MATEMATIKA 2 za Tehniško varnost

Naloge z rešitvami*

Darja Govekar Leban
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2023

*Tehniška varnost, Fakulteta za kemijo in kemisjko tehnologijo, Univerza v Ljubljani

Kazalo

1 Taylorjeva vrsta

Za razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto v okolici dane točke a moramo izračunati vrednosti vseh odvodov funkcije f v tej točki a. Razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto okoli točke a je

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

Za katere x, $x \in \mathbb{R}$ ta vrsta konvergira in je njena vsota enaka $f(x)$ je potrebno dodatno raziskati. Taylorjev polinom reda n za funkcijo $f(x)$ v točki a imenujemo naslednji polinom

$$T_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Graf funkcije f v okolici točke a aproksimiramo s Taylorjevimi polinomi reda n v točki a. Kako dobre so te aproksimacije, moramo zopet dodatno raziskati. Razlika med $f(x)$ in $T_n(x,a)$ je

$$f(x) - T_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

za neko točko c, ki leži med x in a (t. j. $x \leq c \leq a$ ali $a \leq c \leq x$.) V splošnem je računanje odvodov težko in zamudno, včasih si lahko pri razvoju funkcije f v Taylorjevo vrsto pomagamo tako, da funkcijo f zapišemo kot vsoto ali produkt funkcij, katerih Taylorjeve vrste že poznamo.

1. Izračunaj Taylorjeve polinome:

   (a) reda 2 funkcije $f(x) = x^3 - 2x + 2$ okoli točke $a = 0$,

   (b) reda 2 funkcije $f(x) = x^3 - 2x + 2$ okoli točke $a = 1$.

   (a) Za funkcijo $f(x) = x^3 - 2x + 2$ velja

   $$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

   $$f''(x) = 6x,$$

   Od tod dobimo, $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = 0$, od koder dobimo

   $$T_2(x,0) = 2 - 2x.$$

(b) Za funkcijo $f(x) = x^3 - 2x + 2$ velja

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = 6x,$$

Od tod dobimo, $f(1) = 1$,$f'(1) = 1$, $f''(1) = 6$, od koder sledi

$$T_2(x, 1) = 1 + (x - 1) + 3(x - 1)^2.$$

2. Izračunaj Taylorjeve polinome:

   (a) reda 2 funkcije $f(x) = x \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,

   (b) reda 2 funkcije $g(x) = x^2 \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,

   (c) reda 4 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ v okolici točke $a = 0$,

   (d) reda 3 funkcije $f(x) = e^{\sin x}$ v okolici točke $a = 0$,

   (e) reda 2 funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ okoli točke $a = 8$.

Rešitev:

Zapišimo Taylorjev polinom reda n za funkcijo $f(x)$ v točki a, to je,

$$T_n(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

(a) Za funkcijo $f(x) = x \ln^2 x$ velja:

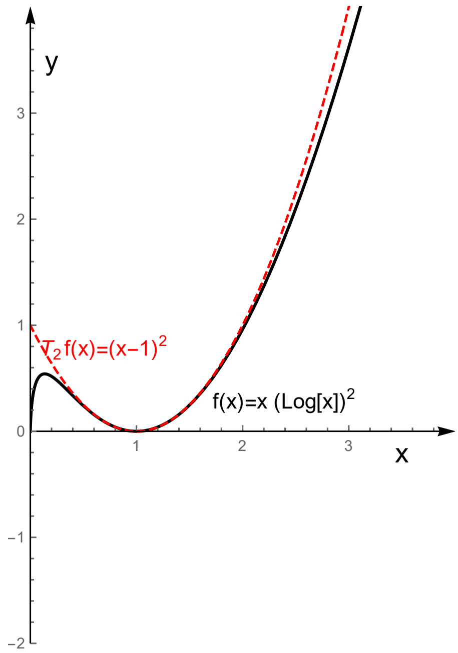
$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x,$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x},$$

Od tod dobimo, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 2$, od koder dobimo

$$T_2(x, 1) = \frac{2(x - 1)^2}{2!} = (x - 1)^2.$$

Taylorjev polinom T_2 precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici točke $a = 1$. Iz skice vidimo, da je aproksimacija dobra za $|x| < \frac{1}{2}$.



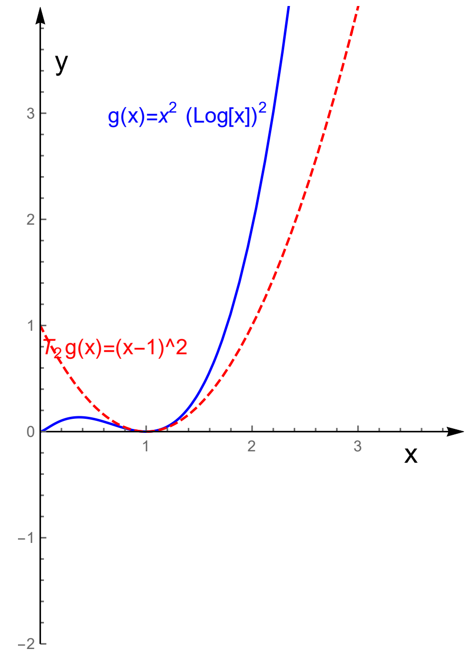
(b) Za funkcijo $g(x) = x^2 \ln^2 x$ velja:

$$gf'(x) = 2x \ln^2 x + 2x \ln x,$$

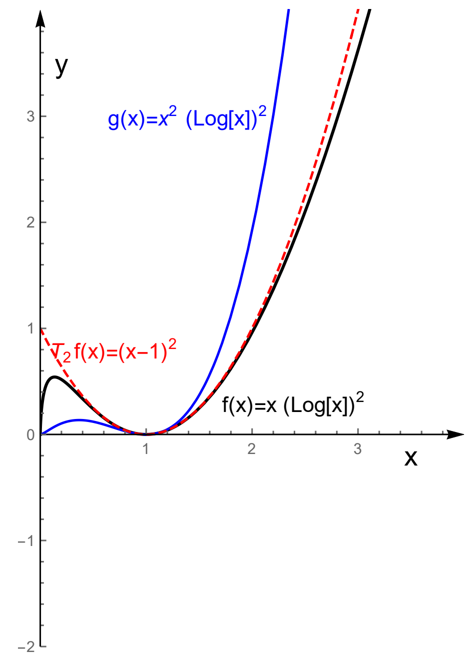
$$g''(x) = 2 + 6 \ln x + 2 \ln^2 x,$$

Od tod dobimo, $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$, $g''(1) = 2$, od koder sledi

$$T_2(x, 1) = \frac{2(x-1)^2}{2!} = (x-1)^2.$$



Opomba: Različni funkciji v točkah (a) in (b) imata enak Taylorjev polinom reda 2 okoli točke $a = 1$. Na naslednji sliki lahko primerjamo aproksimacijo dveh različnih funkcij, ki imata isti Taloylorjev polinom $T_2(x, 1)$.



(c) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 4 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$

v okolici točke $a = 0$.

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$$

$$f''(x) = (-6x + 4x^3)e^{-x^2},$$

$$f^{(3)}(x) = (-6 + 24x^2 - 8x^4)e^{-x^2},$$

$$f^{(4)}(x) = -4x\left(15 - 20x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2}.$$

$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,,\ f^{(3)}(0) = -6$ in $f^{(4)}(0) = 0$, od koder sledi

$$T_4 f(x, 0) = x - x^3.$$

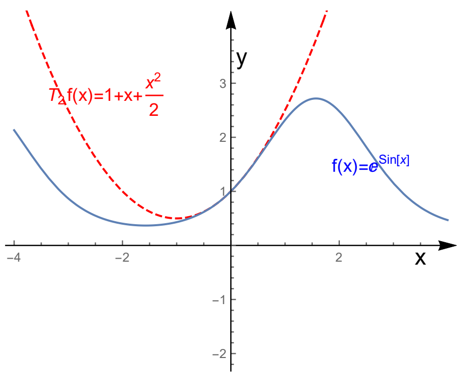
(d) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = e^{\sin x}$ v okolici točke $a = 0$.

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x,$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right),$$

$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1.$

$$T_3 f(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$



Taylorjev polinom T_2 precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici točke $a = 0$.

(e) Zapišimo sedaj še Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v okolici točke $a = 8$.

Rešitev:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{2}{3}},$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{x} = x^{-\frac{5}{3}}.$$

Torej $f(8) = 2$, $f'(8) = \frac{1}{12}$, $f''(8) = -\frac{1}{144}$. Taylorjev polinom reda 2 je

$$T_2(x,8)) = 2+\frac{f'(8)}{1!}(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 = 2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{144\cdot 2!}(x-8)^2.$$

(a) Funkcijo
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$
razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$ in izračunaj
$$f^{(99)}(0).$$

Nasvet: Uporabi naslednji razvoj okrog točke $a = 0$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$
ki absolutno konvergira za vse x, za katere velja $|x|< 1$.

Rešitev: Razcepimo funkcijo f na parcialne ulomke.
$$f(x) = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{x-2},$$
kjer velja
$$-\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$
in ta vrsta konvergira za vse x, $|x|< 1$. Nadalje je
$$\frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{x}{2}-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} - \cdots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \cdots.$$
in ta vrsta konvergira za vse x, $|\frac{x}{2}|< 1$. Od tod sledi
$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} + x\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + x^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + \cdots$$
in ta vrsta konvergira za vse x, $|x|< 1$. iz enakosti
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n + \cdots,$$

sledi

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!} = 1 - \frac{1}{2^{100}}.$$

Torej

$$f^{(99)}(0) = 99!\left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right).$$

(b) Funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 1$ in zapiši Taylorjev polinom reda 2 okrog točke $a = 1$ ter določi $f^{(10)}(1)$.

Nasvet: Uporabi naslednji razvoj okrog točke $a = 0$ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, ki absolutno konvergira za vse x, za katere velja $|x|< 1$.

Rešitev: Taylorjeva vrsta okrog točke $a = 1$ vsebuje potence $(x-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+1+(x-1)} = \frac{1}{2+(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-1)}{2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right) + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{(x-1)}{2}\right)^n + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n + \cdots.$$

Vrsta konvergira za vse x, za katere velja $|\frac{x-1}{2}|< 1$ oziroma, za vse $x \in (-1, 3)$.

Zapišimo še Taylorjev polinom reda 2 okrog toǩe $a = 1$.

$$T_2(x, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

iz enakosti

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(0)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!}(x-1)^n + \cdots,$$

sledi
$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = (-1)^1 0 \frac{1}{2^{11}},$$
torej
$$f^{(10)}(0) = 10! \, \frac{1}{2^{11}}.$$

(c) Funkcijo
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$.

Rešitev: Uporabimo
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n+\cdots, \quad |x|< 1.$$
Nadomestimo x z x^2 in dobimo
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots,$$
ki konvergira, za vse x za ketere velja $|x^2|< 1$, slednje pa velja za vse x, $|x|< 1$

2 Diferencialne enačbe prvega reda

1. Pokaži, da družina funkcij

$$y(x) = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right).$$

2. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right).$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 2$.

Rešitev:

(a) Ločimo spremenljivke

$$\begin{aligned}
\frac{2\ \mathrm{d}y}{(y^2-1)} &= \ \mathrm{d}x, \\
\int \frac{2\ \mathrm{d}y}{(y^2-1)} &= \int \ \mathrm{d}x, \\
2\int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}|\right)\ \mathrm{d}y &= \int \ \mathrm{d}x, \\
\ln|y-1| - \ln|y+1| &= x + D, \\
\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= x + D, \\
\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= e^x e^D, \\
\frac{y-1}{y+1} &= Ee^x, \\
y - 1 &= Ee^x\left(y+1\right), \\
y &= \frac{1+Ee^x}{1-Ee^x}, \quad E \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) V splošni rešitvi je potrebno določiti konstanto E, tako, da bo izpolnjen pogoj $y(0) = 2$. Vstavimo pogoj v splošno rešitev

$$y(x) = \frac{1 + Ee^x}{1 - Ee^x}.$$

$$y(0) = \frac{1 + Ee^0}{1 - Ee^0} = \frac{1 + E}{1 - E}.$$

Od tod dobimo

$$2(1 - E) = 1 + E,$$

$$E = \frac{1}{3}.$$

Rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 2$ je

$$y(x) = \frac{1 + \frac{1}{3}e^x}{1 - \frac{1}{3}e^x}.$$

3. Dana je družina funkcij

$$y(x) = (x - C)^3 .$$

Poiči diferencialno enačbo, ki ji zadošča ta družina.

Rešitev: Iz enakosti $y(x) = (x - C)^3$ izrazimo konstanto C. Odvajamo dano enačbo

$$y(x) = (x - C)^3$$

in dobimo

$$y'(x) = 3(x - C)^2,$$

nadalje izrazimo konstanto C

$$C = x - y^{\frac{1}{3}}(x)$$

in vstavimo v enačbo, ki smo jo dobili z odvajanjem. Torej

$$y'(x) = 3(x - C)^2 = 3\left(x - x + y^{\frac{1}{3}}(x)\right)^2 .$$

Diferencialna enačba je

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Opomba: Poleg družine funkcij $y(x) = (x - C)^3$, ki je splošna rešitev, ima diferencialna enačba tudi še druge rešitve, npr. $y \equiv 0$.

4. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{y\cos x}{1+y^2}.$$

   (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

   (b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev:

(a)

$$\frac{\mathrm{d}y(1+y^2)}{y} = \cos x \ \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{(1+y^2)}{y} \ \mathrm{d}y = \int \cos x \ \mathrm{d}x,$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + y\right) \ \mathrm{d}y = \int \cos x \ \mathrm{d}x,$$

$$\ln|y(x)| + \frac{(y(x))^2}{2} = -\sin x + C.$$

(b)

$$\ln|y(0)| + \frac{(y(0))^2}{2} = -\sin 0 + C,$$

$$C = \frac{1}{2}.$$

$$\ln|y(x)| + \frac{(y(x))^2}{2} = -\sin x + \frac{1}{2}.$$

5. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{xy}{2\ln y}.$$

   (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

   (b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev:

(a)

$$2\frac{\ln y}{y} \ \mathrm{d}y = x \ \mathrm{d}x,$$

$$\int 2\frac{\ln y}{y}\ \mathrm{d}y = \int x\ \mathrm{d}x,$$

$$\ln^2 y(x) = \frac{x^2}{2} + D,$$

kjer smo upoštevali, da velja

$$2\int \frac{\ln y}{y} = \int 2u\ \mathrm{d}u = u^2 + C = (\ln y)^2 + C,$$

$$\ln y = u, \quad \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = \ \mathrm{d}u.$$

(b) Vstavimo $x = 0$ in dobimo

$$(\ln 1)^2 + C = 0,$$

$$C = 0.$$

Rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$ je

$$(\ln y(x))^2 = \frac{x^2}{2}.$$

6. Model omejene rasti populacije je podan z diferencialno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{100}P\left(1 - \frac{P}{100}\right),$$

kjer je $P(t)$ število oseb v času t, kjer t merimo v dnevih.

(a) Poišči $P(t)$ ob pogoju, $P(0) = 10$.

(b) Ugotovi v kolikem času bo populacija $P(t)$ dosegla število 900.

Rešitev: Diferencialna enačba za funkcijo $P(t)$ ima ločljive spremenljivke.

(a) Poiskati moramo tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{100}P\left(1 - P\frac{1}{100}\right),$$

ki zadošča pogoju $P(0) = 100$. Najprej moramo poiskati splošno rešitev. Ločimo spremelnjivki.

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}\left(1 - \frac{1}{100}P\right) = \frac{8}{100}\ \mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{1}{100}P\right)}\,\mathrm{d}P = \frac{8}{100}\,\mathrm{d}t,$$
$$\frac{100}{P\,(100-P)}\,\mathrm{d}P = \frac{8}{100}\,\mathrm{d}t,$$
$$\int\frac{100}{P\,(100-P)}\,\mathrm{d}P = \int\frac{8}{100}\,\mathrm{d}t.$$

Razcepimo na delne ulomke

$$\frac{100}{P\,(100-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{(100-P)}.$$

Torej

$$\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{(100-P)}\right)\,\mathrm{d}P = \int\frac{8}{100}\,\mathrm{d}t,$$
$$\ln|P| - \ln|100-P| = \frac{8}{100}t + C,$$
$$\ln\left|\frac{P}{100-P}\right| = \frac{8}{100}t + C,$$
$$\frac{P}{100-P} = Ae^{\frac{8}{100}t},$$
$$P = (100-P)\,Ae^{\frac{8}{100}t},$$
$$P\cdot\left(1+Ae^{\frac{8}{100}t}\right) = 100Ae^{\frac{8}{100}t},$$
$$P = \frac{100Ae^{\frac{8}{100}t}}{1+Ae^{\frac{8}{100}t}}.$$

Torej splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$P(t) = \frac{100Ae^{\frac{8}{100}t}}{1+Ae^{\frac{8}{100}t}}.$$

Poiskati moramo tisto reštiev $P(T)$, ki zadošča pogoju $P(0) = 100$. Torej moramo določiti konstanto A tako, da bo veljalo $P(0) = 100$.

$$P(0) = \frac{100Ae^{\frac{8}{100}\cdot 0}}{1+Ae^{\frac{8}{100}\cdot 0}} = \frac{100A}{1+A}.$$
$$10 = \frac{100A}{1+A} \iff A = \frac{1}{9}.$$

Torej rešitev, ki zadošča pogoju $P(0) = 10$ je

$$P(t) = \frac{\frac{1000}{9}e^{\frac{8}{100}t}}{1+\frac{1}{9}e^{\frac{8}{100}t}} = \frac{1000e^{\frac{8}{100}t}}{9+e^{\frac{8}{100}t}}.$$

(b) Poiščimo čas t, da bo veljalo

$$P(t) = \frac{1000e^{\frac{8}{100}t}}{9 + e^{\frac{8}{100}t}} = 900.$$

$$1000e^{\frac{8}{100}t} = 8100 + 900e^{\frac{8}{100}t},$$
$$100e^{\frac{8}{100}t} = 8100,$$
$$\frac{8}{100}t = \ln 81,$$
$$t = \frac{100}{8}\ln 81.$$

Linearna diferencialna enačba je diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = d(x).$$

V primeru, ko je $d(x) \equiv 0$, diferencialno enačbo imenujemo homogena linearna diferencialna enačba. Splošna rešitev nehmongene diferencialne enačbe je oblike

$$y(y) = y_p(x) + y_h(x),$$

kjer je y_p ena rešitev nehomogene diferencialne enačbe, y_h pa je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Rešimo jo v dveh korakih:

- Rešimo homogeno diferencialno enačbo

  $$y' + f(x)y = 0,$$

  ki ima ločljive spremenljivke in poiščemo splošno rešitev $y_h(x)$.
- Poiščemo partikularno rešitev, bodisi z ugibanjem, bodisi z metodo variacije konstant. Iskanje rešitve s pomočjo variacije konstant pomeni, da iščemo rešitev nehomogene diferencialne enačbe v obliki nastavka $y(x) = h(x)A(x)$, kjer je $y_h(x) = h(x)A$ splošna rešitev homogene diferencialne enačbe, ki jo poiščemo na prvem koraku.

7. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + 3x^2y = 6x^2.$$

Rešitev: Dana diferencialna enačba je linearna. Najprej rešimo homogeni del.

$$y' + 3x^2 y = 0,$$
$$y' = -3x^2 y,$$
$$\frac{y'}{y} = -3x^2,$$

Diferencialno enačbo rešujemo dalje pri pogoju $y \neq 0$.

$$\ln|y| = -x^3 + C,$$
$$|y| = e^{-x^3+C},$$
$$y = \pm e^{-x^3} e^C,$$
$$y = Ae^{-x^3},$$

kjer je

$$A = \pm e^C,$$

hkrati pa je tudi konstantna funkcija $y \equiv 0$ rešitev homogene diferencialne enačbe, tako velja

$$A = \pm e^C, \quad \text{ali } A = 0,$$

kar je ekvivalentno

$$A \in \mathbb{R}.$$

Dobili smo splošno rešitev homogene diferencialne enačbe, $y_h(x) = Ae^{-x^3}$. Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, kjer je y_p ena rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Rešitev y_p imenujemo partikularna rešitev. Poičimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe.

1. način: Partikularno rešitev uganemo: $y_p = 2$ je rešitev. Splošna rešitev je

$$y = 2 + Ae^{-x^3}.$$

2. način: Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstant: Rešitev $y = y_p$ iščemo v obliki nastavka

$$y(x) = A(x)e^{-x^3},$$
$$y'(x) = A'(x)e^{-x^3} + A(X)e^{-x^3}(-3x^2),$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$A'(x)e^{-x^3} = 6x^2,$$

$$A'(x) = 6x^2e^{x^3},$$

$$A(x) = \int 6x^2e^{x^3}\ \mathrm{d}x = 2e^{x^3} + C,$$

$$y(x) = A(X)e^{x^3} = \left(2x^3 + C\right) e^{-x^3} = 2 + Ce^{-x^3}.$$

Vsaki izbiri realnega števila C ustreza ena partikularna rešitev. Izberemo lahko npr. $C = 0$ in dobimo $y_p = 2$. Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe torej je

$$y(x) = 2 + Ce^{-x^3}.$$

8. Dana je diferencialna enačba

$$xy' + 2y = x^2.$$

(a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

(b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(1) = 2$.

Rešitev:

(a) Dana diferencialna enačba je linearna in nehomogena. Rešimo najprej homogeni del:

$$xy' + 2y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2}{x}\ \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{2}{x}\ \mathrm{d}x,$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + C,$$

$$|y| = \ln|x|^{-2}e^{C},$$

$$y = Ax^{-2} = \frac{A}{x^2},$$

To je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe z variacijo konstant.

$$y(x) = \frac{A(x)}{x^2},$$

$$y'(x) = \frac{A'(x)}{x^2} - \frac{2A(x)}{x^3}.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$\frac{A'(x)}{x} = x^2,$$

$$A'(x) = x^3,$$

$$A(x) = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$y(x) = \frac{A(x)}{x^2} = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

To je splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe.

(b) Da dobimo rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = 2$, vstavimo $x = 1$ in $y(1) = 2$ v splošno rešitev in določimo konstanto C.

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2},$$

$$y(1) = \frac{1}{4} + C,$$

$$C = \frac{7}{4}.$$

Iskana rešitev je

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}\frac{1}{x^2}.$$

9. Poišči vse krivulje z lastnostjo, da je za vsako njeno tangento konstantna ploščina trapeza, omejenega s koordinatnima osema, tangento in tisto vzporednico z osjo x, ki gre skozi dotikališče.

Rešitev:

Naj bo $y = f(x)$ enačba krivulje, kjer je f odvedljiva funkcija. Naj bo $(x_0, f(x_0))$ poljubna točka na grafu funkcije f. Enačba tangente na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = y_0 + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Označimo z n odsek tangente na ordinatni osi, kar pomeni, da tangenta seka y os v točki $(0, n)$. Velja $n = y_0 - f'(x_0)x_0$. Dolžina osnovne stranice trapeza je enaka n, dolžina njej vzporedne stranice pa je enaka $f(x_0)$, višina trapeza je x_0. Ploščina trapeza je

$$pl = \frac{x_0}{2}\frac{(n + y_0)}{2} = \frac{x_0}{2}\left(y_0 - f'(x_0)x_0 + y_0\right).$$

V poljubni točki $(x, y(x))$ na grafu funkcije $y = y(x)$ je pločina enaka konstanti P, to je, velja naslednja enačba

$$P = \frac{x}{2}\left(y(x) - y'(x)x + y\right) = \frac{x}{2}\left(2y(x) - y'(x)x\right),$$

ali krajše zapisano

$$P = \frac{x}{2}\left(2y - xy'\right).$$

Torej, poiskati moramo splošno rešitev linearne nehomogene diferencialne enačbe

$$2xy - x^2y' = 2P.$$

Rešimo najprej homogeni del:

$$2xy - x^2y' = 0,$$

$$2xy = x^2y',$$
$$\frac{2\ \mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$
$$2\ln|x| = \ln|y| + C,$$
$$\ln|x|^2 = \ln|y| + C,$$
$$|y| = e^C|x|^2,$$
$$y_h(x) = Ax^2, \quad A \in \mathbb{R}.$$

To je splošna rešitev diferencialne enačbe. Da bi poiskali splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe nadaljujemo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$y(x) = A(x)x^2.$$

$$y'(x) = A'(x)x^2 + 2A(x)x.$$

Nastavek vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2xy - x^2y' = 2P.$$

Dobimo

$$A'(x) = -\frac{2P}{x^4},$$

$$A(X) = -\int \frac{2P}{x^4}\,\mathrm{d}x,$$

$$A(x) = 2P\frac{1}{3}x^{-3} + D.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = A(x)x^2 = \frac{2P}{3}x + Dx^2.$$

10. Dana je diferencialna enačba

$$y' - 2xy = 3x^2e^{x^2}.$$

(a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

(b) Poišči tisto rešitev dane diferencialne enačbe, ki zadošča pogoju $y(0) = 5$.

Rešitev:

Diferencialna enačba je linearna. Rešimo najprej homogeno diferencialno enačbo.

(a)

$$y' - 2xy = 0,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x,$$

$$\ln|y| = x^2 + C,$$

$$y_h(x) = Ae^{x^2}.$$

Poiščimo še splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe s pomočjo metode variacije konstant. Uporabimo nastavek

$$y(x) = A(x)e^{x^2}.$$

$$y'(x) = A'(x)e^{x^2} + 2xA(x)e^{x^2}.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$A'(x) = 3x^2,$$

$$A(x) = \int 3x^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$A(x) = 3\frac{x^3}{3} + C,$$
$$y_p(x) = x^3 e^{x^2},$$
$$y(x) = Ae^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

(b)
$$y(0) = A = 5,$$
$$y(x) = 5e^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

(c)
$$y(0) = A = 5,$$
$$y(x) = 5e^{x^2} + x^3 e^{x^2}.$$

Oglejmo si še reševanje Bernoulijeve diferencialne enačbe.
Bernoulijeva diferencialna enačba:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

Delimo diferencialno enačbo z y^n.

$$y'y^{-n} + f(x)y^{1-n} = g(x),$$

in vpeljemo novo spremenljivko

$$v(x) = y^{1-n}, \quad v' = (1-n)y^{-n}y'.$$

V novi spremenljivki je diferencialna enačba linearna

$$\frac{v'}{1-n} + f(x)v = g(x).$$

11. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + y = xy^2.$$

Rešitev: Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za $n = 2$. Diferencialno enačbo delimo z y^2.

$$y'y^{-2} + y^{-1} = x,$$

Vpeljemo
$$v = y^{-1}, \quad v' = -y^{-2}y'.$$

V novi spremenljivki v je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$-v' + v = x. \tag{1}$$

Rešimo najprej homogeni del

$$-v' + v = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \mathrm{d}x,$$
$$\ln|v| = x + C,$$
$$v = Ae^x,$$
$$v_h(x) = Ae^x$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x)e^x,$$
$$v'(x) = A'(x)e^x + A(X)e^x,$$
$$-A'(x)e^x - A(X)e^x + A(X)e^x = x,$$
$$-A'(x) = \frac{x}{e^x},$$
$$A'(x) = -\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x,$$
$$A(x) = -\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x = xe^{-x} + e^{-x} + C,$$
$$v(x) = \left(e^{-x}(x+1) + C\right)e^x,$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (1) je

$$v(x) = (x+1) + Ce^x.$$

Splošna rešitev Bernoulijeve diferencialne enačbe je

$$y^{-1}(x) = v(x) = x + 1 + Ce^{-x},$$

$$y(x) = \frac{1}{x+1+Ce^{-x}}.$$

Integral $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ smo izračunali z metodo z metodo per partes.

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x + C = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + D,$$

$$u = x, \quad e^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad v = -e^{-x}.$$

12. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + xy = xy^{\frac{1}{2}}.$$

Rešitev: Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za $n = \frac{1}{2}$. Diferencialno enačbo delimo z $y^{\frac{1}{2}}$.

$$y'y^{\frac{1}{2}} + xy^{\frac{1}{2}} = x,$$

Vpeljemo

$$v = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}, \quad v' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'.$$

V novi spremenljivki v je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$2v' + xv = x. \tag{2}$$

Rešimo najprej homogeni del

$$2v' + xv = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{4}x^2 + C,$$

$$v = Ae^{-\frac{1}{4}x^2},$$

$$v_h(x) = Ae^{-\frac{1}{4}x^2},$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Odvajamo

$$v'(x) = A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} + A(X)e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(-\frac{2}{4}x\right)$$

in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2\left(A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} + A(X)e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(-\frac{2}{4}x\right)\right) + A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = x$$

in dobimo

$$2A'(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = x,$$
$$A'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{4}x^2},$$
$$A(x) = \frac{1}{2}\int xe^{\frac{1}{4}x^2}\ \mathrm{d}x = e^{\frac{1}{4}x^2} + D.$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (2) je

$$v(x) = A(x)e^{-\frac{1}{4}x^2} = \left(e^{\frac{1}{4}x^2} + D\right)e^{-\frac{1}{4}x^2} = 1 + De^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Splošna rešitev Bernoulijeve diferencialne enačbe je

$$y(x) = v^2(x) = \left(1 + De^{-\frac{1}{4}x^2}\right).$$

Integral $\int xe^{\frac{1}{4}x^2}\mathrm{d}x$ smo izračunali s pomočjo vpeljave nove spremenljivke.

$$\int xe^{\frac{1}{4}x^2}\ \mathrm{d}x = 2\int e^u\ \mathrm{d}u = 2e^{\frac{1}{4}x^2} + C,$$

kjer je

$$u = \frac{1}{4}x^2, \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{2}x\ \mathrm{d}x, \quad x\ \mathrm{d}x = 2\ \mathrm{d}u.$$

13.

14. Pošči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' - y\tan x = y^4\cos x.$$

Rešitev: Dana diferencialna enačba je Bernoulijeva diferencialna enačba za $n = 4$. Diferencialno enačbo delimo z y^4.

$$y'y^{-4} - \tan xy^{-3} = \cos x.$$

Vpeljemo

$$v = y^{1-4} = y^{-3}, \quad v' = -3y^{-4}y'.$$

V novi spremenljivki v je diferencialna enačba sledeča linearna diferencialna enačba

$$-\frac{1}{3}v' - v\tan x = \cos x. \tag{3}$$

Rešimo najprej homogeni del

$$-\frac{1}{3}v' - v\tan x = 0.$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \tan x \ \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -3\int \tan x \ \mathrm{d}x + C,$$

$$\ln|v| = -3\left(-\ln|\cos x|\right) + C,$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|^3 + C,$$

$$v = A\cos^3 x,$$

$$v_h(x) = A\cos^3 x$$

je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe. Splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe dobimo z variacijo konstant. Vpeljemo nastavek

$$v(x) = A(x)\cos^3 x.$$

Odvajamo

$$v'(x) = A'(x)\cos^3 x + A(x)3\cos^2 x\,(-\sin x)$$

in vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$-\frac{1}{3}\left(A'(x)\cos^3 x + A(x)3\cos^2 x\,(-\sin x)\right) - A(x)\cos^3 x\tan x = \cos x,$$

od koder sledi

$$-\frac{1}{3}A'(x)\cos^3 x = \cos x,$$

$$A'(x) = -\frac{3}{\cos^3 x},$$

$$A(x) = -\int \frac{3}{\cos^2 x} \ \mathrm{d}x = -3\tan x + E.$$

Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe (3) je

$$v(x) = A(x)\cos^3 x = (-3\tan x + E)\cos^3 x = -3\sin x\cos^2 x + E\cos^3 x.$$

Splošna rešitev Bernoulijeve diferencialne enačbe je

$$y^{-3}(x) = -3\sin x\cos^2 x + E\cos^3 x.$$

oziroma

$$y(x) = \sqrt[3]{-3\sin x\cos^2 x + E\cos^3 x}.$$

Vpeljava nove spremenljivke v nekaterih primerih diferencialnih enačb:

- V primeru, ko je diferencialne enačbe oblike

  $$y' = f(ax + by),$$

  vpeljemo novo odvisno spremenljivko

  $$v(x) = ax + by(x), \quad v'(x) = a + by'(x).$$

  Osnovno diferencialno enačbo prevedemo na diferencialno enačbo

  $$v' = bf(v) + a,$$

  ki ima ločljive spremenljivke.

- Diferencialno enačbo oblike

  $$y' = f(x, y),$$

  kjer velja

  $$f(x, y) = f(kx, ky), \quad t \in \mathbb{R},$$

  imenujemo homogena diferencialna enačba. Diferencialno enačbo rešimo z vpeljavo nove spremenljivke

  $$v(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad y(x) = xv(x), \quad y'(x) = v(x) + xv'(x),$$

  ki ima ločljivi spremenljivki.

15. Dana je diferencialna enačba

$$y' = (x - y)^2.$$

S pomočjo vpeljave nove odvisne spremenljivke poišči rešitve te diferencialne enačbe.

Rešitev:

Vpeljimo novo odvisno spremenljivko

$$v(x) = x - y(x),$$

$$v'(x) = 1 - y'(x).$$

Diferencialno enačbo prevedemo v diferencialno enačbo

$$1 - v' = v^2,$$

ki pa je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Ločimo spremenljivke in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{1-v^2} &= \mathrm{d}x, \\ \int \frac{\mathrm{d}v}{1-v^2} &= \int \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kjer integral leve strani izračunamo s pomočjo razcepa na parcialne ulomke,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1-v} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+v} \right) \mathrm{d}v &= \int \mathrm{d}x, \\ -\ln|1-v| + \ln|1+v| &= 2x + c, \\ \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| &= 2x + c, \\ \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| &= 2x + c, \\ \frac{1+v}{1-v} &= Ae^{2x} \\ v &= \frac{Ae^{2x}-1}{1+Ae^{2x}}. \end{aligned}$$

$$y(x) = x - v(x) = x - \frac{e^{2x}A - 1}{1 + e^{2x}A}.$$

Splošna rešitev $y(x)$ je torej podana implicitno.

16. Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{(x+y)^2}{2x^2}.$$

S pomočjo vpeljave nove odvisne spremenljivke poišči rešitve te diferencialne enačbe.

Rešitev:

Pišimo $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{2x^2}$. Ker velja $f(x,y) = (kx, ky)$, $k \in \mathbb{R}$, vpeljemo novo spremenljivko

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad y(x) = xv(x), \quad y'(x) = v(x) + xv'(x).$$

Z uvedbo nove spremenljivke se dana diferencialna enačba preoblikuje v v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}
v + xv' &= \frac{(x+v)^2}{2x^2} \\
xv' &= \frac{1+v^2}{2} \\
\frac{2\,\mathrm{d}v}{1+v^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
2\arctan v &= \ln|x| + C \\
\arctan v(x) &= \frac{\ln|x|+C}{2} \\
\tan(\arctan v(x)) &= \tan\left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right) \\
v &= \tan\left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right) \\
y(x) &= x\tan\left(\frac{\ln|x|+C}{2}\right).
\end{aligned}$$

3 Diferencialne enačbe višjega reda

Diferencialne enačbe reda n reda lahko podamo v obliki

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

3.1 Znižanje reda diferencialne enačbe

- Če v diferencialni enačbi ne nastopa odvisna spremenljivka y, in je k najnižji red odvoda, ki nastopa v diferencialni enačbi, uvedemo spremenljivko $u(x) = y^{(k)}(x)$ in diferencialno enačbo prevedemo v diferencialno enačbo reda $(n-k)$ za funkcijo $u = u(x)$. Torej diferencialna enačba

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

se spremeni v diferencialno enačbo

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0.$$

- Če v diferencialni enačbi ne nastopa neodvisna spremenljivka x, uvedemo spremenljivko $p(y(x)) = y'(x)$. S pomočjo te substitucije prevedemo diferencialno enačbo v diferencialno enačbo nižjega reda za funkcijo $p = p(y)$.

17. Dana je diferencialna enčba

$$y'' = \sqrt{1 - (y')^2}.$$

S pomočjo znižanja reda diferencialne enačbe poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Odvisna spremenljivka y v diferencialni enačbi ne nastopa, zato vpeljemo novo odvisno spremenljivko

$$u(x) = y'(x),$$

$u'(x) = y''(x)$. V novih spremenljivkah ima diferencialna enačba obliko

$$u' = \sqrt{1 - u^2},$$

oziroma

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - u^2}.$$

Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} &= \ \mathrm{d}x, \\
\arcsin u &= x + C, \\
\arcsin y'(x) &= x + C, \\
\sin\big(\arcsin y'(x)\big) &= \sin(x + C), \\
y'(x) &= \sin(x + C), \\
\int y'(x)\ \mathrm{d}x &= \int \sin(x + C)\ \mathrm{d}x, \\
y(x) &= -\cos(x + C) + D.
\end{aligned}$$

To je splošna rešitev.

18. Dana je diferencialna enčba

$$y'' = x + 1.$$

S pomočjo znižanja reda diferencialne enačbe poišči splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Odvisna spremenljivka y v diferencialni enačbi ne nastopa, zato vpeljemo novo odvisno spremenljivko

$$u(x) = y'(x),$$

$u'(x) = y''(x)$. V novih spremenljivkah ima diferencialna enačba sledečo obliko

$$u' = x + 1.$$

Ločimo spremenljivki

$$\mathrm{d}u = (x+1)\ \mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}u = \int (x+1)\ \mathrm{d}x,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Upoštevajmo še $u(x) = y'(x)$, in rešimo še diferencialno enačbo

$$y' = \frac{x^2}{2} + x + C,$$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

To je splošna rešitev.

19. Dana je diferencialna enačba

$$yy'' = (y')^2, \quad y \neq 0.$$

Znižaj red diferencialne enačbe in poišči splošno rešitev.

Rešitev: V diferencialni enačbi ne nastopa neodvisna spremenljivka x, zato vpeljemo $p(y(x)) = y'(x)$, ali krajše $p = y'$.

$$y' = p, \quad y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'p.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo novo diferencialno enačbo za funkcijo $p = p(y)$.

$$y(pp') = p^2,$$

$$ypp' - p^2 = 0,$$

$$p(yp' - p) = 0.$$

Produkt v enačbi je enak nič, če velja ena od naslednjih možnosti:

(a) Velja $p = 0$, oziroma $y' = p = 0$. Od tod sledi, da je y enaka konstanti funkciji.

(b) Velja

$$yp' - p = 0,$$

kar pa je diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami za neznano funkcijo $p = p(y)$. Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\frac{p'}{p} = y,$$

kjer je $p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ in

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \mathrm{d}y,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \mathrm{d}y,$$

$$\ln|p| = y + C,$$

$$p = Ay,$$

$$y' = Ay,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = A\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y| = Ax + B,$$

$$|y| = e^{Ax+B} = e^{Ax}e^{B}.$$

$$y = De^{Ax}.$$

3.2 Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

20. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Rešitev: Vpeljemo nastavek

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo, da mora λ zadoščati naslednji karakteristični kvadratni enačbi

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Ničli sta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 3$. Splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

21. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$4y'' + 12y' + 9y = 0.$$

Rešitev: Rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Karakteristična kvadratna enačba je

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0,$$

$$(2\lambda + 3)^2 = 0,$$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

22. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Rešitev: Rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Izračunajmo diskriminanto

$$D = 36 - 52 = -16,$$

torej imamo dve konjugirano kompleksni ničli

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2\mathrm{i}.$$

Splošna rešitev ima obliko

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x.$$

23. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rešitev:

(a) Vpeljemo nastavek

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo, da je λ rešitev naslednje kvadratne karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0.$$

Rešitvi enačbe sta $\lambda - 1 = 2$ in $\lambda = -3$,. Splošna rešitev je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

(b) Upoštevajmo pogoj $y(0) = 1$ in dobimo

$$1 = y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2.$$

Upoštevajmo še pogoj $y'(0) = 0$.

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x},$$

$$0 = y'(0) = 2C_1 - 3C_2.$$

Razrešimo sistem enačb in dobimo

$$C_1 = \frac{3}{5}, \quad C_2 = \frac{2}{5}.$$

Rešitev, ki zadošča obema pogojema je

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}.$$

24. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$, $y(1) = 3$.

Rešitev:

(a) Rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Enačba ima eno dvojno rešitev $\lambda = -1$.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

(b) Ob upoštevanju pogoja $y(0) = 1$ sledi $C_1 = 1$. Ob upoštevanju pogoja $y(1) = 3$, sledi $3 = C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1}$, torej

$$C_2 = 3e - 1.$$

Iskana rešitev je

$$y(x) = e^{-x} + (3e - 1)\, x e^{-x}.$$

25. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y = 0.$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Rešitev:

(a) Rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Število λ mora zadoščati kvadratni enačbi

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Enačba ima dve konjugirano kompleksni rešitvi.

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}.$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

(b)

$$2 = y(0) = C_1,$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$$3 = y'(0) = C_2,$$

$$y(x) = 2\cos x + 3\sin x.$$

26. Dana je diferencialna enačba

$$5y'' - 3y' = 0.$$

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogojema

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 3.$$

Rešitev:

1. način reševanja: V diferencialni enačbi y ne nastopa zato lahko znižamo red diferencialne enačbe z vpeljavo nove odvisne spremenljivke.

$$y' = p,$$

vstavimo v diferencialno enčbo in dobimo

$$5p' - 3p = 0,$$

$$5\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - 3p = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{3}{5}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|p| = \frac{3}{5}x + C,$$

$$p(x) = Ae^{\frac{3}{5}x},$$

$$y'(x) = Ae^{\frac{3}{5}x},$$

$$\int y'(x)\ \mathrm{d}x = \int Ae^{\frac{3}{5}x}\ \mathrm{d}x,$$

$$y(x) = A\frac{5}{3}e^{\frac{3}{5}x} + B,$$

$$y(0) = \frac{5A}{3} + B = 10,$$

$$y'(x) = \frac{5A}{3}e^{\frac{3}{5}x}\frac{3}{5} = Ae^{\frac{3}{5}x},$$

$$y'(0) = A = 3,$$

$$y(x) = 3e^{\frac{3}{5}x}\frac{5}{3} + B = 5e^{\frac{3}{5}x} + 5.$$

2. način reševanja: Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo

$$5\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

$$\lambda\,(5\lambda - 3) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5},$$

$$y(x) = C_1e^{0x} + C_2e^{\frac{3}{5}x} = C_1 + C_2e^{\frac{3}{5}x}.$$

$$y'(x) = \frac{3}{5}e^{\frac{3}{5}x},$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 10,$$

$$y'(0) = \frac{3}{5}C_2 = 3,$$

$$C_2 = 5, \quad C_1 = 5.$$

$$y(x) = 5 + 5e^{\frac{3}{5}x},$$

Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$ay'' + by' + cy = d(x),$$

kjer velja

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad d(x)\ \text{je zvezna funkcija.}$$

Splošna rešitev ima obliko

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

kjer je $y_p(x)$ partikularna rešitev nehomogene diferencialne enačbe. V primeru ko je $d(x) = p(x)e^{\gamma x}$, partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$y_p(x) = x^l P(x)e^{\gamma x},$$

kjer je P polinom in velja $\mathrm{st}P = \mathrm{st}p$, število l je kratnost ničle γ karakterističnega polinoma. Seveda, $l = 0$, v primeru, ko γ ni ničla karatkeristične enačbe

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

27. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + y' - 2y = x^2.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene diferencialne enačbe:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

od koder sledi splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Poiščimo še p $d(x) = x^2 e^{0x} = p(x)e^{\gamma x}$, $p(x) = x^2$, $\gamma = 0$. Ker število $\gamma = 0$ ni ničla karakteristične kvadratne enačbe, lahko poiščimo rešitev nehomogene diferencialne enačbe z nastavkom

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y_p'(x) = Ax + B,$$

$$y'' = 2A.$$

Vstavimo v nehomogeno diferencialno enačbo

$$2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

$$-2A = 1,$$

$$2A - 2B = 0,$$

$$2A + B - 2C = 0.$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{3}{4}.$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4},$$

od tod sledi splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

28. Dana je diferencialna enačba

$$y'' + 4y = e^{3x}.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Karakteristična kvadratna enačba je

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i},$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačebe je

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev $d(x) = e^{3x} = p(x)e^{\gamma x}$, $\gamma = 3$, $p(x) = 1$. Število $\gamma = 3$ ni ničla karakterističnega polinoma, torej vzamemo nastavek

$$y_p(x) = Ae^{3x},$$

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x},$$

$$y_p''(x) = 9Ae^{3x},$$

$$9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x},$$
$$13Ae^{3x} = 1,$$
$$A = \frac{1}{13}e^{3x},$$
$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}.$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{13}e^{3x}.$$

29. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + e^x,$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$ in $y(1) = 1$.

Rešitev:

(a) Rešimo najprej homogeno diferencialno enačbo

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

Rešitev iščemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$, in dobimo, da mora veljati

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0,$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

splošna rešitev homogene se torej glasi

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Desna stran nehomogene diferencialne enačbe je vsota dveh funkcij $d_1(x) = 1$ in $d_2(x) = e^x$. Nehomogeno diferencialno enačbo lahko rešujemo za vsak sumand $d_1(x) = 1$ in $d_2(x) = e^x$ posebej. Poiščimo najprej partikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = 1.$$

Desna stran je $d_1(x) = 1 = 1e^{0\cdot x}$, torej je $\gamma = 0$ in $p(x) = 1$. Ker število 0 ni lastna vrednost kakrakterističnega polinoma in je p(x) polinom stopnje nič, partikularno rešitev iščemo z nastavkom $y_{p_1}(x) = A$ (polinom stopnje nič). Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$2A = 1,$$

od kod sledi

$$y_{p_1}(x) = A = \frac{1}{2}.$$

Poiščimo najprej partikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Desna stran je oblike $e^x = 1e^{1x} = p(x)e^{\gamma x}$ kjer je $p(x) = 1$ (polinom stopnje 0) in število $\gamma = 1$ je ničla karakterističnega polinoma stopnje $l = 1$, torej partikularno rešitev iščemo v obliki

$$y_{p_2}(x) = x^l P(x)e^x, \quad P(x) = B,$$

odvajamo

$$y'_{p_2}(x) = Be^x + xBe^x = e^x(B + xB).$$

$$y''_{p_2}(x) = Be^x + Be^x + xBe^x = e^x(2B + xB).$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo

$$y''_{p_2} - 3y'_{p_2} + 2y_{p_2} = e^x,$$

$$e^x(2B + xB) - 3e^x(B + xB) + 2xBe^x = e^x,$$

$$B = -1,$$

$$y_{p_2}(x) = -xe^x.$$

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} - xe^x,$$

je iskana partikularna rešitev. Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \frac{1}{2} - xe^x.$$

(b) Določimo konstanti C_1 in C_2, da bosta izpolnjena pogoja $y(0) = 1$ in $y(1) = 1$.

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{1}{2} - 0 = 1,$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}.$$

$$y(1) = C_1 e^2 + C_2 e + \frac{1}{2} - e,$$

$$C_1 e^2 + C_2 e - e = \frac{1}{2}.$$

$$C_1 = \frac{1}{2} - C_2,$$

$$(\frac{1}{2} - C_2)e^2 + C_2 e - e = -\frac{1}{2},$$

$$C_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + e}{e - e^2},$$

$$C_1 = \frac{1}{2} - C_2 = \frac{1}{2}\frac{e+1}{e(e-1)}.$$

Iskana rešitev, ki zadošča pogojema je

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{e+1}{e(e-1)}e^{2x} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + e}{e - e^2}e^x + \frac{1}{2} - e^x.$$

30. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Rešitev:

Poiščimo najprej rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Rešitev iščemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Število λ mora zadoščati naslednji karakteristični kvadratni enači

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Enačba ima dvojno ničlo

$$\lambda = 1.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Desna stran je oblike $1e^{\gamma x}$, kjer je $\gamma = 1$ in število $\gamma = 1$ je dvojna ničla karakterističnega polinoma, torej $l = 2$. Torej partikularno rešitev iščemo v obliki

$$y_p(x) = x^2 A e^x.$$

$$y'(x) = e^x(2Ax + x^2 A),$$

$$y''(x) = e^x(x^2 A + 4Ax + 2A).$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$y_p'' - 2y' + y_p = e^x,$$

od koder sledi

$$A = \frac{1}{2}$$

in partikularna rešitev je

$$y_p(x) = x^2 \frac{1}{2} e^x.$$

Torej iskana spločna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 \frac{1}{2} e^x.$$

31. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 4y = \cos 2x.$$

(a) Poišči splošno rešitev.

(b) Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rešitev:

(a) Poiščimo najprej splošno rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y'' - 4y = 0.$$

Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

z ničlami

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Poiščimo splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Poiščimo partikularno rešitev. V primeru, ko je desna stran oblike

$$d(x) = p(x) e^{\gamma x} \cos \delta x,$$

partikularno rešitev iščemo v obliki

(a) Število $\gamma + i\delta$ ni ničla karakterističnega polinoma. Tedaj $y_p(x) = P(x)e^{\gamma x} \cos \delta x + Q(x)e^{\gamma x} \sin \delta x$, kjer sta P in Q polinoma iste stopnje kot polinom p.

(b) Število $\gamma + i\delta$ je ničla karakterističnega polinoma stopnje l. Tedaj $y_p(x) = x^l \left(P(x)e^{\gamma x} \cos \delta x + Q(x)e^{\gamma x} \sin \delta x\right)$, kjer sta P in Q polinoma iste stopnje kot polinom p.

Desna stran je $\cos 2x$, torej $p(x) = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$ in $\gamma + i\delta = \mathrm{i}2$ ni ničla karakterističnega polinoma. Torej

$$y_p(x) = C \cos 2x + D \sin 2x,$$

kjer sta C in D realni konstanti.

$$y_p'(x) = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x,$$

$$y_p''(x) = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x - 4C \cos 2x + D \sin 2x = \cos 2x,$$

$$-8C \cos 2x - 8D \sin 2x = \cos 2x,$$

Od tod sledi:

$$-8C = 1, \quad C = \frac{-1}{8},$$

$$-8D = 0, \quad D = 0,$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{8} \cos 2x.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x.$$

(b)

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$
$$1 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{8},$$
$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{2}{8}\sin(2x),$$
$$0 = y'(0) = 2C_1 - 2C_2, \quad C_1 = C_2.$$

Od tod sledi

$$\frac{9}{8} = 2C_2,$$
$$C_2 = \frac{9}{16} = C_1.$$
$$y(x) = \frac{9}{16}e^{2x} + \frac{9}{16}e^{-2x} - \frac{1}{8}\cos 2x.$$

32. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Poiščimo splošno rešitev homogene diferencialne enačbe.

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

ketere ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3\mathrm{i}.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je

$$y_h(x) = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x.$$

Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je $e^{2x}\cos 3x$, torej je $p(x) = 1$. Stopnja polinoma p je enaka 0, $\gamma = 2$, $\delta = 3$. Število $\gamma +$ iffi je ničla karakterističnega polinoma stopnje (oziroma kratnosti) $l = 1$. Torej vzamemo nastavek

$$y_p(x) = x\left(Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x\right).$$

Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo

$$y_p'' - 4y_p' + 13y_p = e^{2x}\cos 3x,$$

od koder sledi

$$(-1+6B)\cos 3x - 6A\sin 3x = 0,$$

$$-1+6B = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

$$-6A = 0, \quad A = 0.$$

$$y_p(x) = x\frac{1}{6}e^{2x}\sin 3x.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x + x\frac{1}{6}e^{2x}\sin 3x.$$

33. Dana je diferncialna enčba

$$y'' + y' - 2y = x^2 + \sin x.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Poiščimo najprej rešitev homogene enačbe

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) =$$

z ničlama

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1.$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Poiščimo pratikularno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y' - 2y = x^2.$$

Desna stran x^2 je polinom druge stopnje. Ker število 0 ni lastna vrednost karakterističnega polinoma, vpeljemo nastavek

$$y_{p1}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y''_{p1} + y'_{p1} - 2y_{p1} = x^2,$$

od koder sledi

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)\,x + (2A + B - 2C) = x^2,$$

$$-2A = 1,$$

$$2A - 2B = 0,$$

$$2A + B - 2C = 0,$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{3}{4}.$$

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev $y_{p2}(x)$ diferencialne enačbe

$$y'' + y' - 2y = \sin x.$$

V tem primeru je $p(x) = 1$, $\sin x = e^{0x}\sin(1x)$, torej $\gamma = 0$, $\delta = 1$ in p je polinom stopnje 0. Vzamemo nastavek

$$y_{p2}(x) = A\cos x + B\sin x,$$

$$y'_{p2}(x) = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y''_{p2}(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$y''^{p2} + y'_{p2} - 2y_{p2} = \sin x.$$

$$(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) - 2\,(A\cos x + B\sin x) = \sin x,$$

$$(-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\sin x = \sin x.$$

$$-3A + B = 0,$$

$$-A - 3B = 1,$$

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{10}.$$

$$y_{p2}(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.$$

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.$$

Splošna rešitev

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.$$

34. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 6y' + 13y = e^{2x}\cos 3x.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene enačbe.

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

z ničlami

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 52}}{2} = 3 \pm 2\mathrm{i},$$

$$y_h(x) = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x.$$

Poiščimo še partikularno rešitev. Desna stran je $d(x) = e^{2x}\cos 3x$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $p(x) = 1$. Število $2 + 3\mathrm{i}$ ni ničla karakterističnega polinoma, torej je nastavek za partikularno rešitev

$$y_p(x) = Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x.$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo

$$y_p''(x) - 6y_p'(x) + 13y_p = e^{2x}\cos 3x.$$

$$A = -\frac{2}{26}, \quad B = -\frac{3}{26}.$$

$$y_p(x) = -\frac{2}{26}e^{2x}\cos 3x - \frac{3}{26}e^{2x}\sin 3x.$$

$$y(x) = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x + -\frac{2}{26}e^{2x}\cos 3x - \frac{3}{26}e^{2x}\sin 3x.$$

35. Dana je diferencialna enačba

$$y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos 2x.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Poiščimo najprej splošno rešitev homogene enačbe

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Vpeljemo nastavek $y(x) = e^{\lambda x}$ in dobimo karaterisitčno enačbo

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

katere ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 52}}{2} = 3 \pm 2\mathrm{i},$$

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x.$$

Poiščimo še rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je $d(x) = e^{3x} \cos 2x = p(x)e^{\gamma x} \cos \delta x$, $\gamma = 3$, $\delta = 2$. Število $3 + 2\mathrm{i}$ je ničla karakterističnega polinoma stopnje 1, torej je nastavek za partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe sledeč:

$$y_p(x) = x \left(Ae^{3x} \cos 2x + Be^{3x} \sin 2x \right).$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo

$$y_p'' - 6y_p' + 13y_p = e^{3x} \cos 2x.$$

od koder sledi $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$.

$$y_p(x) = x \frac{1}{4} e^{3x} \sin 2x.$$

Splošna rešitev nehomogne diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + x \frac{1}{4} e^{3x} \sin 2x.$$

3.3 Homogena Eulerjeva diferencialna enačba

Homogena Eulerjeva diferencialna enačba drugega reda je diferencialna enačba oblike

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0,$$

kjer so a_i, $i = 0, 1, 2$, realna števila. Pri reševanju vpeljemo nastavek

$$y = x^\lambda, \quad y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo

$$a_2x^\lambda\lambda(\lambda-1) + a_1x^\lambda\lambda + x^\lambda a_0 = 0,$$

od koder sledi

$$a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba dve različni realni rešitvi λ_1, λ_2, je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike
$$y(x) = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2}.$$
- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba eno dvojno rešitev λ, je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike
$$y(x) = C_1x^\lambda + C_2x^\lambda \ln x.$$
- V primeru, ko ima ta kvadratna enačba konjugirano kompleksni ničli $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ in $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, je splošna rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe oblike
$$y(x) = C_1x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

36. Dana je diferencialna enačba

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Dana diferencialna enačba je homogena Eulerjeva diferencialna enačba. Vpeljemo nastavek

$$y(x) = x^\lambda,$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo enačbo, ki ji mora zadoščati parameter λ.

$$\lambda(\lambda-1)-3\lambda+4=0,$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

$$(\lambda-2)^2=0,$$

$\lambda=2$ je dvojna ničla. Torej je splošna rešitev

$$y(x)=C_1x^2+C_2x^2\ln x=x^2(C_1+C_2\ln x).$$

37. Dana je diferencialna enačba

$$x^2y''+7xy'+13y=0.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev: Dana diferencialna enačba je homogena Eulerjeva diferencialna enačba. Vpeljemo nastavek

$$y(x)=x^\lambda,$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo enačbo, ki ji mora zadoščati parameter λ.

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda+7\lambda x^\lambda+13x^\lambda=0,$$

$$\lambda(\lambda-1)+7\lambda+13=0,$$

$$\lambda^2+6\lambda+13=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6-4\mathrm{i}}{2}=-3\pm 2\mathrm{i}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x)=x^{-3}\left(A\cos(2\ln x)+B\sin(2\ln x)\right).$$

4 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Obravnavali bomo sisteme linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti.

Sistem n linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{aligned}$$

kjer so a_{ij}, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, n$, realna števila in $f_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$, zvezne funkcije.

Sistem n linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti lahko rešimo bodisi s pomočjo pretvorbe na diferencialno enačbo reda n, bodisi na matričen način.

38. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} & = - & x + y \\ \dot{y} & = - & x - y \end{array} .$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Iz prve diferencialne enačbe izrazimo eno spremenljivko npr. spremenljivko y,

$$y = \dot{x} + x, \tag{4}$$

dobljeno enačbo odvajamo in dobimo

$$\dot{y} = \ddot{x} + \dot{x},$$

Upoštevamo drugo diferencialno enačbo in dobimo

$$-x - y = \ddot{x} + \dot{x},$$

od koder ob upoštevanju enačbe (4) dobimo

$$-x - (\dot{x} + x) = \ddot{x} + \dot{x},$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0,$$

Vpeljemo nastavek

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}.$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t,$$

ob upoštevanju (4) od tod dobimo,

$$y(t) = -\dot{x}(t) + x(t) =$$

$$= -C_1 e^{-t} \cos t + C_1 e^{-t}(-\sin t) + (-C_2 e^{-t} \sin t + C_2 e^{-t} \cos t + C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t =$$

$$= \cos t \left(-C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + C_1 e^{-t}\right) + \sin t \left(-C_1 e^{-t} - C_2 e^{-t} + C_2 e^{-t}\right).$$

39. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2 \\ y_2' & = & y_1 & - & 2y_2 \end{array} .$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Iz prve diferencialne enačbe izrazimo y_2 in dobimo

$$y_2 = y_1' - 2y_1. \tag{5}$$

Enačbo odvajamo

$$y_2' = y_1'' - 2y_1',$$

in upoštevamo drugo diferencialno enačbo

$$y_1 - 2y_2 = y_1'' - 2y_1'.$$

Iz enačbe (5) od tod sledi

$$y_1 - 2y_1' + 4y_1 = y_1'' - 2y_1',$$

$$5y_1 = y_1'',$$

$$y_1'' - 5y_1 = 0,$$

$$y_1(x) = e^{\lambda x},$$

$$\lambda^2 - 5 = 0,$$

$$\lambda_1, 2 = \pm\sqrt{5},$$

$$y_1(x) = C_1 e^{\sqrt{5x}} + C_2 e^{-\sqrt{5x}},$$

$$y_2(x) = \sqrt{5} C_1 e^{\sqrt{5x}} - C_2 \sqrt{5} e^{-\sqrt{5x}} - 2\left(C_1 e^{\sqrt{5x}} + C_2 e^{-\sqrt{5x}}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5} - 2\right) C_1 e^{\sqrt{5x}} + \left(-\sqrt{5} - 2\right) C_2 e^{-\sqrt{5x}}.$$

40. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{array}{ccccc} y_1' & = & 2y_1 & + & 4y_2 \\ y_2' & = & y_1 & + & 2y_2 \end{array}.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogojema

$$y_1(0) = -4, \quad y_2(0) = -4.$$

Rešitev:

Iz prve enačbe izrazimo y_1 in dobimo

$$2y_1 = y_1' - 4y_2, \tag{6}$$

odvajamo celo enačbo in dobimo

$$2y_1' = y_1'' - 4y_2',$$

ob upostevanju druge diferencialne enačbe dobimo

$$2y_1' = y_1'' - 4(y_1 + 2y_2).$$

Iz enačbe (5) od tod sledi

$$2y_1' = y_1'' - 4y_1 - 2(y_1' - 2y_1) =$$

$$= y_1'' - 4y_1 - 2y_1' + 4y_1,$$

$$2y_1' = y_1'' - 4y_1 - 2y_1' + 4y_1,$$

$$4y_1' - y_1'' = 0,$$

vpeljemo nastavek

$$y_1(x) = e^{\lambda x}.$$

Dobimo karakteristično kvadratno enačbo

$$-\lambda^2 + 4\lambda = 0,$$

kater ničli sta

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 4,$$

$$y_1(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x},$$

ob upoštevanju (6) dobimo

$$y_2(x) = \frac{1}{4}\left(y_1'(x) - 2y_1(x)(\right) =$$

$$= \frac{4C_2}{4} e^{4x} - \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2 e^{4x}\right) =$$

$$= \left(C_2 - \frac{1}{2} C_2\right) e^{4x} - \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{2}\left(C_2 e^{4x} - C_1\right).$$

Določimo še konstanti C_1 in C_2 tako, da bosta izpolnjena začetna pogoja

$$Y_1(0) = 4 = C_1 + C_2,$$

$$y_2(0) = -4 = \left(C_2 - \frac{1}{2} C_2\right) - \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{2}\left(C_2 - C_1\right).$$

Od tod sledi

$$C_2 = -6, \quad C_1 = 2.$$

Rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju je

$$y_1(x) = 2 - 6e^{4x},$$

$$y_2(x) = -3e^{4x} - 1.$$

41. Dan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{array}{cccccc} \dot{x} & = & & + & y & + \cos t \\ \dot{y} & = - & x & & & + t \end{array}.$$

Poišči splošno rešitev.

Rešitev:

Sistem diferencialnih enačb je nehomogen. Prevedimo ga najprej na diferencialno enačbo drugega reda. Iz prve enačbe sledi

$$y = \dot{x} - \cos t,$$

to enačbo odvajamo in dobimo

$$\dot{y} = \ddot{x} + \sin t,$$

upoštevamo še drugo diferencialno enačbo in dobimo

$$-x + \sin t + t = \ddot{x} + \sin t,$$

$$\ddot{x} + x = t.$$

To je nehomogena diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Rešiti moramo najprej homogeno diferenciano enačbo.

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Karakteristiv cni polinom je oblike

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i,$$

torej je splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Poiščimo še partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe. Desna stran je $d(t) = t$ in število 0 ni ničla krakterističnega polinoma, torej je nastavek

$$x_P(t) = A_1 t + A_0,$$

Vstavimo nastavek v diferencialno enačbo in dobimo

$$\ddot{x}_p + x_p = t.$$

od tod sledi

$$0 + A_1 t + A_0 = t,$$

torej

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1.$$

$$x_p(t) = t,$$

splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t,$$

$$y(t) = \dot{x}(t) - \cos t = -C_1 \cos t + C_2 \cos t + 1 - \cos t.$$

5 Vektorji

1. Dana sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžine 2 in 3, ki oklepata kot $\frac{\pi}{3}$. Poišči $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

   Rešitev:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

2. Dana sta vektorja $(1, 1, -1)$ in $(5, -3, 2)$. Poišči kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   Rešitev:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 0.$$
   Kot med vektorjema je $\frac{\pi}{2}$, torej sta vektorja pravokotna.

3. Dana sta vektorja $(-1, 1, 1)$ in $(5, -3, 3)$. Poišči kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   Rešitev: Označimo z φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{43}.$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -2.$$
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{43}},$$
$$\varphi = \arccos \frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{43}}.$$
   Torej
$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

4. Ali sta vektorja $(2, 2, -1)$ in $(5, -4, 2)$ pravokotna?

   Rešitev:
$$(2, 2, 1) \cdot (5, -4, -2) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + \cdot(-2) = 0.$$
   Skalarni produkt vektorjev je enak nič, torej sta vektorja pravokotna.

5. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ in $\vec{b} = (1, 1, 2)$. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ in izračunaj velikost pravokotne projekcije.

   Rešitev: Označimo z $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\
&= \frac{(-2)\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 2)}{\sqrt{14}}\frac{(-2,3,1)}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{3}{14}(-2,3,-1).
\end{aligned}$$

$$|\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

6. Ali sta vektorja $\vec{a}=(-2,4,1)$ in $\vec{b}=(4,-8,-2)$ vzporedna?

   Rešitev: Velja
   $$\vec{b}=(4,-8,-2)=(-2)\vec{a},$$
   kar pomeni, da sta vektorja vzporedna.

7. Dana sta vektorja $\vec{a}=(-2,3,1)$ in $\vec{a}=(1,1,2)$. Izračunaj $\vec{a}\times\vec{b}$.

   Rešitev:
   $$\begin{aligned}
   \vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
   &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\
   &= (5,5-5).
   \end{aligned}$$

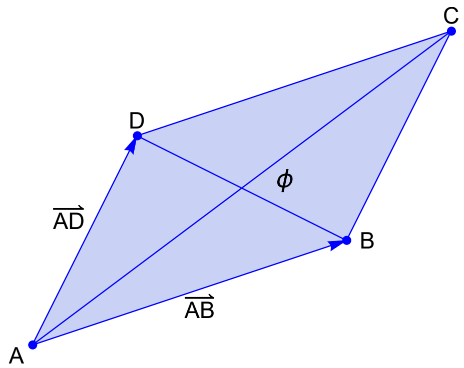
8. Dan je paralelogram z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ in $D(-1,1,1)$.

   (a) Izračunaj kot med diagonalama.

   (b) Izračunaj ploščino paralelograma.

   Rešitev:

   (a) Kot med diagonalama je po definiciji ostri kot med vektorjema, ki sta vzporedna diagonalama, to je, kot ϕ med vektorjema $\overrightarrow{AC}=(8,2,2)$ in $\overrightarrow{BD}=(-4,4,0)$. Slika je simbolna.



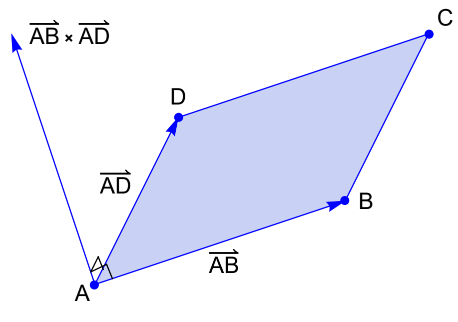
S pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

$$\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-4\cdot 8+4\cdot 2|}{\sqrt{64+4+4}\sqrt{16+6}} = \frac{24}{\sqrt{72\cdot 32}} = \frac{1}{2}.$$

Od tod sledi $\phi = \frac{\pi}{3}$.

(b) Vektorski produkt $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ kaže v smeri normale na ravnino v kateri leži paralelogram, ki ga vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ napenjata. Dolžina vektorskega produkta pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. Ploščina paralelograma je

$$\begin{aligned} S = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| &= |(6,-1,1)\times(2,3,1)| \\ &= |(-4,-4,20)| \\ &= \sqrt{16+16+400} = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$



9. Dane so točke $A(2,-2,4)$, $B(0,1,3)$ in $(-1,x,y)$. Določi števili x in y tako, da točke A, B in C ležijo na isti premici.

Rešitev: Točke A, B in C ležijo na isti premici natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (0,0,0)$, kar pa velja natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. način:

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,3) - (2,-2,4) = (-2,3,-1).$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,x,y) - (2,-2,4) = (-3,x+2,y-4).$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & x+2 & y-4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & x+2 & y-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 3 \\ -3 & x+2 \end{matrix} \\
&= (-10+x+3y, -5+2y, 5-2x) \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$-10+x+3y=0, \quad -5+2y=0, \quad 5-2x=0,$$

torej

$$y = \frac{5}{2} \quad x = \frac{5}{2}.$$

2. način:

Določiti je potrebno realna števila α, x in y, da bo veljalo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} \quad &\Longleftrightarrow \quad (-2,3,-1) = \alpha(-3,x+2,y-4) \\
&\Longleftrightarrow \quad -2 = -3\alpha, \quad 3 = \alpha(x+2), \quad -1 = \alpha(y-4).
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

in

$$y = \frac{5}{2} \quad x = \frac{5}{2}.$$

10. Naj bo $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ in vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{3}$. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\times\vec{v} &= (\vec{a}+2\vec{b})\times(-2\vec{a}-\vec{b})\\
&= \vec{a}\times(-2\vec{a})+2\vec{b}\times(-2\vec{a})+\vec{a}\times(-\vec{b})+2\vec{b}\times(-\vec{b})\\
&= -4\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}\\
&= -\vec{a}\times\vec{b}+4\vec{a}\times\vec{b}\\
&= 3\vec{a}\times\vec{b}.\\
|\vec{u}\times\vec{v}| &= 3|\vec{a}\times\vec{b}|= 3|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}=3\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=36.
\end{aligned}$$

11. Dani so vektorji $\vec{a}=(-2,3,1)$, $\vec{a}=(1,1,2)$ in $\vec{c}=(1,1,-1)$. Ali vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ tvorijo pozitivno orientirano bazo v $\mathbb{R}^3$.

    Rešitev: Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ tvorijo pozitivno orientirano bazo, če je

    $$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0.$$

    $$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-2 & 3\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}=15>0.$$

    Torej tvorijo pozitivno orientirano bazo v prostoru $\mathbb{R}^3$.

12. Ali so vektorji $\vec{a}=(1,4,-7)$, $\vec{b}=(2,-1,4)$ in $\vec{c}=(0,9,10)$ komplanarni?

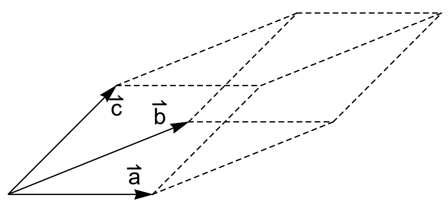
    Rešitev:

    $$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 9 & 18\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 9 & 10\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & -1\\ 0 & 9\end{matrix}=0.$$

    Torej vektorji so komplanarni.

13. Poišči volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}=(-6,3,-1)$, $\vec{b}=(0,1,2)$ in $\vec{c}=(4,-2,5)$.

    Rešitev: Paralelepiped je štiristrana poševna prizma, katere osnovna ploskev ima obliko
    paralelograma. (Slika je simbolična.)



$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -6 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} = -26.$$

Volumen paralelipipeda je

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = 26.$$

14. Dane so točke $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ in $R(1,-1,1)$. Poišči vektor, ki je pravokoten na vektorja $\overrightarrow{PQ}$ in $\overrightarrow{PR}$.

Rešitev:

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,5,-1) - (1,4,6) = (-3,1,-7).$$
$$\overrightarrow{PR} = (1,-1,1) - (1,4,6) = (0,-5,-5).$$

Vektor $\vec{n}$, ki je pravokoten na vektorja $\overrightarrow{PQ}$ in $\overrightarrow{PR}$ je vzporeden vektorskemu produktu $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Torej lahko vzamemo

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{matrix} \\ &= -40\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k} = (-40,-15,15). \end{aligned}$$

Za vektor $\vec{n}$ lahko vzamemo vsak vektor $t(-40,-15,15)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

15. Dane so točke $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ in $R(1,-1,1)$. Poišči ploščino trikotnika Δ_{PQR} z oglišči P, Q in R.

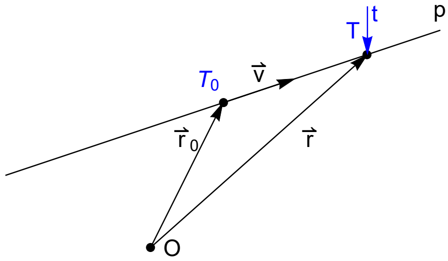
Rešitev:

$$\begin{aligned} pl(\Delta_{PQR}) &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \\ &= \frac{1}{2}|(12,20,14)| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + (15)^2} = \frac{1}{2}5\sqrt{82}. \end{aligned}$$

Enačba premice v prostoru: Premica p v prostoru je podana s točko T_o na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{v}$, ki je vzporeden premici p. Premico p zapišemo v vektorski obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer je $\vec{r}_0$ krajevni vektor to točke T_0 in $\vec{r}$ krajevni vektor to točke T na premici, ki pripada parametru t.



16. Poišči enačbo premice p, ki gre skozi točki $A(2, 4, -3)$ in $B(3, -1, 1)$ in ugotovi ali točka $(6, 1, 3)$ leži na premici p.

Rešitev: Lahko vzamemo, da je smerni vektor premice p enak vektorju $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 1) - (2, 4, -3) = (1, -5, 4).$$

Enačba premice p je

$$(x, y, z) = (2, 4, -3) + t(1, -5, 4), \quad t \in \mathbb{R},$$

Parametrična enačba premice p je

$$\begin{array}{rcrl} x & = & 2+ & t \\ x & = & 4- & 5t \;, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & -3+ & 4t \end{array}$$

Kanonska enačba premice je

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}.$$

Točka $(6, 1, 3)$ ne leži na premici p, saj ne obstaja število t, da bi veljale vse tri enačbe

$$6 = 2 + t, \quad 1 = 4 - 5t, \quad 3 = -3 + 4t.$$

17. Dani sta premici

$$p : x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$q : x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ali se premici p in q sekata? Ali sta premici p in q vzporedni? Ali sta premici mimobežni?

Rešitev: Premici se bosta sekali, če ima naslednji sistem enačb kakšno rešitev.

$$1 + t = 2s,$$

$$-2 + 3t = 3 + s,$$

$$4 - t = -3 + 4s.$$

Iz prvih dveh enačb dobimo

$$t = \frac{10}{6}, \quad s = \frac{8}{6}.$$

Ti dve števili pa tretji enačbi $4 - t = -3 + 2s$ ne zadoščata.

Torej se premici p in q ne sekata.

Smerni vektor premice p je vektor $\vec{v}_p = (1, 3 - 1)$ in smerni vektor premice q je vektor $\vec{v}_q = (2, 1, 4)$. Smerna vektorja nista vzporedna, saj

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (13, -6, -5) \neq (0, 0, 0).$$

Torej premici nista vzporedni. Premici sta mimobežni.

18. Dana je premica

$$p : (x, y, z) = (2, 1, 3) + t(0, 1, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poišči kanonično obliko premice p.

Rešitev: Parametrična enačba premice p je

$$x = 2, \quad y = 1 + t, \quad z = 3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$t = y - 1 = \frac{z - 3}{3},$$

torej je kanonska oblika premice

$$x = 2, \quad y - 1 = \frac{z - 3}{3}.$$

19. Dana je premica

$$p: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{3}, \quad y = 2.$$

Poišči parametrično enačbo premice p, določi smerni vektor premice p in poišči dve različni točki na premici p.

Rešitev: Naj bo

$$t = \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{3},$$

torej je parametrično zapisana premica

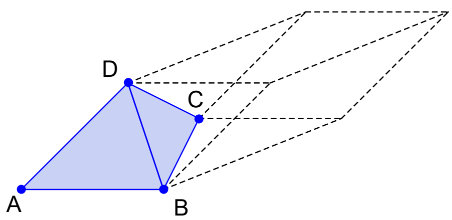
$$x = 1 + t, \quad y = 2, \quad z = -3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Smerni vektor premice p je vsak neničelen večkratnik vektorja $v = (2, 0, 3)$.

Če izberemo $t = 0$, dobimo točko $T_0 = (1, 2, -3)$ in če izberemo $t = 2$, dobimo točko $T_1 = (3, 2, 3)$. Točki T_0 in T_1 ležita na premici p.

20. Oglišča tetraedra so v točkah $A(-1, 12)$, $B(1, 0, 1)$ in $C(-3, 1, 1)$ in $D(4, 1, 2)$. Izračunaj volumen tetraedra in izračunaj površino osnovne ploskve.

Rešitev:



Slika je simbolična.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (-1, 12) = (2, -1, -1),$$
$$\overrightarrow{AC} = (-3, 1, 1) - (-1, 12) = (-2, 0, -1),$$
$$\overrightarrow{AD} = (4, 1, 2) - (-1, 12) = (5, 0, 0).$$

Prostornina tetraedra je enak šestini prostornine paralelepipeda. Torej

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|,$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5.$$

Torej $V = \frac{5}{6}$. Izračunajmo še ploščino osnovne ploskve

$$O = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix} = (1, 4, -2).$$

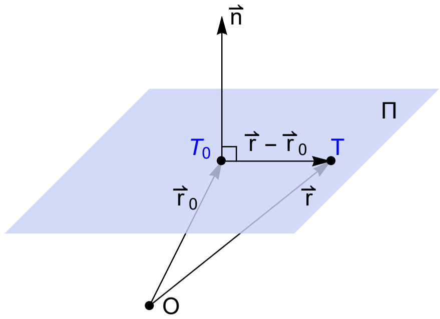
Enačba ravnine: Ravnina Π v prostoru je določena s točko, ki leži v ranini π in normalnim vektorjem. Če ima ravnina Π normalni vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ in vsebuje toǩo T_0, lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0,$$

kjer je $\vec{r_0}$ krajevni vektor do točke T_0 in $\vec{r}$ krajevni vektor do točke poljubne točke T na ravnini. Če $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ in $\vec{n} = (a, b, c)$, lahko enačbo ravnine zpišemo v normalni obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer velja $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$.



21. Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točke $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ in $R(5, 2, 0)$.

Rešitev: Poiščimo najprej normalo ravnine. Za normalo lahko vzamemo vsak neničelen večkratnik vektorja $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Torej, lahko izberemo za normalo kar vektorski produkt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 4\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 4\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 2 & -4\\ 4 & -1\end{matrix} = 12\vec{i}+20\vec{j}+14\vec{k} = (12,20,14).\end{aligned}$$

Enačba ravnine je

$$12x+20y+14z=d,$$

V to enačbo vstavimo točko, ki leži v ravnini, npr: točko P, in dobimo

$$12\cdot 1+20\cdot 3+14\cdot 2=12+60+28=100,\quad d=100.$$

Torej enačba ravnine je

$$6x+12y+7z=100.$$

22. Dani sta ravnina

$$\Pi : x-3y+2z-6=0,$$

in premica

$$p:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

Ugotovi ali se premica p in ravnina Π sekata. V primeru pritrdilnega odgovora poišči presečišče.

Rešitev: Naj bo $\vec{v}_p$ smerni vektor premice p in $\vec{n}_\Pi$ normala ravnine Π. Premica p in ravnina Π se sekata v točki, če je $\vec{v}_p\cdot\vec{n}\neq 0$.

$$\vec{v}_p\cdot\vec{n}=(2,-1,3)\cdot(1,-3,2)=2+3+6=11\neq 0.$$

Torej se premica p in ravnina Π sekata v točki. Poiščimo presečišče. Parametričen zapis premice p je naslednji

$$x=-1+2t,\quad y=-t,\quad z=2+3t,\quad t\in\mathbb{R}.$$

$$(-1+2t)-3(-t)+2(2+3t)-6=0,$$

$$-1+2t+3t+4+6t-6=0,$$

$$t=\frac{3}{11}.$$

Presečišče je

$$x = -1 + 2\frac{3}{11} = -\frac{5}{11},$$
$$y = -\frac{3}{11},$$
$$z = 2 + 3\frac{3}{11} = \frac{31}{11}.$$

Presečišče je

$$T_p(-\frac{5}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{31}{11}).$$

23. Dani sta premica

$$p: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

in ravnina

$$\Pi: \quad x + y = 2.$$

Ugotovi ali sta premica p in ravnina Π vzporedni in v primeru pritrdilnega odgovora ugotovi, ali premica p leži v ravnini Π.

Rešitev: Naj bo $\vec{v}_p$ smerni vektor premice p in $\vec{n}_\Pi$ normala ravnine Π. $\vec{v}_p = (1, -1, 1)$ in $\vec{n}_\Pi = (1, 1, 0)$.

$$\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\Pi = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Torej premica p in ravnina Π sta vzporedni. Točka $(1, 1, 0)$ leži na premici p in ravnini Π, torej premica p leži v ravnini Π.

24. Dani sta ravnini

$$Pi_1 \quad : \qquad x + 2y - 3z = 4,$$
$$\Pi_2 \quad : \qquad 2x + 4y - 6z = 3.$$

Ugotovi ali sta ravnini vzporedni.

Rešitev: Naj bosta $\vec{n}_{\Pi_1}$, $\vec{n}_{\Pi_2}$ normali ravnin Π_1 in Π_2. Normali $\vec{n}_{\Pi_1}$ in $\vec{n}_{\Pi_2}$ sta vzporedni, saj velja $\vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} = (0, 0, 0)$, $(\vec{n}_{\Pi_2} = 2\vec{n}_{\Pi_1})$.

25. Dani sta ravnini

$$\Pi_1: \quad x + y + z = 1,$$

$$\Pi_2: \quad x - 2y + 3z = 1.$$

Ugotovi ali se ravnini sekata in v primeru pritrdilnega odgovora poišči njuno presečišče.

Rešitev: Naj bosta $\vec{n}_{\Pi_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_{\Pi_2} = 1, -2, 3)$ normali ravnin Π_1 in Π_2. Normali ravnin $(1, 1, 1)$ in $(1, -2, 3)$ nista vzporedna vektorja, torej se ravnini sekata in presečišče je premica p. Poiščimo enačbo premice p. Smerni vektor premice je

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{n}_{\Pi_1} \times \vec{n}_{\Pi_2} \\
&= (1, 1, 1,) \times (1, -2, 3) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = (5, -2, -3).
\end{aligned}$$

Poiščimo še eno točko, ki leži na obeh ravninah. Č v enačbi

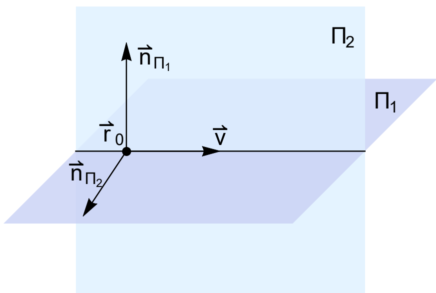
$$x + y + z = 1,$$

izberemo $z = 0$, dobimo $x + y = 1$. Vstavimo $z = 0$ še v enačbo ravnine Π_2 in dobimo

$$x - 2y + 3 \cdot 0 = 1,$$

od koder sledi $x = 1$, $y = 0$. Torej $T_0(1, 0, 0)$ leži v obeh ravninah. Enačba premice p je

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(5, -2, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$



26. Poišči razdaljo točke $T(-2,1,3)$ do premice

$$p: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2}, \quad z = 4.$$

Rešitev: 1. način rešitve:

Izberimo poljubno točko A, ki leži na premici p. Razdalja točke T od premice p je

$$d(T,p) = \frac{|\overrightarrow{AT} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|},$$

kjer je $\vec{v}$ smerni vektor premice p. Npr. lahko izberemo $A = (-2,0,4)$.

$$\vec{v} = (-1,2,0), \quad |\vec{v}| = \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} d(T,p) &= \frac{|((-2,1,3)-(-2,0,4)) \times (-1,2,0)|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|(0,1,-1) \times (-1,2,0)|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(2,1,1)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

2. način rešitve:

Naj bo Π ravnina, ki gre skozi točko T in je pravokotna na premico p. Naj bo točka T' presečišče premice p in ravnine Π. Poiščimo enačbo ravnine Π. Normala ravnine $\vec{n_\Pi}$ je smerni vektor premice p, torej

$$\vec{n_\Pi} = (-1,2,0)\,.$$

$$\Pi: \quad -x + 2y + 0 \cdot z = d,$$

V to enačbo vstavimo koordinate točke T in določimo število d.

$$-(-2) + 2(1) = d,$$

$$\Pi: -x + 2y = 4.$$

Poiščimo še $\Pi \cap p = T'$. Zapišimo še premico p v parametrični obliki.

$$x = -2 - t, \quad y = 2t, \quad z = 4, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vstavimo koordinate premice p v enačbo ravnine Π.

$$-(-2-t) + 2(2t) = 4,$$

$$2 + 5t = 0, \quad t = \frac{2}{5}.$$

$$T' = (-2 - \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 4) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right).$$

Razdalja točke T do premice p je

$$\begin{aligned} d(T,p) = d(T,T') &= d\left((-2,2,3)\,,\left(-\frac{12}{5},\frac{4}{5},4\right)\right)) \\ &= \left|\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},-1\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{25}+1} = \sqrt{\frac{6}{5}}. \end{aligned}$$

Opomba: točka T' je pravokotna projekcija točke T na premico p.

27. Dani sta točka $T(-2,1,3)$ in premica

$$p : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2}, \quad z = 4.$$

Poišči pravokotno projekcijo točke T na premico p in poišči zrcalno točko točke T glede na premico p.

Rešitev: Naj bo $\vec{v}$ smerni vektor premice p.

$$\vec{v} = (-1, 2, 0).$$

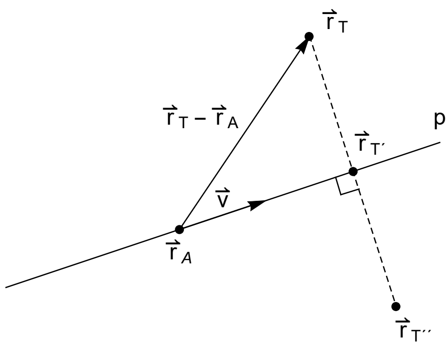
Izberimo poljubno točko A, ki leži na premici p. Izberimo na primer točko $A(-2,0,4)$.

Pravokotna projekcija točke T na premico označimo s T'. Naj bosta $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_{T'}$ krajevna vektorja do točk A in T'.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T'} &= \vec{r}_A + \vec{r}_{AT'} \\ &= \vec{r}_A + \mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AT} \\ &= \vec{r}_A + \frac{(\overrightarrow{AT}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ &= (-2,0,4) + \frac{((-2,1,3)-(-2,0,4))(-1,2,0)}{5}(-1,2,0) \\ &= (-2,0,4) + \frac{2}{5}(-1,2,0) \\ &= \left(-\frac{12}{5},\frac{4}{5},4\right). \end{aligned}$$

Naj bo T'' zrcalna točka točke T glede na premico p.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{T''} &= \vec{r}_{T'} + \overrightarrow{TT'} \\
&= \vec{r}_{T'} + \vec{r}_{T'} - \vec{r}_T \\
&= 2\vec{r}_{T'} - \vec{r}_T \\
&= 2\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, 4\right) - (-2, 1, 3) \\
&= \left(-\frac{14}{5}, \frac{3}{5}, 5\right).
\end{aligned}$$



28. Dani sta točka $T(\frac{1}{2}, 0, 0)$ in ravnina

$$\Pi : 5x + y - z - 1 = 0.$$

Izračunaj razdaljo točke T do ravnine Π.

Rešitev: Označimo z $d(T, \Pi)$ razdaljo točke T do ravnine Π.

1. način izračuna razdalje $d(T, \Pi)$:

Naj bo p premica skozi točko T, ki je pravokotna na ravnino Π. Naj bo T_p prebodišče ravnine Π in premice p. Razdalja točke T do premice p je enaka razdalji med točkama T in T_p.

$$p: \quad (x, yz) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + t\,(5, 1, -1)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še koordinate točke T_p.

$$5(\frac{1}{2} + 5t) + t - (-t) - 1 = 0.$$

$$\frac{5}{2} + 25t + 2t - 1 = 0,$$

$$27t = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$$t = -\frac{3}{2 \cdot 27}.$$

Presečišče premice p in ravnine Π je

$$T_p\left(\frac{12}{54}, -\frac{3}{54}, \frac{3}{54}\right).$$

$$\begin{aligned}
d(T,\Pi) = d(T,T_p) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{12}{54}\right)^2 + \left(0 - (-\frac{3}{54}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{54}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{15}{54}\right)^2 + \left(\frac{3}{54}\right)^2 + \left(\frac{3}{54}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{381}{(54)^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

2. način izračuna razdalje $d(T,\pi)$:

Naj bo A poljubna točka na ravnini in naj bo $\vec{n}_\Pi$ normala ravnine Π.

$$d(T,\pi) = \left|\frac{\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n}_\Pi}{\vec{n_\Pi}}\right|.$$

Naj bo $A = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned}
d(T,\pi) &= \frac{|\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n}_\Pi|}{|\vec{n_\Pi}|} \\
&= \frac{|((\frac{1}{2},0,0) - (0,1,0)) \cdot (5,1,-1)|}{\sqrt{27}} \\
&= \frac{|(\frac{1}{2},-1,0) \cdot (5,1,-1)|}{\sqrt{27}} \\
&= \frac{|\frac{5}{2} - 1|}{\sqrt{27}} \\
&= \frac{|\frac{3}{2}|}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

Označimo s T'' zrcalno točko točke T glede na premico p. Poiščimo T''.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{T''} &= 2\vec{r}_{T_p} - \vec{r}_T \\
&= 2\left(\frac{12}{54}, -\frac{3}{54}, \frac{3}{54}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\
&= \left(-\frac{3}{54}, \frac{6}{54}, \frac{6}{54}\right).
\end{aligned}$$

29. Dani sta premici

$$p_1: \quad x = 1 + t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$p_2: \quad x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Izračunaj razdaljo med njima.

Rešitev: Naj bosta $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ smerna vektorja premic p_1 in p_2.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (13, -6, -5).$$

Premici sta mimobežni. Izberimo točko A_1, npr. $A_1 = (1, -2, 4)$, na prvi premici p_1 in točko A_2, npr. $A_2 = (0, 3, -3)$, na drugi premici.

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \\ &= \frac{(13, -6, 5)(-1, 5, 7)}{\sqrt{169 + 36 + 25}} \\ &= \frac{|-8|}{\sqrt{230}}. \end{aligned}$$

30. Poišči vsaj eno enačbo premice, ki je vzporedna z ravnino

$$\Pi: \quad x + 2y - 2z = 1$$

in je za 2 oddaljena od ravnine Π.

Rešitev: Poiščimo točko T_1, npr. $T_1(1, 0, 0)$, ki leži na ravnini Π in nato poiščimo točko T', ki je za dva oddaljena od ravnine Π. Velja

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T'} &= = \vec{r}_{T_1} + 2\frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|} \\ &= (1, 0, 0) + 2\frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{9}} \\ &= (1, 0, 0) + 2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Za smerni vektor premice p lahko izberemo poljuben vektor v ravnini Π, npr. $\overrightarrow{T_1T_2}$, kjer je T_2 poljubna točka v ravnini Π, npr. $T_2 =$

$\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$. Enačba premice p, ki gre skozi točko T_1' s smernim vektorjem $\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2} = \left(-1,0,-\frac{1}{2}\right)$ je

$$p: \quad x = \frac{5}{3} - t, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ker točki T_1 in T_2 lahko poljubno izbiramo, je premic p, ki so za dva oddaljene od ravnine Π in so vzporedne ravnini Π, neskončno.

31. Poišči parametrično enačbo premice p, ki gre skozi točko $T(0,1,2)$ in je vzporedna ravnini

$$\Pi: \quad y + x + z = 2,$$

in je pravokotna na premico

$$q: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ali je premica p vsebovana v ravnini Π?

Rešitev: Smerni vektor premice p, ki gre skozi točko $T(0,1,2)$ in je vzporedna ravnini Π je lahko vsak vektor

$$v_p = \overrightarrow{T_1T_2},$$

kjer sta T_1 in T_2 poljubni točki v ravnini Π. Smerni vektor premice p torej ni enolično določen.

Da bo premica p pravokotna na premico q, mora veljati

$$\vec{v_p} \cdot \vec{v_q} = 0.$$

Torej izbrati moramo dve taki točki T_1 in T_2 v ravnini Π, da bo veljalo

$$\overrightarrow{T_1T_2} \cdot (1,-1,2) = 0.$$

Izberimo to vcki T_1 T_2 v ravnini Π. V ta namen iz enačbe ravnine Π izrazimo

$$x = 2 - y - z,$$

tedaj $T(2-y-z, y, z)$ leži v ravnini Π. Naj bo

$$T_1 = (2,0,0)$$

in določimo $T_2(2-y-z,y,z)$ tako, da bo

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{T_1T_2}\cdot(1,-1,2)\\
&= ((2-y-z,y,z)-(2,0,0))\cdot(1,-1,2)\\
&= (-y-z,y,z)(1,-1,2)\\
&= -y-z-y+2z\\
&= -2y+z.
\end{aligned}$$

Torej $z=2y$ in

$$T_2(2-y-z,y,z)=((2-3y,y,2y),\quad y\in\mathbb{R},y\neq 0$$

so možne točke, z zahtevanimi lastnostmi. Izberimo npr. $y=1$, oziroma $T_2(-1,1,2)$. Tedaj $\vec{v}_p=\overrightarrow{T_1T_2}=(-3,1,2)$ in enačba premice p je

$$p:\quad (x,y,z)=(0,1,2)+s(-3,1,2),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Premica p ne leži v ravnini Π, saj točka $T(0,1,2)$, ki jo premica vsebuje ne leži v ravnini Π.

32. Poišči vse ravnine, ki so za dva oddaljene od ravnine

$$\Pi:\quad x+2y-2z=1.$$

Rešitev: Izberimo točko $T\in\Pi$, npr. $T(1,0,0)$, in naj bo p premica, ki gre skozi točko T in je pravokotna na ravnino Π. Naj bosta T_1, T_2, ki ležita na premici p in sta za 2 oddaljeni od ravnine Π.

$$p:(x,y,z)=(1,0,0)+t\frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Torej

$$\vec{r}_{T_1}=(1,0,0)+2\frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|}=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right),$$

$$\vec{r}_{T_2}=(1,0,0)-2\frac{\vec{n}_\Pi}{|\vec{n}_\Pi|}=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right).$$

Ravnina Π_1, ki gre skozi točko T_1 in je vzporedna ravnini Π je naslednja

$$\Pi_1:\quad x+2y-2z=d_1,$$

$$\frac{5}{3}+2\frac{4}{3}-2\left(\frac{4}{3}\right)=d_1,$$

$$d_1 = \frac{21}{3}.$$

Torej

$$\Pi_1: \quad x + 2y - 2z = \frac{21}{3}.$$

Ravnina Π_2, ki gre skozi točko T_2 in je vzporedna ravnini Π je naslednja

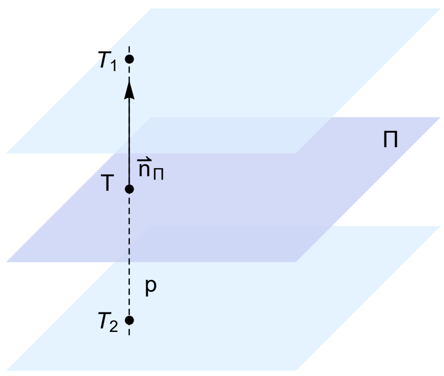
$$\Pi_2: \quad x + 2y - 2z = d_2,$$

$$\frac{1}{3} - 2\frac{4}{3} - 2\frac{4}{3} = d_2,$$

$$d_2 = -\frac{15}{3}.$$

$$\Pi_2: \quad x + 2y - 2z = -\frac{15}{3},$$

Ravnini Π_1 in Π_2 sta ravnini, ki sta za 2 oddaljeni od ravnine Π.



33. Dani sta premici

$$\begin{aligned} p &: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ q &: \quad x = 1 - s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poišči presečišče premic p in q in določi kot, ki ga premici p in q oklepata.

Rešitev: Določimo presečišče premic p in q. Izpolnjene morajo biti enačbe

$$1 + t = 1 - s, \quad 1 - t = 1 + 2s, \quad t = 2s,$$

od koder sledi $t = -s$, $t = -s = 0$. Torej

$$p \cap q = \{(1, 0, 0)\}.$$

Kot φ je ostri kot med smernima vektorjema $\vec{v}_p$ in $\vec{v}_q$. Kot φ med premicama zadošča enakosti

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{(1. -1, 1)(-1, 2, 2)}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Upoštevali smo $\vec{v}_p = (1. -1, 1)$, $\vec{v}_q = (-1, 2, 2)$, $|\vec{v}_p| = \sqrt{3}$ in $|\vec{v}_q| = 3$.

34. Poišči enačbo premice p, ki gre skozi točko $T(0, 1, 2)$, in je pravokotna na premico

$$q: \quad x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rešitev: Iščemo točko $T_1 \in q$, da bo vektor $\overrightarrow{T_1T}$ pravokoten na premico q. Vektor $\overrightarrow{T_1T}$ lahko vzamemo za smerni vektor premice p. Točka $T_1(1 + t, 1 - t, 2t)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ lezi na premici q. Določimo število t tako,da bo

$$\overrightarrow{T_1T} \cdot \vec{v}_q = 0,$$

kjer je $\vec{v}_q = (1, -1, 2)$ smerni vektor premice q. Torej poiščimo rešitve enačbe

$$0 = (-1-t, t, 2-2t)(1, -1, 2) = (-1-t)+t(-1)+(2-2t)2 = -1-t-t+4-4t = 3-6t,$$

$$t = \frac{1}{2}$$

in

$$T_1\left(1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\overrightarrow{T_1T} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$p: \quad (x, y, z) = (0, 1, 2) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

35. Dani sta ravnini

$$\Pi_1 \;:\; 10x + 2y - 2z = 5,$$
$$\Pi_2 \;:\; 5x + y - z = 1.$$

Izračunaj razdaljo med njima.

Rešitev: Normali ravnin sta $\vec{n}_{\Pi_1} = (10, 2, -2)$ in $\vec{n}_{\Pi_2} = (5, 1, -1)$. Izberimo eno točko T na ravnini Π_1 in razdalja $d(\Pi_1, \Pi_2)$ med ravninama Π_1 in Π_2 je enaka razdalji točke T do ravnine Π_2. Izberimo npr.

$T = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Izberimo še poljubno točko A, npr. $A(1,1,5)$ na ravnini Π_2, tedaj je

$$\begin{aligned} d(T, \Pi_2) &= \frac{|\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n}_{\Pi_2}|}{|\vec{n}_{\Pi_2}|} \\ &= \frac{|\left(\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) - (1,1,5)\right) \cdot (5,1,-1)|}{|(5,1,-1)|} \\ &= \frac{|\left(-\frac{1}{2}, -1, -5\right)(5,1,-1)|}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

36. Dani sta ravnini

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \quad 10x + 2y - 2z = 5, \\ \Pi_2 &: \quad -5x - y + z = 1. \end{aligned}$$

Izračunaj kot med ravninama.

Rešitev: Normala ravnine Π_1 je enaka $\vec{n}_{\Pi_1} = (10, 2, -2)$ in normala ravnine Π_2 je enaka $\vec{n}_{\Pi_2} = (-5, -1, 11)$. Ravnini sta vzporedni, saj velja $\vec{n}_{\Pi_1} = -2\vec{n}_{\Pi_2}$ torej je kot med ravninama enak nič. (t. j. ostri kot med normalama je enak nič.)

37. Zapiši enačbo ravnine Π, ki gre skozi izhodišče in vsebuje vektorja $(1,0,2)$ in $(0,2,2)$.

Rešitev: Za normalo iskane ravnine Π lahko vzamemo vsak neničelen večkratni vektorja

$$(1,0,2) \times (0,2,2) = (-4,-2,2).$$

Torej enačba ravnine Π je

$$-4x - 2y + 2z = d,$$

kjer d določimo iz pogoja, da ravnina Π vsebuje točko $(0,0,0)$. torej

$$-4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 = d.$$

Iskana ravnina je

$$-4x - 2y + 2z = 0.$$

38. Dani sta premici

$$\begin{aligned} p &: \; x = -1 - 2t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ q &: \; x = 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = -6 - 2t. \end{aligned}$$

Pokaži, da sta premici mimobežni in poišči enačbo ravnine Π, ki je enako oddaljena od premic p in q.

Rešitev: Označimo smerna vektorja premic p in q z $\vec{v}_p$ in $\vec{q}_q$. Premici sta mimobežni, če $\vec{v}_p \times \vec{v}_q \neq (0, 0, 0)$. Izračunajmo

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (-2, 2, -1) \times (2, 1, -2) = (-3, -6, -6).$$

Ravnina Π, ki je enako oddaljena od premic p in q mora biti vzporedna obema premicama, njen normalni vektor pa je $\vec{v}_p \times \vec{v}_q$.

Naj bo Π_p ravnina, ki vsebuje premico p in je vzporedna ravnini Π. Naj bo $\Pi_q$ravnina, ki vsebuje premico q in je vzporedna ravnini Π. Razdalja ravnine Π do premice p je enaka razdalji ravnine Π do ravnine Π_p. Razdalja ravnine Π do premice q je enaka razdalji ravnine Π do ravnine Π_q. Enačbi ravnin Π_p in Π_q sta

$$\begin{aligned} \Pi_p &: \quad -3x - 6y - 6z = -3(-1) - 6(2) - 6(1) = -12, \\ \Pi_q &: \quad -3x - 6y - 6z = -3(0) - 6(1) - 6(-6) = 30. \end{aligned}$$

Naj bo k premica, ki gre skozi točko $(0, 1, -6)$ in je pravokotna na ravnino Π. Naj bo T_p presečišče premice k in ravnine Π_p in točka T_q presečišče premice k in ravnine Π_q. Velja, točka T_q ima koordinate $T_q(0, 1, -6)$.

Iskana ravnina Π gre skozi razpolovišče S daljice $\overrightarrow{T_pT_q}$.

Poiščimo $T_p(x_p, y_p, z_p)$.

$$k: \quad x = -3s, \quad y = 1 - 6s, \quad z = -6 - 6s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Vstavimo koordinate premice k v enačbo ravnine Π_p.

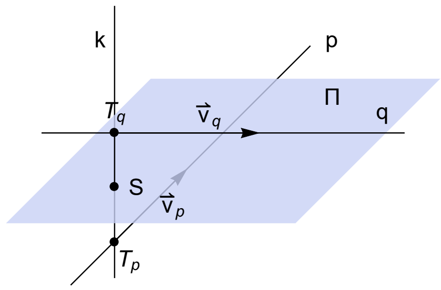
$$-3(-3s) - 6(1 - 6s) - 6(-6 - 6s) = -12 \iff s = -\frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} (x_p, y_p, z_p) &= (0, 1, -6) + \left(-\frac{1}{9}\right)(-3, -6, -6) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-16}{3}\right). \end{aligned}$$

Poiščimo še presečišče S. Razpolovišče S daljice $\overrightarrow{T_pT_q}$ ima koordinate $S\left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{10}{6}\right)$.

Torej iskana enačba ravnine Π, ki gre skozi točko S in ima normalo $(-3, -6, -6)$ je

$$\begin{aligned} \Pi \quad &: \quad -3x - 6y - 6z = -3\left(-\frac{1}{6}\right) - 6\left(-\frac{2}{6}\right) - 6\left(\frac{10}{6}\right) = -\frac{45}{6}, \\ \Pi \quad &: \quad 6x + 12y + 12z = 15. \end{aligned}$$



6 Matrike, determinante, sistemi linearnih enačb

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj produkt matrik AB in BA ter zapiši matrike A^T, B^T, $(AB)^T$, B^TA^T ter $B + 2A^T$.

Rešitev:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, (AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 24 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^TA^T = (AB)^T,$$

$$B + 2A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zapiši matriki A^T in B^T in izračunaj matrike AB, B^TA^T.

Rešitev:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 12 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zapiši A^T.

Rešitev:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Matriko A pretvori v zgornje stopničasto obliko.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in četrti vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.
2. korak: drugo vrstico delimo s številom (-3) in tretjo vrstico delimo s številom (-2).
3. korak: od četrte vrstice odštejemo trejo vrstico in od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.
2. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Rang matrike A je enak 2:

6. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico.
2. korak: drugi vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.

3. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Rang matrike je enak 3. Pivoti so v prvem, drugem in četrtem stolpcu.

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriko pretvori v zgornje stopničasto obliko in določi rang matrike.

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo prvo vrstico, od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od četrte vrstice odštejemo prvo vrstico.

2. korak: zamenjamo drugo in tretjo vrstico

3. korak: od četrte vrstice odštejemo drugo vrstico.

4. korak: četrti vrstici prištejemo tretjo vrstico.

Rang matrike je enak 3. Pivoti so v prvem, drugem in tretjem stolpcu.

8. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 1. \end{aligned}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -3 & 2 & |0 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo od druge vrstice odšteli prvo vrstico. Neznanko z lahko prosto izbiramo. Sistem enačb se pretvori na sistem dveh enačb

$$-3y + 2z = 0,$$

$$x + y + z = 1.$$

Od tod dobimo

$$z = z, \quad y = \frac{2z}{3}, \quad x = 1 - y - z = 1 - \frac{5z}{3}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Rešitve:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

9. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{ccccccc} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = 4 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev: Zapišimo sistem z razširjeno matriko sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ -2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -3 \\ 0 & 3 & -3 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico.
2. korak: drugi vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico.
3. korak: tretji vrstici prištejemo drugo vrstico.

Sistem ni rešljiv.

10. Dan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrl} -x & + & 3y & + & 2z & = -2 \\ & & y & + & z & = 0 \\ 2x & - & 2y & & & = b \end{array}$$

Ugotovi za katera števila b je sistem rešljiv. Za primere števil b, za katere je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & b-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-4 \end{bmatrix}.$$

1. korak: tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.
2. korak: od tretje vrstice odštejemo štirikratnik druge vrstice.

Sistem ni rešljiv, če je $b - 4 \neq 0$.

V primeru $b = 4$ je sistem rešljiv. Naj bo $b = 4$, poiščimo vse rešitve. V tretjem stolpcu ni pivota in tako lahko tretjo neznanko z prosto izbiramo. Sistem enačb je

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & + & 2z & = & -2 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

od koder dobimo

$$y = -z,$$

$$x = 2 + 3y + 2z = 2 - z.$$

Torej imamo rešitev

$$x = 2 - t, \quad y = -t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

11. Dane so tri ravnine

$$\begin{array}{lcccccc} \Pi_1: & 2x & + & y & + & 3z & = 1 \\ \Pi_2: & 3x & + & 3y & - & z & = 5 \\ \Pi_3: & x & - & y & + & 7z & = -3 \end{array}$$

Pošči presečišče ravnin.

Rešitev: Poiskati je potrebno rešitev sistema linearnih enačb.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ x & - & y & + & 7z & = & -3 \end{array}$$

Poiščimo rešitve:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 3 & 3 & -1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 7 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & | & -3 \\ 3 & 3 & -1 & | & 5 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & | & -3 \\ 0 & 3 & -11 & | & 7 \\ 0 & 3 & -11 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & | & -3 \\ 0 & 3 & -11 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice
2. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.

Tretjo neznanko z lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo pretvorili v naslednji enostavnejši sistem enačb.

$$\begin{array}{ccccccc} 1x & - & y & + & 7z & = & -3 \\ & & 3y & - & 11z & = & 7 \end{array}$$

Iz druge enačbe izrazimo neznanko y in jo vstavimo v prvo enačbo. Dobimo

$$y = \frac{7}{3} + \frac{11}{3}z, \quad x = -\frac{2}{3} - \frac{10}{3}z, z = z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Naj bo $z = t$, tedaj

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 1\right).$$

Presečišče ravnin je torej premica.

12. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 8y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 2 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 0 & 20 & 5 & | & 5 \\ 0 & 16 & 5 & | & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 0 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 16 & 5 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 0 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: drugi vrstici prištejemo prvo vrstico in tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice,
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 5,
4. korak: od tretje vrstice odštejemo štirikratnik druge vrstice.

Sistem smo pretvorili v naslednji sistem enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 8y & + & 3z & = & 2 \\ & & 4y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

Sistem je torej enolično rešljiv. Rešitev je $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

13. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo prvo vrstico, od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice in od četrte vrstice odštejemo prvo vrstico.
2. korak: zamenjamo drugo in tretjo vrstico
3. korak: od četrte vrstice odštejemo drugo vrstico.
4. korak: četrti vrstici prištejemo tretjo vrstico.

Sistem smo prevedli v naslednji sistem enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & -x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Četrto neznanko x_4 lahko prosto izbiramo.

$$x_3 = x_4, \quad x_2 = -x_3 + 2x_4, \quad x_1 = 2 - x_2 - x_3 + x_4.$$

Pišimo $x_4 = t$. Torej imamo rešitev:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 0) + t(-1, 1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

14. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & 4y & & & = & 6 \\ -2x & - & 4y & - & z & = & -8 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 2 & 4 & -1 & | & 4 \\ 2 & 4 & 0 & | & 6 \\ -2 & -4 & -1 & | & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \\ 0 & 0 & -2 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in četrti vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice.
2. korak: drugo vrstico delimoi s številom (-3) in tretjo vrstico delimo s številom (-2).
3. korak: od 4. vrstice odštejemo trejo vrstico in od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

Sistem enačb smo prevedli v ekvivalenten sistem enačb:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y+ & z & = & 5 \\ & & & z & = & 2 \end{array}$$

Drugo neznanko lahko prosto izbiramo. Torej

$$z = 2, \quad y = y, \quad x = 5 - 2y, \quad y \in \mathbb{R},$$

oziroma

$$(x, y, z) = (3, 0, 2) + t(-2, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

15. Dan je sistem linearnih enačb.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Poišči vse rešitve.

Rešitev: Sistem linearnih enačb je homogen. Ena rešitev je trivialna rešitev. Poglejmo ali obstaja še kakšna netrivialna rešitev.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik druge vrstice.

Četrto spremenljivko x_4 lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo prevedli v naslednji sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & + & 5x_4 & = & 0. \end{array}$$

Pišimo $x_4 = t$. Torej

$$x_3 = 5x_4 = 5t,$$

$$x_2 = -x_4 = -t,$$

$$x_1 = 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 2t - 10t + t = -7t.$$

Rešitev je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0) + t(-7, -1, 5, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

16. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Pretvori matriko A v vrstično kanonično formo.

Rešitev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od prve vrstice odštejemo dvakratnik tretje vrstice, 2. korak: od prve vrstice odštejemo drugo vrstico.

17. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

Pretvori matriko v vrstično kanonično formo.

Rešitev:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 6 & -22 & 28 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 3 & -11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: zamenjamo prvo in drugo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo dvakartnik prve vrstice,
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.
4. korak: drugo vrstico delimo s številom 3,
5. korak: prvi vrstici prištejemo drugo vrstico.

18. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

S pomočjo Gaussove metode poišči inverzno matriko A^{-1}.

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

1. korak: drugi vrstici prištejemo trikratnik prve vrstice, od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
2. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico,
3. korak: tretjo vrstico delimo s številom (-5),
4. korak: od druge vrstice odštejemo sedem kratnik tretje vrstice,
5. korak: od prve vrstice odštejemo dvakratnik tretje vrstice,
6. korak: drugo vrstico delimo s številom 2,
7. korak: od prve vrstice odštejemo drugo vrstico,
8. korak: prvo vrstico pomnožimo s številom (-1).

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{-13}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

19. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

S pomočvjo Gaussovega postopka ugotovi, ali obstaja inverzna matrika A^{-1}?

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -22 & | & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -11 & | & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -11 & | & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. korak: zamenjamo prvo in tretjo vrstic.
2. korak: od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od druge vrstice odštjemo trikratnik prve vrstice.
3. korak: drugo vrstico delimo s številom 2.
4. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico.

Ker je na levi strani na diagonali ničla, inverzna matrika A^{-1} ne obstaja.

20. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X, ki reši naslednjo matrično enačbo

$$AX - 2X = A + I.$$

Rešitev:

Da bi lahko na desni strani izpostavili matriko X, zapišemo matrično enačbo v obliki

$$AX - 2IX = A + I,$$

$$(A - 2I)X = A + I,$$

pomnožimo z leve z matriko $(A - 2I)^{-1}$ in dobimo

$$(A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = (A - 2I)^{-1}(A + I),$$

$$X = (A - 2I)^{-1}(A + I).$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiččimo matriko $(A-2I)^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 01 & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & | & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

1. korak: zamenjali smo prvo in tretjo vrstico,
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in tretji vrstici prištejemo dvakratnik prve vrstice,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico,
4. korak: od druge vrstice odštejemošetkratnik tretje vrstice in prvi vrstici smo prišteli tretjo vrstico,
5. korak: tretjo vrstico smo delili s številm (-6).

$$(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinante: Determinanto D zapišemo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

V primeru, ko $n = 1$, velja $D = a_{11}$. Naj bo $n > 1$ in pišimo

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

kjer je D_{ij} poddeterminanta reda $(n-1)\times(n-1)$, ki jo dobimo tako, da v determinanti prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec. Naj bo $1 \le i \le n$. Determinanto D izračunamo z razvojem po i-ti vrstici na naslednji način

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}D_{ij} = a_{ij}k_{ij}.$$

Naj bo $1 \le j \le n$. Determinanto D izračunamo z razvojem po j-tem stolpcu na naslednji način

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}D_{ij} = a_{ij}k_{ij}.$$

Determinanto lahko računamo tudi s pomočjo Gaussovega postopka. Velja: Če v matriki večkratnik kake vrstice prištejemo k drugi vrstici, se determninanta matrike ne spremeni. Če zamenjamo dve vrstici, se determninanta pomnoži z (-1). Če kako vrstico matrike A delimo (množimo) s številom λ , se determinanta matrike A deli (množi) z λ.

21. S pomočjo Gaussovega postopka izračunaj naslednje determinante.

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Rešitev:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2(3)(-5) = -30.$$

1. korak: v drugi vrstici izpostavimo število 2

2. korak: od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico

(b)

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1)(1)(-1) = 2.$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & -22 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)1(3)(0) = 0.$$

1. korak: zamenjamo prvo in tretjo vrstico

2. korak: od tretje vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od druge vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice

3. korak: od tretje vrstice odštejemo drugo vrstico

22. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\det A$ z

(a) razvojem po prvi vrstici.

(b) razvojem po 2. vrstici.

(c) razvojem po 3. stolpcu.

Rešitev:

(a)

$$\det A = 1\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} = (4\cdot 1 - 2\cdot 1) + 2(-1) + 3(-4) = -12.$$

(b)

$$\det A = 0\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 4(1\cdot 1 - 1\cdot 3) - (1\cdot 2 - 1\cdot(-2) + (1\cdot 4 - 0) = -12.$$

(c)

$$\det A = 3\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix} = 3(0-4) - (2-(-2)) + (4-0) = -12.$$

23. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Izračunaj $\det A$ in inverzno matriko s pomočjo poddeterminant.

Rešitev:

$$\det A = \begin{vmatrix}3 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 3\,((-1)3 - 2(-2)) + (-1)((-2)(-2) - (-3)(-1)) =$$

$$= 3(-3+4) + (-1)(4-3) = 3 - 1 = 2.$$

Pišimo $k_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}^T.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Upoštevali smo

$$m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

24. Dani so vektorji $\vec{v}_1 = (1,2,1)$, $(0,2,3)$ in $(1,5,1)$. Ali so vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_3$ linearno neodvisni?

Rešitev:

1. način: Vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_3$ so linearno neodvisni, če je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Izračunajmo determinanto s pomočjo razvoja po 1. vrstici.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2-15) + (6-2) = -9$$

2. način: Vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_3$ so linearno neodvisni, če ima homogen sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = 0 \\ 2x & + & 2y & + & 5z & = 0 \\ x & + & 3y & - & z & = 0 \end{array}$$

samo trivialno rešitev, to je, $(0,0,0)$ je edina rešitev sistem. To preverimo z Gaussovo metodo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico,
2. korak: drugo vrstico delimo s številom 2,
3. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik druge vrstice.

Sistem ima rang 3 (so trije pivoti) in ima sistem enolično rešitev $(0, 0, 0)$.

25. Dani so vektorji $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, 3)$ in $\vec{v}_3 = (1, 5, 1)$. Izrazi vektor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_3$, to je, oišči števila α, β in γ, da bo veljalo

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{v}.$$

Rešitev:

Števila α, β in γ so rešitve sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Pivoti so trije in zato imamo enolično rešitev. Sistem smo prevedli v ekvivalenten sistem.

$$\begin{array}{ccccc} x & & + & z & = 1 \\ & y & + & \frac{3}{2}z & = -\frac{1}{2} \\ & & - & \frac{13}{2} & = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Rešitev je

$$\gamma = -\frac{3}{13}, \quad \beta = \frac{4}{26}, \quad \alpha = \frac{16}{13}.$$

Torej

$$\frac{16}{13}\vec{v}_1 + \frac{4}{26}\vec{v}_2 - \frac{3}{13}\vec{v}_3 = \vec{v}.$$

Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešitev:

Najprej bomo poenostavili determinano, npr. v prvi vrstici bomo s prištevanjem drugih vrstic poskušali napravit čim več ničel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -22.$$

1. korak: tretjemu stolpcu prištejemo prvo vrstico in četrtemu stolpcu prištejemo prvi stolpec,
2. korak: determinanto smo razvili po prvi vrstici,
3. korak: drugemu stolpcu prištejemo prvi stolpec in tretjemu stolpcu prištejemo prvi stolpec,
4. korak: determinanto smo razvili po tretji vrstici.

26. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinanto matrike A.

Rešitev: Matrika je spodnje trikotna in je zato $\det A$ enaka produktu diagonalnih členov.

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

7 Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči lasnte vrednosti in lastne vektorje matrike A.

2. Število λ je lastna vrednost matrike A, če je $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo $\det(A - \lambda I)$.

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 & -\lambda \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -2-\lambda & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -2-\lambda & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6-2\lambda \\ 0 & 6+2\lambda & \lambda^2+2\lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -6-2\lambda \\ 6+2\lambda & \lambda^2+2\lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) - (6+2\lambda)(-6-2\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0.$$

$$-(\lambda-5)(\lambda+3)^2 = 0.$$

Lastne vrednosti so $\lambda = 5$ večkratnosti 1 in $\lambda = -3$ večkratnosti 2. Poiščimo lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 5$. t. j. vektorje $\vec{v} \neq (0,0,0)$, da velja $(A - 5I)\vec{v} = (0,0,0)$. $vecv = (x,y,z)$. Rešujemo sistem linearnih enačb

$$(A - 5I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1-5 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -7 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: tretjo vrstico pomonožimo z (-1) in nato zamenjamo tretjo in prvo vrstico.
2. korak: od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve vrstice in tretji vrstici prištejemo sedemkratnik prve vrstice.
3. korak: drugo vrstico delimo s stevilom 8 in tretjo vrstico delimo s številom 16.

Sistem enačb smo prevedli v ekvivalenten sistem enačb

$$\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & + & 5z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = 0. \end{array}$$

Tretjo neznanko z lahko izberemo poljubno.

$$z = z, \quad y = -2z, \quad x = -t, \quad tin\mathbb{R}.$$

Č pišemo $z = t$, lahko rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (-t, -2t, t) = t(-1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 5$ torej so

$$\{t(-1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0\}.$$

Poiščimo še lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = -3$. $\vec{v} = (x, y, z)$ je lastni vektor, če velja

$$(A - (-3)I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešimo ta sistem enačb.

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1+3 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0+3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tretji vrstici smo prišteli prvo vrstico in od druge vrstice smo odšteli dvakratnik prve vrstice.

Neznanki y in z lahko prosto izbiramo. Pišimo $y = s$ in $z = t$. Tedaj je rešitev

$$y = s, \quad , z = t, \quad x = -2s + 3t, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

oziroma rešitve sistema so

$$(x, y, z) = (3t - 2s, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektroji, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = -3$ so

$$\{\vec{v} = (3t - 2s, s, t), \quad s,\ t \in \mathbb{R}, \vec{v} \neq (0,0,0)\} =$$

$$= \{t(3,0,1) + s(-2,1,0), \quad s,\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{nista oba hkrati enaka } 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo 2, v njej lahko izberemo dva linearno neodvisna vektorja, npr. vektorja $v_1 = (3,0,1)$ in $v_2 = (-2,1,0)$.

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

Rešitev:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda((2-\lambda)(-\lambda)) + 3(-3(2-\lambda)) =$$

$$= (\lambda^2 - 9)(2 - \lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 3)(2 - \lambda).$$

Lastne vrednosti torej so $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ in $\lambda = -3$. Poiščimo lastne vektorje za lastno vrednost $\lambda = 2$: V tem primeru rešujemo sistem

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. korak: prvo vrstico delimo s številom (-2).
2. korak: od tretje vrstice odštejemo trikratnik prve vrstice.

Drugo neznanko y lahko prosto izbiramo. Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{aligned} x \quad - \tfrac{3}{2}z &= 0 \\ \tfrac{5}{2}z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistem je

$$z = 0, \quad y = y, \quad x = \frac{3}{2}z = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Pišimo $y = t$, tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (0, t, 0) = t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 2$ torej so

$$\{t(0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1. Poiščimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 3$.

$$(A - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tretji vrstici prištejemo prvo vrstico.

Tretjo neznanko z lahko prosto izbiramo.

Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{aligned} -3x \quad\quad + \quad 3z &= 0 \\ - \quad y \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistem je

$$z = z, \quad y = 0, \quad x = z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Pišimo $z = t$, tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (t, 0, t) = t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 3$ torej so

$$\{t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1.

Poiščimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = -3$.

$$(A + 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Od tretje vrstice smo odšteli prvo vrstico.

Tretjo neznanko z lahko prosto izbiramo.

Sistem enačb smo preoblikovali v ekvivalenten sistem

$$\begin{aligned} 3x \quad\quad + \quad 3z &= 0 \\ 5y \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistem je

$$z = z, \quad y = 0, \quad x = -z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Pišimo $z = t$, tedaj rešitev zapišemo

$$(x, y, z) = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 3$ torej so

$$\{t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Ta množica ima dimenzijo enako 1.

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje.

Rešitev:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Torej $\lambda = 0$ je lastna vrednost večkratnosti 2.

Poiščimo lastne vektorje,, t. j. rešimo sistem

$$(A - 0I) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo prvo in drugo vrstico.
Prvo neznanko x lahko prosto izbiramo. Sistem smo poenostavili v ekvivalenten sistem:

$$y = 0.$$

Torej resitev sistem je

$$(x, y) = (x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pišimo $x = t$, tedaj iamamo rešitev

$$(x, y) = t(1, 0), t \in \mathbb{R}.$$

Lastni vektorji so

$$\{t(1, 0), t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Množica lastnih vektorjev ima dimenzijo 1, torej nimamo dveh linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$.