(r,\varphi) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = r.$$

Ploščina lika je enaka dvojnemu integralu

$$\begin{aligned}
\int\int_D dxdy &= \int\int_{D_1} rdrd\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\cos^2\varphi d\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right) d\varphi \\
&= 3\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3(\pi+2)}{4}.
\end{aligned}$$

2.4 Trojni integrali v kartezičnih koordinatah

1. Izračunaj

$$\int\int\int_T (1-x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z,$$

kjer je T območje v prvem oktantu, omejeno z ravnino $x+y+z=1$.

Rešitev:

$$T = \{(x,y,z);\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V (1-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (1-x)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x)z\Big|_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x)(1-x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left((1-x)y - \frac{y^2}{2}(1-x)\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left((1-x)^3 - \frac{(1-x)^2}{2}(1-x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^3}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

3 Trojni integrali v cilindričnih koordinatah

1. Izračunaj volumen telesa T omejenega s ploskvama $hz = x^2 + y^2$ in $z = h$, kjer je $h > 0$.

   Rešitev:

   Vstavimo $z = h$ v enačbo $hz = x^2 + y^2$ in dobimo $h^2 = x^2 + y^2$. Torej pravokotna projekcija telesa T na ravnino $z = 0$ je krog D s središčem v izhodišču in polmerom h.

   $$T = \{(x,y,z)\,;x^2+y^2 \le h^2; \frac{x^2+y^2}{h} \le z \le h\}.$$

   Volumen telesa T je enak trojnemu integralu

   $$V = \int\int\int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{h}}^h \mathrm{d}z,$$

   Vpeljemo cilindrične koordinate

   $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

   $$r \in [0,h], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad z \in \left[0, \frac{r^2}{2}\right],$$

   $$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\det J(r,\varphi,z) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = r.$$

$$\begin{aligned} \int\int_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{h}}^{h} \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_{\frac{r^2}{h}}^h r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h r\,[z]_{\frac{r^2}{h}}^h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h r\left(h-\frac{r^2}{h}\right)\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2h}{2}-\frac{r^4}{4h}\right]_0^h = 2\pi\frac{h^3}{4}. \end{aligned}$$

Pri izračunu lahko uporabimo tudi drugačen vrstni red integriranja

$$V = \int\int\int_T \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\sqrt{zh}} r dr = 2\pi\frac{h^3}{4}.$$

Tu smo upoštevali $r^2 = zh$.

2. Izračunaj integral funkcije $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ po telesu T, ki ga določajo neena;cbe $x^2+y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$ in $0 \leq z \leq a$, kjer je $a > 0$.

Rešitev:

$$T = \{(x,y,z)\,;x^2+y^2 \leq 2x, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq a\}.$$

Pretvorimo enačbo $x^2+y^2 \leq 2x$ v ekvivalentno obliko $(x-1)^2+y^2 \leq 1$. Torej pravokotna projekcija telesa v ravnino $z = 0$ predstavlja krog s središčem v točki $(1,0)$ in polmerom 1.

1. način izračuna integrala:

Vpeljimo cilindrične koordinate

$$x(r,\varphi,z) = r\cos\varphi, \quad y(r,\varphi,z) = r\sin\varphi, \quad z(r,\varphi,z) = z, \quad J(r,\varphi,z) = r.$$

Vemo

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad z \in [0,a].$$

Določimo se meje za r. Poglejmo kako. Pravokotna projekcija telesa T v ravnino $z = 0$ je krog s polmerom 1 in s središčem v točki $(1,0)$. Na tej krožnici se radij $r = r(\varphi)$ spreminja s kotom.

V ravnini $z = 0$, na krožnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$ oziroma $x^2 + y^2 = 2x$, velja

$$r(\varphi)^2 \cos^2 \varphi + r(\varphi)^2 \sin^2 \varphi = 2r(\varphi)\cos\varphi,$$

od koder dobimo, da na krožnici velja

$$r(\varphi) = 2\cos\varphi.$$

Torej na krogu

$$0 \le r \le r(\varphi) = 2\cos\varphi.$$

Torej

$$\vec{r} : D \to T,$$

kjer je

$$D = \{(r,\varphi,z); \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0, 2\cos\varphi], \quad z \in [0,a]\}.$$

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^a\ \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} zr^2\ \mathrm{d}r =$$

$$\begin{aligned}\int_0^a\ \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8z\cos^3\varphi}{3}\ \mathrm{d}\varphi \quad &= \quad \frac{8}{3}\int_0^a z\ \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \quad \frac{8}{3}\frac{a^2}{2}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\ \mathrm{d}t = \frac{8a^2}{9},\end{aligned}$$

kjer smo uvedli novo spremenljivko $t = \sin\varphi$. 2. način izra vcuna integrala:

Lahko bi izbrali koordinate na naslednji način:

$$x(r,\varphi,z) = 1 + r\cos\varphi, \quad y(r,\varphi,z) = r\sin\varphi, \quad z(r,\varphi,z) = z,$$

$$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad z \in [0,a].$$

Torej

$$\vec{r} : D \to T,$$

kjer je

$$D = \{(r,\varphi,z); r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad z \in [0,a]\}.$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1 + 2r\cos\varphi + r^2}.$$

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_T f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \\
= &\int\int\int_D f(x(r,\varphi,z),y(r,\varphi,z),z(r,\varphi,z))|\det J(r,\varphi,z)|\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z \\
= &\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^a zr\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2}\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \cdots .
\end{aligned}
$$

a je integral težje izračunljiv.

3.1 Trojni integrali v sferičnih koordinatah

1. Izračunaj težišče polkrogle T nad xy-ravnino z radijem R in gostoto $\rho\,(x,y,z)=z$.

   Rešitev:

   Vpeljimo sferične koordinate

$$
x=r\cos\varphi\cos\theta,\quad y=r\cos\varphi\sin\theta,\quad z=r\sin\varphi,
$$

$$
\theta\in[0,2\pi],\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad r\in[0,R], J=r^2\cos\varphi.
$$

   Izračunajmo maso telesa T.

$$
\begin{aligned}
m &= \int\int\int_T \rho\,(x,y,z)\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R (r\sin\varphi)(r^2\cos\varphi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\int_0^R r^3\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\frac{R^4}{4}\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi R^4}{4}.
\end{aligned}
$$

   Izračunajmo težišče telesa T:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int\int\int_T x\rho\,(x,y,z)\,dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R (r\cos\varphi\cos\theta)\,(r\sin\varphi)\left(r^2\cos\varphi\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta = 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int\int\int_T y\rho\,(x,y,z)\,dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R (r\cos\varphi\sin\theta)(r\sin\varphi)(r^2\cos\varphi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \int\int\int_T z\rho\,(x,y,z)\,dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R (r\sin\varphi)(r\sin\varphi)(r^2\cos\varphi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^4\sin^2\varphi\cos\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

Težišče je točka $\left(0,0,\frac{8R}{15}\right)$.

2. Izračunaj prostornino telesa T, ki je določeno z enačbami $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $x^2+y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$.

Rešitev: Telo T zajema točke, ki ležijo nad ravnino $z = 0$ znotraj stožca in znotraj sfere $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

1. Način:

Vpeljimo sferične koordinate

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta, \quad z = r\sin\varphi.$$

Iz enačbe $z = \sqrt{x^2+y^2}$ določimo meje za kot φ,

$$\begin{aligned} r\sin\varphi &= \sqrt{r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\varphi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi}, \end{aligned}$$

$$r\sin\varphi = r|\cos\varphi| = r\cos\varphi.$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali, da velja

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Torej na ploskvi $z = \sqrt{x^2+y^2}$ velja $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2], \quad J = r^2\cos\varphi.$$

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_T \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos\varphi \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^2 \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} (\sin\varphi)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

2. Način:

Vpeljimo cilindrične koordinate: Poiš čimo krivuljo v kateri se sekata ploskvi $x^2+y^2+z^2 = 4$ in $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Presek je krožnica $x^2+y^2 = 2$ s središčem v izhodišču in polmerom $\sqrt{2}$. Pravokotna projekcija telesa T na ravnino $z = 0$ je krog s polmerom $\sqrt{2}$ in s središčem v izhodišču. Vpeljimo cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \sqrt{2}], \quad z \in [r, \sqrt{4 - r^2}].$$

$$V = \int\int\int_T \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r \ \mathrm{d}z \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{4 - r^2} - r\right) \ \mathrm{d}r =$$

$$2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2}} =$$

$$2\pi\left(\frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right).$$

Pri čemer smo upoštvali, da velja

$$\int r\sqrt{4 - r^2} \ \mathrm{d}r = -\frac{1}{3}\left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

kjer zadnji integral izračunamo s pomočjo vpeljave nove spremenljivke

$$u = 4 - r^2.$$

4 Krivuljni integrali

4.1 Krivuljni integrali vektorskega polja

Če je:

- $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija krivulje K,
- $\vec{F} : K \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija,

potem je

$$\int_K \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}\,(t)\right) \cdot \dot{\vec{r}}\,(t)\ \ \mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. Izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x, y) = \left(-xy^2, x^2y\right)$ po krivulji $\mathcal{K}$, ki je podana s parametrizacijo

   $$t \to \vec{r}\,(t) = \left(\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t}\right)$$

   od točke $(1, 0)$ do točke $(0, 1)$.

   Rešitev:

   $$t \to \vec{r}\,(t) = \left(\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t}\right),$$

   Iz $\vec{r}(t_o) = (1, 0)$, sledi $t_0 = 0$, iz $\vec{r}(t_o) = (0, 1)$, sledi $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

   $$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{-\sin t}{2\sqrt{\cos t}}, \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\right).$$

   $$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \left(-\sqrt{\cos t}\sqrt{\sin^2 t}, \sqrt{\cos^2 t}\sqrt{\sin t}\right) = \left(-\sqrt{\cos t}\sin t, \cos t\sqrt{\sin t}\right),$$

   tu smo upoštevali, da velja $\sqrt{\sin^2 t} = |\sin t|$ in $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$ saj je $\sin t \geq 0$ in $\cos t \geq 0$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   $$\begin{aligned}\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\dot{\vec{r}}(t) &= \frac{\sqrt{\cos t}\sin^2 t}{2\sqrt{\cos t}} + \frac{\sqrt{\sin t}\cos^2 t}{2\sqrt{\sin t}} = \\ &= \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{\cos t}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{2\sqrt{\cos t}\sqrt{\sin t}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\dot{\vec{r}}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. Izračunaj integral

$$\int_{\mathcal{K}} (xy\ \mathrm{d}x + yz\ \mathrm{d}y + xz\ \mathrm{d}z)\,,$$

kjer je $\mathcal{K}$ četrtina krožnice $x^2+y^2=1$, $z=1$ od točke $(1,0,1)$ do točke $(0,1,1)$.

Rešitev: Poiščimo parametrizacijo krožnice $\mathcal{K}$.

1. način:

Če krivuljo $\mathcal{K}$ in graf funkcije $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$, upodobimo v ravnini, se sliki ujemata, le orientaciji oz. smer potovanja po obeh krivuljah sta nasprotni. Torej

$$t \to \vec{r}(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}, 1\right), \quad t\in[1,0].$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, 0\right), \\
\vec{F} &= (xy, yz, xz)\,, \\
\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) &= \left(t\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}, t\right), \\
\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\dot{\vec{r}}(t) &= t\sqrt{1-t^2} - t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}} xy\ \mathrm{d}x + yz\ \mathrm{d}y + xz\ \mathrm{d}z &= \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\dot{\vec{r}}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_1^0 \left(t\sqrt{1-t^2} - t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \left(t\sqrt{1-t^2} - t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 t\ \mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. način: Krivuljo $\mathcal{K}$ parametriziramo na naslednji način

$$y \to \vec{r}\,(yt) = \left(\sqrt{1-y^2}, y, 1\right), \quad y\in[0,1],$$

kjer smo upoštevali, da se krivulja $\mathcal{K}$ ujema z grafom funkcije $x=\sqrt{1-y^2}$, $y\in[0,1]$ (ujemata se tudi orientaciji krivulj).

$$\vec{F}\left(\vec{r}(y)\right) = \left(t\sqrt{1-y^2}, y, \sqrt{1-y^2}\right),$$

$$\dot{\vec{r}}(y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, 1, 0\right),$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(y)\right)\dot{\vec{r}}(y) = -y^2 + y,$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} xy \, \mathrm{d}x + yz \, \mathrm{d}y + xz \, \mathrm{d}z &= \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\left(\vec{r}(y)\right)\dot{\vec{r}}(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(-y^2 + y\right) \, \mathrm{d}y \\ &= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

3. način:

Krivuljo $\mathcal{K}$ parametriziramo s polarnimi koordinatami.

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(\varphi)\right) = (\cos\varphi\sin\varphi, \sin\varphi, \cos\varphi),$$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}(y)\right)\dot{\vec{r}}(\varphi) = -\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} xy \, \mathrm{d}x + yz \, \mathrm{d}y + xz \, \mathrm{d}z &= \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\left(\vec{r}(y)\right)\dot{\vec{r}}(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\right) \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 6\int_0^1 \left(-u^2 + u\right) \, \mathrm{d}u \\ &= \left(-\frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

kjer smo uporabili substitucijo $u = \sin\varphi$.

3. Dano je vektorsko polje $\vec{F}\left(-y^2, x, z^2\right)$. Krivulja C je presek ravnine $y+z=2$ in cilindra $x^2+y^2=1$. Krivulja C je orientirana v nasprotni smeri ure, gledano z vrha pozitivne osi z. Izračunaj integral

$$\int_C \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r}.$$

Rešitev:

Parametrizirajmo krivuljo C. Krivulja leži na cilindru $x^2 + y^2 = 1$, torej je njena pravokotna projekcija C' v ravnino $z = 0$ enaka enotni krožnici s središčem v izhodišču in s polmerom 1. V polarnih koordinatah imamo naslednjo parametrizacijo pravokotne projekcije C':

$$C' : \quad \varphi \to (\cos\varphi, \sin\varphi)\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Parametrizacijo tretje koordinate z na krivulji C določimo iz enačbe $y + z = 2$. Parametrizacija krivulje C je naslednja

$$C : \quad \varphi \to \vec{r}\,(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2 - \sin\varphi)\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

$$\vec{F}\,(\vec{r}\,(\varphi)) = \left(-\sin^2\varphi, \cos\varphi, (2 - \sin\varphi)^2\right),$$

$$\dot{\vec{r}}\,(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, -\cos\varphi)\,,$$

$$\vec{F}\,(\vec{r}\,(\varphi))\,\dot{\vec{r}}\,(\varphi) = \sin^3\varphi + \cos^2 - \cos\varphi\,(2 - \sin\varphi)^2\,.$$

Izračunajmo krivuljni integral

$$\begin{aligned}
&\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \\
= \;& \vec{F}\,(\vec{r}\,(\varphi))\,\dot{\vec{r}}\,(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi \\
= \;& \int_0^{2\pi} \left(\sin^3\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi\,(2 - \sin\varphi)^2\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
= \;& \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi\ \mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ \mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,(2 - \sin\varphi)^2\ \mathrm{d}\varphi \\
= \;& -\int_0^{2\pi} \sin\varphi\left(1 - \cos^2\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\varphi))\ \mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,(2 - \sin\varphi)^2\ \mathrm{d}\varphi \\
= \;& \left(-\cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(\frac{(2 - \sin\varphi)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
= \;& 0 + \pi - 0 = \pi.
\end{aligned}$$

4. Krivulja C je presek paraboloida $2z = x^2 + y^2$ in ravnine $z = 2$. Krivulja C je orientirana v smeri ure, gledano s pozitivne smeri osi z. Dano je vektorsko polje $\vec{F} = \left(3y, -xz, yz^2\right)$. Izračunaj krivuljni integral
$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Rešitev:

Presek paraboloida $2z = x^2 + y^2$ in ravnine $z = 2$, je krožnica, dana z enačbo $x^2 + y^2 = 4$, ki leži v ravnini $z = 2$. Torej lahko krivuljo C parametriziramo na naslednji način

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 2), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Upoštevati je potrebno, da $\vec{r}(\varphi)$ potuje po krivulji v nasprotni smeri ure, ko φ teče od 0 do 2π.

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi)) = (6\sin\varphi, -4\cos\varphi, 8\sin\varphi).$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi))\,\dot{\vec{r}}(\varphi) = -12\sin^2\varphi - 8\cos^2\varphi,$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} &= -\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\varphi))\,\dot{\vec{r}}(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(-12\sin^2\varphi - 8\cos^2\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\sin^2\varphi + 8\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\sin^2\varphi + 8\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) + 8\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (10 - 2\cos(2\varphi))\ \mathrm{d}\varphi \\
&= (10\varphi - \sin(2\varphi))\Big|_0^{2\pi} = 20\pi.
\end{aligned}$$

5. Krivulja C je elipsa, dana z enačbo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ v xy ravnini. Dano je vektorsko polje $\vec{F} = \left(3x - 4y + 2z, 4x + 2y - 3z^2, 2xz - 4y^2 + z^3\right)$. Izračunaj delo, ki ga opravi sila $\vec{F}$ na delec pri gibanju po elipsi C v nasprotni smeri ure.

   Rešitev:

   Parametrizirajmo elipso C

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (4\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi)) = \left(12\cos\varphi - 12\sin\varphi, 16\cos\varphi + 6\sin\varphi, -4\sin^2\varphi\right).$$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = (-4\sin\varphi, 3\cos\varphi, 0).$$

$$\vec{F}\left(\vec{r}\left(\varphi\right)\right)\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right) = -30\cos\varphi\sin\varphi + 48.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{r}\left(\varphi\right)\right)\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(48 - 30\cos\varphi\sin\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \left(48\varphi - 30\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= 48(2\pi) - 30\frac{\sin^2(2\pi)}{2} = 96\pi.
\end{aligned}$$

4.2 Krivuljni integrali skalarnega polja

Če je:

- $$\begin{aligned}\vec{r} : [a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\to \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\end{aligned}$$

  parametrizacija krivulje K,

- $f : K \to \mathbb{R}$ skalarna funkcija,

potem je

$$\int_K f\ \mathrm{d}s = \int_a^b f\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\left|\dot{\vec{r}}\left(t\right)\right|\ \mathrm{d}t.$$

1. Naj bo $\varrho\left(x,y\right) = \sqrt{x^2+y^2}$. Izračunaj integral

   $$\int_K \varrho\left(x,y\right)\ \mathrm{d}s.$$

   kjer je K krožnica z enačbo $x^2+y^2 = ax$ za nek $a > 0$.

   Rešitev:

   Preuredimo enačbo krožnice $x^2+y^2 = ax$ v ekvivalentno obliko $\left(x - \frac{a}{2}\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Krožnica ima središče v točki $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ in ima polmer $\frac{a}{2}$. Uvedemo polarne koordinate

   $$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

   kjer velja

   $$r\left(\varphi\right)^2 = ar\left(\varphi\right)\cos\varphi$$

in tako dobimo

$$r\left(\varphi\right)=a\cos\varphi.$$

Velja

$$(x(\varphi))^2+(y(\varphi))^2=(r(\varphi))^2=a^2\cos^2\varphi,$$

Imamo parametrizacijo

$$\varphi\to\vec{r}\left(\varphi\right)=\left(x(\varphi),y(\varphi)\right)=\left(a\cos^2\varphi,a\cos\varphi\sin\varphi\right),\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)=\left(-2a\cos\varphi\sin\varphi,-a\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi\right)=\left(-a\sin(2\varphi),a\cos(2\varphi)\right).$$

$$|\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)|=\sqrt{(-a\sin(2\varphi))^2+(a\cos(2\varphi))^2}=\sqrt{a^2(\cos^2\left(2\varphi\right)+\sin^2\left(2\varphi\right))}=|a|=a,$$

$$ds=|\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)|\ \mathrm{d}\varphi.$$

$$\begin{aligned}\int_K\varrho\left(x,y\right)\ \mathrm{d}s&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varrho\left(\vec{r}(\varphi)\right)|\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)|\ \mathrm{d}\varphi\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x(\varphi))^2+(y(\varphi))^2}|\dot{\vec{r}}\left(\varphi\right)|\ \mathrm{d}\varphi\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|a\cos\varphi|a\ \mathrm{d}\varphi\\&=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi=a^2\left(\sin\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2a^2.\end{aligned}$$

2. Naj bo $a>0$. Poišči težišče žice, ki je zvita v obliki krožnice z enačbo $x^2+y^2=ax$ z gostoto $\varrho\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Rešitev:

Preuredimo enačbo krožnice $x^2+y^2=ax$ v ekvivalentno obliko $\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\frac{a^2}{4}$. Krožnica ima središče v točki $\left(\frac{a}{2},0\right)$ in ima polmer $\frac{a}{2}$. Uvedemo polarne koordinate

$$x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi,\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

kjer velja

$$r\left(\varphi\right)^2=ar\left(\varphi\right)\cos\varphi$$

in tako dobimo

$$r\left(\varphi\right)=a\cos\varphi.$$

Velja

$$(x(\varphi))^2 + (y(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 = a^2 \cos^2 \varphi,$$

Imamo parametrizacijo

$$\varphi \to \vec{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = \left(a \cos^2 \varphi, a \cos\varphi \sin\varphi\right), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \left(-2a \cos\varphi \sin\varphi, -a \sin^2\varphi + a\cos^2\varphi\right) = (-a\sin(2\varphi), a\cos(2\varphi)).$$

$$|\dot{\vec{r}}(\varphi)| = \sqrt{(-a\sin(2\varphi))^2 + (a\cos(2\varphi))^2} = \sqrt{a^2(\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi))} = |a| = a,$$

$$ds = |\dot{\vec{r}}(\varphi)| \, \mathrm{d}\varphi.$$

Poiščimo maso žice

$$\begin{aligned}
m &= \int_K \varrho(x,y) \ \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho(\vec{r}(\varphi)) \, |\dot{\vec{r}}(\varphi)| \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x(\varphi))^2 + (y(\varphi))^2} |\dot{\vec{r}}(\varphi)| \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |a\cos\varphi| a \ \mathrm{d}\varphi \\
&= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \ \mathrm{d}\varphi = a^2 (\sin\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_K x\varrho(x,y) \ \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\varphi) \sqrt{(x(\varphi))^2 + (y(\varphi))^2} |\dot{\vec{r}}(\varphi)| \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2\varphi |a\cos\varphi| a \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\left(\cos^2\varphi\right) a\left(\cos\varphi\right) a \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^3\varphi \ \mathrm{d}\varphi = a^2 \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^3\varphi \ \mathrm{d}\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) \cos\varphi \ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right) \ \mathrm{d}u = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_K x\varrho\,(x,y)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(\varphi)\sqrt{(x(\varphi))^2+(y(\varphi))^2}|\dot{\vec{r}}\,(\varphi)\,|\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\sin\varphi|a\cos\varphi|a\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2\varphi\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi = 0,
\end{aligned}
$$

kjer smo upoštevali, da integriramo liho funkcijo po simetričnem intervalu. Torej težišče je $\left(\frac{M_x}{m}\frac{M_y}{m}\right) = \left(\frac{2a}{3}, 0\right)$.

5 Ploskovni integrali

5.1 Ploskovni integral skalarnega polja

Naj bo S ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$.

- Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in naj bo

$$\begin{aligned} \vec{r}: D &\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\rightarrow \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

  parametrizacija ploskve S,

- Naj bo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija,

potem je

$$\int\int_S f \; \mathrm{d}S = \int\int_D f\left(\vec{r}\,(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

Površina ploskve je

$$\int\int_S \; \mathrm{d}S = \int\int_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

Masa ploškve S s površinko gostoto $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je enaka

$$m = \int\int_S \varrho \; \mathrm{d}S = \int\int_D \varrho\left(\vec{r}\,(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

Težišče ploskve S pa ima koordinate

$$(x_T, y_T, z_T)\,,$$

kjer je

$$x_T = \frac{1}{m}\int\int_S x\varrho \; \mathrm{d}S = \int\int_D x(u,v)\varrho\left(\vec{r}\,(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int\int_S x\varrho \; \mathrm{d}S = \int\int_D y(u,v)\varrho\left(\vec{r}\,(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int\int_S x\varrho \; \mathrm{d}S = \int\int_D z(u,v)\varrho\left(\vec{r}\,(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

Vztrajnostni moment ploskve S glede na os z je enak

$$J_z = \int\int_S \left(x^2 + y^2\right) \; \mathrm{d}S = \int\int_D \left(x^2(u,v) + y^2(u,v)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v.$$

1. Ploskev S je dana z enačbo $x^2 + y^2 = z^2$. Izračunaj površino tistega dela ploskve, ki leži med ravninama $z = 0$ in $z = 1$.

   Rešitev: Uvedemo koordinate

$$x(\varphi, z) = r(z)\cos\varphi, \quad y(\varphi, z) = r(z)\sin\varphi, \quad z(\varphi, z) = z,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, 1],$$

$$x^2(\varphi, z) + y^2(\varphi, z) = r^2(z).$$

   Od tod dobimo $r(z)^2 = z^2$, od koder sledi $r(z) = |z|= z$. Paramterizacijo ploskve P je torej naslednja

$$(\varphi, z) \to \vec{r}\,(\varphi, z) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, z)\,,$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]\,, \quad z \in [0, 1].$$

   Površino tistega dela ploskve P, ki leži med ravninama $z = 0$ in $z = 1$ izračunamo na naseldnji način:

$$P(S) = \int\int_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(z, \varphi) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(z, \varphi)\right| \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi,$$

   kjer je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(z, \varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)\,,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(z, \varphi) = (-z\sin\varphi, z\cos\varphi, 0)\,,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(z, \varphi) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(z, \varphi) =$$

$$(-z\cos\varphi, -z\sin\varphi, z)\,,$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(z, \varphi) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(z, \varphi)\right| = \sqrt{2}z,$$

   torej

$$P(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} (\frac{\sqrt{2}z^2}{2})\Big|_0^1 \,\mathrm{d}\varphi = \pi\sqrt{2}.$$

2. Dan je trikotnika Δ_{ABC} z oglišči $A\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B\,(0, 1, 0)$ in $C\,(0, 0, 2)$

   (a) Izračunaj površino trikotnika.

   (b) Izračunaj maso trikotnika, če je gostota podana s funkcijo $\varrho(x, y, z) = y$.

3. Naj bo K zgornja polovica sfere z radijem $a > 0$. Izračunaj vztrajnostni moment S glede na z os, t.j. $\int\int_K (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}S$.

Rešitev: Parametrizirajmo zgornjo polovico sfere s sferičnimi koordinatami. Naj bo $T(x, y, z)$ točka, ki leži na sferi z enačbo $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Točka T' naj bo pravokotna projekcija točke T v ravnino $z = 0$. θ naj bo kot, ki ga oklepa pozitiven poltrak osi x z vektorjem $\overrightarrow{0T'}$, φ pa naj bo kot med vektorjem $\overrightarrow{0T'}$ in vektorjem $\overrightarrow{0T}$. Tedaj lahko koordinate toke T izrazimo kot

$$x = a\cos\varphi\cos\theta, \quad y = a\cos\varphi\sin\theta, \quad z = a\sin\varphi,$$

Parametrizacija zgornje polovice sfere je

$$(\varphi, \theta) \to \vec{r}\,(\varphi, \theta) = (a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, a\sin\varphi)\,,$$

$$\theta \in [0, 2\pi]\,, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = |(-a\cos\varphi)\,\vec{r}\,(\varphi, \theta)| = a^2\cos\varphi.$$

Vztrajnostni moment je

$$\begin{aligned} J_z &= \int\int_K (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a\cos\varphi\cos\theta)^2 + (a\cos\varphi\sin\theta)^2\right] \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\varphi a^2\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi a^4\frac{2}{3} = \frac{4\pi a^4}{3}. \end{aligned}$$

4. Izračunaj težišče homogenega trikotnika P, ki leži v ravnini $z = x$ in je omejen z ravninami $x + y = 1$, $x = 0$ ter $y = 0$.

Rešitev: Pravokotna projekcija trikotnika P v ravnino $z = 0$ je enaka trikotniku D v x, y ravnini.

$$D = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 1, y \in [1, 1 - x]\}.$$

Ploskev P je graf funkcije $z = f(x, y) = x$, $(x, y) \in D$. Parametrizacija ploskve P je

$$\vec{r} : D \to P,$$

$$(x,y) \to \vec{r}(x,y) = (x,y,x)\,.$$

Vektorski produkt je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (-1,0,1)\,.$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
m &= \int\int_P \varrho \;\mathrm{d}S \\
&= \varrho \int\int_D \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| \;\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \\
&= \varrho \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{2} \;\mathrm{d}y\right) \;\mathrm{d}x = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{m} \int\int_P x\varrho \;\mathrm{d}S \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int\int_D x \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| \;\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\sqrt{2} \;\mathrm{d}y\right) \;\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m} \frac{\varrho}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_T &= \frac{1}{m} \int\int_P y\varrho \;\mathrm{d}S \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int\int_D y \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| \;\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y\sqrt{2} \;\mathrm{d}y\right) \;\mathrm{d}x = \frac{1}{m} \frac{\varrho}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{1}{m} \int\int_P z\varrho \;\mathrm{d}S \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int\int_D z(x,y) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| \;\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int\int_D x \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| \;\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \\
&= \varrho \frac{1}{m} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{2} \;\mathrm{d}y\right) \;\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{m} \frac{\varrho}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

5. Izračunaj površino dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, ki leži na stožcem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rešitev:

1. način: Poiš čimo krivuljo v kateri se sekata ploskvi $x^2+y^2+z^2 = 4$ in $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Presek je krožnica $x^2 + y^2 = 2$, ki ima središče v izhodišču in ima polmerom $\sqrt{2}$. Pravokotna projekcija ploskve v ravnino $z = 0$ je krog D s središčem v izhodišču in s polmerom $\sqrt{2}$. Krog D parametriziramo s polarnimi koordinatami $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$, tretjo koordinato z na ploskvi pa izračunamo iz enačbe $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in dobimo $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{4 - r^2}$, torej imamo naslednjo parametrizacijo ploskve

$$(r, \varphi) \to \vec{r}\,(r, \varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{4 - r^2}\right),$$

$$r \in \left[0, \sqrt{2}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r, \varphi) = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{-r}{\sqrt{4 - r^2}}\right),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0),$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right)(r, \varphi) = \frac{r}{\sqrt{4 - r^2}}\vec{r}\,(r, \varphi).$$

$$\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right)(r, \varphi)\right| = \left|\frac{r}{\sqrt{4 - r^2}}\vec{r}\,(r, \varphi)\right| = \frac{r}{\sqrt{4 - r^2}}\left|\vec{r}\,(r, \varphi)\right| = \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}.$$

Površina ploskve je

$$\int\int_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\ \mathrm{d}r\right)\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-2\sqrt{4 - r^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-2\sqrt{2} + 4\right)\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(4 - 2\sqrt{2}\right).$$

Uporabili smo

$$\int \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}\ \mathrm{d}r = -\int \frac{1}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u =$$

$$-\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-2\sqrt{4-r^2}+C,$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $u=4-r^2$.

2. način:

Uporabimo sferične koordinate: Naj bo $T(x,y,z)$ poljubna točka na ploskvi.

Označimo s φ kot med ravnino $z=0$ in vektorjem $\overrightarrow{0T}$.

$$(\varphi,\theta)\to\vec{r}\,(\varphi,\theta)=(2\cos\varphi\cos\theta,2\cos\varphi\sin\theta,2\sin\varphi)\,,$$

$$\theta\in[0,2\pi]\,,\quad \varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],$$

kjer smo upoštevali, da na ploskvi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ velja $2\sin\varphi=\sqrt{2^2\cos^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2\cos\varphi$, od koder sledi $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Tako ugotovimo, da velja $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Površino ploskve izračunamo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(r,\varphi)\right|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\,\mathrm{d}\theta\\
&= 4\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,\mathrm{d}\theta=4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\pi.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(r,\varphi) &= -2\cos\varphi\vec{r}\,(\varphi,\theta)\,,\\
\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(r,\varphi)\right| &= 2^2\cos\varphi.
\end{aligned}$$

6. Izračunaj površino dela paraboloida P, podanega z enačbo $z=x^2+y^2$, ki leži pod ravnino $z=9$.

   1. način z uporabo kartezičnih koordinat: Presek ploskve $z=x^2+y^2$ z ravnino $z=9$ je krožnica C s polmerom 3 in s središčem v točki $(0,0,9)$. Krožnica C leži v ravnini $z=9$. Pravokotna projekcija ploskve P v ravnino $z=0$ je krog D s polmerom $R=3$ in s središčem

v koordinatnem izhodišču $(0,0)$. Torej $D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 9\}$. Izračunajmo površino $S(P)$ ploskve P. Pišimo $z = f(x,y)$.

$$
\begin{aligned}
S(D) &= \int\int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \\
&= \int\int_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \\
&= \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{24}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right).
\end{aligned}
$$

Vpeljali smo polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$\varphi \in [0,2\pi], \quad r \in [0,1], \quad J = r.$$

Pri tem smo upoštevali

$$
\begin{aligned}
\int r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{8}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C \\
&= \frac{2}{24}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}+C,
\end{aligned}
$$

kjer smo upoštevali substitucijo $1+4r^2 = u$.

2. način parametrizacije

Parametrizirajmo ploskev s parameteroma (r,φ), pri čemer upoštevamo, da je pravokotna projekcija ploskve P v ravnino $z=0$ krog D s polmerom 3 in s središčem v izhodišču. V ravnini $z=0$ krog D parametriziramo s polarnimi koordinatami $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Tretjo koordinato določa predpis $z = x^2+y^2 = r^2$. Torej je parametrizacija ploskve P naslednja

$$(r,\varphi) \to \vec{r}(r,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2\right),$$

$$\varphi \in [0,2\pi], \quad r \in [0,1].$$

Za izračun površine ploskve potrebujemo vektorski produkt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}(r,\varphi) \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r) \times (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\,,$$

$$\left(-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r\right).$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right| &= \left|\left(-2r^2\cos\varphi, -2r^2\sin\varphi, r\right)\right| = \\ &= \sqrt{4r^4+r^2} = \sqrt{r^2}\sqrt{4r^2+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(D) &= \int\int_S \mathrm{d}S \\ &= \int\int_{[0,3]\times[0,2\pi]} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| \,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 r\sqrt{4r^2+1}\ \mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right). \end{aligned}$$

7. Ploskev S naj bo del sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ v prvem oktantu, ki leži znotraj cilindra $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Izračunaj površino ploskve S.

   Rešitev:

   Parametrizirajmo ploskev S. Pravokotna projekcija ploskve S v xy ravnino je enaka krogu K s polmerom $\frac{a}{2}$ in s središčem v točki $(\frac{a}{2},0)$.

   1. način:

   Vpeljimo polarne koordinate. Poiščimo najprej parametrizacijo kročznice s središčem v točki $(\frac{a}{2},0)$ in s polmerom $\frac{a}{2}$. Vpeljimo polarne koordinate. Naj (x,y) leži na krožnici.

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi].$$

   Poiščimo $r(\varphi)$. Vstavimo v enačbo krožnice in dobimo

$$(r(\varphi))^2\cos^2\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi = ar(\varphi)\cos\varphi,$$

$$(r(\varphi))^2 = ar(\varphi)\cos\varphi,$$

$$r(\varphi) = a\cos\varphi.$$

   Parametrizacija kroga K je naslednja

$$(r,\varphi)\to\vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad r\in[0,r(\varphi)], \quad \varphi\in[0,2\pi].$$

Tretjo koordinato z točke T na ploskvi P določimo iz enačbe sfere,

$$z = \pm\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \pm\sqrt{a^2 - r^2},$$

kjer izberemo predznak $+$, ker leži ploskev nad ravnino $z = 0$. Torej imamo parametrizacijo ploskve P:

$$(r, \varphi) \to \vec{r}\,(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{a^2 - r^2}),$$

$$(r, \varphi) \in D = \{(r, \varphi), \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \le r \le a\cos\varphi\}.$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\vec{r}\,(r, \varphi)\,,$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}a.$$

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_S \mathrm{d}S &= \int\!\!\int_D \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\varphi} \frac{ra}{\sqrt{a^2 - r^2}}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a\sqrt{a^2 - r^2}\right)\Big|_0^{a\cos\varphi}\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} + a^2\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\,(1 - \sin\varphi)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= a^2\,(\varphi + \cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da velja

$$\int \frac{ra}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r = -\frac{a}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{a}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -au^{\frac{1}{2}} + C = -a\sqrt{a^2 - r^2} + C,$$

kjer smo uvedli novo spremenljivko

$$u = a^2 - r^2.$$

2. način:

Ploskev P parametriziramo v kartezičnih koordinatah

$$(x, y) \to \vec{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\right), \quad (x, y) \in K.$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},-\frac{y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},1\right)=$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2-(x^2+y^2)}+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-(x^2+y^2)}}.$$

$$\begin{aligned}\int\int_S \mathrm{d}S &= \int\int_K\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right| \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &= \int\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\varphi}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\\ &= a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\end{aligned}$$

Vpeljali smo polarne koordinate in parametrizirali krog K na naslednji način

$$(r,\varphi)\to\vec{r}(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\quad (r,\varphi)\in D,$$

kjer je

$$D=\{(r,\varphi),\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],0\le r\le a\cos\varphi\}$$

in

$$J=r.$$

8. Ploskev P naj bo del ravnine $x+y+z=1$, ki leži v prvem oktantu. Naj bo dana funkcija $f(x,y,z)=yz$. Izračunaj ploskovni integral

$$\int\int_P f(x,y,z)\ \mathrm{d}S.$$

Rešitev:

1. način: Pravokona projekcija ploskve Ω v ravnino $z=0$ je območje D v ravnini $z=0$, kjer je

$$D=\{(x,y);\quad x\in[0,1],\quad 0\le y\le 1-x\}.$$

Pišimo $z=g(x,y)=1-x-y$. Parmetrizirajmo ploskev Ω.

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,g(x,y))=(x,y,1-x-y),(x,y)\in D,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = (1,1,1)\,.$$

Lahko izračunamo direktno

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1,0,-1) \times (0,1,-1) = (1,1,1)\,.$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
\int\int_\Omega f(x,y,z)\ \mathrm{d}S &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y\,(1-x-y))\sqrt{3}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x}\ \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\ \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{3}\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

2. način:

Pravokona projekcija ploskve Ω v ravnino $y=0$ je območje D v ravnini $y=0$, kjer je

$$D = \{(x,z); x \in [0,1], 0 \le z \le 1-x\}.$$

Pišimo $y = g(x,z) = 1-x-z$. Parametrizirajmo ploskev Ω.

$$\vec{r}(x,z) = (x, g(x,z), z) = (x, 1-z-x, z), (x,z) \in D,$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, 1, -\frac{\partial g}{\partial z}\right) = |(1,1,1)|\,.$$

Lahko izračunamo direktno

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = |(0,-1,1) \times (1,-1,0)| = (1,1,1)\,.$$

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
\int\int_\Omega f(x,y,z)\ \mathrm{d}S &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-z-x)\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right|\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-z-x)\,z\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

9. Izračunaj ploskovni integral $\iint_\Omega f(x,y,z)d\Omega$, kjer je $f(x,y,z) = x^2yz$ in Ω je del ravnine $x+y+z=1$, ki leži nad pravokotnikom $[0,3]\times[0,2]$.

   Rešitev:
$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}.$$
$$\iint_\Omega f(x,y,z)d\Omega = \int_0^3\int_0^2 \sqrt{3}x^2y(1-x-y)dxdy = \frac{-93\sqrt{3}}{2}.$$

10. Poišči površino dela paraboloida $z = x^2+y^2$, ki leži pod ravnino $z=9$.

   Rešitev:

   1. način:

   Izračunajmo površino v kartezičnih koordinatah. Pravokotna projekcija ploskve P v ravnino xy je enaka krogu s polmerom 3. Naj bo
$$D = \{(x,y); x^2+y^2 \le 9\}.$$
   Pišimo $f(x,y) = x^2+y^2$. Ploskev P parametriziramo na naslednji način
$$(x,y) \to \vec{r}\,(x,y) = (x,y,f(x,y))\,, \quad (x,y)\in D,$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = (-2x,-2y,1)\,.$$
   Površina je
$$\begin{aligned}\int\int_D\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\int_D\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{24}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right).\end{aligned}$$
   Upoštevali smo
$$\int r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{8}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{24}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{24}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}+C,$$
   kjer smo vpeljali novo spremenljivko $u = 1+4r^2$.

   2. način:

Parametrizirajmo ploskev P na naslednji način:

$$(r,\varphi)\to\vec{r}\,(r,\varphi)=\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi,r^2\right),\quad r\in[0,3]\,,\quad \varphi\in[0,2\pi]\,.$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\left(-2r^2\cos\varphi,-2r^2\sin\varphi,r\right).$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|=\sqrt{4r^4+r^2}=r\sqrt{4r^2+1}=r\sqrt{4r^2+1}.$$

$$\int\int_S \mathrm{d}S=\int\int_{[0,3]\times[0,2\pi]}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|\,\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right).$$

5.2 Ploskovni integral vektorskega polja

Pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev P s parametrizacijo $\vec{r}:D\to P$ je enak

$$\int_P\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_P\vec{F}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S=\pm\int\int_D\vec{F}\left(\vec{r}\,(u,v)\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v,$$

kjer je $\vec{n}$ normalni vektor na ploskev S dolžine 1. Predznak + izberemo v primeru, ko vektor $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ kaže v smer vektorja $\vec{n}$, to je, v smer, v katero računamo pretok.

1. Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}\,(x,y,z)=(x,y,z)$ navzven iz valja z radijem R in višino h, če je os valja enaka z osi in njegova spodnja ploskev leži v xy ravnini.

   Rešitev:

   Površina valja je unija treh ploskev, kroga P_0 s središčem v izhodišču in z radijem R, plaščem valja P in zgornjo ploskvijo P_1, to je, s krogom s rediščem v točki $(0,0,h)$ in s polmerom R.

   Izračunajmo pretok skozi spodnjo ploskev P_0.

   Ploskev P_0 parametriziramo na naslednji način:

$$(r,\varphi)\to(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)\,,\quad r\in[0,R]\,,\quad\varphi\in[0,2\pi]\,,$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=(-r\sin\varphi,r\cos\varphi,0)\times(\cos\varphi,\sin\varphi,0)=$$
$$=\left(0,0,-r\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\right)=(0,0,-r)\,.$$

   Smer normale je prava, kaže navzdol.

$$\vec{F}\left(\vec{r}\left(r,\varphi\right)\right) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0\right),$$
$$\vec{F}\left(\vec{r}\left(r,\varphi\right)\right)\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = 0.$$

$$\int\int_{P_0}\vec{F}\left(x,y,z\right)\ \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \vec{F}\left(\vec{r}\left(r,\varphi\right)\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Izračunajmo pretok vektorskega polja skozi plašč C valja.

Ploskev P parametriziramo na naslednji način:

$$\left(\varphi, z\right)\to\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z\right),\quad \varphi\in\left[0,2\pi\right],\quad z\in\left[0,h\right].$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \left(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0\right)\times\left(0,0,1\right) = \left(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0\right).$$

$$\begin{aligned}\int\int_{P}\vec{F}\left(x,y,z\right)\ \mathrm{d}\vec{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h \vec{F}\left(\vec{r}\left(r,\varphi\right)\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z\\ &= \int_0^h\int_0^{2\pi}\left(R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z\\ &= \int_0^h\int_0^{2\pi} R^2\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z = 2\pi R^2 h.\end{aligned}$$

Ploskev P_1 parametriziramo na naslednji način:

$$\left(r,\varphi\right)\to\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right),\quad \varphi\in\left[0,2\pi\right],\quad r\in\left[0,R\right].$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} &= \left(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0\right)\times\left(\cos\varphi, \sin\varphi, 0\right) =\\ &= \left(0,0,-r\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right) = \left(0,0,-r\right).\end{aligned}$$

Smer normale na zgornji ploskvi mora biti v pozitivni smeri osi z.

$$\begin{aligned}\int\int_{P_1}\vec{F}\left(x,y,z\right)\ \mathrm{d}\vec{S} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^R \vec{F}\left(\vec{r}\left(r,\varphi\right)\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right)\left(0,0,-r\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^R hr\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = h2\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \pi R^2 h.\end{aligned}$$

Pretok je

$$\int\int_{P_0} \vec{F}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S} + \int\int_{P} \vec{F}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S} + \int\int_{P_1} \vec{F}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S} = 3\pi R^2 h.$$

2. Dano je vektorsko polje $\vec{F}(x,y,z) = (xze^y, -xze^y, z)$. S naj bo del ravnine podane z enačbo $x+y+z=1$, ki leži v prvem oktantu, orientirana z normalo, ki kaže navzdol. Izračunaj

$$\int\int_S \vec{F}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S}.$$

Rešitev:

Parametrizacija ploskve S:

$$(x,y) \to \vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y)\,, (x,y) \in D,$$
$$D = \{(x,y); 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}.$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}, -\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}, 1\right) = (1,1,1)\,.$$

$$\begin{aligned}
&\int\int_S \vec{F}(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{S} = \\
= \ & -\int\int_D \vec{F}(\vec{r}(x,y)) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
= \ & -\int\int_D (x(1-x-y)e^y, -x(1-x-y)e^y, (1-x-y))\,(1,1,1,)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
= \ & -\int\int_D \left(xe^y - x^2e^y - xye^y - xe^y + x^2e^y + xye^y + (1-x-y)\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
= \ & -\int\int_D (1-x-y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
= \ & -\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
= \ & -\int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}\ \mathrm{d}x \\
= \ & -\int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right)\Big|_0^1\ \mathrm{d}x \\
= \ & -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}x \\
= \ & -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

6 Integralski izreki

6.1 Gaussov izrek

Če je:

- $T \subset \mathbb{R}^3$ 'dovolj lepo' območje z robno sklenjeno ploskvijo ∂T, katere normala $\vec{n}$ kaže navzven iz ploskve,
- $\vec{F}$ vektorsko polje,

potem je

$$\int_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}S = \int_{\partial T} \vec{F} \cdot\ \mathrm{d}\vec{S} = \int\int\int_T \operatorname{div} \vec{F}\ \mathrm{d}V.$$

Pri tem je $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, torej $\operatorname{div}\,(P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

1. Telo T je omejeno s ploskvami $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$. Naj bo S rob telesa T, orientiran z zunanjo normalo. Dano je vektorsko polje
$$\vec{F}\,(x, y, z) = (x, y, z) = \left(xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin xy\right).$$
   (a) Izračunaj $\operatorname{div} \vec{F}\,(x, y, z)$.
   (b) S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja F skozi ploskev S.

   Rešitev:

$$\operatorname{div} \vec{F}\,(x, y, z) = 3y.$$

$$T = \{(x, y, z); -1 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le 1 - x^2, \quad 0 \le y \le 2 - z\},$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial T} \vec{F}\cdot\, \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\ \mathrm{d}V = \iiint_T 3y\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} 3y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-z}\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\frac{(2-z)^2}{2}\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[-(2-(1-x^2))^3+8\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[-(1+x^2)^3+8\right]\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(1+x^2)^3-8\right]\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1\left(-7+3x^2+3x^4+x^6\right)\ \mathrm{d}x = \frac{184}{35}.
\end{aligned}$$

Na zadnjem koraku smo upoštevali, da je integrand soda funkcija.

2. S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}\,(x,y,z) = (x,y,z)$ navzven iz valja z radijem R in višino h, če je os valja enaka z osi in njegova spodnja ploskev leži v xy ravnini.

Rešitev:

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial T} \vec{F}\cdot\, \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\ \mathrm{d}V = \iiint_T 3\ \mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h 3r\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R 3rz\Big|_0^h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= h\int_0^{2\pi}\int_0^R 3\frac{r^2}{2}\Big|_0^R \\
&= h3\frac{R^2}{2}2\pi = 3\pi hR^2.
\end{aligned}$$

V izračunu integrala smo vpeljali cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, h], J = r.$$

6.2 Stokesov izrek

Če je:

- $P \subset \mathbb{R}^3$ 'dovolj lepa' orientabilna ploskev z robom ∂P,
- $\vec{F}$ vektorsko polje,

potem je

$$\int_{\partial P} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{s} = \int_P \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) \cdot \, \mathrm{d}\vec{S}.$$

1. Izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x + 3y + 2z, 2x + z, x - y)$ po robu$C$ trikotnika z oglišči $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ in $(0,0,1)$. Uporabi Stokesov izrek. Krivulja C naj bo orientirana v nasprotni smeri ure.

   Rešitev:

   Označimo z S ploskev-trikotnik z oglišči $A(2,0,0)$,$B(0,3,30)$ in $C(0,0,1)$. Krivulja C je rob trikotnika S. Pravokotna projekcija trikotnika S v ravnino $z = 0$ je enaka trikotniku $\Delta_{A'B'C'}$ z ogliš či $A'(2,0)$, $B'(0,3)$ in $C'(0,0)$.

   $$\Delta_{A'B'C'} = \{(x,y), 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}x\}.$$

   Poiščimo še endačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(2,0,0)$,$B(0,3,0)$ in $C(0,0,1)$. Enačba ravnine:

   $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,3,0) \times (-2,0,1) = (3,2,6),$$

   $$(x,y,z) - (2,0,0)\,(3,2,6) = 0,$$

   $$3x + 2y + 6z - 6 = 0,$$

   $$z = \frac{1}{6}\,(-3x + 6 - 2y) = f(x,y).$$

   $$(\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = (-f_x, -f_y, 1) = \frac{1}{6}\,(3,2,6)\,.$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(x,y,z) = (-2,1,-1)\,,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(x,y)) = (-2,1,-1)\,,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(x,y))\,(\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = (-2,1,-1)\,\frac{1}{6}\,(3,2,6) = -\frac{10}{6}.$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)\vec{n}\ \mathrm{d}S \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(-\frac{10}{6}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = -5.\end{aligned}$$

2. S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj integral vektorskega polja

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2y^3, 1, z\right)$$

po krožnici C, ki je presek valja z enačbo $x^2 + y^2 = R^2$ in ravnine z enačbo $z = 0$.

Rešitev:

Krožnica C je rob kroga D s središčem v izhodiču in s polemrom R. Parametrizacija kroga D:

$$(r,\varphi) \to \vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)\,,\quad r \in [0,R],\quad \varphi \in [0,2\pi].$$

$$\vec{r}_r(r\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,$$

$$\vec{r}_\varphi(r,\varphi) = (-r\cos\varphi, r\cos\varphi, 0)\,,$$

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi = (0,0,r).$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi)) = \left(0,0,-3r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi\right)\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi) =$$

$$= \left(0,0,-3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)(0,0,r) = -3r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_D \left(\mathrm{rot}\,\vec{F}\right)\vec{n}\,\mathrm{d}S \\
&= \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left(-3r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^R \\
&= -\frac{3R^6}{6}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{3R^6}{6}\frac{\pi}{4} = -\frac{R^6\pi}{8}.
\end{aligned}$$

3. S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z)$ po krožnici C, ki je presek sfere z enačbo $x^2+y^2+z^2=a^2$ in ravnine z enačbo $x+y+z=0$.

   Rešitev:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = (0,0,0)\,.$$

   Vektorsko polje je potencialno in je zato integral vektorskega polja $\vec{F}$ po vsaki sklenjeni krivulji enak 0, torej $\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$.

4. Dano je vektorsko polje $\vec{F}) = \left(-y^2, x, z^2\right)$. Krivulja C je presek ravnine $y+z=2$ in cilindra $x^2+y^2=1$. Krivulja C naj bo orientirana pozitivno, to je, v nasprotni smeri ure, ko gledamo z vrha pozitivne osi z. Izračunaj krivuljni integral $\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ z uporabo Stokesovega izreka. Pri uporabi Stokesovega izreka uporabi, da krivulja C omejuje ploskev S, ki leži v ravnini $y+z=2$.

   Rešitev:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = (0,0,1+2y)\,,$$

   Krivulja C omejuje elipso S, ki leži v ravnini $y+z=2$. Pravokotna projekcija elipse S v ravnino $z=0$ je krog s polmerom 1 in s središčem v izhodišču. Parametrizirajmo elipso S.
   1. nacin:

$$(r,\varphi)\to\vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2-r\sin\varphi)\,,$$

$$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

$$\vec{r}_r(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\sin\varphi)\,,$$

$$\vec{r}_\varphi(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, -r\cos\varphi)\,,$$

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi = (0, r, r).$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi)) = (0,0,1+2r\sin\varphi)\,,$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi) =$$

$$= (0,0,1+2r\sin\varphi)\,(0,r,r) = r\,(1+2r\sin\varphi)\,.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,(1+2r\sin\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r + 2r^2\sin\varphi\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^1\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

2. način:

Parametrizirajmo ploskev S s kartezičnimi koordinatami

$$(x,y) \to \vec{r}(x,y) = (x, y, 2-y)\,,$$

$$(x,y) \in D,$$

$$D = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}.$$

Pišimo

$$z = f(x,y) = 2-y.$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (0,1,1),$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_D \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(x,y))\,(\vec{r}_x\times\vec{r}_y)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int\int_D (0,0,1+2y)\,(0,1,1)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int\int_D (1+2y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\varphi)\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \pi,
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r\in[0,1],\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \det J = r.$$

5. Dano je vektorsko polje $\vec{F} = \left(3y, -xz, yz^2\right)$. Krivulja C je presek paraboloida $2z = x^2+y^2$ in ravnine $z = 2$. Krivulja C naj bo orientirana v smeri ure. S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj krivuljni integral

$$\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r}.$$

Pri izračunu upoštevaj, da je ploskev S, ki jo krivulja C omejuje enaka

(a) plašču paraboloida $2z = x^2+y^2$, pod ravnino $z = 2$.

(b) krogu $S = \{(x,y,z); x^2+y^2 \leq 4, z = 2\}$.

Rešitev:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2+x, 0, -(z+3)\right).$$

(a) Glede na dano orientacijo krivulje C, je normala usmerjena navzdol. Iz enačb $z = 2$ in $2z = x^2+y^2$., dobimo $4 = x^2+y^2$. Plavokotna projekcija ploskve S v ravnino $z = 0$ je krog D s središčem v izhodišču in s polmerom 2.

1. način: Ploskev S parametrizirajmo s kartezičnimi koordinatami:

$$(x,y) \to \vec{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{x^2+y^2}{2}\right),\quad (x,y)\in D.$$

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-x,-y,1).$$

Normala $\vec{r}_x\times\vec{r}_y$ kaže navznoter. Normala $\vec{n}$ naj kaže navzven.

$$\operatorname{rot}\vec{F}\,(\vec{r}(x,y))\,(\vec{r}_x\times\vec{r}_y) =$$

$$= \left(z^2 + x, 0, -(z+3)\right)(-x,-y,1) = -\left(x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + 3\right),$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)\vec{n}\ \mathrm{d}S \\
&= -\int\int_D \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(x,y))\,(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int\int_D \left(x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + 3\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r\cos\varphi\frac{r^4}{4} + r^2\cos^2\varphi + \frac{r^2}{2} + 3\right) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\frac{r^6}{4}\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi + \frac{r^2}{2} + 3r\right)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = 20\pi,
\end{aligned}$$

kjer smo vpeljali polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \in [0,2], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad \det J = r.$$

2. način:

Ploskev S parametriziramo na naslednji način:

$$(r,\varphi) \to \vec{r}(\vec{r}(r,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{r^2}{2}\right), \quad r \in [0,2], \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi = \left(-r^2\cos\varphi, -r^2\sin\varphi, r\right),$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi) =$$

$$\left(\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 + r\cos\varphi, 0, -\frac{r^2}{2} - 3\right)\left(-r^2\cos\varphi, -r^2\sin\varphi, r\right) =$$

$$= -\frac{r^6}{4}\cos\varphi - r^3\cos^2\varphi - \frac{r^3}{2} - 3r$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)\vec{n}\ \mathrm{d}S \\
&= -\int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^6}{4}\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi + \frac{r^3}{2} + 3r\right) \\
&= 20\pi.
\end{aligned}$$

(b) Glede na dano orientacijo krivulje C, je normala usmerjena navzdol. Parametrizacija kroga S:

$$(r,\varphi) \to \vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2)\,, \quad r \in [0,2], \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi = (0,0,-r)\,,$$
$$\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)(\vec{r}(r,\varphi))\,(\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi) =$$
$$(4 + r\cos\varphi, 0, -5)\,(0,0,-r) = 5r,$$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right)\vec{n}\ \mathrm{d}S\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 5r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{5r^2}{2}\right)\Bigg|_0^2\ \mathrm{d}\varphi = 20\pi.\end{aligned}$$

6.3 Greenova formula

Če je:

- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 'dovolj lepo' območje,
- $\vec{F} = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ vektorsko polje,

potem je

$$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\ \mathrm{d}\vec{s} = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

1. Izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y) = \left(2x^2 + y^2, (x+y)^2\right)$ po robu trikotnika z oglišči $(1,1)$, $(2,2)$ in $(3,1)$.

   Rešitev: Z uporabo Greenov formule dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &= \int\int_D (2(x+y) - 2y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &= \int\int_D (2x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x 2x\ \mathrm{d}y + \int_2^3\ \mathrm{d}x\int_1^{-x+4} 2x\ \mathrm{d}y = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{12}{3}.\end{aligned}$$

2. Izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y) = \left(2x^2 + y^2, (x+y)^2\right)$ po robu trikotnika z oglišči $(1,1)$, $(2,2)$ in $(1,3)$.

Rešitev: Z uporabo Greenov formule dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&= \iint_D (2(x+y) - 2y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&= \iint_D (2x) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{-x+4} 2x \; \mathrm{d}y = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

3. Izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y) = \left(-x^2 y, xy^2\right)$ po krivulji

$$\left\{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0\right\} \cup \{(0,y) \,:\, 0 \leq y \leq R\} \cup \{(x,0) \,:\, 0 \leq x \leq R\}.$$

Krivulja naj bo orientirana v nasprotni smeri ure.

Rešitev:

Z uporabo Greenov formule dobimo

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left(y^2 + x^2\right) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi R^4}{8}.$$

4. S pomočjo Greenove formule izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje elipsa z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kjer $a, b > 0$.

Rešitev:

Vektorsko polje $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ izberemo tako, da velja $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Imamo več možnosti izbire komponent P in$Q$. Izberemo lahko npr. $P = 0$, $Q(x,y) = x$, oziroma $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$. Lahko tudi $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$.

Izberimo

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \frac{1}{2}(-y, x).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

$$P = \int\int_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y) =$$

$$= \int_{\partial D} \vec{F}\cdot\ \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin\varphi, a\cos\varphi)\,(-a\sin\varphi, b\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\sin^2\varphi + ab\cos^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\ \mathrm{d}t = \pi ab.$$

6.4 Krivuljni integral potencialnega polja

Če je $\vec{F} = \mathrm{grad} u$ in je K krivulja od točke A do točke B, potem je

$$\int_K \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = u\,(B) - u\,(A)\,.$$

1. Izračunaj krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}\,(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ po

   (a) po krivulji

   $$C = \{(x,y,0), x^2+y^2 = 1,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\},$$

   v smeri od točke $(1,1,0)$ do točke $(1,0,0)$.

   (b) po daljici $\mathcal{D}$ od točke $(1,1,0)$ do točke $(1,0,0)$.

   Rešitev:

   Začetna točka obeh krivulj je enaka $(-1,0,0)$ in končna točka obeh krivulj je enaka $(1,0,0)$. Velja

   $$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0},$$

   od koder sledi, da obstaja skalarna funkcija u, da je

   $$\vec{F} = \mathrm{grad} u.$$

   $$\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(\varphi))\dot{\vec{r}}(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = u(1,1,0) - u(1,0,0).$$

Prav tako velja

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = u(1,1,0) - u(-1,0,0).$$

Poiščimo funkcijo u, za katero velja

$$\vec{F} = \mathrm{grad} u.$$

Izpolnjene morajo biti enačbe

$$u_x(x,y,z) = y + z, \quad u_y(x,y,z) = x + z, \quad u_z(x,y,z) = x + y.$$

Prvo enačbo inegriramo po x in dobimo

$$u(x,y,z) = yx + zx + h(y,z),$$

slednjo enačbo odvajamo po y in hkrati upoštevamo enačbo $u_y(x,y,z) = x + z$, od koder dobimo

$$x + z = x + h_y(y,z), \quad h_y(y,z) = z,$$

nadalje, odvajamo enačbo $u(x,y,z) = yx + zx + h(y,z)$, še po z in upoštevamo enačbo

$$u_z(x,y,z) = x + y$$

in dobimo

$$x + y = x + h_z(y,z), \quad h_z(y,z) = y.$$

Zadnjo enačbo $h_z(y,z) = y$ integriramo po z in dobimo

$$h(y,z) = yz + g(y).$$

Iz enakosti

$$h_y(y,z) = z + g'(y) = z$$

sledi $g'(y) = 0$ in $g(y) = A$. Torej $h(y,z) = yz + A$, in

$$u(x,y,z) = yx + xz + yz + A.$$

Torej

$$\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = u(1,1,0) - u(-1,0,0) = 1,$$

Torej

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} = u(1,1,0) - u(-1,0,0) = 1,$$

2. Izračunaj krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y) = (x+y, x-y)$ po delu premice z enačbo $y = x$ od točke $(0,0)$ do točke (π,π).

Rešitev: 1. način izračuna:

$$\vec{F}(x,y) = (x+y, x-y)\,.$$

$$P(x,y) = x+y, \quad Q(x,y) = x-y.$$

Vektorsko polje je potencialno, saj velja

$$Q_x = P_y = 1.$$

Torej obstaja funkcija u za katero velja

$$\vec{F} = \operatorname{grad}(u) = (u_x, u_y)\,.$$

Poiščimo funkcijo u, za katero velja

$$u_x = x+y, \quad u_y = x-y.$$

Integriramo prvo enačbo po x in dobimo

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y),$$

ena vcbo odvajamo po spremenljivki y in dobimo

$$u_y(x,y) = x + C'(y),$$

$$x - y = x + C'(y),$$

torej

$$-y = C'(y),$$

$$C(y) = -\frac{y^2}{2} + D,$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + -\frac{y^2}{2} + D.$$

$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = u(\pi,\pi) - u(0,0) = \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - 0 = \pi^2.$$

2. način izračuna: Parametrizacija dela premice od točke $(0,0)$ do točke (π,π) je

$$x \to \vec{r}(x) = (x,x), \quad x \in [0,\pi].$$

$$\dot{\vec{r}}(x) = (1,1)\,.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{\pi} (x+x, x-x)\,(1,1)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} (2x)\ \mathrm{d}x = \left.\frac{2x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi^2.
\end{aligned}$$

7 Fourireove vrste

7.1 Fourireova vrsta na intervalu $[-l, l]$

Če je f kosoma zvezna funkcija na intervalu $[-l, l]$, ki ima v vsaki točki levi in desni odvod, potem je njen Fourierov razvoj enak

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right), \tag{2}$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x \quad \text{za } n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x \quad \text{za } n \geq 1. \end{aligned}$$

Naj bo $\widetilde{f}$ periodična razširitev funkcije f s periodo $2l$ na realno os$\mathbb{R}$.

- Vsota $F(x)$ vrste (2) je enaka $\widetilde{f}(x)$ v tistih točkah $x \in \mathbb{R}$, v katerih je f zvezna.
- Vsota $F(x)$ vrste (2) je enaka $\frac{\widetilde{f}(x+)+\widetilde{f}(x-)}{2}$ v tistih točkah $x \in \mathbb{R}$, v katerih $\widetilde{f}$ ni zvezna.

1. Razvij funkcijo $f(x) = |x|$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.

   Rešitev: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)\pi x\right)$.

2. Naj bo $k > 0$ in $l > 1$. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -l \leq x < -1 \\ 1 & : \quad -1 \leq x < -1 \\ 0 & : \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

   (a) Razvij funkcijo f v Fourierovo vrsto na $[-l, l]$.

   (b) Naj bo $F(x)$ vsota Fourierove vrste. Določi vrednosti $F(l)$, $F(0)$ in $F(2l)$.

   Rešitev:

(a) Perioda je $2l$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x = \frac{2}{l}.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{-1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{l}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}.
\end{aligned}$$

Funkcija f je soda, od koder sledi

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Fourierova vrsta je

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

(b) Ker je f zvezna funkcija v točki 0 je $F(0) = f(0) = 1$. Ker je f periodična s periodo $2l$, velja $F(2l) = F(0) = f(0) = 1$. Naj bo $\widetilde{f}$ periodična razširitev funkcije f na realno os $\mathbb{R}$. Funkcija $\widetilde{f}$ v točki $x = l$ ni zvezna. Torej je $F(l) = \frac{\widetilde{f}(l+)+\widetilde{f}(l-)}{2}$.

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : \ -\pi \le x < 0 \\ 1 & : \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

(a) Razvij funkcijo F v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) $F(x)$ naj bo vsota Fourierove vrste. Izračunaj $F(0)$, $F(\pi)$, $F(\frac{\pi}{2})$, $F(\frac{3\pi}{2})$.

Rešitev:

(a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

ker je f liha funkcija. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Podobno

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0,$$

saj je integrad liha funkcija.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 & : \quad n = n = 2k \\ \frac{4}{n\pi} & : \quad n = 2k-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Fourierova vrsta je naslednja

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(4k-1)x.$$

(b) Naj bo $\widetilde{f}$ periodična razširitev s periodo 2π funkcije f na realno os. $\widetilde{f}$ ni zvezna v $x = \pi$.

$$F(\pi) = \frac{\widetilde{f}(\pi+0) + \widetilde{f}(\pi-0)}{2} = \frac{(-1) + (1}{2} = 0.$$

$\widetilde{f}$ je zvezna v $x = \frac{3\pi}{2}$ in zato je $F(\frac{3\pi}{2}) = \widetilde{f}(\frac{3\pi}{2}) = -1$. $\widetilde{f}$ je zvezna v $x = \frac{\pi}{2}$ in zato je je $F(\frac{\pi}{2}) = \widetilde{f}(\frac{\pi}{2}) = 1$.

4. Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -\pi \le x < 0 \\ \sin x & : \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-(\cos\pi)+1\right) \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin 2x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(-\cos(2x)\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left(\cos(2\pi)-\cos 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

Naj bo $n > 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos(nx)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(x(1+n))+\sin(x(1-n))\right]\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos((1+n)x)}{1+n}+\frac{-\cos((1-n)x)}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\cos((1+n)\pi)}{1+n}+\frac{-\cos((1-n)\pi)}{1-n}\right)-\left(\frac{\cos 0}{1+n}+\frac{\cos 0}{1-n}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{(-1)^{1+n}}{1+n}+\frac{(-1)^{1-n}}{1-n}\right)-\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{2}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-n^2} & : \ n = 2k, \\ 0 & : \ n = 2k-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Torej

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-(2k)^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{2k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [1 - \cos(2x)] \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right)_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Naj bo $n > 1$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [\cos(x(1-n)) + \cos(x(1+n))] \, \mathrm{d} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x(1-n))}{1-n} - \frac{\sin(x(1+n))}{1+n} \right)_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Pri izračunu koeficienta b_n, $n > 1$ bi lahko uporabili ortogonalnost:

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x, n > 1.$$

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin x \, \mathrm{d}x,$$

kjer smo upoštevali pri $n = 1$ in $n > 1$, da sta integranda sodi funkciji.

$$F(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx).$$

5. Dana je funkcija $f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi]$.

   (a) Razvij funkcijo f v Fourierovo vrsto na intervalu $[0, 2\pi]$.

   (b) Naj bo $F(x)$ vsota Fourierove vrste. Izračunaj vrednosti $F(0)$, $F(2)$

   (c) Pokaži, da velja

   $$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rešitev:

(a) Perioda je 2π.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos\frac{n\pi x}{\pi} \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx)\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}\cos(2n\pi) = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}\cos(2n\pi) = \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{n\pi x}{\pi} \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n} + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n}\cos 2n\pi + \frac{2}{n^3}\cos 2n\pi - \frac{2}{n^3}\right] = -\frac{4\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Fourierova vrsta je naslednja

$$F(x) = \frac{8\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

(b) Naj bo $\widetilde{f}$ periodična razširitev funkcije f na $\mathbb{R}$. Velja

$$F(0) = \frac{\widetilde{f}(0+0) + \widetilde{f}(0-0)}{2} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2.$$

Ker je F periodična s periodo 2π, velja $F(0) = F(2\pi) = 2\pi^2$.

(c) Vstavimo $x = 0$ v Fourierovo vrsto

$$F(0) = \frac{8\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{n^2}.$$

Upoštevamo $F(0) = 2\pi^2$ in dobimo

$$2\pi^2 = \frac{8\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Od tod dobimo

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

7.2 Sinusna in kosinusna vrsta na intervalu $[0, l]$

Kosinusna vrsta za f na intervalu $[0, l]$ je enaka

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcijo f razširimo na interval $[-l, 0]$ kot sodo funkcijo. Dobljeno sodo funkcijo ozna vcimo z f_s. Funkcijo f_s razvijemo na $[-l, l]$ v Fourierovo vrsto, kjer je

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_s(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ \mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f_s(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x \quad \text{za } n \geq 1.$$

Sinusna vrsta za f na intervalu $[0, l]$ je enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcijo f razširimo na interval $[-l, 0]$ kot liho funkcijo. Dobljeno liho funkcijo ozna vcimo z f_l. Funkcijo f_l razvijemo na $[-l, l]$ v Fourierovo vrsto, kjer je

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x \quad \text{za } n \geq 1.$$

1. Dana je funkcija $f(x) = x, x \in [0, 2]$.

   (a) Razvij funkcijo f v kosinusno Fourierovo vrsto F na $[0, 2]$.

   (b) Naj bo $F(x)$ vsota Fourierove vrste. Izračunaj $F(2)$.

   (c) S pomočjo Parsevalove enakosti dokaži, da velja

   $$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Rešitev:

(a) Naj bo f_s soda razširitev funkcije f na interval $[-2,2]$. Funkcijo f razvijemo po kosinusih na $[0,2]$, kar pomeni, da funkcijo f_s razvijemo v Fourierovo vrsto na $[-2,2]$. Perioda je enaka 4. Torej $2l = 4$ oziroma $l = 2$. Tedaj

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_s(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 x\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 2.$$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f_s(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{l}\ \mathrm{d}x \\
&= \left(x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= \left(x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\pi^2}\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} 0 & : \quad n = 2k, \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & : \quad n = 2k-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Kosinusna Fourierova vrsta

$$F(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

(b) Razširimo f_s periodično na celo realno os in razširitev označimo s $\widetilde{f_s}$. Ker je $\widetilde{f_s}$ zvezna v $x = 2$, velja $F(2) = \widetilde{f_s}(2) = 2$.

(c)

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(f_s(x))^2\ \mathrm{d}x = \int_0^2 (f(x))^2\ \mathrm{d}x = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right),$$

$$\int_0^2 x^2\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Torej imamo

$$\frac{8}{3} = 2 + \sum_{0}^{\infty}\frac{64}{(2k-1)^4\pi^4},$$

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

2. Razvij funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$ v kosinusno vrsto na intervalu $[0,1]$.

   Rešitev: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{4n^2-1}$

3. Razvij funkcijo $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2\pi]$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

   Rešitev:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos\frac{nx}{2} dx \\
&= \left[x^2 \frac{2}{n}\frac{nx}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} 2x \sin\frac{nx}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= x^2 \frac{2}{n}\sin(nx)\Bigg|_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} x\sin\frac{nx}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= x^2 \frac{2}{n}\sin(nx)\Bigg|_0^{2\pi} - 4\left[-\frac{2x}{n}\cos\frac{nx}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 n\sin\frac{nx}{2}\right] \\
&= 0 - 4\left(-\frac{4\pi}{n}\right)\cos n\pi = -4\left(-\frac{4\pi}{n}\right)(-1)^n = \frac{16}{n}(-1)^n.
\end{aligned}$$

   Kosinusna Fourierova vrsta je

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\right) = \frac{8\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n}(-1)^n \cos\frac{nx}{2}.$$

4. Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, 2\pi)$.

   Rešitev: Funkcijo f nadaljujemo na interval $(-2\pi, 2\pi)$ kot liho funkcijo in nato to liho funkcijo definirano na $(-2\pi, 2\pi)$ razvijemo v Fourierovo vrsto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2\pi}.$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2\pi}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin\frac{nx}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(-2)\cos\frac{nx}{2}\left(\frac{-8+n^2x^2}{n^3}\right)+\frac{8x}{n^2}\sin\frac{nx}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left((-2)\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}\left(\frac{-8+n^2(2\pi)^2}{n^3}\right)+\frac{8\cdot 2\pi}{n^2}\sin\frac{n2\pi}{2}\right)-\left(-2\frac{(-8)}{n^3}+0\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(-2)(-1)^n\frac{(-8)}{n^3}-\frac{2(-1)^n n^2 4\pi^2}{n^3}-\frac{16}{n^3}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^3}\left(16(-1)^n-16\right)-\frac{8(-1)^n\pi^2}{n}\right] \\
&= \begin{cases} \frac{-8\pi}{2k} & : \quad n=2k, \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{-32}{(2k-1)^3}+\frac{8\pi^2}{(2k-1)}\right) & : \quad n=2k-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

5. (a) Razvij funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ v sinusno vrsto na intervalu $[0, \pi]$.
   (b) S pomočjo naloge 5a izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Rešitev:

(a) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$ (b) $\frac{\pi^3}{32}$

8 Parcialne diferencialne enačbe

8.1 Valovna enačba - nihanje neskončne strune

D´Alembertove formula: rešitev valovne enačbe

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

za $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, ki zadošča pogojema

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

je dana s D´Alembertove formulo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Poišči rešitev valovne enačbe
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
za $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, ki zadošča pogojema
$$u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rešitev:

Rešitev bomo poiskali s pomočjo D´Alembertove formule.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos u \; du \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right] + \frac{1}{2}\sin u \Big|_{x-t}^{x+t} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right]\frac{1}{2} + \sin(x+t) - \frac{1}{2}\sin(x-t) \\
&= \sin(x+t).
\end{aligned}$$

8.2 Valovna enačba - nihanje končne strune

Obravnavali bomo valovno enačbo končne strune po Fourierovi metodi, z ločitvijo spremenljivk. V nadaljevanju bomo pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb obravanavali rešitve diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad x \in (0,l)$$
pri različnih robnih pogojih glede na različne vrednosti realnega števila λ.

2. (a) Pri robnih pogojih
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$
ima diferencialna enačba netrivialne rešitve v primeru
$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$
in rešitev je
$$X(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) pri robnih pogojih

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0$$

ima diferencialna enačba netrivialne rešitve v primeru,

$$\lambda = 0$$

in tedaj rešitev je

$$X(x) \equiv 1$$

ter v primeru,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

in tedaj rešitev je

$$X(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešitev:

(a) Obravnamo diferencialno enačbo

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, l)$$

pri robnih pogojih

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

- Naj bo $\lambda < 0$. Rešimo diferencialno enačbo

  $$X'' + \lambda X = 0.$$

  Vpeljemo nastavek $X(x) = e^{kx}$. Število λ mora zadoš čati karakteristični kvadratni enačbi

  $$k^2 + \lambda = 0.$$

  Dobimo $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je

  $$X(x) = D_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + D_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

  Ob upoštevanju pogoja

  $$X(0) = D_1 + D_2 = 0, \quad D_2 = -D_1,$$

  dobimo

  $$X(x) = 2D_1 \sinh\sqrt{-\lambda}x.$$

  Iz pogoja $X(l) = 0$ od tod sledi $D_2 = 0$, torej $X(x) \equiv 0$.

- Naj bo $\lambda = 0$. Tedaj ima diferencialna enačba

$$X'' + \lambda X = 0 \iff X'' = 0$$

splošno rešitev

$$X(x) = Ax + B.$$

Iz pogojev $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, od tod sledi $X(x) \equiv 0$.

- Naj bo $\lambda > 0$. Pri reševanju diferencialne enačbe

$$X'' + \lambda X = 0$$

vpeljemo nastavek $X(x) = e^{kx}$. Število λ mora zadoš čati karakteristični kvadratni enačbi

$$k^2 + \lambda = 0.$$

Dobimo $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda}$. Splošna rešitev te diferencialne enačbe je

$$X(x) = D_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Iz pogoja $X(0) = 0$ sledi

$$D_1 = 0,$$

torej

$$X(x) = D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Upoštevajmo še pogoj $X(l) = 0$. Veljati mora $D_2 = 0$, ali, $\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$. V primeru $D_2 = 0$, dobimo trivialno reštiev $X(x) \equiv 0$. Torej mora veljati

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0,$$

Dobimo

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}.$$

$$X(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Obravnamo diferencialno enačbo

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, l)$$

pri robnih pogojih

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Obravamo primere, ko je λ realno število.

- Naj bo $\lambda < 0$. Rešimo diferencialno enačbo
$$X'' + \lambda X = 0.$$
Vpeljemo nastavek $X(x) = e^{kx}$. Število λ mora zadoš čati karakteristični kvadratni enačbi
$$k^2 + \lambda = 0.$$
Dobimo $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je
$$X(x) = D_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + D_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$
Upoštevajmo pogoja
$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$
$$X'(x) = D_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} + D_2\left(-\sqrt{-\lambda}\right)e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$
Iz
$$X'(0) = 0$$
sledi
$$D_1 = D_2.$$
Torej
$$X'(x) = 2D_1 \sinh\sqrt{-\lambda}x.$$
Upoštevamo še pogoj
$$X'(l) = 0$$
in dobimo $D_1 = 0$, od koder sledi $X(x) \equiv 0$.
- Naj bo $\lambda = 0$. Tedaj ima diferencialna enačba
$$X'' + \lambda X = 0 \iff X'' = 0$$
splošno rešitev
$$X(x) = Ax + B.$$
Iz pogojev
$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0$$
sledi $A = 0$. Torej
$$X(x) = B.$$

- Naj bo $\lambda < 0$. Rešimo diferencialno enačbo

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Vpeljemo nastavek $X(x) = e^{kx}$. Število λ mora zadoš čati karakteristični kvadratni enačbi

$$k^2 + \lambda = 0.$$

Dobimo $k_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{-\lambda} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda}$. Splošna rešitev te diferencialne enačbe je

$$X(x) = D_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

Upoštevajmo pogoja

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

$$X'(x) = -D_1\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + D_2\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

Iz pogoja $X'(0) = 0$ sledi $D_2 = 0$. Torej

$$X'(x) = -D_1\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

Iz pogoja $X'(l) = 0$ od tod sledi $D_1 =$ ali $\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) = 0$. Če $D_1 =$, sledi $X(x) \equiv 0$. Torej mora veljati $\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) = 0$, od koder sledi

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi, \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad \in \mathbb{N}.$$

$$X(x) = C_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Poišči rešitev valovne enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

za $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty)$ ob pogojih

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \qquad \text{za } t > 0,$$

in

$$u(x,0) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1, \qquad \text{za } 0 < x < \pi.$$

Rešitev: Rešitev bomo poiskali s pomočjo ločitve spremenljivk. Vpeljemo

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

od koder dobimo

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Iz robnih pogojev $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad$ za $t > 0$, sledi

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Piščimo tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{X''}{X} = -\lambda,$$

ki zadošča pogojema

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Uporabimo (2b). Netrivialne rešitve dobimo v primeru $\lambda > 0$ in tedaj ob upoštevanju robnih pogojev dobimo

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešimo

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -n^2.$$

$$T'' + c^2 n^2 T = 0,$$

$$T_n(t) = A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt),$$

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx) \quad n \in \mathbb{N},$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx).$$

Upoštevajmo začetni pogoj

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx), \quad x \in (0,\pi).$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cn(-\sin(cnt) + B_n cn \cos(cnt)) \sin(nx),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n cn) \sin(nx).$$

Torej določiti moramo koeficiente naslednjih sinusnih Fourierovih vrst

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx), \quad x \in (0,\pi)$$

in

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n cn) \sin(nx).$$

$$\begin{aligned}
b_n = B_n cn &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & : \quad n = 2k-1 \\ 0 & : \quad n = 2k \end{cases}
\end{aligned}$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2 c\pi} & : \quad n = 2k-1 \\ 0 & : \quad n = 2k \end{cases}$$

Izračunajmo še koeficiente A_n, $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) \, \mathrm{d}x.$$

Naj bo $n > 1$.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(nx + x) + \sin(nx - x)\right] \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(n-1)(-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^{n-1}}{(n+1)(n-1)} - \frac{2n}{n^2-1}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & : \quad n = 2k-1 \\ \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} & : \quad n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Izračunajmo še A_1.

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_{2k}\cos 2kct + B_{2kct})\sin(2kx) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{2k-1}\cos(2k-1)ct + B_{(2k-1)ct}\right)\sin(2k-1)x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8k}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kct)\sin(2kx) + \frac{4}{c\pi(2k-1)^2}\sin((2k-1)ct)\sin((2k-1)x)\right).$$

4. Poišči rešitev valovne enačbe

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

za $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$ ob pogojih

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \qquad \text{za } t > 0,$$

in

$$u(x,0) = \cos^2 \pi x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin^2(\pi x)\cos(\pi x), \qquad \text{za } 0 < x < 1.$$

Rešitev: Vpeljemo

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Od koder dobimo

$$\frac{1}{4}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

(konstanto 4 je enostavneje upoštevat pri reševanju diferencialne enačbe za $T(t)$.)

Iz robnih pogojev dobimo

$$X'(0) = X'(1) = 0.$$

Poiščimo tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{X''}{X} = -\lambda,$$

ki zadošča pogojema

$$X'(0) = X'(1) = 0.$$

Uporabimo (2b). Netrivialne rešitve dobimo za

$$\lambda = 0$$

in za $\lambda > 0$, natančneje

$$\lambda = (n\pi)^2, n \in \mathbb{N}.$$

$$X_0(x) = 1,$$

$$X_n(x) = \cos{(nx)}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{1}{4}\frac{T''}{T} = -(n\pi)^2.$$

$$T'' + 4(n\pi)^2 T = 0,$$

$$T_n(t) = A_n \cos{(2n\pi t)} + B_n \sin{(2n\pi t)},$$

$$\frac{1}{4}\frac{T''}{T} = 0.$$

$$T_0(t) = A_0 t + B_0,$$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t),$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = (A_0 t + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos{(2n\pi t)} + B_n \sin{(2n\pi t)}] \cos{(n\pi x)},$$

$$u_t(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [2n\pi A_n(-\sin{(2n\pi t)}) + 2n\pi B_n \cos{(2n\pi t)}] \cos{(n\pi x)},$$

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos{(n\pi x)}), \quad x \in [0,1].$$

$$u_t(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [2n\pi B_n] \cos{(n\pi x)}, \quad x \in [0,1].$$

Določiti je potrebno koeficiente naslednjih kosinusnih Fourierovih vrst.

$$\cos^2 \pi x = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos{(n\pi x)}, \quad x \in [0,1],$$

$$\sin^2 \pi x \cos \pi x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n 2n\pi \cos{(n\pi x)}, \quad x \in [0,1].$$

$$a_0 = 2\int_0^1 \cos^2(\pi x)\ \mathrm{d}x,$$

$$a_n = 2\int_0^1 \cos^2(\pi x)\cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x.$$

Velja

$$\cos^2(\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x),$$

Ob upoštevanju ortogonalnosti dobimo

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2},$$

$$B_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}, \quad A_2 = a_2 = \frac{1}{2},$$
$$A_n = a_n = 0, \quad n \neq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Določimo še koeficiente druge kosinusne Fourierove vrste. Velja

$$\sin^2(\pi x)\cos(\pi x) = \sin(\pi x)\frac{1}{2}\sin(2\pi x) = \frac{1}{4}\left[\cos(\pi x) - \cos(3\pi x)\right].$$

Upoštevamo ortogonalnost in dobimo

$$a_0 = 2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{4}\left[\cos(\pi x) - \cos(3\pi x)\right] = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)\cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{4}\left[\cos(\pi x) - \cos(3\pi x)\right]\cos(n\pi x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} & : \quad n = 1 \\ -\frac{1}{4} & : \quad n = 3 \\ 0 & : \quad n \neq 1,3 \end{cases} \end{aligned}$$

Torej

$$A_0 = 0, \quad B_1 2\pi = a_1 = \frac{1}{4}, \quad B_3 6\pi = a_3 = -\frac{1}{4}.$$

Od tod sledi

$$B_1 = \frac{1}{8\pi}, \quad B_3 = -\frac{1}{24\pi}, \quad B_n = 0, \quad n \neq 1,3.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin(2\pi t)\cos(\pi x) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)\cos(2\pi x) - \frac{1}{24\pi}\sin(6\pi t)\cos(3\pi x).$$

8.3 Toplotna enačba

1. Poišči rešitev toplotne enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

za $(x,t) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\infty)$ ob pogojih

$$u(0,t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \qquad \text{za } t > 0,$$

in

$$u(x,0) = \cos x, \qquad \text{za }, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Rešitev: Vpeljemo

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

od koder dobimo

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Iz robnih pogojev

$$u(0,t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \qquad \text{za } t > 0,$$

sledi

$$X(0) = 0, \quad X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Poiščimo tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{X''}{X} = -\lambda,$$

ki zadošča pogojema

$$X(0) = 0, \quad X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Netrivialne rešitve dobimo v primeru $\lambda > 0$ in tedaj ob upoštevanju robnih pogojev dobimo

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2n, \quad \lambda = (2n)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) = C_n \sin(2nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešimo

$$\frac{T'}{T} = -(2n)^2.$$

$$\ln|T| = -(2n)^2 t + C,$$
$$|T| = e^{-(2n)^2 t} e^C,$$
$$T_n = B_n e^{-(2n)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
$$u_n(x,t) = T_n(t) X_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$, funkcija u_n zadošča parcialni diferencialni enačbi $u_x x = u_t$ in robnim pogojem, ne zadošča pa začetnim pogojem. Da bi zadostili tudi začetnemu pogoju iščemo rešitev v obliki nastavka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(2n)^2 t} \sin(2nx),$$

kjer pišemo $D_n = B_n C_N$. Določimo koeficiente D_n tako, da bo funkcija $u(x,t)$ zadoščala začetnemu pogoju.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(2n)^2 t} \sin(2nx), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Torej

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(2n)^2 t} \sin(2nx), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

To je sinusni razvoj funkcije $\cos x$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2nx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\cos\frac{(2n+1)x}{2n+1} - \cos\frac{(2n-1)x}{2n-1}\right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi} \left[(0+0) - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{4n}{(2n+1)(2n-1)}\right] \\
&= \frac{8n}{\pi} \frac{1}{(4n^2-1)}.
\end{aligned}$$

Pri izračunu smo upoštevali enakost

$$\sin(2nx)\cos x = \frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right].$$

Rešitev je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi} \frac{1}{(4n^2-1)} e^{-(2n)^2 t} \sin(2nx).$$

8.4 Dirichletova naloga za pravokotnik

2. Poišči rešitev $u = u(x, y)$ parcialne diferencialne enačbe

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2),$$

ki zadošča pogojema

$$u(2, y) = \sin\frac{\pi y}{2}, \quad u(0, y) = 0, \quad y \in (0, 2),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad x \in (0, 2).$$

Rešitev poišči s pomočjo Fourierove metode (ločitve spremenljivk).

Rešitev:

Vpeljemo nastavek

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Nastavek vstavimo v parcialno diferencialno enačbo

$$x''(x)Y(y) + X(x)Y''(x) = 0.$$

Od tod dobimo

$$\frac{x''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0,$$

kar pomeni

$$-\frac{x''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Iz pogojev

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0,$$

$$u(x, 0) = X(x)Y(2) = 0,$$

$$u(x, 2) = X(x)Y(2) = 0,$$

sledi

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(2) = 0.$$

Ker imamo za funkcijo $Y(y)$ dva robna pogoja, najprej rešimo diferencialno enačbo

$$\frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

ob robnih pogojih $Y(0) = 0$ in $Y(2) = 0$.

Iz (2a) sledi,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \quad Y_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right),$$

kjer lahko zaradi enostavnosti pišemo $C_n = 1$. Rešimo še diferencialno enačbo

$$-\frac{X''}{X} = -\lambda_n,$$

ob pogoju $X(0) = 0$. Splošna rešitev je

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi x}{2}} + B_n e^{-\frac{n\pi x}{2}}.$$

Upoštevamo še pogoj $X(0) = 0$ in dobimo

$$0 = X(0) = A_n + B_n,$$

$$X_n(x) = 2A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = 2A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)) = 2D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)).$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)).$$

Iz pogoja $u(2,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$, $y \in (0,2)$ sledi

$$\sin\frac{\pi y}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2D_n \sinh\left(\frac{n\pi 2}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)).$$

V zadnji enakosti je vrsta na desni strani Fourierov razvoj funkcije $\sin\frac{\pi y}{2}$ na intervalu $(0,2)$. Velja

$$\begin{aligned} 2D_n \sinh\left(\frac{n\pi 2}{2}\right) &= \frac{2}{2}\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin\frac{n\pi y}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} 1 & : \ n = m \\ 0 & : \ n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{1}{2\sinh(n\pi)}, \quad D_n = 0, \quad n \neq 1.$$

9 Verjetnost

1. Vržemo dve kocki.

   (a) Izračunaj verjetnost dogodka A, da pri metu dveh kock pade tako število pik, da je njuna vsota enaka številu 10.

   (b) Izračunaj verjetnost dogodka A, da pri metu dveh kock pade tako število pik, da je njuna vsota manjša ali enaka številu 10.

   Rešitev: Elementarni dogodki so dogodk $E_{(x,y)}$, kjer so (x, y) urejeni pari in je x število pik, ki pade na prvi kocki in y število pik, ki pade na drugi kocki. Vseh elementarnih dogodkov je 36 in vsi vsi elementarni dogodki so enako verjetni.

   $$P\left(E_{(x,y)}\right) = \frac{1}{36}.$$

   (a)
   $$A = E_{(6,4)} + E_{(5,5)} + E_{(4,6)},$$
   $$P(A) = P\left(E_{(6,4)}\right) + P\left(E_{(5,5)}\right) + P\left(E_{(4,6)}\right) = \frac{3}{36}.$$

   (b) Nasprotni dogodek B^C je dogodek, da pade na obeh kockah tako število pik, da je njuna vsota večja od števila 10.

   $$B^C = E_{(6,5)} + E_{(5,6)} + E_{(6,6)} = \frac{3}{36}.$$
   $$P(B) = 1 - P\left(B^C\right) = \frac{33}{36}.$$

9.1 Verjetnost vsote dogodkov

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Iz škatle s šahovskimi figurami potegnemo eno figuro. Kakšna je verjetnost, da izberemo belo figuro ali kmeta?

   Rešitev: Naj bo A dogodek, da izberemo belo figuro in naj bo B dogodek, da izberemo kmeta. Dogodek, da izberemo belo figuro ali kmeta je dogodek $A \cup B$. Vseh šahovskih figur je 32. Vseh belih figur je 16. Vseh kmetov je 16 in vseh belih kmetov je 16.

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A) = \frac{16}{32}.$$

$$P(B) = \frac{16}{32}.$$

$$P(A) \cap B = \frac{8}{32}.$$

Torej

$$P(A \cup B) = \frac{16}{32} + \frac{16}{32} - \frac{8}{32} = \frac{3}{4}.$$

3. V posodi je šet belih in dve zeleni kroglici. Na slepo izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da smo izvlekli vsaj eno belo kroglico?

   Rešitev: Naj bo A dogodek, da izvlečemo vsaj eno belo kroglico.

   1. način reševanja: Naj bo H dogodek, da izvlečemo dve beli kroglici.

$$P(A) = 1 - P(H).$$

$$P(H) = 1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = 1 - \frac{1}{28} = \frac{27}{28}.$$

   2. način reševanja: Naj bo H_{BZ} dogodek, da izvlečemo eno belo in eno zeleno kroglico. Naj bo H_{ZZ} dogodek, da izvlečemo dve zeleni kroglici.

   Velja:

$$A = H_{BZ} + H_{ZZ},$$

$$P(A) = P(H_{BZ}) + P(H_{ZZ}),$$

$$P(H_{BZ}) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{12}{28},$$

$$P(H_{ZZ}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28},$$

$$P(A) = \frac{27}{28}.$$

9.2 Pogojna verjetnost

4. Vržemo tri kovance. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih. Recimo, da so vsi trije kovanci pošteni, se pravi, da je verjetnost za grb pri vseh kovancih enaka $1/2$.

(a) Določi vse elementarne dogodke in določi njihove verjetnosti.

(b) Ali sta dogodka A in B neodvisna?

Rešitev:

(a) H_{cgg} naj bo dogodek, da na prvem kovancu pade cifra, na drugem kovancu pade grb in na tretjem kovancu pade grb. Množica možnih elementarnih dogodkov je

$$\{H_{ggc}, H_{gcg}, H_{cgg}, H_{ccg}, H_{cgc}, H_{ccc}, H_{ggg}, H_{gcc}\}.$$

Vsi elementarni dogodki imajo enako verjetnost

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

(b) Velja

$$B = H_{ggc} + H_{gcg} + H_{cgg},$$
$$P(B) = P(H)_{ggc} + P(H)_{gcg} + P(H)_{cgg} = \frac{3}{8},$$
$$A = H_{ggc} + H_{gcg} + H_{ggg} + H_{gcc},$$
$$P(A) = P(H_{ggc}) + P(H_{gcg}) + P(H_{ggg}) + P(H_{gcc}) = \frac{4}{8},$$
$$AB = H_{ggc} + H_{gcg},$$
$$P(AB) = P(H_{ggc}) + P(H_{gcg}) = \frac{2}{8} = \frac{2}{4}.$$

(c) Dogodka nista neodvisna, saj velja

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B).$$

$P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/8$, $P(A \cap B) = 1/4$.

5. Imamo tri posode s kroglicami. V prvi posodi so štiri bele in pet rdečih kroglic, v drugi posodi so tri bele in devet rde vcih kroglic, v tretji posodi pa so dve beli in tri rdeče kroglice. Izberemo posodo in iz nje potegnemo dve kroglici.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da potegnemo dve B kroglici?

   (b) Potegnili smo dve B kroglici. Kakšna je verjetnost, da smo ju potegnili iz druge posode?

Rešitev:

(a) Naj bo H_i, $i = 1,2,3$, dogodek, da izberemo i-to posodo. Velja:

$$P\left(H\right)_i = \frac{1}{3}, \quad i = 1,2,3.$$

Množica $\{H_1, H_2, H_3\}$ je popoln sistem dogodkov. Naj bo A dogodek, da potegnemo dve beli kroglici. Po formuli o popolni verjetnosti je

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{3} P\left(A|H_i\right) P\left(H_i\right) = \left(\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\right)\frac{9}{26}+\left(\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\right)\frac{12}{26}+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)\frac{5}{26} = \frac{14}{143}$$

(b) $P\left(H_2|A\right) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\right)\frac{12}{26}}{\frac{14}{143}} = \frac{3}{14}$

6. V skupini je 40 oseb, od tega 17 moških in 23 žensk. Naključno zaporedoma izberemo eno osebo (brez vračanja). Poišči verjetnost dogodka, da je

(a) Prva izbrana oseba je moški.

(b) Prva izbrana oseba je ženska in druga izbrana oseba je moški.

(c) Prva izbrana oseba je moški in druga izbrana oseba je moški.

(d) Druga izbrana oseba je moški.

Rešitev: Označimo z F_j,$j = 1,2$, dogodek, da je na j-tem koraku izbrana oseba ženska. Označimo z M_j,$j = 1,2$, dogodek, da je na j-tem koraku izbrana oseba moški.

(a)

$$P(M_1) = \frac{14}{40}.$$

(b)

$$P(F_1 \cap M_2) = P(F_1)P(M_2/F_1) = \frac{23}{40}\frac{17}{30} = 0.251.$$

(c)

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)P(M_2/M_1) = \frac{17}{40}\frac{16}{39} = 0.174.$$

(d)

$$\begin{aligned} P(M_2) &= P(M_2 \cap (F_1 + M_1)) = P(M_2 \cap F_1) + P(M_2 \cap M_1) \\ &= P(F_1)P(M_2/F_1) + P(M_2)P(M_2/M_1) \\ &= 0.251 + 0.174 = 0.425. \end{aligned}$$

7. V prvi posodi je šest belih in štiri rdeče kroglice, v drugi pa en-a bela in ena rdeča. Najprej na slepo premestimo tri kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici (na slepo brez vračanja).

   (a) Izračunaj verjetnosti dogodkov, da smo v prvem koraku izbrali tri bele kroglice, dve beli in eno rdečo, eno belo in dve rdeči in tri rdeče kroglice.

   (b) Izračunaj verjetnost, da smo na drugem koraku izbrali dve rdeči kroglici.

   (c) Izračunaj verjetnost hipoteze, da smo na prvem koraku premestili tri rdeče kroglice, če smo na drugem koraku potegnili dve rdeči kroglici.

Rešitev:

(a) Naj bo H_1 dogodek, da v prvem koraku izberemo tri bele kroglice.
Naj bo H_2 dogodek, da v prvem koraku izberemo dve beli in eno rdečo kroglico.
Naj bo H_3 dogodek, da v prvem koraku izberemo eno belo in dve rdeči kroglici.
Naj bo H_4 dogodek, da v prvem koraku izberemo tri rdeče kroglice.

$$P(H_1) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6},$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$P(H_3) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10},$$

$$P(H_4) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

(b) A naj bo dogodek, da smo na drugem koraku izbrali dve rdeči kroglici. Množica $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ je popoln sistem dogodkov. Po formuli o popolni verjetnosti velja

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+P(H_4)P(A/H_4),$$

kjer so pogojne verjetnosti

$$P(A/H_1) = 0,$$

$$P(A/H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4},$$

$$P(A/H_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4},$$

$$P(A/H_4) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}.$$

(c) Uporabimo Bayesovo formulo in dobimo

$$P(H_4/A) = \frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)}.$$