

UVOD V HARMONIČNO ANALIZO

na lokalno kompaktnih grupah

Zapiski predavanj

MILAN HLADNIK

Ljubljana, 2006

KAZALO

I. LOKALNO KOMPAKTNE GRUPE	3
1. Topološke grupe	3
2. Haarova mera	10
3. Modularna funkcija	14
4. Klasične grupe	16
II. GRUPNE ALGEBRE IN MODULI	21
1. Konvolucija mer in funkcij	21
2. Ideali in moduli	25
3. Homogeni prostori	32
4. Amenabilne grupe	39
5. Odvajanja grupne algebre	47
III. ANALIZA NA ABELOVIH GRUPAH	57
1. Dualna grupa	57
2. Fourierova transformacija	64
3. Pontrjaginova dualnost	70
4. Zaprti ideali v $L^1(G)$	78
5. Spektralna sinteza	85
IV. UPODOBITVE LOKALNO KOMPAKTNIH GRUP	93
1. Unitarne upodobitve	93
2. Omejene upodobitve	98
3. Upodobitve grupne algebre	103
4. Funkcije pozitivnega tipa	110
5. Upodobitve Abelovih grup	118
V. ANALIZA NA KOMPAKTNIH GRUPAH	121
1. Upodobitve kompaktnih grup	121
2. Izrek Petra in Weyla	124
3. Fourierova analiza na kompaktnih grupah	128
4. Nerazcepne upodobitve grup $SU(2)$, $U(2)$ in $O(3)$	133
DODATEK	140
A. Nekaj izrekov iz teorije grup	140
B. Nekaj izrekov iz topologije	140
C. Nekaj izrekov iz funkcionalne analize	141
D. Nekaj izrekov iz teorije mere	145
Literatura	151

I. poglavje : LOKALNO KOMPAKTNE GRUPE

1. Topološke grupe

Vzpostavili bomo okvir, v katerem se bo dogajala harmonična analiza. Povezali bomo algebraično strukturo grupe in topološko strukturo. Oboje dobro poznamo od prej, zato bomo večino osnovnih pojmov in dejstev o grupah in o topoloških prostorih privzeli. Posebej bomo poudarili le nekatere splošne rezultate, ki jih bomo večkrat potrebovali in seveda nekatere posebnosti pri topoloških grupah.

Definicija 1. *Topološka grupa* je grupa G , ki je hkrati topološki prostor, pri čemer sta grupni operaciji $(x, y) \mapsto xy$ (množenje) in $x \mapsto x^{-1}$ (invertiranje) zvezni.

V diskretni topologiji je npr. vsaka grupa topološka. Preprosti nediskretni zgledi so npr. krožnica $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ za množenje kompleksnih števil, \mathbb{R} za seštevanje realnih števil, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ za množenje realnih števil itd. Več zanimivih primerov topoloških grup bomo navedli v zadnjem razdelku poglavja.

Enoto v grupi G bomo označevali z 1. Uporabljali bomo standardne oznake množic, npr. $xA = \{xy; y \in A\}$, $Ax = \{yx; y \in A\}$ za $x \in G$, $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$ in $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$ (v primeru $B = A$ bomo pisali kar A^2 namesto AA).

Naštejmo nekaj primerov stalne uporabe:

- Rekli bomo npr., da je podmnožica $A \subset G$ *simetrična*, če je $A^{-1} = A$.
- Podmnožici A in B v G sta disjunktni, se pravi $A \cap B = \emptyset$, natanko takrat, ko $1 \notin A^{-1}B$.
- Podmnožica $H \subset G$ je *podgrupa* v G , če je simetrična in velja $H^2 \subset H$ (tedaj je tudi $1 \in H$).
- Če je H podgrupa v G , je za vsak $x \in G$ množica xH *levi* in množica Hx *desni odsek* po podgrupi H . Spomnimo se, da sta dva leva odseka bodisi enaka bodisi disjunktna in da je $G = \cup_{x \in G} xH$, tako da so levi odseki ekvivalenčni razredi (glede na ekvivalenčno relacijo v G , definirano s predpisom $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$).
- Podgrupa H je podgrupa edinka (normalna podgrupa) v G , če je $xH = Hx$ za vsak $x \in G$ oziroma, ekvivalentno, če je $xHx^{-1} \subset H$ za vsak $x \in G$.

Topologija

Zveznost množenja pomeni, da za vsako okolico W točke $xy \in G$ obstajata okolica U točke $x \in G$ in okolica V točke $y \in G$, tako da je $UV \subset W$. Zveznost invertiranja pa pomeni, da za vsako okolico V točke $x^{-1} \in G$ obstaja taka okolica U točke x , da je $U^{-1} \subset V$. Iz zveznosti množenja takoj sledi, da sta zvezni tudi preslikavi $y \mapsto xy$ in $y \mapsto yx$ za vsak $x \in G$. Hitro vidimo, da sta to homeomorfizma iz G na G . Prav tako je homeomorfizem iz G na G preslikava $y \mapsto y^{-1}$. Preslikava $y \mapsto xyx^{-1}$ pa je t.i. *notranji avtomorfizem* ali *konjugiranje* grupe G , določen z elementom $x \in G$ (hkrati izomorfizem grup in homeomorfizem topoloških prostorov). Podgrupa $H \subset G$ je podgrupa edinka natanko takrat, ko je invariantna za vsak tak notranji avtomorfizem.

Omenjeni homeomorfizmi oziroma sama zveznost grupnih operacij imajo daljnosežne posledice za strukturo topološke grupe. Nekaj bolj preprostih je zbranih v naslednji trditvi.

Trditvev 1. *V vsaki topološki grupi G velja:*

- (a) Če je $x \in G$, U odprta in F zaprta podmnožica v G , so xU , Ux in U^{-1} odprte, xF , Fx in F^{-1} pa zaprte podmnožice v G .
- (b) Za zaprtje množic velja $\overline{xA} = x\overline{A}$ in $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$ za vsak $x \in G$ in $A \subset G$.
- (c) Če je $x \in G$ in U okolica enote 1, sta xU in Ux okolici točke x . Bazični sistem okolice enote tako določa bazični sistem okolice vsake druge točke $x \in G$.
- (d) Za vsako okolico U enote 1 obstaja taka odprta simetrična okolica V enote 1, da velja $V \subset V^2 \subset U$. Obstaja bazični sistem okolice enote, sestavljen iz simetričnih odprtih množic.
- (e) Za vsak $x \in G$ in vsako okolico U enote 1 obstaja taka okolica V enote 1, da velja $xVx^{-1} \subset U$.
- (f) Za podmnožici $A, B \subset G$ velja naslednje:
- (i) Če je vsaj ena od njiju odprta, je odprta tudi množica AB .
- (ii) Če je ena od njiju zaprta, druga pa kompaktna, je zaprta tudi množica AB .
- (iii) Če sta obe kompaktni, je kompaktna tudi množica AB .

Dokaz. (a) Sledi iz dejstva, da je enostransko množenje z x in invertiranje homeomorfizem. Isto velja za (b), saj homeomorfizem preslika zaprtje na zaprtje.

Točka (c) je posledica točke (a).

(d) Zaradi zveznosti množenja obstajata taki okolici V_1, V_2 enote, da je $V_1V_2 \subset U$. Potem je $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ simetrična okolica enote z lastnostjo $V^2 \subset U$.

(e) Spet sledi iz zveznosti množenja v G ob upoštevanju točke (d).

(f) (i) Če je A odprta in B poljubna množica, pišimo $AB = \cup\{Ay; y \in B\}$, v nasprotnem primeru, če je A poljubna in B odprta, uporabimo zapis $AB = \cup\{xB; x \in A\}$. (ii) Denimo, da je množica A zaprta in množica B kompaktna. Naj bo $z_\alpha = x_\alpha y_\alpha \in AB$ posplošeno zaporedje, ki konvergira k $z \in G$. Pokazati moramo, da je $z \in AB$. Ker je B kompaktna množica, lahko iz posplošenega zaporedja y_α v B izberemo posplošeno podzaporedje y_β , ki konvergira proti $y \in B$, medtem ko z_β še vedno konvergira proti z . Potem pa zaradi zveznosti preslikave $(u, v) \mapsto uv^{-1}$ tudi posplošeno zaporedje $x_\beta = z_\beta y_\beta^{-1}$ konvergira proti x , ki je nujno v A zaradi zaprtosti te množice. Torej je $z = xy \in AB$. (iii) Sledi takoj iz dejstva, da je zvezna slika AB kompaktno množico $A \times B$ kompaktna.

Opombe. 1. Iz točke (c) v trditvi 1 vidimo, da je v topološki grupi G bazični sistem okolice poljubne točke določen z bazičnim sistemom okolice enote 1. Slednjemu rečemo tudi *lokalna baza* v G .

2. Produkt zaprtih podgrup ni nujno zaprta podgrupa. Pomislimo npr. na aditivno grupo vektorskih prostorov: vsota zaprtih podprostorov v neskončno razsežnem normiranem prostoru ni nujno zaprt podprostor. Drug primer je aditivna grupa realnih števil \mathbb{R} z zaprto podgrupo \mathbb{Z} . Tedaj je za vsako iracionalno število $\alpha \neq 0$ tudi množica $\alpha\mathbb{Z}$ zaprta podgrupa v \mathbb{R} , množica $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \{m + n\alpha; m, n \in \mathbb{Z}\}$ pa je gosta podgrupa v \mathbb{R} , ki ni enaka \mathbb{R} .

3. Spomnimo se, da ima topološki prostor separacijsko lastnost T_0 , če za $x \neq y$ obstaja bodisi okolica U_x točke x , tako da $y \notin U_x$, bodisi okolica U_y točke y , tako da $x \notin U_y$, in separacijsko lastnost T_1 , če velja oboje. Slednja lastnost je ekvivalentna dejstvu, da so vse enotočkaste množice zaprte (zakaj?), in je nasploh močnejša od lastnosti T_0 . Vendar pa za topološko grupo iz T_0 sledi T_1 , saj se da pokazati, da iz $x \notin \overline{\{y\}}$ sledi $y \notin \overline{\{x\}}$, če $x \neq y$. Oboje je namreč ekvivalentno dejstvu, da $1 \notin \overline{\{z\}}$, če $z \neq 1$. Torej sta za topološko grupo separacijski lastnosti T_0 in T_1 enakovredni.

Topološka grupa G ni nujno Hausdorffov prostor (tj. prostor T_2), vendar pa je to res, čim je G prostor T_0 oziroma T_1 . Naslednja trditvev namreč pove, da je topološka grupa G vedno regularen prostor, se pravi, da za vsak $x \in G$ in za vsako zaprto množico F z lastnostjo $x \notin F$, obstajata disjunktni odprti množici U in V z lastnostjo $F \subset U$ in $x \in V$.

Trditev 2. Naj bo G topološka grupa.

- (a) Za vsako okolico U enote 1 obstaja taka okolica V enote 1 , da je $\bar{V} \subset U$.
 (b) Če je G prostor T_0 , je tudi prostor T_3 in zato Hausdorffov.

Dokaz. (a) Naj bo V simetrična okolica enote z lastnostjo $V^2 \subset U$ (trditev 1d). Če je $x \in \bar{V}$, je $(xV) \cap V \neq \emptyset$. Torej obstajata taka elementa $u, v \in V$, da je $xv = u$; to pa pomeni $x = uv^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. Vidimo torej, da je $\bar{V} \subset U$, kar pomeni regularnost v enoti in zato tudi v vsaki drugi točki.

(b) V primeru, da je G prostor T_0 oziroma T_1 , je zaradi regularnosti (točka (a)) tudi prostor T_3 . Ker so enotočkaste množice v prostoru T_1 zaprte, je G kot regularen prostor tudi Hausdorffov.

V resnici se da pokazati, da je vsaka T_0 topološka grupa popolnoma regularen topološki prostor, se pravi, da za vsak $x \in G$ in vsako odprto okolico U točke x obstaja taka zvezna funkcija $f : G \rightarrow [0, 1]$, da je $f(x) = 1$ in $f(y) = 0$ za vsak $y \in G \setminus U$ (glej npr. [16], str. 70). Ni pa vsaka T_0 topološka grupa normalen prostor (glej [16], str. 74).

Definicija 2. Topološka grupa G je *lokalno kompaktna grupa*, če je T_0 in obstaja baza okolic enote, sestavljena iz kompaktnih množic (ekvivalentno: če vsaka okolica U enote vsebuje odprto okolico V , katere zaprtje \bar{V} je kompaktno). Če je že G kompakten prostor, rečemo, da je topološka grupa G *kompaktna*.

Zgled za lokalno kompaktno grupo je aditivna grupa \mathbb{Z} ali \mathbb{R} , ali multiplikativna grupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ali \mathbb{T} . Slednja je celo kompaktna. Aditivna grupa \mathbb{Q} ni lokalno kompaktna.

V lokalno kompaktni grupi vedno obstaja baza okolic enote, sestavljena iz simetričnih kompaktnih množic (zakaj?). V kompaktni grupi lahko dosežemo še več.

Trditev 3. V kompaktni grupi G sestavljajo simetrične okolice enote 1 , ki so invariantne za konjugiranje, lokalno bazo.

Dokaz. Naj bo U poljubna okolica enote 1 , V pa simetrična okolica za 1 z lastnostjo $V^3 \subset U$ (zakaj tak V obstaja?). Ker je grupa G kompaktna, lahko izberemo končno mnogo točk $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, tako da je $G = \cup_{j=1}^n Vx_j$. Definirajmo $W = \cap_{j=1}^n x_j^{-1}Vx_j$. Če je $x \in G$, je $x \in Vx_j$ za določen j , zato velja tudi $xWx^{-1} \subset Vx_jWx_j^{-1}V \subset V^3 \subset U$. Torej je $\cup_{x \in G} xWx^{-1}$ okolica enote $1 \in G$, ki je invariantna za konjugiranje in vsebovana v U .

V nadaljevanju bomo obravnavali le lokalno kompaktno Hausdorffove grupe. Take grupe so vedno normalne (glej npr. [16], str. 76), imajo pa še vrsto drugih koristnih lastnosti, predvsem obstoj invariantne mere (glej drugi razdelek), brez katere analiza na njih ne bi bila mogoča.

Podgrupe

Podgrupa topološke grupe je spet topološka grupa v inducirani topologiji. Nekaj njenih lastnosti prinaša naslednja trditev.

Trditev 4. Naj bo G topološka grupa. Velja:

- (a) Za vsako podgrupo (edinko) $H \subset G$ je tudi njeno zaprtje \bar{H} podgrupa (edinka) v G . Če ima G lastnost T_0 in je H Abelova podgrupa, je tudi \bar{H} Abelova podgrupa.
 (b) Vsaka odprta podgrupa v G je hkrati zaprta. Povezana grupa nima pravih odprtih podgrup.
 (c) Podgrupa $H \subset G$ je diskretna natanko takrat, ko vsebuje (relativno) izolirano točko.

Dokaz. (a) Zvezna funkcija preslika zaprtje v zaprtje, zato velja $\overline{H^2} \subset \overline{H^2} \subset \overline{H}$ in $\overline{H^{-1}} = \overline{H^{-1}} \subset \overline{H}$. Če je H edinka, tudi za njeno zaprtje \overline{H} velja $x\overline{H}x^{-1} \subset \overline{H}$ za vsak $x \in G$. Nazadnje naj G zadošča lastnosti T_0 , podgrupa H pa naj bo Abelova. Ker je preslikava $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ iz $G \times G$ v G zvezna, množica $\{1\}$ pa zaprta, je tudi množica $C = \{(x, y) \in G \times G; xyx^{-1}y^{-1} = 1\}$ zaprta. Zaradi $H \times H \subset C$, je tudi $\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subset C$ in tudi podgrupa \overline{H} je Abelova.

(b) Naj bo H odprta podgrupa v G . Potem so tudi vsi njeni levi odseki xH odprti in $G \setminus H = \cup\{xH; x \notin H\}$ je odprta množica. Če je G povezana, mora biti $H = G$.

(c) Vse točke diskretne podgrupe so izolirane v relativni topologiji. Obratno, naj bo x izolirana točka v H v relativni topologiji. Potem obstaja taka odprta okolica U enote v G , da je $(xU) \cap H = \{x\}$. Potem pa za vsak drug $y \in H$ velja $(yU) \cap H = (yU) \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}((xU) \cap H) = \{y\}$ in tudi y je izolirana točka v relativni topologiji v H .

Diskretne podgrupe v T_0 grupi G so zaprte (glej [16], Theorem 5.10). Zgled: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Če je G lokalno kompaktna topološka grupa, je vsaka njena zaprta podgrupa H tudi lokalno kompaktna. To se hitro vidi, saj je v relativni topologiji vsaka okolica v H presek okolice v G s podgrupo H in vsaka kompaktna množica v H presek kompaktne množice v G s podgrupo H . Zanimivo je, da velja tudi obratno.

Trditev 5. *Naj bo H podgrupa v lokalno kompaktni grupi G . Če je H lokalno kompaktna grupa v relativni topologiji, je H zaprta podgrupa v G .*

Dokaz. Če je H lokalno kompaktna grupa v relativni topologiji, podedovani iz G , obstaja taka odprta okolica U enote $1 \in G$, da je $K = \overline{U \cap H}$ (zaprtje v relativni topologiji) kompaktna podmnožica v H . Toda vsaka kompaktna podmnožica v H je kompaktna tudi v G , saj je za vsako odprto pokritje $\{U_i\}$ v G tudi $\{U_i \cap H\}$ relativno odprto pokritje v H in lahko izberemo končno podpokritje. Torej je K kompaktna, se pravi tudi zaprta podmnožica v G . Sledi, da je $K = \overline{U \cap H}$ zaprtje množice $U \cap H$ tudi v G .

Naj bo zdaj $x \in \overline{H}$ in $\{x_\alpha\}$ posplošeno zaporedje elementov v H , ki konvergira proti x . Naj bo V simetrična okolica enote $1 \in G$ z lastnostjo $V^2 \subset U$. Ker je tudi \overline{H} podgrupa, je tudi $x^{-1} \in \overline{H}$; zato $Vx^{-1} \cap H \neq \emptyset$ in lahko izberemo $y \in Vx^{-1} \cap H$. Ker obstaja tak indeks α_0 , da je $x_\alpha \in xV$ za $\alpha > \alpha_0$, je $yx_\alpha \in (Vx^{-1})(xV) = V^2 \subset U$ za $\alpha > \alpha_0$. Poleg tega je $yx_\alpha \in H$, se pravi $yx_\alpha \in U \cap H \subset K$ za vsak tak α . Torej je tudi $yx \in K \subset H$. Potem pa je $x = y^{-1}(yx) \in H$, tako da je podgrupa H zaprta.

Trditev 6. *Naj bo G topološka grupa, V okolica enote v G in $H = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$.*

(a) *Če je V odprta simetrična okolica enote v G , je H hkrati odprta in zaprta podgrupa v grupi G .*

(b) *Če je V kompaktna simetrična okolica enote v G , je H hkrati odprta in zaprta σ -kompaktna podgrupa v G .*

Če je grupa G povezana, je $H = G$.

Dokaz. (a) Ker je $V^m V^n = V^{m+n}$ za $m, n \in \mathbb{Z}$ in so vse V^n odprte simetrične množice, je njihova unija odprta podgrupa. Po trditvi 4b je hkrati zaprta, kar pa je mogoče le v nepovezanih grupah.

(b) Iz istega razloga kot v točki (a) je H podgrupa v G . Poleg tega je za vsak n množica $V^{n+1} = V^n V$ okolica množice V^n in leži v H . Ker pa vsak element $x \in H$ pripada neki množici V^n , je V^{n+1} okolica tudi točke x , se pravi, da je H odprta podgrupa. Po trditvi 4b je tudi zaprta. Ker je hkrati vsak V^n kompaktna množica, je H σ -kompaktna podgrupa.

Posledica. *Vsaka lokalno kompaktna grupa G vsebuje podgrupo H , ki je odprta, zaprta in σ -kompaktna. Če je grupa G povezana, je σ -kompaktna.*

Opomba. Da bi se izognili težavam pri kasnejši uporabi nekaterih izrekov teorije mere (Fubini, Radon-Nikodym), za katere je potrebna σ -končnost ustreznih mer, bomo odslej privzeli, da je vsaka lokalno kompaktna grupa σ -kompaktna. (V resnici se da pri lokalno kompaktnih grupah tej zahtevi izogniti, glej [11], str. 43-46).

Kvocientni prostor

Naj bo H podgrupa v topološki grupi G . V factorsko množico $G/H = \{xH; x \in G\}$ uvedemo topologijo na naslednji način. Če je $q : G \rightarrow G/H$ preslikava, ki vsakemu elementu $x \in G$ priredi ustreznemu levi odseku xH , rečemo, da je podmnožica $U \subset G/H$ odprta, če je $q^{-1}(U)$ odprta množica v G . Topološki prostor G/H , opremljen s to topologijo, imenujemo *kvocientni prostor*, preslikavo q pa *kvocientno preslikavo*. To je najmočnejša topologija v G/H , v kateri je q zvezna preslikava. Kvocientna preslikava je odprta, ker je za vsako odprto množico $U \subset G$ tudi množica $q(U)$ odprta v G/H , saj je $q^{-1}(q(U)) = \{y \in G; q(y) \in q(U)\} = \{y \in G; \text{obstaja } x \in U, \text{ da } y \in xH\} = UH$. Na sploh kvocientna preslikava ni zaprta. Zgled: množica $A = \{n + 1/n; n \in \mathbb{N}\}$ je zaprta v \mathbb{R} , medtem ko $q(A)$ ni zaprta v $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$. Za kompaktno podgrupo $H \subset G$ pa je kvocientna preslikava tudi zaprta (glej [16], Theorem 5.18).

Znano je, da nasploh factorska množica G/H ni grupa. To se zgodi, če je H podgrupa edinka v G . Kadar je grupa, imenujemo kvocientni prostor G/H *kvocientna* ali *factorska grupa*, kvocientno preslikavo pa *naravni* ali *kvocientni homomorfizem*. To je res homomorfizem grup (preslika produkt v produkt in enoto v enoto).

Trditev 7. Naj bo H podgrupa topološke grupe G .

- (a) Kvocientni prostor G/H je Hausdorffov natanko takrat, ko je podgrupa H zaprta.
- (b) Kvocientni prostor G/H je diskreten natanko takrat, ko je podgrupa H odprta.
- (c) Če je G lokalno kompaktna (kompaktna) grupa, je G/H lokalno kompakten (kompakten) topološki prostor.
- (d) Če je H (zaprta) podgrupa edinka topološke grupe G , je kvocientni prostor G/H (Hausdorffova) topološka grupa.

Dokaz. (a) Naj bo podgrupa H zaprta. Pokazati moramo le, da je G/H Hausdorffov topološki prostor. Naj bosta $q(x) \neq q(y)$ različni točki v G/H . Zaradi zaprtosti podgrupe H , je tudi xHy^{-1} zaprta podmnožica v G ; poleg tega $1 \notin xHy^{-1}$, sicer bi imeli $xH = yH$ oziroma $q(x) = q(y)$. Torej obstaja simetrična okolica V enote 1 z lastnostjo $V^2 \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Sledi $1 \notin VxH(VyH)^{-1} = (VxH)(VyH)^{-1}$ oziroma $VxH \cap VyH = \emptyset$. To pomeni $q(Vx) \cap q(Vy) = \emptyset$, pri čemer je $q(Vx)$ okolica točke $q(x)$ in $q(Vy)$ okolica točke $q(y)$. Obratno, če je G/H Hausdorffov topološki prostor, je tudi T_1 in enotočkasta množica $\{q(1)\}$ je zaprta v G/H . Potem pa je H zaprta v G .

(b) Če je H odprta podgrupa v G , so vsi levi odseki xH odprti v G , torej vse enotočkaste množice $\{q(x)\}$ odprte v G/H , ki je tako diskreten topološki prostor. Obratno, če je $\{q(1)\}$ odprta v G/H , je H odprta v G .

(c) Če je U kompaktna okolica enote v G , je Ux kompaktna okolica točke $x \in G$ in $q(Ux)$ kompaktna okolica točke $q(x)$ v G/H .

(d) Kadar je H podgrupa edinka v G , vemo, da je tudi G/H grupa in q homomorfizem grup. Pokazati moramo, da sta grupni operaciji zvezni. Naj bo W okolica za $q(x)q(y) = q(xy) \in G/H$. Potem je $q^{-1}(W)$ okolica za $xy \in G$ in obstajata taki okolici U za x in V za y , da je $UV \subset q^{-1}(W)$. Sledi $q(U)q(V) = q(UV) \subset W$ in množenje v G/H je zvezno. Enako je za vsako okolico V točke $q(x^{-1}) \in G/H$ množica $q^{-1}(V)$ okolica za $x^{-1} \in G$. Če je U taka okolica za x , da je $U^{-1} \subset q^{-1}(V)$, velja $q(U)^{-1} = q(U^{-1}) \subset V$ in tudi invertiranje je zvezno. Hausdorffova lastnost za G/H sledi iz zaprtosti podgrupe H po točki (a).

Opomba. Od prej vemo, da je v primeru $T_1 (= T_0)$ topološke grupe G , ta celo Hausdorffova. Če pa G ni T_1 prostor, lahko v zgornji točki (d) za podgrupo edinko izberemo $H = \overline{\{1\}}$ (najmanjša zaprta podgrupa v G) in dobimo, da je potem kvocientna grupa $G/\overline{\{1\}}$ Hausdorffova. S prehodom na faktorsko grupo lahko torej vedno privzamemo, da je topološka grupa G , ki jo proučujemo, Hausdorffova. To bomo odslej tudi vedno privzeli.

Spomnimo se, da je topološki prostor *popolnoma nepovezan*, če so edine povezane komponente enotočkaste množice.

Trditev 8. Naj bo G topološka grupa in C povezana komponenta enote 1 v G . Potem je C zaprta podgrupa edinka v G , faktorska grupa G/C pa popolnoma nepovezana.

Dokaz. Ker je zaradi homeomorfizma $x \mapsto x^{-1}$ tudi C^{-1} povezana množica, ki vsebuje enoto, je $C^{-1} \subset C$. Podobno je za vsak $x \in C$ odsek xC povezana množica, ki zaradi prejšnje ugotovitve vsebuje enoto, torej velja $xC \subset C$. Sledi $C^2 \subset C$ in C je podgrupa v G . Za vsak $x \in G$ je xCx^{-1} povezana množica, ki vsebuje enoto, torej spet $xCx^{-1} \subset C$ in C je podgrupa edinka. Kot vsaka povezana komponenta je C zaprta množica.

Glede faktorske grupe G/C je dovolj videti, da je vsaka množica $\{xC; x \in X\}$, ki strogo vsebuje $\{C\}$, nepovezana v G/C . Množica XC potem vsebuje C kot pravo podmnožico, zato je nepovezana: obstajata neprazni odprti množici U, V z lastnostjo $XC = (U \cap (XC)) \cup (V \cap (XC))$ in $(U \cap (XC)) \cap (V \cap (XC)) = \emptyset$. Torej je $\{xC; x \in X\} = (q(U) \cap \{xC; x \in X\}) \cup (q(V) \cap \{xC; x \in X\})$. Za vsak $x \in X$ je $xC = (U \cap (xC)) \cup (V \cap (xC))$ in zaradi povezanosti mora veljati $xC \subset U \cap (XC)$ ali $xC \subset V \cap (XC)$. Torej sta množici $U \cap (XC)$ in $V \cap (XC)$ uniji odsekov po podgrupi C in imata zato disjunktni sliki s kvocientno preslikavo. To pomeni, da je $(q(U) \cap \{xC; x \in X\}) \cup (q(V) \cap \{xC; x \in X\}) = \emptyset$, se pravi, da je množica $\{xC; x \in X\}$ nepovezana.

Translacija

Topološki prostor X je *homogen*, če za vsak par točk x, y obstaja tak homeomorfizem $\phi : X \rightarrow X$, da je $\phi(x) = y$. Vsaka topološka grupa G je npr. homogen prostor, saj je $x \mapsto ax$ za vsak $a \in G$ homeomorfizem grupe G . Drug primer nudi naslednja trditev.

Trditev 9. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Za vsak $a \in G$ naj bo ${}_a\phi : G/H \rightarrow G/H$ preslikava, definirana z ${}_a\phi(xH) = (ax)H$ za vsak $xH \in G/H$. Potem je ${}_a\phi$ homeomorfizem topološkega prostora G/H in G/H je homogen prostor.

Dokaz. Preslikava ${}_a\phi$ je bijekcija na G/H in velja $({}_a\phi)^{-1} = {}_{a^{-1}}\phi$. Pokažimo, da je ${}_a\phi$ odprta preslikava. Naj bo $\{uH; u \in U\}$ odprta množica v G/H , kjer je U odprta v G . Potem je ${}_a\phi(\{uH; u \in U\}) = \{auH; u \in U\} = \{vH; v \in aU\} = q(aU)$ odprta množica v G/H , ker je aU odprta v G in je q odprta preslikava. Tudi $({}_a\phi)^{-1} = {}_{a^{-1}}\phi$ je po istem premisleku odprta, zato je ${}_a\phi$ homeomorfizem.

Nad topološko grupo G pogosto opazujemo ta ali oni funkcijski prostor, npr. prostor vseh omejenih zveznih funkcij $C_b(G)$ ali prostor vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem $C_c(G)$, opremljen s supremum normo $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in G\}$ za ustrezno funkcijo f . Enostransko množenje na grupi inducira levi oziroma desni premik na ustreznem funkcijskem prostoru. Levi ali desni premik na grupi ali na ustreznem funkcijskem prostoru imenujemo tudi leva ali desna *translacija*.

Definicija 3. Naj bo $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ poljubna funkcija in $y \in G$ poljubna točka. Levi premik L_y je definiran s predpisom $(L_y f)(x) = f(y^{-1}x)$ za vsak $x \in G$, desni premik R_y pa s predpisom $(R_y f)(x) = f(xy)$ za vsak $x \in G$.

Ker sta za vsak $y \in G$ preslikavi $x \mapsto y^{-1}x$ in $x \mapsto xy$ homeomorfizma topološke grupe G , brez težav vidimo, da sta hkrati z f tudi $L_y f$ in $R_y f$ zvezni funkciji na G . Če je $f \in C_b(G)$, sta očitno tudi $L_y f, R_y f \in C_b(G)$. Prav tako sta $L_y f, R_y f \in C_c(G)$, če je $f \in C_c(G)$. Pri tem je $\text{supp } L_y f = y(\text{supp } f)$ in $\text{supp } R_y f = (\text{supp } f)y^{-1}$. Rečemo, da sta $C_b(G)$ in $C_c(G)$ invariantna funkcijska podprostor na G .

Prav tako se lahko neposredno prepričamo, da sta preslikavi $L: y \mapsto L_y$ in $R: y \mapsto R_y$ homomorfizma grupe G v grupo vseh obrnljivih linearnih preslikav na ustreznem funkcijemskem prostoru, da torej za vsak par $y, z \in G$ velja $L_{yz} = L_y L_z$ in $R_{yz} = R_y R_z$.

Naslednja trditev pove, da sta L in R krepko zvezni preslikavi na $C_c(G)$ (ker sta homomorfizma grup je to dovolj preveriti pri enoti).

Trditev 10. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in $f \in C_c(G)$ funkcija s kompaktnim nosilcem. Tedaj velja $\|L_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$) in $\|R_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$).

Dokaz. Dokažimo npr. $\|R_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$). Naj bo $f \in C_c(G)$, $\epsilon > 0$ in $K = \text{supp } f$, nosilec funkcije f . Za vsak $x \in K$ obstaja taka okolica U_x enote 1, da zaradi zveznosti funkcije f velja $|f(xy) - f(x)| < \epsilon/2$ za $y \in U_x$. Potem obstaja po trditvi 1 taka odprta simetrična okolica V_x enote 1, da je $V_x^2 \subset U_x$. Odprte množice xV_x ($x \in K$) pokrivajo kompaktno množico K , zato obstajajo točke $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$, tako da je $K \subset \cup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$. Definirajmo $V = \cap_{j=1}^n V_{x_j}$. Pokazali bomo, da je $\|R_y f - f\|_\infty < \epsilon$ oziroma $|f(xy) - f(x)| < \epsilon$ za vsak $x \in G$ in $y \in V$. Naj bo $y \in V$.

Če je $x \in K$, obstaja tak j , da je $x \in x_j V_{x_j}$ oziroma $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$. Torej imamo $xy = x_j(x_j^{-1}x)y \in x_j V_{x_j} y \subset x_j V_{x_j} V \subset x_j V_{x_j}^2 \subset x_j U_{x_j}$. Potem je $|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| = |f(x_j(x_j^{-1}xy)) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_j(x_j^{-1}x1))| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Če je $xy \in K$, imamo podobno $|f(xy) - f(x)| = |f(xyy^{-1}) - f(xy)| < \epsilon$, saj je tudi $y^{-1} \in V$. Če pa $x \notin K$ in $xy \notin K$, je $f(x) = f(xy) = 0$, zato je spet $|f(xy) - f(x)| < \epsilon$.

V dokazu smo potrebovali kompaktnost nosilca $\text{supp } f$, zato trditev za funkcije $f \in C_b(G)$ nasploh ne velja. Samo nekatere med njimi imajo to lastnost.

Definicija 4. Rečemo, da je funkcija $f \in C_b(G)$ levo enakomerno zvezna, če velja $\|L_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$) in desno enakomerno zvezna, če velja $\|R_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$). Funkcija je enakomerno zvezna, če velja oboje.

Za množico levo oziroma desno enakomerno zveznih omejenih funkcij na grupi G bomo uporabljali oznake $C_{lu}(G)$ oziroma $C_{ru}(G)$, za množico enakomerno zveznih omejenih funkcij pa $C_u(G)$. Torej je $C_u(G) = C_{lu}(G) \cap C_{ru}(G)$. Tem prostorom rečemo včasih standardni funkcijski prostori.

Trditev 11. Množice $C_{lu}(G)$, $C_{ru}(G)$ in $C_u(G)$ so zaprti invariantni linearni podprostor (celo C^* -podalgebre) v $C_b(G)$ in vsebujejo podprostor $C_c(G)$ (in C^* -podalgebro C_0).

Dokaz. Linearnost je očitna. Zaprtost prostora $C_{lu}(G)$ sledi iz ocene $\|L_y f - f\|_\infty \leq \|L_y f - L_y f_n\|_\infty + \|L_y f_n - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty = 2\|f_n - f\|_\infty + \|L_y f_n - f_n\|_\infty$, kjer najprej izberemo tako velik n , da je prvi člen poljubno majhen, nato pa pri izbranem n še tak y , da je tudi drugi člen dovolj majhen. Podobno dobimo za $C_{ru}(G)$ in $C_u(G)$. Da so podprostor zaprti za produkt, vidimo iz relacije $L_y(fg) = (L_y f)(L_y g)$ in ocene $\|L_y fg - fg\|_\infty \leq \|(L_y f - f)L_y g\|_\infty + \|f(L_y g - g)\|_\infty$ ter podobno za R_y . Zaprtost za kompleksno konjugiranje je jasna. Leva invariantnost za $C_{lu}(G)$ pa sledi iz enakosti $\|L_y(L_z f) - L_z f\|_\infty = \|L_z^{-1}L_y L_z f - f\|_\infty = \|L_{z^{-1}yz} f - f\|_\infty$ in dejstva, da $z^{-1}yz \rightarrow 1$, če $y \rightarrow 1$, desna pa iz dejstva, da premika L_y in R_z komutirata, in enakosti $\|L_y R_z f - R_z f\|_\infty = \|R_z(L_y f - f)\|_\infty = \|L_y f - f\|_\infty$.

Standardne prostore bomo kasneje opisali še drugače. Uporabili jih bomo pri karakterizaciji amenabilnosti v razdelku II.4.

2. Haarova mera

V klasični Fourierovi analizi na \mathbb{R} oziroma na \mathbb{T} je eno najpomembnejših orodij Lebesguov integral. Brez njega npr. ne bi mogli definirati Fourierove transformacije (oz. Fourierovih koeficientov). Nekaj podobnega potrebujemo na splošni lokalno kompaktni grupi. V tem razdelku bomo pokazali, da na vsaki lokalno kompaktni grupi obstaja netrivialna pozitivna regularna Borelova (translacijsko) levo invariantna mera, ki je do multiplikativne konstante natančno določena. To mero imenujemo *leva Haarova mera*.

Eksistenca

Odslej bo G vedno poljubna netrivialna lokalno kompaktna Hausdorffova grupa. V tem primeru lahko za vsako odprto množico V in vsako kompaktno množico $K \subset V$ najdemo zvezno funkcijo f s kompaktnim nosilcem, vsebovanim v V , tako da je $f = 1$ na K .

Trditev 1. *Naj bosta $f, g \in C_c^+(G)$ in $g \neq 0$, se pravi nenegativni zvezni funkciji na G s kompaktnim nosilcem. Potem obstajajo take konstante $c_i > 0$ in taki elementi $x_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, n$), da za vsak $x \in G$ velja*

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i^{-1}x) = \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} g(x).$$

Dokaz. Ker je g zvezna funkcija, je za vsak $\epsilon > 0$ množica $U_\epsilon = \{x \in G; (1 - \epsilon)\|g\|_\infty < g(x)\}$ neprazna in odprta. Če je $x_0 \in U_\epsilon$, je $1 \in x_0^{-1}U_\epsilon$ in $x \in xx_0^{-1}U_\epsilon$ za vsak $x \in G$. Torej odprte množice yU_ϵ pokrivajo G , se pravi tudi kompaktno množico $\text{supp } f$. Zato obstaja končno mnogo elementov $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, tako da je vsak $x \in \text{supp } f$ vsebovan v neki množici oblike $x_i U_\epsilon$. Potem je $x_i^{-1}x \in U_\epsilon$ in zato $g(x_i^{-1}x) > (1 - \epsilon)\|g\|_\infty$. Torej velja tudi

$$f(x) \leq \|f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{(1 - \epsilon)\|g\|_\infty} g(x_i^{-1}x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{(1 - \epsilon)\|g\|_\infty} \sum_{i=1}^n g(x_i^{-1}x).$$

Definicija 1. Če sta $f, g \in C_c^+(G)$, $g \neq 0$, uvedemo oznako

$$(f : g) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n c_i; \text{ obstajajo } x_1, x_2, \dots, x_n \in G, \text{ tako da } f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} g \right\}.$$

Trditev 2. *Za količino $(f : g)$ veljajo naslednje lastnosti:*

- (1) $(f : g) = 0$ natanko takrat, ko je $f = 0$.
- (2) $(f : g) = (L_y f : g)$ za vsak $y \in G$,
- (3) $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$,
- (4) $(cf : g) = c(f : g)$ za vsak $c > 0$,
- (5) $(f_1 : g) \leq (f_2 : g)$, če $f_1 \leq f_2$,
- (6) $(f : g) \geq \|f\|_\infty / \|g\|_\infty$,
- (7) $(f : g) \leq (f : h)(h : g)$ za vsak $0 \neq h \in C_c^+(G)$.

Dokaz. (1) Če je $f = 0$, lahko vzamemo $c_i = 0$ za vsak i ; torej je tudi $(f : g) = 0$. Obratno sledi iz ocene $\|f\|_\infty \leq (\sum_i c_i)\|g\|_\infty$. (2) Neenakost $f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} g$ je ekvivalentna neenakosti $L_y f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{yx_i} g$ za vsak $y \in G$, zato sta oba infimuma enaka. (3) Za vsak $\epsilon > 0$ naj bodo $c_i > 0$, $x_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, m$) izbrani tako, da je $f_1 \leq \sum_{i=1}^m c_i L_{x_i} g$ in hkrati $\sum_{i=1}^m c_i < (f_1 : g) + \epsilon$. Podobno, naj bodo $d_j > 0$, $y_j \in G$ ($j = 1, 2, \dots, n$) taki, da je $f_2 \leq \sum_{j=1}^n d_j L_{y_j} g$ in hkrati $\sum_{j=1}^n d_j < (f_2 : g) + \epsilon$. Potem je $f_1 + f_2 \leq \sum_{i=1}^m c_i L_{x_i} g + \sum_{j=1}^n d_j L_{y_j} g$ in zato $(f_1 + f_2 : g) \leq \sum_{i=1}^m c_i + \sum_{j=1}^n d_j \leq (f_1 : g) + (f_2 : g) + 2\epsilon$. To velja za vsak ϵ , kar nam da iskano neenakost. Točki (4) in (5) vidimo podobno. Točko (6) spoznamo iz dejstva, da iz neenakosti $f \leq \sum_{i=1}^n c_i L_{x_i} g$ sledi $\|f\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n c_i \|g\|_\infty$.

Točka (7) pa velja zaradi dejstva, da iz $f \leq \sum_{i=1}^m c_i L_{x_i} h$ in $h \leq \sum_{j=1}^n d_j L_{y_j} g$ sledi $f \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i d_j L_{x_i y_j} g$ in zato $(f : g) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i d_j = (\sum_{i=1}^m c_i)(\sum_{j=1}^n d_j)$.

Definicija 2. Naj bo $0 \neq g \in C_c^+(G)$. Fiksirajmo še $0 \neq f_0 \in C_c^+(G)$ in za vsak $f \in C_c^+(G)$ definirajmo $I_g(f) = (f : g)/(f_0 : g)$.

Definicija je smiselna, saj iz $f_0 \neq 0$ po trditvi 2(1) sledi $(f_0 : g) \neq 0$. Iz trditve 2 vidimo, da je I_g levo invarianten, subaditiven, homogen, monoton funkcional na $C_c^+(G)$, dobljen iz $(f : g)$ z normalizacijo. Če v točki (7) zgornje trditve izberemo $h = f_0$, dobimo oceno $I_g(f) \leq (f : f_0)$; če pa izberemo $f = f_0$ in $h = f$, najdemo za $f \neq 0$ še oceno $1/(f_0 : f) \leq I_g(f)$. Za $0 \neq f \in C_c^+(G)$ torej vedno velja

$$(1) \quad \frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_g(f) \leq (f : f_0).$$

Na žalost I_g na sploh ni linearen funkcional, kar bi si želeli. Naslednja lema pa pove, da je v primeru funkcije $g \in C_c^+(G)$ z majhnim nosilcem to skoraj res.

Lema 1. Bodita $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja taka okolica V enote $1 \in G$, da v primeru $\text{supp } g \subset V$ velja $I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon$.

Dokaz. Izberimo tak $f \in C_c^+(G)$, da je $f = 1$ na $\text{supp}(f_1 + f_2)$, in poljuben (kasneje dovolj majhen) $\delta > 0$. Nadalje naj bo $h = f_1 + f_2 + \delta f \neq 0$ in $h_i = f_i/h$ (če je $f_i = 0$, je $h_i = 0$) za $i = 1, 2$. Potem sta $h_1, h_2 \in C_c^+(G)$ in zaradi zveznosti obstaja taka okolica V enote 1 , da je $|h_i(x) - h_i(y)| < \delta$ za $i = 1, 2$, če $y^{-1}x \in V$. Izberimo $g \in C_c^+(G)$ z lastnostjo $\text{supp } g \subset V$ in naj bo $h \leq \sum_i c_i L_{x_i} g$. Tedaj je $f_1(x) = h(x)h_1(x) \leq \sum_i c_i g(x_i^{-1}x)h_1(x)$. Na desni so morda od 0 različni le tisti členi, pri katerih je $x_i^{-1}x \in \text{supp } g$. Za tak i pa je $|h_1(x_i) - h_1(x)| < \delta$, zato imamo $f_1(x) \leq \sum_i c_i g(x_i^{-1}x)(h_1(x_i) + \delta)$. Za funkcijo f_2 dobimo podobno $f_2(x) \leq \sum_i c_i g(x_i^{-1}x)(h_2(x_i) + \delta)$. Odtod najdemo $(f_1 : g) \leq \sum_i c_i (h_1(x_i) + \delta)$ in $(f_2 : g) \leq \sum_i c_i (h_2(x_i) + \delta)$ in zaradi $h_1 + h_2 \leq 1$ tudi $(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq \sum_i c_i (1 + 2\delta)$ oziroma $(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (h : g)(1 + 2\delta)$. Delimo obe strani z $(f_0 : g) > 0$, upoštevajmo subaditivnost in homogenost, pa dobimo

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq (1 + 2\delta)I_g(h) \leq (1 + 2\delta)(I_g(f_1 + f_2) + \delta I_g(f)).$$

Izberimo zdaj δ tako majhen, da je $2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(f : f_0) < \epsilon$. Potem je lema dokazana, saj je zaradi (1) tudi

$$(1 + 2\delta)(I_g(f_1 + f_2) + \delta I_g(f)) \leq I_g(f_1 + f_2) + 2\delta I_g(f_1 + f_2) + \delta(1 + 2\delta)I_g(f) \leq I_g(f_1 + f_2) + 2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(f : f_0) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon.$$

Zdaj imamo vse pripravljeno za dokaz glavnega eksistenčnega izreka o Haarovi meri.

Izrek 1. Na lokalno kompaktni grupi G obstaja pozitivna levo invariantna Haarova mera.

Dokaz. Za vsak $f \in C_c^+(G)$ označimo $X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ in definirajmo $X = \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f$ kartezični produkt zaprtih intervalov. Po aksiomu izbire je $X \neq \emptyset$, po izreku Tihonova je X kompakten Hausdorffov topološki prostor. Zaradi (1) za vsak $f, g \in C_c^+(G)$, $g \neq 0$, velja $I_g(f) \in X_f$, torej $I_g \in X$. Za vsako okolico V enote $1 \in G$ naj bo $K_V = \{I_g; \text{supp } g \subset V\}^-$ (zaprtje v produktni topologiji), torej je K_V kompaktna množica. Za vsak končen nabor okolic V_1, \dots, V_n je $K_{V_1 \cap \dots \cap V_n} \subset K_{V_1} \cap \dots \cap K_{V_n}$, kar pomeni, da je vsak končen presek neprazen. Potem pa je zaradi kompaktnosti tudi presek po vseh okolicah V neprazen, $\bigcap_V K_V \neq \emptyset$, torej obstaja $I \in \bigcap_V K_V$. Od tod sledi, da lahko za vsako, še tako majhno, okolico enote V funkcijo $I \in X$ poljubno natančno aproksimiramo v produktni topologiji v X s funkcijo I_g z lastnostjo $\text{supp } g \subset V$. To pomeni, da za vsak $\epsilon > 0$, za vsak končen nabor $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G)$ in za vsako okolico V enote $1 \in G$ obstaja

$g \in C_c^+(G)$, $g \neq 0$, $\text{supp } g \subset V$ z lastnostjo $|I(f_i) - I_g(f_i)| < \epsilon$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Odtod za vsak $y \in G$, vsak $c > 0$ in $f, f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ sledi

$$\begin{aligned} |I(L_y f) - I(f)| &\leq |I(L_y f) - I_g(L_y f)| + |I_g(f) - I(f)| < 2\epsilon, \\ |I(cf) - cI(f)| &\leq |I(cf) - I_g(cf)| + |cI_g(f) - cI(f)| < (1 + c)\epsilon \end{aligned}$$

in

$$|I(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2)| \leq$$

$|I(f_1 + f_2) - I_g(f_1 + f_2)| + |I_g(f_1 + f_2) - I_g(f_1) - I_g(f_2)| + |I_g(f_1) - I(f_1)| + |I_g(f_2) - I(f_2)| < 4\epsilon$ (drugi člen je pod ϵ po lemi 1). Ker je bil $\epsilon > 0$ poljuben, odtod takoj sledi, da je funkcional I na $C_c^+(G)$ levo invarianten, homogen in aditiven.

Funkcional I moramo razširiti na $C_c(G)$. Realno funkcijo $f \in C_c(G)$ zapišemo kot razliko dveh nenegativnih funkcij, $f = g - h$, $g, h \in C_c^+(G)$, in definiramo $I(f) := I(g) - I(h)$. Brez težav se lahko prepričamo, da je tako razširjeni funkcional dobro definiran na realnih funkcijah iz $C_c(G)$, netrivialen, aditiven in realno homogen. V naslednjem koraku razširimo I še na kompleksne funkcije $f = g + ih \in C_c(G)$, kjer sta g, h realni funkciji, s predpisom $I(f) = I(g) + iI(h)$. Spet lahko preverimo zgornje lastnosti in kompleksno homogenost. Tako razširjeni I je torej netrivialen pozitiven funkcional na $C_c(G)$. Zdaj lahko uporabimo Rieszov izrek, ki zagotavlja obstoj take pozitivne Borelove mere λ , da velja $I(f) = \int_G f d\lambda$ za vsak $f \in C_c(G)$. Pokažimo, da je mera λ levo invariantna, t.j. $\lambda(yE) = \lambda(E)$ za vsako Borelovo podmnožico $E \subset G$. Označimo $(L_y \lambda)(E) = \lambda(yE)$ za vsak $y \in G$; to je neka nova Borelova mera. Ker je $L_y \chi_E(x) = \chi_E(y^{-1}x) = 1$ za $x \in yE$ in 0 sicer, torej $L_y \chi_E = \chi_{yE}$, velja tudi $\int_G \chi_E d(L_y \lambda) = (L_y \lambda)(E) = \lambda(yE) = \int_G \chi_{yE} d\lambda = \int_G L_y \chi_E d\lambda$ za vsako Borelovo množico E . Potem pa najprej za vsako enostavno funkcijo (linearno kombinacijo karakterističnih funkcij) in nato z aproksimacijo tudi za vsak $f \in C_c(G)$ velja $\int_G f d(L_y \lambda) = \int_G L_y f d\lambda = I(L_y f) = I(f) = \int_G f d\lambda$. Odtod sledi $L_y \lambda = \lambda$ za vsak $y \in G$. Mera λ je torej levo invariantna in zato Haarova.

Mero na lokalno kompaktnem prostoru, ki je pozitivna, Borelova, končna na kompaktnih množicah, zunanje regularna na vseh Borelovih množicah in notranje regularna na vseh odprtih množicah imenujemo *Radonova mera*. Torej lahko na kratko rečemo, da je leva Haarova mera na lokalno kompaktni grupi G levo invariantna Radonova mera na G .

Trditev 3. Če je λ leva Haarova mera na lokalno kompaktni grupi G , je $\lambda(U) > 0$ za vsako neprazno odprto množico $U \neq \emptyset$ in $\int_G f d\lambda > 0$ za vsak $0 \neq f \in C_c^+(G)$.

Dokaz. Naj bo $U \neq \emptyset$ odprta množica in denimo, da je $\lambda(U) = 0$. Zaradi leve invariantnosti mere λ sledi $\lambda(xU) = 0$ za vsak $x \in G$. Toda vsako kompaktno množico $K \subset G$ lahko pokrijemo s končno mnogo množicami take oblike, zato velja tudi $\lambda(K) = 0$. Ker je G odprta množica, mera, dobljena po Rieszovem izreku, pa je na takih množicah notranje regularna, imamo tudi $\lambda(G) = 0$, kar je v nasprotju z netrivialnostjo mere λ . Naj bo še $f \neq 0$ in $f \in C_c^+(G)$ in $U = \{x \in G; f(x) > \|f\|_\infty/2\}$. Tedaj je tudi $\int_G f d\lambda \geq \int_U f d\lambda > \lambda(U)\|f\|_\infty/2 > 0$.

Enoličnost

Izrek 2. Če sta λ, μ levi Haarovi meri na lokalno kompaktni grupi G , obstaja konstanta $c > 0$ da je $\mu = c\lambda$.

Dokaz. Če je $\mu = c\lambda$, je $\int_G f d\mu = c \int_G f d\lambda$ za vsak $f \in C_c^+(G)$, torej $\int_G f d\mu / \int_G f d\lambda = c$ za vsak $f \in C_c^+(G)$, $f \neq 0$. Seveda je res tudi obratno: za $\mu = c\lambda$ je dovolj dokazati konstantno razmerje obeh integralov. Bodita $0 \neq f, g \in C_c^+(G)$. Izberimo simetrično kompaktno okolico V_0 enote $1 \in G$ in definirajmo kompaktni množici $A = (\text{supp } f)V_0 \cup V_0(\text{supp } f)$ in $B = (\text{supp } g)V_0 \cup V_0(\text{supp } g)$. Če je $y \in V_0$, sta preslikavi $x \mapsto f(xy) - f(yx)$ in $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ v $C_c(G)$, njuna nosilca pa sta v A oziroma v B .

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem obstaja taka simetrična okolica $V \subset V_0$ enote 1, da je $|f(xy) - f(yx)| < \epsilon$ in $|g(xy) - g(yx)| < \epsilon$ za vsak $x \in G$, če je $y \in V$. Izberimo še tako funkcijo $h \in C_c^+(G)$, ki je simetrična ($h(x) = h(x^{-1})$) za vsak x in ima nosilec $\text{supp } h \subset V$. Tedaj je (upoštevaje levo invariantnost mere λ)

$$\int h d\mu \cdot \int f d\lambda = \int \int h(y)f(x)d\lambda(x)d\mu(y) = \int \int h(y)f(yx)d\lambda(x)d\mu(y)$$

in zaradi simetričnosti funkcije h , leve invariantnosti mer λ in μ ter Fubinijevega izreka, ki opravičuje zamenjavo vrstnega reda integriranja (upoštevamo, da ima f kompakten nosilec)

$$\begin{aligned} \int h d\lambda \cdot \int f d\mu &= \int \int h(x)f(y)d\lambda(x)d\mu(y) = \int \int h(y^{-1}x)f(y)d\lambda(x)d\mu(y) = \\ &= \int \int h(x^{-1}y)f(y)d\mu(y)d\lambda(x) = \int \int h(y)f(xy)d\mu(y)d\lambda(x) = \int \int h(y)f(xy)d\lambda(x)d\mu(y). \end{aligned}$$

Ker je $\text{supp } h \subset V$, je dovolj, da integriramo po $y \in V$, zato dobimo

$$\left| \int h d\lambda \int f d\mu - \int h d\mu \int f d\lambda \right| = \left| \int \int h(y)(f(xy) - f(yx))d\lambda(x)d\mu(y) \right| \leq \epsilon \lambda(A) \int h d\mu$$

in podobno

$$\left| \int h d\lambda \int g d\mu - \int h d\mu \int g d\lambda \right| \leq \epsilon \lambda(B) \int h d\mu.$$

Če delimo prvo neenakost z $\int h d\mu \int f d\mu$ in drugo z $\int h d\mu \int g d\mu$, najdemo

$$\left| \frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} \right| \leq \frac{\epsilon \lambda(A)}{\int f d\mu}$$

in

$$\left| \frac{\int h d\lambda}{\int h d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu} \right| \leq \frac{\epsilon \lambda(B)}{\int g d\mu}.$$

Po trikotniški neenakosti je torej

$$\left| \frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} - \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu} \right| \leq \frac{\epsilon(\lambda(A))}{\int f d\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int g d\mu}.$$

Ker je bil $\epsilon > 0$ poljuben, je $\frac{\int f d\lambda}{\int f d\mu} = \frac{\int g d\lambda}{\int g d\mu}$ oziroma $\frac{\int f d\mu}{\int f d\lambda} = c$ (konstanta) za vsak $f \in C_c^+(G)$. Dokaz je končan.

Trditev 4. *Lokalno kompaktna grupa G s Haarovo mero λ je kompaktna natanko takrat, ko je $\lambda(G) < \infty$.*

Dokaz. Če je G kompaktna grupa, je (konstantna funkcija) $1 \in C_c(G)$ in zato (z oznakami iz konstrukcije Haarove mere) $\lambda(G) = I(1) < \infty$. Če G ni kompaktna grupa in je U odprta okolica enote s kompaktnim zaprtjem, G ne moremo pokriti s končno mnogo množicami oblike xU , $x \in G$, zato obstaja neskončno zaporedje točk (x_n) , tako da za vsak $n \geq 2$ velja $x_n \notin \cup_{i=1}^{n-1} x_i U$. Naj bo V odprta simetrična okolica enote z lastnostjo $V^2 \subset U$. Potem so odprte množice $x_n V$ paroma disjunktne. Če bi namreč veljalo $x_m V \cap x_n V \neq \emptyset$ za $m > n$, bi imeli $x_m \in x_n V^2 \subset x_n U$, kar bi bilo v nasprotju s konstrukcijo zaporedja (x_n) . Toda tedaj je $\lambda(x_n V) = \lambda(V)$ za vsak n in torej velja $\lambda(G) = \infty$.

Opombe. 1. Kadar je grupa G kompaktna, Haarovo mero λ običajno *normaliziramo* tako, da je $\lambda(G) = 1$. V tem primeru je tudi $I(1) = 1$ in lahko brez težav vidimo, da je za kompaktno grupo I zvezen (omejen) linearen funkcional na $C(G)$. Iz neenakosti $0 \leq I((f - I(f))(\bar{f} - I(\bar{f})))$ namreč sledi $|I(f)|^2 \leq I(|f|^2) \leq \|f\|_\infty^2$.

2. Podobno kot smo na lokalno kompaktni grupi G konstruirali levo invariantno Haarovo mero, bi lahko konstruirali tudi *desno invariantno* Haarovo mero. Gre pa še bolj preprosto: če je λ leva Haarova mera na G , je s predpisom $\rho(E) = \lambda(E^{-1})$ za vsako Borelovo množico E očitno podana na G desno invariantna Haarova mera. To lahko zapišemo drugače, v obliki integrala: $\int_G \chi_E(x) d\rho(x) = \int_G \chi_{E^{-1}}(x) d\lambda(x) = \int_G \chi_E(x) d\lambda(x^{-1})$. Odtod

vidimo, da za vsako funkcijo $f \in C_c(G)$ velja $\int_G f(x)d\rho(x) = \int_G f(x)d\lambda(x^{-1})$, se pravi $d\rho(x) = d\lambda(x^{-1})$.

3. Modularna funkcija

Levi premik funkcije pusti seveda njen integral po vsej lokalno kompaktni grupi pri miru. V tem razdelku bomo spoznali, kako vpliva na invarianten integral desni premik.

Definicija in lastnosti

Naj bo λ leva Haarova mera na lokalno kompaktni grupi G . Za vsak $x \in G$ definirajmo pozitivno Borelovo mero λ_x s predpisom (E Borelova množica)

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex).$$

Hitro vidimo, da je to res mera, celo Radonova mera na G . Zaradi

$$\lambda_x(yE) = \lambda(yEx) = \lambda(Ex) = \lambda_x(E)$$

je spet levo invariantna, torej Haarova mera na G . Po izreku o enoličnosti (izrek 2.2) obstaja (pozitivna konstanta) $\Delta(x) > 0$, tako da velja $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$ oziroma $\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$ za vsako Borelovo množico $E \subset G$. Prepričajmo se, da je vrednost $\Delta(x)$ neodvisna od izbire Haarove mere λ .

Pa naj bo μ druga leva Haarova mera na G . Potem vemo, da obstaja taka pozitivna konstanta $c > 0$, da je $\mu = c\lambda$. Naj bo spet $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ za vsako Borelovo množico $E \subset G$. Torej je $\mu_x = \Delta_1(x)\mu$. Po drugi strani pa iz $\mu = c\lambda$ sledi, da velja tudi $\mu_x = c\lambda_x$. Dobimo torej $\Delta_1(x)\mu = \mu_x = c\lambda_x = c\Delta(x)\lambda = \Delta(x)\mu$, se pravi, $\Delta_1(x) = \Delta(x)$ za vsak $x \in G$.

Definicija 1. Funkcija $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$, definirana zgoraj, se imenuje *modularna funkcija* na lokalno kompaktni grupi G .

Videli smo, da je funkcija Δ na grupi dobro definirana (neodvisna od izbire Haarove mere). Očitno velja $\Delta(1) = 1$.

Trditev 1. Funkcija Δ je zvezen unitalni homomorfizem grupe G v multiplikativno grupo \mathbb{R}^+ . Za vsak $f \in L^1(\lambda)$ in vsak $y \in G$ velja

$$(1) \quad \int_G R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int_G f d\lambda.$$

Dokaz. Za $x, y \in G$ in Borelovo množico $E \subset G$ izračunajmo

$$\Delta(xy)\lambda(E) = \lambda_{xy}(E) = \lambda(Exy) = \lambda_y(Ex) = \Delta(y)\lambda(Ex) = \Delta(y)\lambda_x(E) = \Delta(y)\Delta(x)\lambda(E).$$

Odtod dobimo $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ za vsak par $x, y \in G$ in Δ je homomorfizem iz G v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Če je $f = \chi_E$, je za vsak $x, y \in G$ res $R_y f(x) = f(xy) = \chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$ in zato

$$\int_G R_y f d\lambda = \int_G \chi_{Ey^{-1}} d\lambda = \lambda(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(E) = \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_E d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int_G f d\lambda.$$

To velja za vsako karakteristično funkcijo, torej tudi za vsako enostavno funkcijo. Vsaka zvezna funkcija $f \in C_c(G)$ se da aproksimirati z enostavnimi funkcijami v normi $\|\cdot\|_\infty$. Torej velja $\int_G R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int_G f d\lambda$ za vsak $f \in C_c(G)$ in potem tudi za vsak $f \in L^1(\lambda)$, ker je znano, da je $C_c(G)$ gost podprostor v $L^1(\lambda)$. Pokazati moramo še zveznost modularne funkcije Δ . Vemo, da je $y \mapsto R_y f$ zvezna preslikava iz G v $C_c(G)$ (trditev 1.10), zato je $y \mapsto \int_G R_y f d\lambda$ zvezna preslikava iz G v \mathbb{C} . Naj bo $\int_G f d\lambda > 0$. Potem je seveda zvezna tudi preslikava $y \mapsto \Delta(y^{-1}) = \int_G R_y f d\lambda / \int_G f d\lambda$, torej je zvezna tudi funkcija Δ .

Opomba. Definicijo modularne funkcije oziroma enakost (1) lahko razumemo tudi tako, da se faktor s funkcijo Δ pojavi pri zamenjavi integracijske spremenljivke. Če namreč v integral $\int_G f(xy^{-1})d\lambda(x)$ uvedemo substitucijo $x \rightarrow xy$, dobimo $\int_G f(x)d\lambda(xy)$. Toda prvotni integral je bil po (1) enak $\int_G R_{y^{-1}}fd\lambda = \Delta(y)\int_G f(x)d\lambda(x)$, zato imamo za vsak $f \in L^1(G)$ enakost $\int_G f(x)d\lambda(xy) = \Delta(y)\int_G f(x)d\lambda(x)$, ki jo bomo na kratko pisali tudi v diferencialni obliki

$$(2) \quad d\lambda(xy) = \Delta(y)d\lambda(x).$$

Unimodularnost

Pri desnem premiku se torej pri integriranju po (levi) Haarovi meri pojavi faktor v zvezi z modularno funkcijo, na kar moramo biti še posebej pozorni. V posebnih primerih grup pa tega faktorja ni.

Definicija 2. Če je $\Delta(x) = 1$ za vsak $x \in G$, rečemo, da je grupa G *unimodularna*.

Za unimodularno grupo torej velja $\lambda_x = \lambda$ oziroma $\lambda(Ex) = \lambda(E)$ za vsak $x \in G$ in za vsako Borelovo množico E . Torej je tedaj leva Haarova mera λ tudi desno invariantna.

Zgled. Vsaka Abelova grupa je unimodularna, saj ni razlike med levimi in desnimi premiki. Prav tako je unimodularna vsaka diskretna grupa. Vsaka leva Haarova mera na njej je namreč proporcionalna meri, ki šteje točke (glej razdelek 4), zato imajo levi in desni premiki dane množice isto mero. Tudi vsaka kompaktna grupa je unimodularna. Zaradi zveznosti modulske funkcije je namreč tedaj $\Delta(G)$ kompaktna podgrupa v \mathbb{R}^+ , edina kompaktna podgrupa v multiplikativni grupi \mathbb{R}^+ pa je trivialna grupa $\{1\}$ (zakaj?).

Zadnji sklep lahko nekoliko posplošimo.

Trditev 2. Naj bo $[G, G]$ komutatorska podgrupa v G , tj. podgrupa edinka, določena z $[G, G] = \{xyx^{-1}y^{-1}; x, y \in G\}$. Če je faktorska grupa $G/[G, G]$ kompaktna, je grupa G unimodularna.

Dokaz. Naj bo q kanonični homomorfizem (naravna preslikava) iz G na $G/[G, G]$. Ker je Δ homomorfizem in $\Delta(xyx^{-1}y^{-1}) = \Delta(x)\Delta(y)\Delta(x)^{-1}\Delta(y)^{-1} = 1$, je $[G, G] \subset \ker\Delta$, zato po osnovnem izreku o grupah obstaja zvezen homomorfizem $\tilde{\Delta} : G/[G, G] \rightarrow \mathbb{R}^+$, tako da je $\Delta = \tilde{\Delta}q$. Če je V odprta množica v \mathbb{R}^+ , je $\Delta^{-1}(V) = q^{-1}(\tilde{\Delta}^{-1}(V))$ zaradi zveznosti modulske funkcije Δ odprta množica v G . Ker pa je q odprta surjekcija na $G/[G, G]$, je $\tilde{\Delta}^{-1}(V) = q(q^{-1}(\tilde{\Delta}^{-1}(V)))$ odprta množica v $[G, G]$. To pomeni, da je $\tilde{\Delta}$ zvezen homomorfizem. Če je torej faktorska grupa $G/[G, G]$ kompaktna, je $\tilde{\Delta}(G/[G, G])$ kompaktna podgrupa v \mathbb{R}^+ , torej $\tilde{\Delta}(G/[G, G]) = \{1\}$. Se pravi, da je v tem primeru tudi $\Delta(G) = \{1\}$.

Zveza z desno Haarovo mero

Potrebujemo naslednjo definicijo.

Definicija 3. Radonovi meri μ in ν na lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X sta *krepro ekvivalentni*, če obstaja taka zvezna funkcija $g : X \rightarrow (0, \infty)$, da za vsak $f \in C_c(X)$ velja $\int_X fd\nu = \int_X fgd\mu$.

V tem primeru sta torej obe meri vzajemno absolutno zvezni druga na drugo. Kot pove naslednja trditev, sta primer krepro ekvivalentnih mer leva Haarova mera na G in pripadajoča desna Haarova mera na G (glej opombo 2 na koncu prejšnjega razdelka).

Trditve 3. Naj bo λ leva Haarova mera na G in ρ desna Haarova mera na G , definirana za vsako Borelovo množico $E \subset G$ s predpisom $\rho(E) = \lambda(E^{-1})$. Potem sta meri λ in ρ krepko ekvivalentni in za vsak $x \in G$ velja

$$(3) \quad d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x).$$

Dokaz. Za poljuben $f \in C_c(G)$ in $x \in G$ naj bo $g(x) = f(x)\Delta(x^{-1})$. Potem je, upoštevajoč (1),

$$\begin{aligned} \int_G R_y f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x) &= \Delta(y) \int_G f(xy)\Delta((xy)^{-1})d\lambda(x) = \Delta(y) \int_G g(xy)d\lambda(x) = \\ &= \Delta(y) \int_G R_y g(x)d\lambda(x) = \int_G g(x)d\lambda(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x). \end{aligned}$$

To pomeni, da določa $\mu(E) = \int_E \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$ spet desno Haarovo mero na G , torej obstaja konstanta $c > 0$, tako da je $\mu = c\rho$. Pokažimo, da je $c = 1$.

Če bi bila vrednost $c \neq 1$, bi obstajala taka simetrična okolica U enote $1 \in G$, da bi veljalo $|\Delta(x^{-1}) - 1| \leq |c - 1|/2$ za vsak $x \in U$. Zaradi simetričnosti okolice U bi potem imeli enakost $\rho(U) = \lambda(U^{-1}) = \lambda(U)$. Zato bi veljalo

$$|c-1|\lambda(U) = |c\rho(U) - \lambda(U)| = \left| \int_U (\Delta(x^{-1}) - 1)d\lambda(x) \right| \leq \int_U |\Delta(x^{-1}) - 1|d\lambda(x) \leq \frac{1}{2}|c-1|\lambda(U).$$

To bi bilo protislovje, zato mora veljati $c = 1$ in $\mu = \rho$. V skladu z definicijo mere μ torej velja $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$.

Dobljeno identiteto med merami lahko izrazimo tudi drugače, z zamenjavo spremenljivk v integral po levo invariantni meri λ ali desno invariantni meri ρ (glej opombo 2 na koncu prejšnjega razdelka):

$$(4) \quad d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x), \quad d\rho(x^{-1}) = \Delta(x)d\rho(x).$$

Na unimodularni grupi je Haarova mera levo in desno invariantna. Integral po njej je neobčutljiv tako za leve kot za desne premike, pa tudi za invertiranje.

4. Klasične grupe

Pregledali bomo primere preprostih standardnih topoloških grup. Pri vsaki bomo ugotavljali njihove značilnosti in medsebojne relacije (lokalno kompaktnost, kompaktnost, povezanost, strukturo podgrup in faktorskih grup, Haarovo mero).

1. Diskretne grupe

Poljubno grupo lahko opremimo z diskretno topologijo (vsaka podmnožica je odprta) in dobimo topološko grupo, ki je lokalno kompaktna (kompaktne so natanko vse končne podmnožice).

Haarova mera. Ker je $\{x\}$ odprta množica, je $\lambda(\{x\}) > 0$ za vsak $x \in X$. Zaradi leve invariantnosti mere, za poljuben par točk $x, y \in G$ velja $\lambda(\{x\}) = \lambda(\{(xy^{-1})y\}) = \lambda(\{y\})$, torej lahko za λ izberemo mero, ki šteje točke. Zaradi $\Delta(y)\lambda(\{x\}) = \lambda(\{xy\}) = \lambda(\{x\})$ za vsak $x, y \in G$, je $\Delta(y) = 1$ za vsak y . Torej je vsaka diskretna grupa G unimodularna. Leva in desna Haarova mera sovpadata.

Grupa je kompaktna natanko tedaj, ko je končna. Naj ima n različnih točk x_1, x_2, \dots, x_n . V tem primeru normalizacija mere pove, da je za vsak $x \in G$ mera enotočkaste množice $\{x\}$ enaka $\lambda(\{x\}) = 1/n$. Invarianten integral je zdaj povprečje na grupi:

$$I(f) = \int_G f d\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Zgled. Poseben primer končne grupe z n elementi je ciklična grupa $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, generirana z elementom a končnega reda n , se pravi $a^n = 1$. Ta grupa je izomorfná aditivni grupi $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ostankov po moduli n ali multiplikativni grupi n -tih korenov enote $\{\zeta^k; k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$, kjer je $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Ta grupa je seveda Abelova.

Vsaka končna Abelova grupa je izomorfná končnemu produktu $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ cikličnih grup oblike \mathbb{Z}_{m_j} , kjer za m_j lahko izberemo potenco praštevíla (glej [21] ali [10]).

Če ima element a , ki generira ciklično grupo, neskončen red, je grupa seveda (števíno) neskončna in tudi Abelova. Rečemo ji tudi prosta grupa \mathbb{F}_1 z enim generatorjem. Prosta grupa \mathbb{F}_2 z dvema generatorjema a, b pa ni več Abelova. Sestavljena je iz vseh končnih besed oblike $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$, kjer je $r \in \mathbb{N}$, $n_j \in \mathbb{Z}$ in so $x_j \in \{a, b\}$. Vedno lahko vzamemo, da je beseda reducirana, se pravi, da je $x_j \neq x_{j+1}$ za $j = 1, 2, \dots, r-1$ in $n_j, n_{j+1} \neq 0$.

Opombe. 1. Če je G *nediskretna* lokalno kompaktna grupa z levo Haarovo mero λ , je $\lambda(E) = 0$ za vsako *števíno* množico E . To sledi iz dejstva, da je $\lambda(\{x\}) = 0$ za vsak $x \in G$. Res, vsaka neprazna odprta množica ima pozitivno mero. Zaradi lokalne kompaktnosti pa obstaja taka odprta množica U , da je $0 < \lambda(U) < \infty$ (če je \bar{U} kompaktna množica, ima U končno mero). Ker je grupa nediskretna, nima nobene izolirane točke in vsaka odprta okolica enote, s tem pa tudi vsaka odprta množica ima neskončno mnogo elementov. Če bi bilo $\lambda(\{x\}) \neq 0$, bi zato imeli tudi $\lambda(U) = \infty$ (vse enotočkaste množice imajo namreč isto mero $\lambda(\{x\})$).

2. Pri diskretni grupi je vsaka mera μ na G popolnoma nezvezna v smislu, da je skoncentrirana samo na števíni množici E (in obratno, grupa je diskretna, če je to res), glej [16], (19.15). Pri tem se prostor vseh mer $M(G)$ ujema z $L^1(G) = l^1(E)$. Zgled za neskončno diskretno grupo je npr. aditivna grupa celih števíl $G = \mathbb{Z}$.

3. Nasprotni ekstrem diskretnega prostora je *indiskreten prostor*, ko sta edini odprti množici prazna množica in ves prostor. Grupa z indiskretno topologijo je kompaktna, ni pa Hausdorffova, če premore vsaj dve točki.

2. Aditivna grupa realnih števíl \mathbb{R}

To je Abelova lokalno kompaktna grupa, vse podgrupe so edinke. Ker je povezana, nima odprtih podgrup. Zaprta podgrupa je npr. \mathbb{Z} , saj je diskretna, ali $\alpha\mathbb{Z}$, kjer $\alpha \in \mathbb{R}$. Grupa $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ pa ni več zaprta v \mathbb{R} , če $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (glej opombo 1 za trditvijo 1.1). Podgrupa \mathbb{Q} prav tako ni zaprta, ampak gosta v \mathbb{R} . Ta podgrupa ni lokalno kompaktna, kot hitro vidimo. Zaradi gostosti podgrupe \mathbb{Q} je factorska podgrupa \mathbb{R}/\mathbb{Q} opremljena z indiskretno topologijo, zato ni Hausdorffova. Je pa seveda kompaktna.

Na splošno veljajo za aditivno grupo \mathbb{R} naslednje trditve (glej [23], str. 27,28): Vsaka nediskretna podgrupa je gosta. Vsaka prava zaprta podgrupa je diskretna. Vsaka zaprta podgrupa G je bodisi trivialna ($\{0\}$), enaka \mathbb{R} , ali pa je diskretna, oblike $x\mathbb{Z}$ za $x > 0$. Podgrupa v \mathbb{R} , generirana z dvema elementoma a, b , je zaprta natanko takrat, ko sta elementa racionalno odvisna.

Haarova mera. Lebesguova mera je invariantna za premike, regularna in Borelova, torej Haarova mera na \mathbb{R} . Vsaka druga Haarova mera ji je proporcionalna. Na sploh ni enolične normalizacije Haarove mere na \mathbb{R} , včasih je udobno izbrati kar Lebesguovo mero dt , včasih $dt/2\pi$, včasih pa $dt/\sqrt{2\pi}$.

3. Grupa krožnice \mathbb{T}

Po definiciji je $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{2\pi i x}; x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. To je povezana kompaktna Abelova grupa za množenje kompleksnih števíl. Vse podgrupe so edinke. Vsaka prava zaprta podgrupa je končna. Vsaka prava Hausdorffova kvocientna grupa \mathbb{R}/H je topološko izomorfná grupi \mathbb{T} ([23], str. 28).

Haarova mera. Poiščimo invarianten integral na tej grupi. Zvezne funkcije na T lahko (preko zveze $t \mapsto f(e^{it})$) identificiramo z zveznimi periodičnimi funkcijami na \mathbb{R} s periodo 2π . Naj bo I poljuben invarianten integral na \mathbb{T} . Za zvezno odvedljivo periodično funkcijo f velja

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{L_a f - f}{a} = -f'$$

enakomerno na $[0, 2\pi]$, kar najlažje vidimo v integralski obliki. Zaradi zveznosti in zaradi invariantnosti integrala I na kompaktni grupi (glej opombo na koncu razdelka 2), imamo torej

$$I(f') = - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{I(L_a f) - I(f)}{a} = 0.$$

Če sta h, h_0 poljubni zvezni periodični funkciji, pri čemer je $\int_0^{2\pi} h_0(t) dt = 1$, definirajmo

$$g = h - h_0 \int_0^{2\pi} h(t) dt \quad \text{in} \quad f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Potem je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, za katero je $f' = g$ in zato $I(g) = 0$. Torej imamo

$$I(h) = I(h_0) \int_0^{2\pi} h(t) dt = c \int_0^{2\pi} h(t) dt.$$

Na kompaktni grupi je I običajno normiran. Če je $I(1) = 1$, mora biti $c = 1/2\pi$ in zato (za vsako zvezno periodično funkcijo h)

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt.$$

Ta integral je zaradi periodičnosti funkcije h res invarianten za premike. Videli smo, da je vsak invarianten integral take oblike. Normalizirana Haarova mera na \mathbb{T} je torej enaka normalizirani Lebesguovi meri $dt/2\pi$ oziroma normalizirani ločni meri na krožnici (tako da je mera krožnice \mathbb{T} enaka 1).

4. Multiplikativna grupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Znano je, da je to grupa za množenje, saj je \mathbb{R} obseg. Topologija je običajna (relativna) topologija realne osi, zato grupa ni povezana. Je pa Abelova in lokalno kompaktna. Odprta in hkrati zaprta podgrupa je \mathbb{R}^+ , povezana komponenta enote, zato je $\mathbb{R}/\mathbb{R}^+ = \{1, -1\}$. Edina zaprta podgrupa v \mathbb{R}^+ je trivialna podgrupa $\{1\}$.

Haarova mera. Neposredno se lahko prepričamo, da je invariantni integral na tej grupi podan s predpisom

$$I(f) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{f(x)}{|x|} dx,$$

kjer je dx Lebesguova mera na \mathbb{R} . Res, za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ namreč velja

$$I(L_a f) = \int \frac{f(a^{-1}x)}{|x|} dx = \int_{t \neq 0} \frac{f(t)}{|t|} dt = I(f).$$

Zaradi komutativnosti, je to tudi desno invarianten integral na tej unimodularni grupi. Haarova mera na grupi je torej $dt/|t|$.

Podobno bi na unimodularni multiplikativni grupi $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ našli invarianten integral

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} dx dy$$

in Haarovo mero $dx dy / (x^2 + y^2)$.

5. Grupa afinih transformacij realne osi

Afina transformacija realne osi je oblike $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Take transformacije tvorijo (nekomutativno) grupo G , ki jo lahko enačimo z grupo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, b); b \in \mathbb{R}\}$ za množenje, definirano s predpisom $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab')$ ali z matrikami (in matričnim množenjem) oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kjer je $a \neq 0$ in $b \in \mathbb{R}$.

Topologija je relativna topologija iz ravnine \mathbb{R}^2 . V njej je to lokalno kompaktna topološka grupa z enoto $(1, 0)$. Povezana komponenta enote je $C = \{(a, b); a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ (zaprta edinka v grupi G). Druga edinka je podgrupa translacij $x \mapsto x + b$ oziroma $N = \{(1, b); b \in \mathbb{R}\}$, tako v G kot v C . Levi odseki so navpične premice v ravnini razen ordinatne osi, desni tudi (čeprav je parametrizacija na njih drugačna). Podgrupa N je Abelova in jo lahko enačimo z aditivno grupo \mathbb{R} (izomorfizem je $b \mapsto (1, b)$). Abelova podgrupa, ki ni edinka, pa je npr. podgrupa raztegov $x \mapsto ax$ oziroma $H = \{(a, 0); a \neq 0\}$. Izomorfna je multiplikativni grupi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ni se težko prepričati, da je $N \cap H = \{(1, 0)\}$ in $G = NH$. Poleg tega je $G/N \cong H$, saj ima homomorfizem $(a, b) \mapsto (a, 0)$ iz G v H za jedro ravno podgrupo edinko N .

V resnici je G semidirekten produkt podgrup N in H , določen s homomorfizmom $a \mapsto \tau_a$, ki preslika H v grupo avtomorfizmov za N s predpisom $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

Haarova mera. Neposredno se lahko prepričamo, da je levo invarianten integral na grupi G podan z dvojnimi integralom $I_l(f) = \int \int_{x \neq 0} f(x, y) dx dy / x^2$, $f \in C_c(G)$. Za vsak poljuben par (a, b) , $a \neq 0$, namreč velja (po zamenjavi spremenljivk)

$$I_l(L_{(a,b)}f) = \int \int \frac{f(a^{-1}x, a^{-1}y - a^{-1}b)}{x^2} dx dy = \int \int \frac{f(u, v)}{a^2 u^2} |a|^2 du dv = I_l(f).$$

Desno invarianten integral pa je drugačen: $I_r(f) = \int \int_{x \neq 0} f(x, y) x dx dy / |x|$, $f \in C_c(G)$, saj velja

$$I_r(R_{(a,b)}f) = \int \int \frac{f(ax, bx + y)}{|x|} dx dy = \int \int \frac{f(u, v)}{|a^{-1}||u|} |a^{-1}| du dv = I_r(f).$$

Kot vidimo, sta integrala različna, zato sta tudi leva in desna Haarova mera različni. Očitno je modularna funkcija enaka $\Delta(a, b) = 1/|a|$.

6. Grupa zgornje trikotnih matrik reda 2

Če se omejimo na matrice drugega reda, je to matrična grupa

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R}, x, y \neq 0 \right\}$$

Podobno kot v prejšnjem primeru se lahko z računom prepričamo, da je levo invarianten integral enak

$$I_l(f) = \int \int \int_{x, y \neq 0} f(x, y, z) dx dy dz / |x^2 y|,$$

desno invarianten integral pa

$$I_r(f) = \int \int \int_{x, y \neq 0} f(x, y, z) dx dy dz / |xy^2|.$$

Modularna funkcija je $\Delta(x, y, z) = |y/x|$.

Podgrupa edinka v njej je $H = \left\{ \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}; x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}$, sestavljena iz tistih zgornje trikotnih matrik, ki imajo determinanto 1. Tu je levo invarianten integral enak

$$I_l(f) = \int \int_{x \neq 0} f(x, z) dx dz / x^2,$$

desno invarianten pa

$$I_r(f) = \int \int_{x \neq 0} f(x, z) dx dz.$$

Modularna funkcija je $\Delta(x, z) = 1/x^2$. Druga podgrupa edinka v G pa je grupa matrik iz točke 5, ki jo že poznamo.

7. Heisenbergova grupa

Heisenbergova grupa je grupa realnih zgornje trikotnih matrik reda 3 z enkami po diagonalni, torej grupa

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Lahko jo identificiramo s prostorom \mathbb{R}^3 , v katerega uvedemo množenje s predpisom

$$(a, b, c)(x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + ay).$$

Enota je seveda trojica $(0, 0, 0)$, inverz k (a, b, c) pa $(-a, -b, ab - c)$. Hitro se lahko prepričamo, da je center grupe \mathcal{H} enak $Z(\mathcal{H}) = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$. Center je seveda zaprta podgrupa edinka in $\mathcal{H}/Z(\mathcal{H}) \cong \mathbb{R}^2$ (jedro homomorfizma $(y, x, z) \mapsto (x, y)$ je ravno $Z(\mathcal{H})$). To tudi pomeni, da je Heisenbergova grupa rešljiva.

Haarova mera. Levo in hkrati desno invarianten funkcional na \mathcal{H} je v tem primeru kar trojni Lebesguov integral $I(f) = \int \int \int f(x, y, z) dx dy dz$, $f \in C_c(\mathcal{H})$. Za vsak levi premik (in podobno tudi za desni premik) namreč velja

$$\begin{aligned} I(L_{(a,b,c)}f) &= \int \int \int f((-a, -b, ab - c)(x, y, z)) dx dy dz = \\ &= \int \int \int f(x - a, y - b, z - c + ab) dx dy dz = \int \int \left(\int f(x - a, y - b, z - c + ab) dz \right) dx dy = \\ &= \int \int \left(\int f(x - a, y - b, z) dz \right) dx dy = \int \int \int f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Heisenbergova grupa je torej unimodularna, čeprav ni niti diskretna niti kompaktna niti Abelova.

8. Grupa $GL(2, \mathbb{R})$

To je *splošna linearna grupa*, se pravi grupa vseh obrnljivih matrik reda dve z realnimi koeficienti: $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, kjer so $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ in je $xv - yu \neq 0$. Grupa je unimodularna, saj sta levo in desno invariantna integrala enaka

$$I(f) = \int \int \int \int \frac{f(x, y, u, v)}{(xv - yu)^2} dx dy du dv,$$

kjer teče integracija po vseh četverkah x, y, u, v z lastnostjo $xv - yu \neq 0$.

Zaprta podgrupa v $GL(2, \mathbb{R})$ sta npr. specialna ortogonalna grupa $SO(2)$, ki je izomorfna unitarni grupi $U(1)$ (krožnici), in ortogonalna grupa $O(2)$, izomorfna disjunktni uniji dveh krožnic. Ti dve podgrupi sta kompaktni. Podgrupa v $GL(2, \mathbb{R})$ je tudi specialna linearna grupa $SL(2, \mathbb{R})$, ki ni kompaktna in jo je težje obravnavati.

Klasični kompleksni matrični kompaktni grupi $U(2)$ in $SU(2)$, ter kompaktno ortogonalno grupo $O(3)$ bomo spoznali v 4. poglavju v zvezi z njihovimi upodobitvami.

II. poglavje : GRUPNE ALGEBRE IN MODULI

1. Konvolucija mer in funkcij

Vpeljali bomo konvolucijo mer in funkcij, definirali grupno algebro in raziskali njene osnovne lastnosti.

Naj bo G lokalno kompaktna grupa in enkrat za vselej fiksirajmo na njej levo Haarovo mero. Oznako zanjo bomo izpustili, mero množice E bomo označili z $|E|$, integriranje po njej pa bomo zabeležili kar z dx , npr. $\int f dx$, če je $f \in C_c(G)$ (integriranje brez označenega integracijskega območja naj vedno pomeni integriranje po celotni grupi). Dve pomembni formuli za uvedbo novih spremenljivk, formuli (2) in (4) iz razdelka I.3, bomo npr. na kratko zapisali v diferencialni obliki takole:

$$(1) \quad d(xy) = \Delta(y)dx$$

in

$$(2) \quad dx^{-1} = \Delta(x^{-1})dx.$$

V nadaljevanju jih bomo večkrat s pridom uporabili.

Algebra mer

Potrebovali bomo prostor $M(G)$ vseh kompleksnih Radonovih mer, ki so omejeni linearni funkcionali na $C_0(G) = \overline{C_c(G)}$.

Definicija 1. *Konvolucija mer* $\mu, \nu \in M(G)$ je kompleksna Radonova mera $\mu * \nu$, ki je za vsak $\phi \in C_0(G)$ podana s formulo

$$\int \phi d(\mu * \nu) = \int \int \phi(xy) d\mu(x) d\nu(y).$$

Opomba. Z desno stranjo $I(\phi) = \int \int \phi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$ je za vsak $\phi \in C_0(G)$ definiran na $C_0(G)$ omejen linearni funkcional I z lastnostjo $|I(\phi)| \leq \|\phi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|$, kjer sta na desni variacijski normi obeh mer, tj. $\|\mu\| = |\mu|(G)$ in $\|\nu\| = |\nu|(G)$. Po Rieszovem izreku potem obstaja mera, označena z $\mu * \nu$, tako da je $I(\phi) = \int \phi d(\mu * \nu)$ in $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$. Ker sta meri končni in je ϕ omejena funkcija, vrstni red integriranja ni pomemben, saj lahko uporabimo Fubinijev izrek (spomnimo se predpostavke, da je G σ -kompaktna grupa). Pomembno pa je, da je v argumentu za ϕ produkt integracijskih spremenljivk zapisan v pravem vrstnem redu, prva spremenljivka se nanaša na integriranje po meri μ , druga po meri ν . Razlog je ta, da grupa G v splošnem ni komutativna. Potem tudi konvolucija mer v splošnem ni komutativna.

Posebno vrsto (pozitivne) Radonove mere predstavlja t.i. *Diracova mera* δ_x za točko x , ki je definirana s predpisom $\delta_x(E) = 1$, če $x \in E$, in 0, če $x \notin E$.

Trditev 1. *V vsaki lokalno kompaktni grupi G velja:*

- (a) *Konvolucija je asociativna.*
- (b) *Konvolucija je komutativna natanko takrat, ko je grupa G Abelova.*
- (c) *Za vsak $\mu \in M(G)$ je $\mu * \delta_1 = \delta_1 * \mu = \mu$.*
- (d) *Za vsak $\mu, \nu \in M(G)$ velja $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$.*

Dokaz. (a) Naj bodo $\lambda, \mu, \nu \in M(G)$ in $\phi \in C_c(G)$. Potem je (z uporabo definicij in Fubinijevega izreka)

$$\begin{aligned} \int \phi d(\lambda * (\mu * \nu)) &= \int \int \phi(xy) d\lambda(x) d(\mu * \nu)(y) = \int \left(\int \phi(xy) d\lambda(x) \right) d(\mu * \nu)(y) = \\ &= \int \int \left(\int \phi(xyz) d\lambda(x) \right) d\mu(y) d\nu(z) = \int \int \left(\int \phi(xyz) d\nu(z) \right) d\lambda(x) d\mu(y) = \\ &= \int \left(\int \phi(yz) d\nu(z) \right) d(\lambda * \mu)(y) = \\ &= \int \int \phi(yz) d(\lambda * \mu)(y) d\nu(z) = \int \phi d((\lambda * \mu) * \nu). \end{aligned}$$

(b) Če je G Abelova grupa, je $\phi(xy) = \phi(yx)$ za vsak $\phi \in C_0(G)$ in poljubna $x, y \in G$, zato iz (1) takoj sledi $\mu * \nu = \nu * \mu$. Obratno, naj bo konvolucija komutativna, za μ in ν pa izberimo Diracovi meri v točkah x in y . Tedaj je za vsak $\phi \in C_0(G)$

$$\int \phi d(\delta_x * \delta_y) = \int \int \phi(uv) d\delta_x(u) d\delta_y(v) = \int \phi(xv) d\delta_y(v) = \phi(xy) = \int \phi d\delta_{xy}.$$

Torej je $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$. Podobno dobimo $\delta_y * \delta_x = \delta_{yx}$. Ker je konvolucija zdaj komutativna, velja $\delta_{xy} = \delta_{yx}$ in zato tudi $xy = yx$.

(c) Za vsak $\mu \in M(G)$ je $\int \phi d(\mu * \delta_1) = \int \int \phi(xy) d\mu(x) d\delta_1(y) = \int \phi(x) d\mu(x)$ in torej velja $\mu * \delta_1 = \mu$. Enako dobimo za $\delta_1 * \mu$.

(d) Sledi iz naslednje ocene, veljavne za vsak $\phi \in C_0(G)$,

$$\left| \int \phi d(\mu * \nu) \right| \leq \int \int |\phi(xy)| d|\mu|(x) d|\nu|(y) \leq \|\phi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|.$$

Definicija 2. *Involucijo mer* uvedemo za $\mu \in M(G)$ in Borelovo množico $E \subset G$ s predpisom

$$\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}.$$

Definicijo lahko povemo še drugače. Če je $\bar{\mu}(E) = \overline{\mu(E)}$ oziroma $\int \phi d\bar{\mu} = \int \overline{\phi} d\mu$ za vsak $\phi \in C_0(G)$, lahko zapišemo tudi z integralom

$$\int \phi d\mu^* = \int \phi(x^{-1}) d\bar{\mu}(x)$$

oziroma v diferencialni obliki $d\mu^*(x) = d\bar{\mu}(x^{-1})$.

Trditev 2. *Involucija mer ima vse potrebne lastnosti: za $\mu, \nu \in M(G)$ in $c \in \mathbb{C}$ velja $(\mu^*)^* = \mu$, $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$, $(c\mu)^* = \bar{c}\mu^*$, $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$. Poleg tega je $\|\mu^*\| = \|\mu\|$ za vsak μ .*

Dokaz. Prve tri identitete so očitne. Dokažimo povezavo med involucijo in konvolucijo. Za vsak $\phi \in C_0(G)$ je

$$\begin{aligned} \int \phi d(\mu * \nu)^* &= \int \phi(z^{-1}) d\overline{\mu * \nu}(z) = \int \int \phi(y^{-1}x^{-1}) d\bar{\mu}(x) d\bar{\nu}(y) = \\ &= \int \left(\int \phi(y^{-1}x^{-1}) d\bar{\mu}(x) \right) d\bar{\nu}(y) = \int \left(\int \phi(yx^{-1}) d\bar{\mu}(x) \right) d\nu^*(y) = \\ &= \int \int \phi(yx) d\mu^*(x) d\nu^*(y) = \int \phi d(\nu^* * \mu^*). \end{aligned}$$

Zadnji stavek pa velja, saj je za vsako Borelovo množico E

$$|\mu^*|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu^*(E_i)|; E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \right\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i^{-1})|; E^{-1} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i^{-1} \right\} = |\mu|(E^{-1})$$

in zato $\|\mu^*\| = |\mu^*|(G) = |\mu|(G) = \|\mu\|$.

Izrek 1. *Prostor $M(G)$ je involutivna Banachova algebra za konvolucijo in involucijo mer. Ta algebra ima enoto, podano z Diracovo mero δ_1 .*

Dokaz. Znano je, da je $M(G)$ kot prostor omejenih linearnih funkcionalov na $C_0(G)$ poln, torej Banachov. Ostale lastnosti za involutivno Banachovo algebro z enoto sledijo iz trditev 1 in 2.

Grupna algebra

Poleg konvolucije mer vpeljimo še konvolucijo integrabilnih funkcij. Te so seveda povezane z elementi naslednjega prostora.

Definicija 3. $L^1(G) = \{[f]; f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ merljiva, } \int_G |f(x)| dx < \infty\}$

Se pravi, da je $L^1(G)$ množica ekvivalenčnih razredov (med seboj skoraj povsod enakih) merljivih kompleksnih funkcij na grupi G , ki so integrabilne po levi Haarovi meri. Ker na integrabilne funkcije f lahko gledamo kot na mere $f dx$, ki so absolutno zvezne glede na levo Haarovo mero (po Radon-Nikodymovem izreku), je $L^1(G) \subset M(G)$. $L^1(G)$ je seveda vektorski prostor; lahko ga opremimo z normo $\|f\|_1 = \int_G |f| dx$, podobno kot je prostor mer $M(G)$ opremljen z variacijsko normo, in seveda se variacijska norma za mero $f dx$ ujema z normo $\|\cdot\|_1$.

Definicija 4. *Konvolucijo integrabilnih funkcij uvedemo s predpisom ($f, g \in L^1(G)$, $x \in G$)*

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy.$$

Z uporabo Fubinijevega izreka lahko neposredno preverimo, da integral na desni absolutno konvergira in da velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Prav tako se lahko prepričamo, da se ta definicija ujema z definicijo konvolucije pri merah (glej definicijo 1). Če je namreč $d\mu(y) = f(y)dy$ in $d\nu(x) = g(x)dx$, imamo za vsak $\phi \in C_0(x)$ zaradi leve invariantnosti Haarove mere in Fubinijevega izreka

$$\begin{aligned} \int \phi d(\mu * \nu) &= \int \int \phi(yx) d\mu(y) d\nu(x) = \int \int \phi(yx) f(y)g(x) dy dx = \\ &= \int f(y) \left(\int \phi(yx)g(x) dx \right) dy = \int f(y) \left(\int \phi(x)g(y^{-1}x) dx \right) dy = \int \phi(x) \left(\int f(y)g(y^{-1}x) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Opomba. Upoštevajoč definicijo konvolucije, modularne funkcije in različne formule za zamenjavo integracijskih spremenljivk, lahko konvolucijo funkcij f in g zapišemo v različnih oblikah:

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int f(y)g(y^{-1}x)dy = \int f(xy)g(y^{-1})dy = \\ &= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy = \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy. \end{aligned}$$

Kadar je G unimodularna grupa, v zadnjih dveh integralih seveda odpade faktor z modularno funkcijo. Konvolucijo lahko podamo tudi z uporabo operatorjev premika:

$$(f * g)(x) = \int f(y)L_y g(x) dy = \int g(y^{-1})R_y f(x) dy$$

oziroma na kratko

$$(3) \quad f * g = \int f(y)L_y g dy = \int g(y^{-1})R_y f dy$$

Tu moramo integrala razumeti kot integrala vektorskih funkcij $y \mapsto f(y)L_y g$ in $y \mapsto g(y^{-1})R_y f$ v Lebesgue-Bochnerjevem smislu (glej dodatek D).

Zaradi zadnjega zapisa in zaradi komutiranja levega in desnega premika lahko za vsak $z \in G$ ugotovimo tudi naslednje:

$$(4) \quad L_z(f * g) = \int g(y^{-1})L_zR_yf dy = \int g(y^{-1})R_yL_zf dy = (L_zf) * g,$$

$$(5) \quad R_z(f * g) = \int f(y)R_zL_yg dy = \int f(y)L_yR_zg dy = f * (R_zg)$$

in podobno še

$$(6) \quad R_zf * g = \Delta(z^{-1})(f * L_{z^{-1}}g), \quad f * L_zg = \Delta(z^{-1})(R_{z^{-1}}f * g).$$

Definicija 5. *Involucija* je na $L^1(G)$ podana s predpisom ($f \in L^1(G)$, $x \in G$)

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1}).$$

Hitro vidimo, da je ta involucija zožitev involucije za mere (glej definicijo 2), saj je po formuli (4) iz razdelka I.3 za mero $d\mu(x) = f(x)dx$ res $d\mu^*(x) = d\bar{\mu}(x^{-1}) = \overline{f(x^{-1})}d(x^{-1}) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})dx$.

Lahko se prepričamo, da tudi za involucijo funkcij veljajo lastnosti: $(f^*)^* = f$, $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(cf)^* = \bar{c}f^*$ in $(f * g)^* = g^* * f^*$. Poleg tega je $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$, saj po definiciji 5 in po formuli (2) velja

$$\|f^*\|_1 = \int_G |\overline{f(x^{-1})}|\Delta(x^{-1})dx = \int_G |\overline{f(x^{-1})}|dx^{-1} = \|f\|_1.$$

Videli smo, da se konvolucija mer (iz definicije 1) na $L^1(G)$ ujema s konvolucijo funkcij (iz definicije 4). Pa definirajmo še konvolucijo mere in funkcije. Pri tem moramo paziti na vrstni red faktorjev, zato je potrebna dvojna definicija.

Definicija 6. Za $\mu \in M(G)$ in $f \in L^1(G)$ naj bo za vsak $x \in G$

$$(\mu * f)(x) = \int f(y^{-1}x)d\mu(y) \quad \text{in} \quad (f * \mu)(x) = \int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y).$$

Na kratko lahko z uporabo operatorjev premika konvoluciji zapišemo tudi z Lebesgue-Bochnerjevim integralom: $\mu * f = \int L_yf d\mu(y)$ in $f * \mu = \int R_{y^{-1}}f\Delta(y^{-1})d\mu(y)$.

Zgled. Naj bo $f \in L^1(G)$ in $z \in G$. Potem je $\delta_z * f = L_zf$ in $f * \delta_z = \Delta(z^{-1})R_{z^{-1}}f$.

Če sta μ in ν Borelovi meri na G in $d\nu(x) = f(x)dx$, $f \in L^1(G)$, izračunajmo njuno konvolucijo. Za vsak $\phi \in C_0(G)$ imamo

$$\int \phi d(\mu * \nu) = \int \int \phi(yx)d\mu(y)d\nu(x) = \int (\int \phi(yx)d\nu(x))d\mu(y) =$$

$$\int (\int \phi(yx)f(x)dx)d\mu(y) = \int (\int \phi(x)f(y^{-1}x)dx)d\mu(y) = \int \phi(x)(\int f(y^{-1}x)d\mu(y))dx,$$

torej je $d(\mu * \nu)(x) = (\int f(y^{-1}x)d\mu(y))dx = (\mu * f)(x)dx$. Podobno je

$$\int \phi d(\nu * \mu) = \int (\int \phi(xy)d\nu(x))d\mu(y) = \int (\int \phi(xy)f(x)dx)d\mu(y) =$$

$$\int (\int \phi(x)f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})dx)d\mu(y) = \int \phi(x)(\int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y))dx,$$

torej $d(\nu * \mu)(x) = (\int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y))dx$. Ker sta $\mu * \nu$ in $\nu * \mu$ kot kompleksni meri končni, vidimo odtod, da sta konvoluciji $\mu * f$ in $f * \mu$ v $L^1(G)$.

Izrek 2. $L^1(G)$ je involutivna Banachova algebra za konvolucijo, zaprta involutivna podalgebra in celo zaprt dvostranski ideal v $M(G)$.

Dokaz. Vsaka funkcija iz $L^1(G)$ določa mero v $M(G)$ (absolutno zvezno glede na levo Haarovo mero), zato lahko vzamemo, da je $L^1(G) \subset M(G)$. Iz splošne teorije mere je znano, da je $L^1(G)$ poln prostor v ustrezni normi, ki se ujema z variacijsko normo, podedovano iz $M(G)$, torej zaprt podprostor v $M(G)$. Da se konvoluciji in involuciji v na skupnem prostoru ujemata, smo že videli. Norma je algebraična, $L^1(G)$ Banachova algebra. Da je dvostranski ideal pa sledi iz prejšnjega računa.

Trditev 3. Banachova algebra $L^1(G)$ ima enoto natanko takrat, ko je G diskretna grupa.

Dokaz. Če je G diskretna grupa, so enotočkaste množice odprte in vse imajo enako pozitivno mero. Z normiranjem lahko dosežemo, da je $|\{x\}| = 1$; Haarova mera je torej mera, ki šteje točke. Potem je f integrabilna funkcija, torej $f \in L^1(G)$ natanko takrat, ko je $f(x) = 0$ za vsak x razen za števno množico $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, ko je $\sum_n |f(x_n)| < \infty$. Enota v grupni algebri je karakteristična funkcija enotočkaste množice, ki vsebuje 1, se pravi $e = \chi_{\{1\}}$.

Obratno, naj ima algebra $L^1(G)$ enoto e . Najprej bomo pokazali, da obstaja pozitivna spodnja meja $a > 0$ za mero vsake neprazne odprte množice v G . Pa denimo, da to ni res, tj. da obstaja okolica enote $1 \in G$ s poljubno majhno mero. Potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka odprta okolica U enote $1 \in G$, da je $\int_U |e(y)| dy < \epsilon$. Izberimo simetrično odprto okolico V enote 1, da je $V^2 \subset U$, in definirajmo $f = \chi_V$. Potem za vsak $x \in V$ velja $f(x) = (e * f)(x) = \int e(y)f(y^{-1}x)dy = \int_{xV} e(y)dy \leq \int_U |e(y)|dy < \epsilon$, kar je v nasprotju z dejstvom, da je $f(x) = \chi_V(x) = 1$.

Torej obstaja $a > 0$, tako da je $|U| \geq a$ za vsako odprto podmnožico $U \subset G$. Če je U taka, da je \bar{U} kompaktna, je $|U| < \infty$. V tem primeru mora U vsebovati le končno mnogo različnih točk, sicer bi lahko našli poljubno mnogo paroma disjunktnih odprtih podmnožic v U in bi veljalo $|U| \geq na$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar ni mogoče. Odtod sledi, da je vsaka enotočkasta množica $\{x\}$ v U odprta. Množica $\{x\}^c \cap U$ namreč vsebuje samo končno mnogo točk in je zato zaprta. Potem pa je zaprta tudi množica $\{x\}^c = (\{x\}^c \cap U) \cup U^c$, se pravi, da je $\{x\}$ odprta množica in topologija v G je diskretna.

Definicija 7. Algebro $L^1(G)$ imenujemo *grupna algebra* lokalno kompaktne grupe G .

Oglejmo si nekaj preprostih primerov.

Zgledi. 1. Če je $G = \mathbb{Z}$, je grupna algebra enaka $L^1(G) = M(G) = l^1(\mathbb{Z})$, konvolucija je dana z $(f * g)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_{n-k}$, involucija z $(f^*)_n = \overline{f_{-n}}$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Grupa je diskretna, enota v njej je Diracova funkcija δ ($\delta_0 = 1$ in $\delta_n = 0$ za $n \neq 0$).

2. Za aditivno grupo realnih števil $G = \mathbb{R}$, je grupna algebra enaka $L^1(G) = L^1(\mathbb{R})$, s konvolucijo, dano z integralom $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$ ter involucijo $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

3. V primeru krožnice \mathbb{T} , ki je kompaktna grupa, podamo konvolucijo s predpisom $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$, saj je tudi Haarova mera običajno normirana. Involucija je ista kot prej.

4. Če je G končna grupa vseh n -tih korenov enote, je konvolucija seveda povprečje $(f * g)(\zeta^m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\zeta^k)g(\zeta^{m-k})$ in involucija $f^*(\zeta^m) = \overline{f(\zeta^{-m})}$ za vsak $m = 1, 2, \dots, n$.

2. Ideali in moduli

Konvolucijo bomo razširili še na druge funkcije, take ki niso nujno v $L^1(G)$. Najprej pa definirajmo standardne prostore funkcij z integrabilnimi potencami.

Prostori $L^p(G)$

Podobno kot v primeru $p = 1$ definirajmo za $1 \leq p < \infty$ prostor ekvivalenčnih razredov skoraj povsod enakih funkcij, ki imajo integrabilno p -to potenco.

Definicija 1. $L^p(G) = \{[f]; f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ merljiva, } \int_G |f(x)|^p dx < \infty\}$.

Znano je, da je to Banachov prostor v normi $\|f\|_p = (\int_G |f(x)|^p dx)^{1/p}$, ki vsebuje $C_c(G)$ kot gost podprostor. Njegov dual lahko identificiramo s prostorom $L^q(G)$, kjer je $1/p + 1/q = 1$. V primeru $p = \infty$ definiramo ustrezni prostor nekoliko drugače.

Definicija 2. $L^\infty(G) = \{[f]; f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ merljiva, } \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in G\} < \infty\}$.

Tudi to je Banachov prostor, to pot v normi $\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)|; x \in G\}$, in celo C^* -algebra. Kot zaprto podalgebro vsebuje vse omejene zvezne funkcije $C_b(G)$, zato tudi prostor $C_c(G)$, ki zdaj ni gost v $L^\infty(G)$.

Tako kot smo lahko smiselno definirali konvolucijo dane mere in funkcije iz $L^1(G)$, lahko uvedemo tudi konvolucijo mere in funkcije iz $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definicija 3. Za $\mu \in M(G)$ in $g \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, pri poljubnem $x \in G$ definirajmo

$$(\mu * g)(x) = \int g(y^{-1}x) d\mu(y) \quad (\text{na kratko } \mu * g = \int L_y g d\mu(y)),$$

$$(g * \mu)(x) = \int g(xy^{-1}) \Delta^{1/p}(y^{-1}) d\mu(y) \quad (\text{na kratko } g * \mu = \int R_{y^{-1}} g \Delta^{1/p}(y^{-1}) d\mu(y)).$$

Preslikavi $y \mapsto L_y g$ in $y \mapsto R_{y^{-1}} g \Delta^{1/p}(y^{-1})$ sta merljivi funkciji z vrednostmi v $L^p(G)$, integrala njunih norm pa končna, zato iz vektorske oblike zaradi lastnosti Lebesgue-Bochnerjevega integrala (glej dodatek D) sledi $\mu * f \in L^p(G)$, $f * \mu \in L^p(G)$ in $\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\| \|f\|_p$ oziroma $\|f * \mu\|_p \leq \|f\|_p \|\mu\|$ (upoštevajmo, da je $\|R_{y^{-1}} f\|_p = \Delta(y)^{1/p} \|f\|_p$).

Opomba. Definicija obeh konvolucij $\mu * g$ in $g * \mu$ se v primeru $p = 1$ ujema s tisto iz definicije 1.6. V primeru $p = \infty$ pa se prva ujema z običajno definicijo, druga pa se od nje razlikuje, zato moramo biti zelo pozorni, s kakšno funkcijo delamo konvolucijo dane mere. Težava nastopi, kadar je npr. $g \in L^1(G) \cap L^p(G)$ za $1 < p \leq \infty$. Če npr. gledamo $g \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ kot funkcijo iz $L^1(G)$, je $g * \mu = \int R_{y^{-1}} g \Delta(y^{-1}) d\mu(y)$ (definicija 1.6); če jo vidimo kot funkcijo iz $L^\infty(G)$, pa je $g * \mu = \int R_{y^{-1}} g d\mu(y)$ (definicija 3).

Naslednja trditev povzema pomemben primer definicije 3, ko je mera μ absolutno zvezna glede na levo Haarovo mero, tj. $d\mu(y) = f(y) dy$ in $f \in L^1(G)$. V tem primeru delamo le s funkcijami, ne pa z merami.

Trditev 1. Naj bo $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1(G)$, $g \in L^p(G)$. Tedaj velja:

- (a) Obe konvoluciji $f * g$ in $g * f$ sta v $L^p(G)$ in velja $\|f * g\|_p, \|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
- (b) V primeru $p = \infty$ velja celo več: $f * g \in C_{lu}(G)$ (levo enakomerno zvezna funkcija) in $g * f \in C_{ru}(G)$ (desno enakomerno zvezna funkcija).

Dokaz. (a) Ocena $\|f * g\|_p = \|\int f(y) L_y g dy\|_p \leq \int |f(y)| \|L_y g\|_p dy = \|f\|_1 \|g\|_p < \infty$ pove, da je $f * g \in L^p(G)$. Zaradi $g * f = \int f(y) R_{y^{-1}} g \Delta^{1/p}(y^{-1}) dy$ je tudi $g * f \in L^1(G)$, saj velja

$$\|g * f\|_p \leq \int |f(y)| \|R_{y^{-1}} g\|_p \Delta^{1/p}(y^{-1}) dy = \int |f(y)| \|g\|_p dy = \|f\|_1 \|g\|_p < \infty.$$

(b) Naj bo $p = \infty$ in $f \in C_c(G)$ in $x \in G$. Tedaj je funkcija $f * g$ levo enakomerno zvezna zaradi leve enakomerne zveznosti funkcije f (primerjaj trditev I.1.11). Za vsak $\epsilon > 0$ namreč obstaja taka simetrična kompaktna okolica V enote $1 \in G$, da iz $z \in V$ sledi $|f(y) - f(z y)| < \epsilon$ za vsak $y \in G$. Naj bo $K = V(\text{supp } f)$. Če $y \notin K$, potem $z y \notin \text{supp } f$, če je $z \in V$, in tudi $y \notin \text{supp } f$, ker je $\text{supp } f \subset K$. Torej zadošča v naslednjem računu integrirati le po kompaktni množici K , tako da za $x \in G$ in $z \in V$ dobimo

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(z x)| &= \left| \int_G (f(y) - f(z y)) g(y^{-1} x) dy \right| \leq \\ &\int_K |f(y) - f(z y)| |g(y^{-1} x)| dy < \epsilon \int_K |g(y^{-1})| dy \leq \epsilon \|g\|_\infty |K|. \end{aligned}$$

To najprej pove, da je $f * g$ zvezna funkcija na G , in nato da je celo levo enakomerno zvezna na G , saj velja $\|f * g - L_z(f * g)\|_\infty \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 1$).

Naj bo zdaj $f \in L^1(G)$. Ker je $C_c(G)$ gost podprostor v $L^1(G)$, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja funkcija $h \in C_c(G)$, tako da je $\|f - h\|_1 < \epsilon$. Potem imamo za $z \in V$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(z x)| &\leq |((f - h) * g)(x)| + |(h * g)(x) - (h * g)(z x)| + |((h - f) * g)(z x)| \leq \\ &2\|f - h\|_1 \|g\|_\infty + |(h * g)(x) - (h * g)(z)| < 2\epsilon \|g\|_\infty + \epsilon, \end{aligned}$$

kar spet pomeni, da je tudi zdaj $f * g$ (levo enakomerno) zvezna funkcija na G .

Podobno dobimo desno enakomerno zveznost konvolucije $g * f$ iz desne enakomerne zveznosti funkcije f , če je $f \in C_c(G)$. Zdaj namreč imamo

$$\begin{aligned} (g * f)(x) - (g * f)(x z) &= \int_G (f(y) - f(y z)) \Delta(z) g(x y^{-1}) dy = \\ &\int_G (f(y) - f(y z)) g(x y^{-1}) dy + (1 - \Delta(z)) \int_G f(y z) g(x y^{-1}) dy = \\ &\int_G (f(y) - f(y z)) g(x y^{-1}) dy + (\Delta(z^{-1}) - 1) \int_G f(y) g(x z y^{-1}) dy. \end{aligned}$$

Spet zadošča integrirati le po kompaktni množici. Zdaj izberemo $K = (\text{supp } f)V$, kjer je V taka simetrična kompaktna okolica V enote $1 \in G$, da iz $z \in V$ sledi $|f(y) - f(y z)| < \epsilon$ za vsak $y \in G$ in $|\Delta(z^{-1}) - 1| < \epsilon$. Za $z \in V$ dobimo

$$\begin{aligned} |(g * f)(x) - (g * f)(x z)| &\leq \int_K |f(y) - f(y z)| |g(x y^{-1})| dy + |\Delta(z^{-1}) - 1| \int_K |f(y)| |g(x z y^{-1})| dy \leq \\ &\epsilon \int_K |g(x y^{-1})| dy + \epsilon \int_K |f(y)| |g(x z y^{-1})| dy \leq \epsilon \|g\|_\infty (|K| + \|f\|_1). \end{aligned}$$

Torej je $g * f$ desno enakomerno zvezna funkcija, če je $f \in C_c(G)$. Enako kot prej potem dokažemo desno enakomerno zveznost konvolucije $g * f$ tudi za vsak $f \in L^1(G)$.

Posledica. Če je $f \in L^1(G)$ in $g \in C_0(G)$, velja tudi $f * g, g * f \in C_0(G)$ in $\|f * g\|_\infty, \|g * f\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Dokaz. Če sta $f, g \in C_c(G)$, sta tudi $f * g, g * f \in C_c(G)$, ker velja $\text{supp}(f * g) \subset (\text{supp } f)(\text{supp } g)$, zaradi trditve 1(b) pa sta obe konvoluciji zvezni funkciji na G . Za $f \in L^1(G)$ in $g \in C_0(G)$ dobimo rezultat z ustrezno aproksimacijo s funkcijami iz $C_c(G)$.

Trditev 2. Naj bo G unimodularna grupa, $1 < p, q < \infty$ in $1/p + 1/q = 1$. Če je $f \in L^p(G)$ in $g \in L^q(G)$, je $f * g \in C_0(G)$ in velja $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dokaz. Z uporabo Hölderjeve neenakosti dobimo za vsak $x \in G$ naslednjo oceno:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int |f(y)| |g(y^{-1} x)| dy \leq \left(\int |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int |g(y^{-1} x)|^q dy \right)^{1/q} = \\ &\left(\int |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^q dy \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Če sta $f, g \in C_c(G)$, takoj sledi $f * g \in C_c(G)$. Zveznost vidimo enako kot prej, nosilec konvolucije $f * g$ pa je tudi kompakten, vsebovan v $(\text{supp } f)(\text{supp } g)$. Prostor zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem je gost tako v $L^p(G)$ kot v $L^q(G)$. Denimo, da so $f_n, g_n \in C_c(G)$ funkcije z lastnostjo $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ in $\|g - g_n\|_q \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Tedaj je (zaradi $\|f_n\|_p \leq M$ za konstanto M in vsak n)

$$\begin{aligned} \|f * g - f_n * g_n\|_\infty &\leq \|(f - f_n) * g\|_\infty + \|f_n * (g - g_n)\|_\infty \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q + \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q \leq \\ &\|f - f_n\|_p \|g\|_q + M \|g - g_n\|_q \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Torej dobimo $f_n * g_n \rightarrow f * g$ v prostoru $C_0(G)$ in $\|f * g\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n * g_n\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p \|g_n\|_q = \|f\|_p \|g\|_q$.

Če je $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, je $\|L_y f\|_p = \|f\|_p < \infty$ in $\|R_y f\|_p = \Delta(y)^{-1/p} \|f\|_p < \infty$ za vsak $y \in G$. Torej so ti prostori invariantni tako za leve kot za desne premike. Isto velja za prostor $L^\infty(G)$. Naslednja trditev pove, da sta v primeru $1 \leq p < \infty$ pri vsakem f preslikavi $y \mapsto L_y f$ in $y \mapsto R_y f$ celo zvezni v ustrezni normi.

Trditev 3. Naj bo $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(G)$. Potem pri pogoju $y \rightarrow 1$ velja $\|L_y f - f\|_p \rightarrow 0$ in $\|R_y f - f\|_p \rightarrow 0$.

Dokaz. Naj bo V simetrična kompaktna okolica enote 1. Če je $g \in C_c(G)$, naj bo $K = (\text{supp } g)V \cup V(\text{supp } g)$, torej kompaktna množica. Premaknjeni funkciji $L_y g$ in $R_y g$ imata nosilca v K , če je le $y \in V$. Torej velja $\|L_y g - g\|_p \leq |K|^{1/p} \|L_y g - g\|_\infty \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$). Podobno vidimo, da $\|R_y g - g\|_p \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 1$).

Če je $f \in L^p(G)$, je $\|L_y f\|_p = \|f\|_p$ in $\|R_y f\|_p = \Delta(y)^{-1/p} \|f\|_p \leq C \|f\|_p$ za neko konstanto $C > 0$ in vsak $y \in V$ (upoštevali smo, da je Δ kot zvezna funkcija omejena n kompaktni množici V). Če je $\epsilon > 0$ poljuben, obstaja tak $g \in C_c(G)$, da je $\|f - g\|_p \leq \epsilon$. Potem za y dovolj blizu 1, tako da je $\|R_y g - g\|_p < \epsilon$, velja

$$\|R_y f - f\|_p \leq \|R_y(f - g)\|_p + \|R_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq (C + 1)\epsilon + \|R_y g - g\|_p \leq (C + 2)\epsilon.$$

Podobno, če je $\|L_y g - g\|_p < \epsilon$, imamo

$$\|L_y f - f\|_p \leq \|L_y(f - g)\|_p + \|L_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\epsilon + \|L_y g - g\|_p \leq 3\epsilon.$$

Za $p = \infty$ zgornja trditev ne velja, je pa res po definiciji $\|L_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$, če je $f \in C_{lu}(G)$, in $\|R_y f - f\|_\infty \rightarrow 0$, če je $f \in C_{ru}(G)$.

Banachovi moduli

Videli smo, da je $L^1(G)$ Banachova algebra za konvolucijo. Za prostor $L^p(G)$, $1 < p \leq \infty$, tega ne moremo reči, konvolucija $f * g$ ni definirana za vse $f, g \in L^p(G)$, pač pa lahko to storimo, če je npr. $f \in L^1(G)$. V tem primeru je konvolucija t.i. *levo modulsko množenje*: $(f, g) \mapsto f * g$, $f \in L^1(G)$, $g \in L^p(G)$. Iz definicije konvolucije se lahko hitro prepričamo, da za $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2, f \in L^1(G)$, $g_1, g_2, g \in L^p(G)$ velja

- (i) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1 (f_1 * g) + c_2 (f_2 * g)$,
- (ii) $f * (c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 (f * g_1) + c_2 (f * g_2)$,
- (iii) $(f_1 * f_2) * g = f_1 * (f_2 * g)$,
- (iv) $\delta_1 * g = g$, če je $\delta_1 \in L^1(G)$.

Rečemo, da je $L^p(G)$ levi modul nad grupno algebro $L^1(G)$. Ker velja tudi $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$, je $L^p(G)$ *levi Banachov modul* nad $L^1(G)$.

Prav tako smo za $f \in L^1(G)$ definirali konvolucijo $g * f$, ki pomeni *desno modulsko množenje*, in $L^p(G)$ je tudi *desni Banachov modul* nad algebro $L^1(G)$. Ker v tem primeru velja celo $(f_1 * g) * f_2 = f_1 * (g * f_2)$ za $f_1, f_2 \in L^1(G)$, $g \in L^p(G)$, govorimo o *Banachovem bimodulu* nad grupno algebro $L^1(G)$.

Zgledi. Primeri drugih levih Banachovih modulov nad grupno algebro $L^1(G)$ so še npr. $L^\infty(G)$ in njegovi podprostori $C_b(G)$, $C_{lu}(G)$ in $C_0(G)$. Po trditvi 1(b) je namreč $L^1(G) * L^\infty(G) \subset C_{lu}(G)$, od koder sledi $L^1(G) * C_b(G) \subset C_{lu}(G) \subset C_b(G)$ in $L^1(G) * C_{lu}(G) \subset C_{lu}(G)$, po posledici trditve 1 pa tudi $L^1(G) * C_0(G) \subset C_0(G)$. Na enak način vidimo, da so prostori $L^\infty(G)$, $C_b(G)$, $C_{ru}(G)$ in $C_0(G)$ desni Banachovi moduli nad $L^1(G)$. Med njimi so $L^\infty(G)$, $C_b(G)$, $C_u(G)$ in $C_0(G)$ celo Banachovi bimoduli.

Približna enota

Naj bo \mathcal{U} lokalna baza simetričnih odprtih okolice enote $1 \in G$. Zaradi lokalne kompaktnosti grupe G lahko predpostavimo, da so vse okolice $U \in \mathcal{U}$ vsebovane v dani kompaktni simetrični okolici V enote $1 \in G$. Če družino \mathcal{U} uredimo z inkluzijo, postane usmerjena množica (jemljemo čedalje manjše okolice $U \in \mathcal{U}$, na kratko $U \rightarrow 1$), zato lahko z njenimi elementi indeksiramo poljubno družino funkcij in dobimo posplošeno zaporedje.

Trditev 4. Za vsak $U \in \mathcal{U}$ naj bo ψ_U normirana pozitivna simetrična funkcija s kompaktnim nosilcem, vsebovanim v U , torej taka funkcija, da je $\psi_U \geq 0$, $\psi_U(x^{-1}) = \psi_U(x)$ za vsak $x \in G$, $\text{supp } \psi_U \subset U$ in $\int \psi_U dx = 1$.

- (a) Če je $1 \leq p < \infty$ in $f \in L^p(G)$, velja $\|\psi_U * f - f\|_p \rightarrow 0$ in $\|f * \psi_U - f\|_p \rightarrow 0$.
- (b) Če je f z leve enakomerno zvezna funkcija, velja $\|\psi_U * f - f\|_\infty \rightarrow 0$.
- (c) Če je f z desne enakomerno zvezna funkcija, velja $\|f * \psi_U - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Dokaz. (a) Zaradi $\int \psi_U dx = 1$ lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \psi_U * f - f &= \int L_y f \psi_U(y) dy - f \int \psi_U(y) dy = \int_U (L_y f - f) \psi_U(y) dy, \\ \|\psi_U * f - f\|_p &\leq \int_U \|L_y f - f\|_p \psi_U(y) dy \leq \sup_{y \in U} \|L_y f - f\|_p. \end{aligned}$$

Torej po trditvi 3 velja $\|\psi_U * f - f\|_p \rightarrow 0$ ($U \rightarrow 1$). Po drugi strani je zaradi simetričnosti funkcije ψ_U in $\text{supp } \psi_U \subset U$

$$\begin{aligned} f * \psi_U &= \int R_{y^{-1}} f \psi_U(y) \Delta^{1/p}(y^{-1}) dy = \int_U R_y f \psi_U(y) \Delta^{1/p-1}(y) dy, \\ f * \psi_U - f &= \int_U (R_y f \Delta^{1/p-1}(y) - f) \psi_U(y) dy = \\ &= \int_U (R_y f - f) \Delta^{1/p-1}(y) \psi_U(y) dy + f \int_U (\Delta^{1/p-1}(y) - 1) \psi_U(y) dy \end{aligned}$$

in zato

$$\|f * \psi_U - f\|_p \leq \int_U \|R_y f - f\|_p \Delta^{1/p-1}(y) \psi_U(y) dy + \|f\|_p \int_U |\Delta^{1/p-1}(y) - 1| \psi_U(y) dy.$$

Naj bo $C = \sup_{y \in V} \Delta^{1/p-1}(y)$. Zaradi $U \subset V$ dobimo

$$\|f * \psi_U - f\|_p \leq C \sup_{y \in U} \|R_y f - f\|_p + \|f\|_p \sup_{y \in U} |\Delta^{1/p-1}(y) - 1| \rightarrow 0 \quad (U \rightarrow \{1\}).$$

V primeru $p = \infty$ pri levi enakomerni zveznosti funkcije f velja

$$\|\psi_U * f - f\|_\infty \leq \int_U \|L_y f - f\|_\infty \psi_U(y) dy \leq \sup_{y \in U} \|L_y f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 1),$$

pri desni enakomerni zveznosti funkcije f pa

$$\|f * \psi_U - f\|_\infty \leq \int_U \|R_{y^{-1}} f - f\|_\infty \psi_U(y) dy \leq \sup_{y \in U} \|R_{y^{-1}} f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 1).$$

Torej imamo $\|\psi_U * f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($U \rightarrow 1$) za $f \in C_{lu}(G)$ in $\|f * \psi_U - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($U \rightarrow 1$) za $f \in C_{ru}(G)$, tako da veljata tudi točki (b) in (c).

Definicija 4. Družino funkcij $\{\psi_U\}$ z lastnostmi iz trditve 4 (v primeru $p = 1$) imenujemo omejena dvostranska *približna (aproksimativna) enota* v algebri $L^1(G)$.

Približna enota seveda ni enolično določena, odvisna je od izbire lokalne baze v enoti in izbire funkcij ψ_U . Tako npr. lahko izberemo za U simetrične kompaktno okolice ter $\psi_U = \chi_U/|U|$. Lahko pa npr. dosežemo, da so funkcije ψ_U zvezne.

Približna enota je koristno nadomestilo prave enote, kadar le-te grupna algebra ne premore, se pravi, kadar grupa ni diskretna. Pomaga nam v različnih primerih, ki jih bomo obravnavali do konca razdelka.

Približna enota $\{\psi_U\}$ ima dodatne lepe lastnosti, saj veljajo tudi točke (a) (za $p > 1$), (b) in (c). Rečemo, da je približna enota tudi za Banachove bimodule $L^p(G)$, $C_u(G)$ in $C_0(G)$ ter za levi Banachov modul $C_{lu}(G)$ in desni Banachov modul $C_{ru}(G)$ nad $L^1(G)$. Odtod sledi, da je npr. $L^1(G) * L^p(G)$ gosta podmnožica v $L^p(G)$ za $1 \leq p < \infty$, ali $L^1(G) * C_{lu}(G)$ gosta podmnožica v $C_{lu}(G)$, $C_{ru}(G) * L^1(G)$ gosta podmnožica v $C_{ru}(G)$ in podobno. Ker je približna enota $\{\psi_U\}$ omejena, se da z uporabo Cohenovega faktorizacijskega izreka (glej dodatek C) pokazati, da veljajo celo enakosti: $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$, $L^1(G) * C_{lu}(G) = C_{lu}(G)$, $C_{ru}(G) * L^1(G) = C_{ru}(G)$, $L^1(G) * C_u(G) * L^1(G) = C_u(G)$ in $L^1(G) * C_0(G) * L^1(G) = C_0(G)$.

Naslednjo trditev o modulih $C_{lu}(G)$, $C_{ru}(G)$ in $C_u(G)$ bomo še potrebovali v razdelku 4.

Trditev 5. Za lokalno kompaktno grupo G velja:

- (a) $C_{lu}(G) = \{f * \phi; f \in L^1(G), \phi \in L^\infty(G)\}$,
- (b) $C_{ru}(G) = \{\phi * f; f \in L^1(G), \phi \in L^\infty(G)\}$,
- (c) $C_u(G) = \{f_1 * \phi * f_2; f_1, f_2 \in L^1(G), \phi \in L^\infty(G)\}$.

Dokaz. Ker ima po trditvi 4 grupna algebra $L^1(G)$ omejeno levo približno enoto, ki je leva približna enota tudi za levi Banachov modul $C_{lu}(G)$ nad $L^1(G)$, je po Cohenovem izreku (glej dodatek C) $C_{lu}(G) = L^1(G) * C_{lu}(G)$. Po eni strani je torej $C_{lu}(G) = L^1(G) * C_{lu}(G) \subset L^1(G) * L^\infty(G)$, po drugi strani pa je po trditvi 1(b) $L^1(G) * L^\infty(G) \subset C_{lu}(G)$. Točki (b) in (c) dokažemo podobno.

Posledica Cohenovega faktorizacijskega izreka je tudi naslednja trditev.

Trditev 6. Za vsak $h \in L^1(G)$ obstajata taka $f, g \in L^1(G)$, da velja $h = f * g$. Še več, če je (h_n) zaporedje elementov iz $L^1(G)$ z lastnostjo $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), obstajajo taki elementi $f, g_n \in L^1(G)$, $g_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), da je $h_n = f * g_n$ za vsak n .

Dokaz. Algebra $L^1(G)$ je levi Banachov modul nad sabo in premore omejeno (levo) približno enoto. Rezultat sledi iz Cohenovega izreka. Tudi množica vseh zaporedij iz $L^1(G)$, ki konvergirajo po normi proti 0, je levi Banachov modul nad $L^1(G)$ z modulskim množenjem $(f, (g_n)) \mapsto (f * g_n)$. Da se pokazati, da je omejena približna enota za $L^1(G)$ hkrati približna enota za ta modul, tako da lahko spet uporabimo Cohenov izrek.

Opazimo lahko, da je prvi stavek v trditvi v resnici posledica drugega, če pač izberemo zaporedje (g_n) , kjer je $g_1 = g$ in $g_n = 0$ za $n > 1$.

Multiplikatorji in ideali

Oglejmo si še nekaj dejstev o tako imenovanih multiplikatorjih grupne algebre. Najprej definirajmo pojem levega oziroma desnega multiplikatorja algebre $L^1(G)$.

Definicija 5. Linearen operator $L : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ z lastnostjo $L(f * g) = (Lf) * g$ za vsak $f, g \in L^1(G)$ imenujemo *levi multiplikator* na $L^1(G)$. Podobno je linearen operator $R : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ *desni multiplikator* na $L^1(G)$, če za vsak $f, g \in L^1(G)$ velja $R(f * g) = f * (Rg)$.

Zgled za levi multiplikator je levo množenje (konvolucija) z mero $\mu \in M(G)$, definirano s predpisom $L_\mu g = \mu * g$, $g \in L^1(G)$ (glej definicijo 3). Podobno je zgled za desni multiplikator desno množenje (konvolucija) z mero ν , definirano z $R_\nu f = f * \nu$, $f \in L^1(G)$ (glej definicijo 3). Ta dva operatorja sta omejena. Zanimivo je, da sta to v bistvu edina zgleđa multiplikatorjev, kot povesta naslednja trditvev in naslednji izrek.

Trditvev 7. Vsak levi (desni) multiplikator na algebri $L^1(G)$ je zvezen.

Dokaz. Dokažimo zveznost levega multiplikatorja L . Naj bo (h_n) zaporedje v $L^1(G)$ z lastnostjo $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Po trditvi 6 obstaja $f \in L^1(G)$ in zaporedje elementov $g_n \in L^1(G)$, tako da $g_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in da velja $h_n = f * g_n$ za vsak n . Torej velja tudi $L(h_n) = L(f * g_n) = L(f) * g_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), kar dokazuje zveznost linearnega operatorja L . Zveznost desnega multiplikatorja R dokažemo z analogno trditvijo 6 za desne module.

Izrek 1 (Wendel). Za vsak levi multiplikator L na grupni algebri $L^1(G)$ obstaja taka enolično določena mera $\mu \in M(G)$, da je $Lg = \mu * g$ za vsak $g \in L^1(G)$ in $\|\mu\| = \|L\|$. Za vsak desni multiplikator R na $L^1(G)$ obstaja taka enolično določena mera $\nu \in M(G)$, da je $Rf = f * \nu$ za vsak $f \in L^1(G)$ in $\|\nu\| = \|R\|$.

Dokaz. Naj bo $\{\psi_U\}$ približna enota v $L^1(G)$. Potem zaradi omejenosti linearnega operatorja L po trditvi 4 za vsak $g \in L^1(G)$ velja $L\psi_U * g = L(\psi_U * g) \rightarrow Lg$ ($U \rightarrow 1$) po normi v $L^1(G)$. Označimo $\mu_U = L\psi_U \in L^1(G)$, kar je zaradi $\|\mu_U\| \leq \|L\|$ omejeno posplošeno zaporedje (absolutno zveznih) mer v kroglji s polmerom $\|L\|$. Ta kroglja je po Banach-Alaoglujevem izreku šibko- $*$ kompaktna v $M(G) = C_0(G)^*$ (dual prostora $C_0(G)$). Po Rieszovem izreku so mere namreč omejeni linearni funkcionali na $C_0(G)$. Obstaja podzaporedje $\mu_\alpha = \mu_{U_\alpha}$, ki v šibki- $*$ topologiji konvergira proti neki meri μ iz iste kroglje, torej $\langle \phi, \mu_\alpha \rangle = \int \phi d\mu_\alpha \rightarrow \int \phi d\mu = \langle \phi, \mu \rangle$ za vsak $\phi \in C_0(G)$. Potem pa za vsak $g \in L^1(G)$ velja tudi $\mu_\alpha * g \rightarrow \mu * g$ v šibki- $*$ topologiji. Za vsak $\phi \in C_0(G)$ namreč velja

$$\begin{aligned} \langle \phi, \mu_\alpha * g \rangle &= \int \phi d(\mu_\alpha * g) = \int \int \phi(xy)g(y)d\mu_\alpha(x)dy = \int \left(\int \phi(xy)g(y)dy \right) d\mu_\alpha(x) = \\ &= \int \psi(x) d\mu_\alpha(x) = \langle \psi, \mu_\alpha \rangle \rightarrow \langle \psi, \mu \rangle, \end{aligned}$$

kjer je s predpisom $\psi(x) = \int \phi(xy)g(y)dy$ definirana funkcija ψ v $C_0(x)$. Na podoben način vidimo, da je $\langle \psi, \mu \rangle = \langle \phi, \mu * g \rangle$. Ker od prej vemo, da $\mu_\alpha * g = L\psi_{U_\alpha} * g = L(\psi_{U_\alpha} * g) \rightarrow Lg$, mora veljati $Lg = \mu * g$. Torej je $L = L_\mu$ in $\|L\| \leq \|\mu\|$. Po drugi strani iz $|\langle \phi, \mu_\alpha \rangle| \leq \|L\| \|\phi\|_\infty$ za vsak $\phi \in C_0(G)$ in vsak α sledi $|\langle \phi, \mu \rangle| \leq \|L\| \|\phi\|_\infty$ za vsak $\phi \in C_0(G)$, torej $\|\mu\| \leq \|L\|$. Dobimo enakost in preslikava $\mu \mapsto L_\mu$ je izometrija iz prostora mer v prostor multiplikatorjev. Odtod tudi sledi, da je mera μ z multiplikatorjem L natanko določena.

Podobno bi lahko ugotovili, da za vsak desni multiplikator R obstaja taka mera ν , da je $R = R_\nu$ in $\|R\| = \|\nu\|$. Lahko pa si pomagamo tudi z levim multiplikatorjem in z involucijo. Za vsak $g \in L^1(G)$ namreč definirajmo $Lg = (Rg^*)^*$. Potem je L levi multiplikator, saj za $f, g \in L^1(G)$ velja $L(f * g) = (R(f * g)^*)^* = (R(g^* * f^*))^* = (g^* * Rf^*)^* = (Rf^*)^* * g = (Lf) * g$. Poleg tega je $\|Lg\|_1 = \|(Rg^*)^*\|_1 = \|Rg^*\|_1$ za vsak $g \in L^1(G)$, od koder takoj sledi $\|L\| = \|R\|$. Zato obstaja taka mera $\mu \in M(G)$, da je $Lg = \mu * g$ za vsak $g \in L^1(G)$ in $\|\mu\| = \|L\|$. Potem je $\nu = \mu^*$ taka mera, da je $Rf = (Lf^*)^* = (\mu * f^*)^* = f * \mu^* = f * \nu$ in $\|\nu\| = \|\mu^*\| = \|\mu\| = \|L\| = \|R\|$.

Za konec razdelka si oglejmo še karakterizacijo zaprtih idealov v grupni algebri.

Izrek 2. *Naj bo I zaprt podprostor v $L^1(G)$. Tedaj je I levi (desni) ideal v $L^1(G)$ natanko takrat, ko je zaprt za leve (desne) translacije.*

Dokaz. Naj bo I levi ideal v $L^1(G)$, $g \in I$, $x \in G$ in $\{\psi_U\}$ približna enota v $L^1(G)$. Potem je $L_x(\psi_U * g) = (L_x\psi_U) * g \in I$, se pravi tudi $L_xg = \lim_{U \rightarrow 1} L_x(\psi_U * g) \in I$. Obratno, naj bo podprostor I zaprt za leve translacije, $g \in I$ in $f \in C_c(G)$. Tedaj je $f * g = \int f(y)L_yg dy \in I$, ker je Lebesgue-Bochnerjev integral zvezne vektorske funkcije $y \mapsto f(y)L_yg$ z vrednostmi v I tudi sam v I . Če pa je $f \in L^1(G)$, lahko f v normi $\|\cdot\|_1$ aproksimiramo s funkcijami iz $C_c(G)$ in (spet zaradi zaprtosti podprostora I) dobimo $f * g \in I$. Podoben dokaz velja tudi za desne ideale.

3. Homogeni prostori

Na kratko si bomo ogledali delovanje lokalno kompaktno grupe na topoloških prostorih, definirali homogene prostore in obravnavali eksistenco invariantne in kvazi invariantne mere na takih prostorih.

Delovanje grupe

Definicija 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in S lokalno kompakten Hausdorfov topološki prostor. *Levo delovanje* grupe G na prostoru S je taka zvezna preslikava $(x, s) \mapsto xs$ ($x \in G, s \in S$), da je :

- (i) $s \mapsto xs$ homeomorfizem prostora S za vsak $x \in G$,
- (ii) $x(ys) = (xy)s$ za vsak par $x, y \in G$ in za vsak $s \in S$.

Zaradi (i) je preslikava $s \mapsto xs$ injektivna, zato iz (ii) pri $y = 1$ sledi $1s = s$. Delovanje grupe G na prostoru S je tranzitivno, če za $s, t \in S$ obstaja tak $x \in G$, da je $xs = t$. Prostoru S s (tranzitivno) delujočo grupo G rečemo (tranzitiven) *G-prostor*.

Zgled 1. Če je H zaprta podgrupa v G , je za vsak $x \in G$ ter $s = yH \in G/H$ s predpisom $xs = (xy)H$ definirano levo delovanje grupe G na kvocientnem prostoru G/H in kvocientni prostor $S = G/H$ tako postane G -prostor. To je celo tranzitiven prostor, saj za poljubna $s = yH$ in $t = zH$ v $S = G/H$ velja $t = zH = (zy^{-1})(yH) = xs$, kjer je $x = zy^{-1} \in G$. V posebnem primeru $H = \{1\}$ je $S = G$ in tudi grupa G sama je tranzitiven G -prostor za levo množenje z elementi iz G .

Pokažimo, da je v bistvu vsak tranzitiven G -prostor S take oblike. Izberimo poljuben $s_0 \in S$ in definirajmo preslikavo $\phi : G \rightarrow S$ s predpisom $\phi(x) = xs_0$. Tudi ta preslikava je zvezna in zaradi tranzitivnosti levega delovanja grupe G na S tudi surjektivna. Naj bo $H = \{x \in G; xs_0 = s_0\}$. Brez težav vidimo, da je to zaprta podgrupa v G (t.i. *stabilizatorska podgrupa točke s_0*). Očitno je preslikava ϕ konstantna na levih odsekih po tej podgrupi (zaradi $\phi(xh) = xhs_0 = xs_0 = \phi(x)$ za $h \in H$). Torej obstaja inducirana preslikava $\Phi : G/H \rightarrow S$, tako da je $\Phi \circ q = \phi$, ki je seveda zvezna surjekcija. Poleg tega iz $\Phi(xH) = \Phi(yH)$ sledi $\phi(x) = \phi(y)$ oziroma $xs_0 = ys_0$, torej $y^{-1}xs_0 = s_0$ oziroma $y^{-1}x \in H$, se pravi $xH = yH$. Torej je Φ zvezna bijekcija iz G/H na S . Če bi bila tudi inverzna preslikava Φ^{-1} zvezna, bi bil Φ homeomorfizem.

Zgled 2. Inverzna preslikava Φ^{-1} ni vedno zvezna. Vzemimo $G = \mathbb{R}_d$, to je aditivno grupo realnih števil, opremljeno z diskretno topologijo, in $S = \mathbb{R}$ z običajno topologijo. Delovanje grupe na S pa naj bo dano z $(x, s) \mapsto x + s$. Če je $\phi(x) = x + s_0$ in $s_0 \neq 0$, je stabilizatorska podgrupa enaka $H = \{0\}$, torej $\Phi = \phi$, preslikava $\phi^{-1} : S \rightarrow G$, dana z $\phi^{-1}(s) = s - s_0$ pa ni zvezna.

Trditev 1. Če je G σ -kompaktna grupa, je preslikava Φ homeomorfizem topoloških prostorov G/H in S .

Dokaz. Dovolj je pokazati, da ϕ preslika odprte množice v G na odprte množice v S . Naj bo U odprta podmnožica v G in $x_0 \in U$. Obstaja taka simetrična kompaktna okolica V enote $1 \in G$, da je $x_0V^2 \subset U$. Ker je G σ -kompaktna grupa, obstaja taka števna podmnožica $\{y_n\} \subset G$, da je $G = \cup_n y_nV$. Potem je $S = \cup_n \phi(y_nV)$. Vse množice $\phi(y_nV)$ so homeomorfne množici $\phi(V)$. Za vsak n je namreč preslikava $f_n : \phi(V) \rightarrow \phi(y_nV)$, ki je dana s predpisom $f_n(vs_0) = y_nvs_0$, zvezna bijekcija iz kompaktne množice $\phi(V)$ na Hausdorffov topološki prostor $\phi(y_nV)$, torej homeomorfizem. Po Baireovem izreku za lokalno kompaktne Hausdorffove prostore (glej [28], str. 43) mora imeti vsaj ena od zaprtih množic $\phi(y_nV)$, torej tudi množica $\phi(V)$ neprazno notranjost. Toda če je $\phi(x_1)$, $x_1 \in V$, notranja točka v $\phi(V)$, je $\phi(x_0)$ notranja točka v $\phi(x_0x_1^{-1}V)$. Ker pa je $x_0x_1^{-1}V \subset x_0V^2 \subset U$, je $\phi(x_0)$ notranja točka v $\phi(U)$ in $\phi(U)$ je odprta množica.

Definicija 2. Tranzitiven G -prostor S , ki je homeomorfen G/H (s homeomorfizmom Φ), kjer je H zaprta podgrupa v G , imenujemo *homogeni prostor*.

Vsak homogeni prostor bomo odslej identificirali s kvocientnim prostorom. Identifikacija je odvisna od izbire točke $s_0 \in S$, za katero je H stabilizatorska podgrupa. Če je $s'_0 = x_0s_0$ neka druga točka v S , je $H' = \{x \in G; xs'_0 = s'_0\} = \{x \in G; xx_0s_0 = x_0s_0\} = \{x \in G; x_0^{-1}xx_0s_0 = s_0\} = \{x_0yx_0^{-1} \in G; ys_0 = s_0\} = x_0Hx_0^{-1}$. Preslikava $y \mapsto x_0yx_0^{-1}$ inducira homeomorfizem med G/H in G/H' .

Invariantna mera

Kadar podgrupa H ni podgrupa edinka v G , homogeni prostor G/H seveda ni faktorska grupa, čeprav je lokalno kompakten Hausdorffov prostor, zato na njem ne obstaja vedno (netrivialna) levo invariantna Radonova mera.

Zgled 3. Naj bo npr. G grupa afinih transformacij $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, ki deluje na realni osi \mathbb{R} (glej točko 5 v razdelku I.4). Delovanje je očitno tranzitivno. Za prostor S lahko vzamemo \mathbb{R} in na njem točko $s_0 = 0$. Potem je $\phi(a, b) = b$ odprta zvezna surjekcija iz G na \mathbb{R} . Stabilizatorska podgrupa je $H = \{(a, b) \in G; b = 0\}$, torej podgrupa raztegov $x \mapsto ax$, ki ni edinka. Ker je preslikava $\Phi : G/H \rightarrow \mathbb{R}$, definirana z $\Phi((a, b)H) = b$, homeomorfizem (o tem se lahko hitro prepričamo) je $\mathbb{R} \cong G/H$ homogeni prostor. Na njem pa ne obstaja nobena netrivialna levo invariantna Radonova mera. Vsaka taka mera mora biti namreč invariantna tudi za vse translacije $x \mapsto x + b$, to pa je edinole Lebesguova mera. Vendar pa Lebesguova mera ni invariantna za raztege $x \mapsto ax$, če $a \neq 1, -1$.

Naj bo G lokalno kompaktna grupa, H zaprta podgrupa, dx leva Haarova mera na G in $d\xi$ leva Haarova mera na podgrupi H (ki je tudi lokalno kompaktna). Poleg tega naj bo $q : G \rightarrow G/H$ kvocientna preslikava ($q(x) = xH$), Δ_G in Δ_H modularni funkciji na G oziroma na H . Za vsak $x \in G$ in $f \in C_c(G)$ definirajmo

$$(1) \quad Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi.$$

Leva stran je dobro definirana; če je namreč tudi $yH = xH$, torej $y = x\eta$ za $\eta \in H$, imamo $\int_H f(y\xi)d\xi = \int_H f(x\eta\xi)d\xi = \int_H f(x\xi)d\xi$ zaradi leve invariantnosti Haarove mere $d\xi$ na H . Prav tako vidimo, da P komutira z delovanjem grupe G na homogenem prostoru G/H , tj. za vsak $y \in G$ in vsak $f \in C_c(G)$ velja $L_yPf = P(L_yf)$. Res: $L_yPf(xH) = Pf(y^{-1}xH) = \int_H f(y^{-1}x\xi)d\xi = \int_H L_yf(x\xi)d\xi = P(L_yf)(xH)$.

Trditev 2. Za vsak $f \in C_c(G)$ je Pf zvezna funkcija s kompaktnim nosilcem $\text{supp } Pf \subset q(\text{supp } f)$ na G/H . Poleg tega za vsak $\phi \in C(G/H)$ velja $P((\phi \circ q) \cdot f) = \phi \cdot Pf$.

Dokaz. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka simetrična kompaktna okolica V enote $1 \in G$, da za $v \in V$ po trditvi I.1.10 velja $\|L_v f - f\|_\infty < \epsilon$. Fiksirajmo $x \in G$ in naj bo $q(y) \in q(Vx)$ oziroma $y \in VxH$. Potem je $y = vx\eta$ za $v \in V$ in $\eta \in H$ in zato (za ustrezno konstanto $M_x > 0$)

$$\begin{aligned} Pf(xH) - Pf(yH) &= \int_H f(x\xi)d\xi - \int_H f(y\xi)d\xi = \int_H f(x\xi)d\xi - \int_H f(vx\eta\xi)d\xi = \\ &= \int_H f(x\xi)d\xi - \int_H f(vx\xi)d\xi = \int_H (f(x\xi) - f(vx\xi))d\xi \end{aligned}$$

$$\text{ozioroma } |Pf(xH) - Pf(yH)| \leq \int_{x^{-1}V\text{supp } f} \|L_v f - f\|_\infty d\xi < M_x \epsilon.$$

To pomeni, da je Pf zvezna funkcija na G/H . Ker je $q(x\xi) = q(x)$ za vsak $x \in G$ in $\xi \in H$, velja $q(x) = 0$ natanko takrat, ko je $q(x\xi) = 0$ za vsak $\xi \in H$. Tedaj pa iz $f(x\xi) = 0$ za vsak $\xi \in H$ sledi $Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi = 0$ in zato $\text{supp } Pf \subset q(\text{supp } f)$. Zadnji stavek je posledica definicije funkcije Pf . Za vsak $x \in G$ namreč velja

$$P((\phi \circ q)f)(xH) = \int_H \phi(q(x\xi))f(x\xi)d\xi = \int_H \phi(q(x))f(x\xi)d\xi = \phi(q(x))Pf(xH).$$

Trditev pove, da je $Pf \in C_c(G/H)$, če je $f \in C_c(G)$. Hitro se vidi, da je preslikava $P : C_c(G) \rightarrow C_c(G/H)$ linearna. Pokazali bomo, da je surjektivna, za kar pa potrebujemo dve splošni lemi.

Lema 1. Če je E kompaktna podmnožica v G/H , obstaja taka kompaktna podmnožica $K \subset G$, da je $q(K) = E$.

Dokaz. Naj bo V odprta okolica enote v G s kompaktnim zaprtjem \bar{V} . Ker je q odprta preslikava, je družina množic $q(xV)$, $x \in G$, odprto pokritje za E . Zaradi kompaktnosti te množice obstaja končno podpokritje $\{q(x_j V), j = 1, 2, \dots, n\}$. Potem pa zaradi $E \subset \cup_{j=1}^n q(x_j \bar{V}) = q(\cup_{j=1}^n x_j \bar{V})$ velja $E = q(K)$, kjer je $K = q^{-1}(E) \cap \cup_{j=1}^n x_j \bar{V}$. To pa je očitno kompaktna podmnožica v G .

Lema 2. Če je F kompaktna podmnožica v G/H , obstaja taka funkcija $g \in C_c(G)$, da je $g \geq 0$ in $Pg = 1$ na F .

Dokaz. Če je E kompaktna okolica za F v G/H , obstaja po lemi 1 taka kompaktna množica $K \subset G$, da je $q(K) = E$. Potem pa obstaja taka funkcija $h \in C_c(G)$, da je $h \geq 0$ in $h > 0$ na K . Naj bo $\phi \in C_c(G/H)$ funkcija z lastnostjo $\phi \geq 0$, $\text{supp } \phi \subset E$ in $\phi = 1$ na F . Potem je $g = (\phi \circ q)h / (Ph \circ q)$ dobro definirana zvezna funkcija na G (kadar je $Ph(q(x)) = 0$, je $h(x\xi) = 0$ za vsak $\xi \in H$, torej $h(x) = 0$). Za funkcijo g velja $g \geq 0$, $\text{supp } g \subset \text{supp } h$ in $Pg = (\phi \cdot Ph) / Ph = \phi$. Torej je $Pg = 1$ na F .

Trditev 3. Če je $\phi \in C_c(G/H)$ poljubna funkcija, obstaja $f \in C_c(G)$ z lastnostjo $Pf = \phi$, $q(\text{supp } f) = \text{supp } \phi$ in $f \geq 0$, če $\phi \geq 0$.

Dokaz. Za funkcijo ϕ obstaja po lemi 2 funkcija $g \geq 0$ na $C_c(G)$, tako da je $Pg = 1$ na $\text{supp } \phi$. Naj bo $f = (\phi \circ q)g$. Tedaj velja $Pf = \phi \cdot Pg = \phi$. Če je $f(x) \neq 0$, mora biti tudi $\phi(q(x)) \neq 0$ in zato $q(\text{supp } f) \subset \text{supp } \phi$. Obratno, če je $\phi(q(x)) \neq 0$, je $Pg(q(x)) \neq 0$. To pomeni, da obstaja tak $\xi \in H$, da je $g(x\xi) \neq 0$. Torej je $f(x\xi) = \phi(q(x))g(x\xi) \neq 0$, se pravi $q(x) = q(x\xi) \in q(\text{supp } f)$ in zato tudi $\text{supp } \phi \subset q(\text{supp } f)$. Da iz $\phi \geq 0$ sledi $f \geq 0$ je jasno.

Trditev med drugim pove, da je preslikava $f \mapsto Pf$ surjekcija iz $C_c(G)$ na $C_c(G/H)$. Naslednji izrek pa pri določenih pogojih zagotavlja obstoj invariantne Radonove mere na homogenem prostoru G/H tudi v primeru, ko le-ta ni lokalno kompaktna grupa. Pravzaprav celo karakterizira, kdaj invariantna mera obstaja.

Izrek 2. *Na prostoru G/H obstaja invariantna Radonova mera μ natanko takrat, ko je $\Delta_G|_H = \Delta_H$. V tem primeru je invariantna mera μ do konstantnega faktorja natančno določena. Če ta faktor primerno izberemo, velja za $f \in C_c(G)$ t.i. Weilova formula*

$$(2) \quad \int_G f(x)dx = \int_{G/H} Pf(xH)d\mu(xH) = \int_{G/H} \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH).$$

Dokaz. Denimo, da obstaja invariantna mera μ na G/H . Potem je preslikava $f \mapsto \int_{G/H} Pf(xH)d\mu(xH)$ levo invarianten pozitiven linearen funkcional na $C_c(G)$ in torej določa levo Haarovo mero na G . Taka mera je proporcionalna prvotni, zato obstaja $c > 0$, tako da je $\int_{G/H} Pf(xH)d\mu(xH) = c \int_G f(x)dx$. S to formulo je mera μ na G/H povsem določena, saj je vsak $\phi \in C_c(G/H)$ po trditvi 3 oblike $\phi = Pf$. Izberimo $c = 1$, se pravi, da po potrebi zamenjamo mero μ z mero μ/c . Tedaj je $\Delta_G|_H = \Delta_H$, saj je za vsak $f \in C_c(G)$ in vsak $\eta \in H$ res

$$\begin{aligned} \Delta_G(\eta) \int_G f(x)dx &= \int_G f(x\eta^{-1})dx = \int_{G/H} PR_{\eta^{-1}}f(xH)d\mu(xH) = \\ &= \int_{G/H} \int_H f(x\xi\eta^{-1})d\xi d\mu(xH) = \int_{G/H} \Delta_H(\eta) \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH) = \\ &= \int_{G/H} \Delta_H(\eta)Pf(xH)d\mu(xH) = \Delta_H(\eta) \int_G f(x)dx. \end{aligned}$$

Obratno, naj bo $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Pokažimo, da za $f \in C_c(G)$ iz $Pf = 0$ sledi $\int_G f(x)dx = 0$. Po lemi 2 obstaja tak $g \in C_c(G)$, $g \geq 0$, da je $Pg = 1$ na $q(\text{supp } f)$. Tedaj je za $x \in G$ $0 = Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi = \int_H f(x\xi^{-1})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi = \int_H f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi$ in zato

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \int_H g(x)f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi dx = \int_H \int_G g(x)f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})dx d\xi = \\ &= \int_H \int_G g(x\xi)f(x)dxd\xi = \int_G \int_H g(x\xi)d\xi f(x)dx = \int_G Pg(xH)f(x)dx = \int_G f(x)dx. \end{aligned}$$

Upoštevajoč trditev 3 je preslikava $I : Pf \mapsto \int f(x)dx$ dobro definiran invarianten pozitiven linearen funkcional na $C_c(G/H)$. Za vsak $y \in G$ namreč velja $I(L_y Pf) = I(P(L_y f)) = \int L_y f(x)dx = \int f(x)dx = I(Pf)$. Po Rieszovem izreku določa I pozitivno Radonovo mero na G/H , ki je levo invariantna. Enakost (2) smo spotoma že spoznali (pri primerno izbrani meri μ) in izrek je dokazan.

Tudi iz izreka 2 sledi, da grupa afinih transformacij na realni osi (glej zgled 3 ali točko 5 v razdelku I.4) nima invariantne mere. V tem primeru je namreč $\Delta_H = 1$ zaradi komutativnosti podgrupe H , medtem ko je $\Delta_G(a, b) = 1/|a|$ in zato $\Delta_G|_H \neq \Delta_H$.

Kvazi invariantna mera

Včasih seveda na homogenih prostorih invariantne mere nimamo. Tedaj lahko vpeljemo koristen nadomestek.

Definicija 3. Naj bo μ Radonova mera na G/H in $\mu_x(E) = \mu(xE)$ za vsak $x \in G$ in vsako Borelovo podmnožico $E \subset G/H$. Rečemo, da je mera μ kvazi invariantna, če so vse mere μ_x , $x \in G$, ekvivalentne (tj. vzajemno absolutno zvezne).

Zahtevamo še nekoliko več, da obstaja zvezna funkcija $\lambda : G \times (G/H) \rightarrow (0, \infty)$, tako da je $d\mu_x(p) = \lambda(x, p)d\mu(p)$. Torej zahtevamo, da je Radon-Nikodymov odvod $\lambda(x, p) = d\mu_x/d\mu(p)$ zvezen v obeh spremenljivkah, x in s . Kvazi invariantne mere s tako dodatno lastnostjo imenujemo *krepko kvazi invariantne mere*. Za dokaz eksistence takih mer potrebujemo nekaj pomožnih rezultatov in novo definicijo.

Lema 3. *Naj bo V simetrična relativno kompaktna odprta okolica enote $1 \in G$. Obstaja podmnožica $A \subset G$ z lastnostmi:*

- (i) *za vsak $x \in G$ obstaja tak $a \in A$, da je $xH \cap Va \neq \emptyset$,*
- (ii) *za vsako kompaktno podmnožico $K \subset G$ je množica $\{a \in A; KH \cap \bar{V}a \neq \emptyset\}$ končna.*

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je $V \neq \{1\}$ ali $H \neq \{1\}$. V nasprotnem primeru sta namreč obe točki trivialno izpolnjeni, če izberemo $A = G$ (upoštevajmo, da je grupa zdaj diskretna in vsaka kompaktna podmnožica v njej končna). Še vedno imamo dve možnosti:

1. Za vsak $a, b \in G$ je $a \in VbH$. Tedaj za vsak $a, b \in G$ obstajata $v \in V, h \in H$, tako da je $a = vbh$ oziroma $v^{-1}a = bh$ in zato $bH \cap Va \neq \emptyset$. Za A lahko zdaj vzamemo poljubno končno podmnožico $A \subset G$, npr. $A = \{a\}$, za poljuben $a \in G$.

2. Obstajata $a, b \in G$ z lastnostjo $a \notin VbH$. Tedaj je nujno $a \neq b$. Oglejmo si družino podmnožic $\mathcal{M} = \{M \subset G; x, y \in M, x \neq y \implies x \notin VyH\}$ (opazimo, da je zaradi $V = V^{-1}$ in $H = H^{-1}$ relacija $x \notin VyH$ simetrična, istočasno velja tudi $y \notin VxH$). Po predpostavki je ta družina neprazna in vsebuje vsaj neprazno množico $\{a, b\}$. Poleg tega $G \notin \mathcal{M}$, saj za vsak $y \in G$ in vsak $x \neq y$ dovolj blizu y velja $x \in VyH$, ker je VyH odprta okolica točke y . Družino \mathcal{M} delno uredimo z inkluzijo. Hitro vidimo, da je za vsako verigo v \mathcal{M} tudi njena unija v \mathcal{M} in po Zornovi lemi obstaja maksimalni element $A \in \mathcal{M}$. Zagotovo je $A \neq G$. Točka (i) je zdaj jasna: če je $x \in A$, vzamemo $a = x$; če pa $x \notin A$ tudi mora biti $xH \cap Va \neq \emptyset$ pri nekem $a \in A$, sicer bi veljalo $x \notin VaH$ v nasprotju z maksimalnostjo množice A . Dokažimo še točko (ii). Denimo, da je $K \subset G$ kompaktna množica z lastnostjo $KH \cap \bar{V}a \neq \emptyset$ za neskončno mnogo $a \in A$. Potem lahko najdemo neskončno mnogo različnih elementov $a_1, a_2, \dots \in A$ in $h_1, h_2, \dots \in H$, tako da je $a_j h_j \in \bar{V}K$ za vsak j . Ker je množica $\bar{V}K$ kompaktna (glej trditve 1.1(f)(iii)), ima zaporedje $a_j h_j$ stekališče $y \in \bar{V}K$. Če je U simetrična okolica enote $1 \in G$ z lastnostjo $U^2 \subset V$, lahko najdemo taka različna indeksa j in k , da je hkrati $a_j h_j \in Uy$ in $a_k h_k \in Uy$ (oziroma $y \in Ua_k h_k$). Torej je $a_j h_j \in U^2 a_k h_k \subset Va_k h_k$. Tedaj pa je $a_j \in Va_k H$, kar je v nasprotju z definicijo množice A .

Lema 4. *Obstaja zvezna funkcija $f : G \rightarrow [0, \infty)$ z lastnostmi:*

- (i) $\{y \in G; f(y) > 0\} \cap xH \neq \emptyset$ za vsak $x \in G$,
- (ii) *Presek $(\text{supp } f) \cap KH$ je kompakten za vsako kompaktno množico $K \subset G$.*

Dokaz. Izberimo poljubno simetrično funkcijo $g \in C_c^+(G)$ z lastnostjo $g(1) > 0$. Potem je $V = \{x \in G; g(x) > 0\}$ simetrična okolica enote 1. Izberimo množico A kot v lemi 3 in definirajmo $f(x) = \sum_{a \in A} g(xa^{-1})$. Po lemi 3(ii) je za vsak x iz katerekoli kompaktne množice kvečjemu končno mnogo členov te vsote različnih od nič, zato je funkcija f dobro definirana in zvezna. Ker je $\text{supp } f = \overline{\cup_{a \in A} Va} \subset \cup_{a \in A} \bar{V}a$ je za vsako kompaktno podmnožico $K \subset G$ presek $(\text{supp } f) \cap KH$ vsebovan v končni uniji kompaktnih množic $\bar{V}a$, torej tudi sam kompakten. Nazadnje po lemi 3(i) množica $\{y \in G; f(y) > 0\} = \cup_{a \in A} Va$ preseka vsak levi odsek xH .

Definicija 4. Zvezna funkcija $\rho : G \rightarrow (0, \infty)$ se imenuje *kvazi invariantna ali relativno invariantna funkcija* za par (G, H) , če za vsak $x \in G$ in $\xi \in H$ velja

$$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)} \rho(x).$$

Če G/H premore G -invariantno Radonovo mero, je seveda $\rho(x\xi) = \rho(x)$ za vsak $x \in G$ in $\xi \in H$, se pravi, funkcija ρ konstantna na levih odsekih po podgrupi G .

Trditev 4. *Za vsako lokalno kompaktno grupo G in vsako zaprto podgrupo H obstaja kvazi invariantna funkcija za par (G, H) .*

Dokaz. Naj bo f funkcija iz leme 4. Za vsak $x \in G$ definirajmo

$$\rho(x) = \int_H \frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)} f(x\eta) d\eta.$$

Lastnosti funkcije f zagotavljajo obstoj, pozitivnost in zveznost funkcije ρ . Pleg tega je za vsak $x \in G$ in $\xi \in H$ res

$$\rho(x\xi) = \int_H \frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)} f(x\xi\eta) d\eta = \int_H \frac{\Delta_G(\xi^{-1}\eta)}{\Delta_H(\xi^{-1}\eta)} f(x\eta) d\eta = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)} \rho(x).$$

Lema 5. *Če je $f \in C_c(G)$ in $Pf = 0$, velja $\int_G f(x)\rho(x)dx = 0$ za vsako kvazi invariantno funkcijo ρ .*

Dokaz. Po lemi 2 obstaja v $C_c(G)$ funkcija $\phi \geq 0$ z lastnostjo $P\phi = 1$ na $q(\text{supp } f)$. Potem iz

$$0 = \int_H f(x\xi) d\xi = \int_H f(x\xi^{-1}) \Delta_H(\xi^{-1}) d\xi$$

dobimo z integracijo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \int_H \rho(x) \phi(x) f(x\xi^{-1}) \Delta_H(\xi^{-1}) d\xi dx = \int_H \int_G \rho(x\xi) \phi(x\xi) f(x) \Delta_H(\xi^{-1}) \Delta_G(\xi) dx d\xi = \\ &= \int_G \int_H \rho(x) \phi(x\xi) f(x) d\xi dx = \int_G \rho(x) f(x) P\phi(q(x)) dx = \int_G \rho(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Izrek 3. *Za vsako kvazi invariantno funkcijo ρ obstaja taka krepko kvazi invariantna mera μ na G/H , da za vsak $f \in C_c(G)$ velja*

$$(3) \quad \int_{G/H} Pf(p) d\mu(p) = \int_G f(x) \rho(x) dx.$$

Poleg tega mera μ zadošča pri vsakem paru $x, y \in G$ enakosti

$$(4) \quad \frac{d\mu_x}{d\mu}(yH) = \frac{\rho(xy)}{\rho(y)}.$$

Dokaz. Po trditvi 3 in lemi 5 je preslikava $Pf \mapsto \int_G f(x)\rho(x)dx$ dobro definiran pozitiven linearen funkcional na $C_c(G/H)$, zato definira Radonovo mero μ na G/H . Po definiciji 4 je funkcija $y \mapsto \rho(xy)/\rho(y)$ konstantna na levih odsekih po podgrupi H , zato definira zvezno funkcijo $\lambda : G \times (G/H) \rightarrow (0, \infty)$ s predpisom $\lambda(x, q(y)) = \rho(xy)/\rho(y)$. Za vsak $x \in G$ in $f \in C_c(G)$ imamo po definiciji mere μ in funkcije λ

$$\begin{aligned} \int_{G/H} Pf(p) d\mu_x(p) &= \int_{G/H} Pf(x^{-1}p) d\mu(p) = \int_G f(x^{-1}y) \rho(y) dy = \int_G f(y) \rho(xy) dy = \\ &= \int_G f(y) \lambda(x, q(y)) \rho(y) dy = \int_{G/H} P[f\lambda(x, q(\cdot))](p) d\mu(p) = \int_{G/H} Pf(p) \lambda(x, p) d\mu(p). \end{aligned}$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali, da za $p = q(y) = yH$ zaradi (1) velja

$$\begin{aligned} P[f\lambda(x, q(\cdot))](p) &= \int_H f(y\xi) \lambda(x, q(y\xi)) d\xi = \int_H f(y\xi) d\xi \lambda(x, q(y)) = \\ &= Pf(q(y)) \lambda(x, q(y)) = Pf(p) \lambda(x, p). \end{aligned}$$

Trditvev 5. Če je μ kvazi invariantna mera na G/H , je $\mu(U) > 0$ za vsako neprazno odprto množico U .

Dokaz. Je enak kot dokaz trditve I.2.3.

Izrek 4. Vsaka krepko kvazi invariantna mera na G/H izhaja iz kvazi invariantne funkcije kot v izreku 3; vse take mere so krepko ekvivalentne.

Dokaz. Naj bo μ krepko kvazi invariantna mera, tako da je $d\mu_x/d\mu(p) = \lambda(x, p)$, kjer je λ pozitivna in zvezna na $G \times (G/H)$. Ker je $\mu_{xy} = (\mu_x)_y$ za vsak $x, y \in G$ ter imamo za vsak $f \in C_c(G/H)$

$$\begin{aligned} \int_{G/H} f(p)\lambda(xy, p)d\mu(p) &= \int_{G/H} f(p)d\mu_{xy}(p) = \int_{G/H} f(p)d(\mu_x)_y(p) = \int_{G/H} f(y^{-1}p)d\mu_x(p) = \\ &= \int_{G/H} f(y^{-1}p)\lambda(x, p)d\mu(p) = \int_{G/H} f(p)\lambda(x, yp)d\mu_y(p) = \int_{G/H} f(p)\lambda(x, yp)\lambda(y, p)d\mu(p), \end{aligned}$$

velja (ne le skoraj povsod, ampak zaradi zveznosti funkcije λ in trditve 5 povsod) verižno pravilo za Radon-Nykodimove odvode ($x, y \in G, p \in G/H$)

$$(5) \quad \lambda(xy, p) = \lambda(x, yp)\lambda(y, p).$$

Upošteva je to pravilo, dobimo za vsak $f \in C_c(G)$ in vsak $y \in G$ enakost

$$\begin{aligned} \int_{G/H} \int_H f(y^{-1}x\xi)\lambda(x\xi, H)^{-1}d\xi d\mu(xH) &= \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\lambda(yx\xi, H)^{-1}d\xi d\mu_y(xH) = \\ &= \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\lambda(yx\xi, H)^{-1}\lambda(y, xH)d\xi d\mu(xH) = \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\lambda(x\xi, H)^{-1}d\xi d\mu(xH). \end{aligned}$$

Torej je preslikva $f \mapsto \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\lambda(x\xi, H)^{-1}d\xi d\mu(xH)$ levo invarianten pozitiven linearen funkcional na $C_c(G)$, tako da je proporcionalen Haarovi meri, tj. obstaja $c > 0$, tako da je

$$(6) \quad \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\lambda(x\xi, H)^{-1}d\xi d\mu(xH) = c \int_G f(x)dx.$$

Naj bo $\rho(x) = c\lambda(x, H)$ za vsak $x \in G$. Nadomestimo v (6) funkcijo f s funkcijo $f\lambda(\cdot, H)$, pa dobimo

$$\int_{G/H} \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH) = \int_G f(x)\rho(x)dx.$$

To je formula (3) iz izreka 3. Še več, za $\eta \in H$ in $f \in C_c(G)$, je

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\rho(x\eta)dx &= \Delta_G(\eta)^{-1} \int_G f(x\eta^{-1})\rho(x)dx = \Delta_G(\eta)^{-1} \int_{G/H} \int_H f(x\xi\eta^{-1})d\xi d\mu(xH) = \\ &= \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta) \int_{G/H} \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH) = \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta) \int_G f(x)\rho(x)dx. \end{aligned}$$

Torej imamo $\rho(x\eta) = \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta)\rho(x)$. Ker je poleg tega ρ zvezna in pozitivna funkcija, je kvazi invariantna.

Denimo še, da sta μ in μ' dve krepko kvazi invariantni meri s pripadajočima kvazi invariantnima funkcijama ρ in ρ' . Po definiciji takih funkcij je kvocient $\rho'(y)/\rho(y)$ odvisen le od levega odseka, v katerem je y . Torej definira pozitivno zvezno funkcijo ϕ na G/H . Za vsak $f \in C_c(G)$ je zato $P(f\rho'/\rho) = (Pf)\phi$ in zato $d\mu'/d\mu = \phi$, saj velja

$$\begin{aligned} \int_{G/H} Pf(xH)d\mu'(xH) &= \int_G f(x)\rho'(x)dx = \int_G (f(x)\rho'(x)/\rho(x))\rho(x)dx = \\ &= \int_{G/H} Pf(xH)\phi(x)d\mu(xH). \end{aligned}$$

4. Amenabilne grupe

Poleg Haarove mere na lokalno kompaktni grupi G je za analizo zelo koristno sredstvo tudi invariantna sredina na algebri $L^\infty(G)$ in z njo povezana amenabilnost grup.

Sredine

Definicija 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in $E \subset L^\infty(G)$ linearen podprostor, ki vsebuje konstantne funkcije na G . Sredina na E je omejen linearen funkcional $m \in E^*$ z lastnostjo $\langle 1, m \rangle = \|m\| = 1$.

Hitro vidimo, da je množica S vseh sredin na E šibko- $*$ zaprta, torej šibko- $*$ kompaktna konveksna podmnožica v E^* . Sredino lahko opredelimo tudi drugače. Rečemo, da je linearen podprostor $E \subset L^\infty(G)$ simetričen, če je zaprt za konjugiranje, linearen funkcional m na E pa pozitiven, če je $\langle \phi, m \rangle \geq 0$ za vsak $\phi \in E$, $\phi \geq 0$.

Trditev 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in $E \subset L^\infty(G)$ linearen podprostor, ki vsebuje konstantne funkcije. Če je E simetričen, je linearen funkcional m z lastnostjo $\langle 1, m \rangle = 1$ sredina na E natanko takrat, ko je pozitiven.

Dokaz. Naj bo m sredina na E , tj. naj poleg $\langle 1, m \rangle = 1$ velja še $\|m\| = 1$. Pokažimo najprej, da je $\langle \phi, m \rangle \in \mathbb{R}$ za vsako realno funkcijo $\phi \in E$. Lahko privzamemo, da je $\|\phi\|_\infty = 1$. Naj bo $\langle \phi, m \rangle = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem imamo za vsak $t \in \mathbb{R}$ oceno

$$(\beta + t)^2 \leq |\alpha + i(\beta + t)|^2 = |\langle \phi + it, m \rangle|^2 \leq \|\phi + it\|_\infty^2 \leq 1 + t^2,$$

se pravi $2\beta t \leq 1 - \beta^2$. Torej mora biti $\beta = 0$. Zdaj naj bo $0 \leq \phi \leq 1$, tako da je $\|\psi\|_\infty \leq 1$ za realno funkcijo $\psi = 2\phi - 1$. Ker je $|\langle \psi, m \rangle| \leq \|\psi\|_\infty \leq 1$, velja

$$\langle \phi, m \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 + \psi, m \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle \psi, m \rangle) \geq 0.$$

Obratno, naj bo $m \geq 0$ in $\phi \in E$ zaenkrat realna funkcija. Potem je $\psi = \|\phi\|_\infty \cdot 1 - \phi \geq 0$ in zato $\langle \psi, m \rangle \geq 0$. Sledi $\langle \phi, m \rangle \in \mathbb{R}$ in celo $\langle \phi, m \rangle \leq \|\phi\|_\infty$. Če isto storimo s funkcijo $-\phi$, dobimo še $-\langle \phi, m \rangle \leq \|\phi\|_\infty$, tako da imamo $|\langle \phi, m \rangle| \leq \|\phi\|_\infty$. Splošno, za poljubno funkcijo $\phi \in E$ izberemo $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tako da je $\langle \alpha\phi, m \rangle = |\langle \phi, m \rangle|$. Po predpostavki obstajata $\phi_1, \phi_2 \in E$, da je $\alpha\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Torej je $\langle \phi_1, m \rangle + i\langle \phi_2, m \rangle = \langle \alpha\phi, m \rangle \geq 0$, zato sta tudi $\langle \phi_1, m \rangle, \langle \phi_2, m \rangle \in \mathbb{R}$ in $\langle \phi_2, m \rangle = 0$. Če upoštevamo, da velja po prejšnji ugotovitvi neenakost $\langle \phi_1, m \rangle \leq \|\phi_1\|_\infty$ za realno funkcijo ϕ_1 , imamo torej

$$|\langle \phi, m \rangle| = \langle \alpha\phi, m \rangle = \langle \phi_1, m \rangle \leq \|\phi_1\|_\infty \leq \|\alpha\phi\|_\infty = \|\phi\|_\infty.$$

Definicija 2. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in E simetrični podprostor v $L^\infty(G)$, ki vsebuje konstante. Potem je

- (a) podprostor E levo invarianten, če je $L_x\phi \in E$ za vsak $\phi \in E$ in $x \in G$;
- (b) sredina m na levo invariantnem podprostoru E levo invariantna, če je $\langle L_x\phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle$ za vsak $\phi \in E$ in $x \in G$.

Ker je $L_x\phi = \delta_x * \phi$, lahko levo invariantnost sredine povemo tudi z enakostjo $\langle \delta_x * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle$ za vsak $\phi \in E$ in $x \in G$.

Simetrični podprostori v $L^\infty(G)$, ki vsebujejo konstante, so npr. poleg prostora $L^\infty(G)$ še podprostori $C_b(G)$ (vse omejene zvezne funkcije na G), $C_{lu}(G)$ (vse levo enakomerno zvezne funkcije na G), $C_{ru}(G)$ (vse desno enakomerno zvezne funkcije na G) in $C_u(G)$ (vse enakomerno zvezne funkcije na G). Vsi ti standardni podprostori so levo invariantni in vsebujejo $C_0(G)$.

Amenabilnost

Zdaj lahko definiramo osnovni pojem tega razdelka.

Definicija 3. Lokalno kompaktna grupa G je *amenabilna*, če obstaja na $L^\infty(G)$ levo invariantna sredina.

Trditev 2. Vsaka kompaktna grupa G je amenabilna.

Dokaz. Levo invariantna sredina na kompaktni grupi G je definirana s predpisom (kjer je dx normalizirana Haarova mera na G in $\phi \in L^\infty(G)$)

$$\langle \phi, m \rangle = \int_G \phi(x) dx.$$

V posebnem primeru je vsaka končna grupa (z diskretno topologijo) amenabilna.

Trditev 3. Vsaka lokalno kompaktna Abelova grupa G je amenabilna.

Dokaz. Množica S vseh sredin na $L^\infty(G)$ je neprazna (glej definicijo 4 spodaj), šibko- $*$ kompaktna in konveksna. Za vsak $x \in G$ naj bo L_x^* adjungirani operator k levemu premiku L_x na $L^\infty(G)$. Potem je L_x^* šibko- $*$ zvezen in ohranja S , saj je $\langle 1, L_x^* m \rangle = \langle L_x 1, m \rangle = \langle 1, m \rangle = 1 = \|m\| = \|L_x^* m\|$ za vsako sredino m . Zaradi komutativnosti grupe G velja $L_x^* L_y^* = (L_y L_x)^* = L_{yx}^* = L_{xy}^* = (L_x L_y)^* = L_y^* L_x^*$ za $x, y \in G$. Zato lahko uporabimo izrek Markov-Kakutani za komutativno grupo operatorjev L_x^* , ki ohranjajo kompaktno konveksno množico S (glej dodatek C), da si zagotovimo eksistenco negibne točke $m \in S$. Velja torej $L_x^* m = m$ za vsak $x \in G$, kar pa že pomeni, da je m levo invariantna sredina na G .

V konkretnih primerih lahko poiščemo levo invariantno sredino neposredno, brez sklicevanja na splošne izreke.

Zgled. Naj bo $G = \mathbb{Z}$, aditivna grupa celih števil. Ker je diskretna, je $L^\infty(G) = L^\infty(\mathbb{Z}) = l^\infty(\mathbb{Z})$. Za vsak $n = 1, 2, \dots$ definirajmo $m^{(n)} \in l^\infty(\mathbb{Z})^*$ s predpisom

$$\langle \phi, m^{(n)} \rangle = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \phi(j), \quad (\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})).$$

Očitno je $m^{(n)} \geq 0$ in $\langle 1, m^{(n)} \rangle = 1$. Torej je $m^{(n)}$ po trditvi 1 sredina na $l^\infty(\mathbb{Z})$ in $\|m^{(n)}\| = 1$ za vsak n . Za vsak $k \in \mathbb{Z}$ in $\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})$ je

$$\langle L_k \phi, m^{(n)} \rangle = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \phi(j-k) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n-k}^{n-k} \phi(j)$$

in za vsak $n > |k|$ velja

$$|\langle \phi - L_k \phi, m^{(n)} \rangle| \leq \frac{2|k|}{2n+1} \|\phi\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ker je množica S vseh sredin šibko- $*$ kompaktna, obstaja podzaporedje $(m^{(n_i)})$, ki šibko- $*$ konvergira proti nekemu elementu $m \in S$. Torej mora biti $\langle \phi - L_k \phi, m \rangle = 0$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Se pravi, da je m levo invariantna sredina na \mathbb{Z} .

Obstajajo tudi lokalno kompaktno grupe, ki niso amenabilne. Tak primer bomo spoznali ob koncu razdelka.

Topološka invariantnost

Označimo $S_1(G) = \{f \in L^1(G); f \geq 0, \|f\|_1 = 1\}$. Hitro vidimo, da je to neprazna zaprta podmnožica enotske krogle v $L^1(G)$. S kanonsko vložitvijo v drugi dual $L^1(G)^{**} = L^\infty(G)^*$ lahko imamo $S_1(G)$ za podmnožico v $S = S(G)$, množici vseh sredin na $L^\infty(G)$.

Lema 1. $S_1(G)$ je šibko- $*$ gosta podmnožica v množici vseh sredin $S(G)$ na $L^\infty(G)$.

Dokaz. Vsak element $f \in S_1(G)$ definira omejen linearen funkcional, ki je zaradi $\langle f, 1 \rangle = \int_G f(x)dx = \|f\|_1 = 1$ sredina na $L^\infty(G)$. Ker je enotska krogla v $L^1(G)$, kot podmnožica v $L^\infty(G)^*$, po Goldstineovem izreku (glej dodatek C) šibko- $*$ gosta v enotski krogli v $L^\infty(G)^*$ in je vsak pozitiven element v $L^\infty(G)^*$ šibko- $*$ limita pozitivnih funkcij iz $L^1(G)$, je $S_1(G)$ šibko- $*$ gosta podmnožica v množici vseh sredin na $L^\infty(G)$.

Definicija 4. Naj bo E eden od standardnih levo invariantnih podprostorov v $L^\infty(G)$. Rečemo, da je sredina $m \in E^*$ topološko levo invariantna, če za vsak $\phi \in E$ in $f \in S_1(G)$ velja

$$\langle f * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

Trditev 4. Naj bo G lokalno kompaktna grupa. Potem velja:

- (a) Če je E eden od standardnih invariantnih podprostorov v $L^\infty(G)$, je vsaka topološko levo invariantna sredina na E levo invariantna.
- (b) Če je $m \in C_u(G)^*$ levo invariantna sredina, je m topološko levo invariantna sredina.

Dokaz. (a) Naj bo δ_x Diracova mera v točki $x \in G$. Potem je za vsak $f \in S_1(G)$ tudi $f * \delta_x \in S_1(G)$, saj po definiciji 2.3 velja $f * \delta_x = \int_G R_{y^{-1}} f \Delta(y^{-1}) d\delta_x(y) = \Delta(x^{-1}) R_{x^{-1}} f$ in zato $f * \delta_x \geq 0$ in $\|f * \delta_x\|_1 = \Delta(x^{-1}) \|R_{x^{-1}} f\|_1 = \|f\|_1 = 1$. Za vsak $\phi \in E$ je $\delta_x * \phi \in E$ in zato

$$\langle L_x \phi, m \rangle = \langle \delta_x * \phi, m \rangle = \langle f * (\delta_x * \phi), m \rangle = \langle (f * \delta_x) * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

(b) Zdaj imamo za vsak $\phi \in C_u(G)$ in $f \in L^1(G)$ enakost $\langle L_x(f * \phi), m \rangle = \langle f * \phi, m \rangle$. Ker je za vsak $\phi \in C_u(G)$ preslikava $f \mapsto \langle f * \phi, m \rangle$ zvezen linearen funkcional na $L^1(G)$, obstaja $\psi \in L^\infty(G)$, tako da je $\langle f * \phi, m \rangle = \int_G f(y) \psi(y) dy$. Zaradi prejšnje enakosti pa je

$$\int_G f(y) \psi(y) dy = \langle f * \phi, m \rangle = \langle L_x(f * \phi), m \rangle = \langle L_x f * \phi, m \rangle = \int_G L_x f(y) \psi(y) dy =$$

$$\int_G f(x^{-1}y) \psi(y) dy = \int_G f(y) \psi(xy) dy = \int_G f(y) L_{x^{-1}} \psi(y) dy.$$

Odtod dobimo $L_{x^{-1}} \psi = \psi$ za vsak $x \in G$, torej je funkcija ψ konstantna. Ker je odvisna od ϕ , lahko zapišemo $\langle f * \phi, m \rangle = c(\phi) \int_G f(y) dy$. Za $f \in S_1(G)$ pa velja $\langle f * \phi, m \rangle = c(\phi)$ za vsak $\phi \in C_u(G)$. Po trditvi 2.4 obstaja približna enota $\{u_\alpha\}$ za $L^1(G)$, ki je normirana in pozitivna, torej vsebovana v $S_1(G)$. Hkrati je $\{u_\alpha\}$ tudi leva približna enota za levi Banachov modul $C_u(G)$ nad grupno algebro $L^1(G)$ (glej trditev 2.4(b)). Zato je za vsak $f \in S_1(G)$ in $\phi \in C_u(G)$ res

$$\langle f * \phi, m \rangle = c(\phi) = \lim_\alpha \langle u_\alpha * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

To pomeni, da je sredina m tudi topološko levo invariantna.

Izrek 1. Za lokalno kompaktno grupo G so ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) Grupa G je amenabilna.
- (ii) Obstaja levo invariantna sredina na $C_b(G)$.
- (iii) Obstaja levo invariantna sredina na $C_{lu}(G)$.
- (iv) Obstaja levo invariantna sredina na $C_{ru}(G)$.
- (v) Obstaja levo invariantna sredina na $C_u(G)$.

Dokaz. Zožitev levo invariantne sredina na podalgebro je tam spet levo invariantna sredina. Zaradi inkluzij $C_u(G) \subset C_{lu}(G), C_{ru}(G) \subset C_b(G) \subset L^\infty(G)$ zadošča pokazati eksistenco levo invariantne sredine na $L^\infty(G)$, če taka obstaja na $C_u(G)$.

Naj bo torej m levo invariantna sredina na $C_u(G)$. Po trditvi 4(b) je tudi topološko levo invariantna. Naj bo $\{u_\alpha\}$ omejena približna enota za algebro $L^1(G)$, ki pripada množici $S_1(G)$ in je hkrati približna enota za bimodul $C_u(G)$ (trditev 2.4). Potem je $u_\alpha * \phi * u_\alpha \in C_u(G)$ za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ (glej trditev 2.5), zato lahko definiramo $\langle \phi, m_\alpha \rangle = \langle u_\alpha * \phi * u_\alpha, m \rangle$ za vsak $\phi \in L^\infty(G)$. Tu je (m_α) z normo 1 omejeno pozitivno zaporedje v $L^\infty(G)^*$, zato obstaja šibko- $*$ konvergentno podzaporedje v (m_α) (obdržimo iste oznake), ki v šibki- $*$ topologiji konvergira k elementu $\tilde{m} \in L^\infty(G)^*$, za katerega tudi velja $\tilde{m} \geq 0$. Zaradi ocene

$$|\langle u_\alpha * 1 * u_\alpha - 1, m \rangle| \leq |(\langle u_\alpha * 1 - 1 \rangle * u_\alpha, m)| + |(\langle 1 * u_\alpha - 1 \rangle, m)| \leq \|u_\alpha * 1 - 1\|_\infty \|u_\alpha\|_1 + \|1 * u_\alpha - 1\|_\infty \rightarrow 0$$

imamo tudi $\langle 1, \tilde{m} \rangle = \lim_\alpha \langle u_\alpha * 1 * u_\alpha, m \rangle = \langle 1, m \rangle = 1$, tako da je po trditvi 1 tudi \tilde{m} sredina na $L^\infty(G)$. Zaradi $(u_\alpha * f - f * u_\alpha) * \phi * u_\alpha \rightarrow 0$ in topološke leve invariantnosti sredine m na $C_u(G)$ dobimo za vsak $f \in S_1(G)$

$$\begin{aligned} \langle f * \phi, \tilde{m} \rangle &= \lim_\alpha \langle f * \phi, m_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle u_\alpha * f * \phi * u_\alpha, m \rangle = \lim_\alpha \langle f * u_\alpha * \phi * u_\alpha, m \rangle = \\ &= \lim_\alpha \langle u_\alpha * \phi * u_\alpha, m \rangle = \lim_\alpha \langle \phi, m_\alpha \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle. \end{aligned}$$

Vidimo, da je tudi \tilde{m} topološko levo invariantna sredina na $L^\infty(G)$. Trditvi 4(a) je potem \tilde{m} levo invariantna sredina.

Posledica. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in G_d ista grupa, opremljena z diskretno topologijo. Če je grupa G_d amenabilna, je amenabilna tudi grupa G .

Dokaz. Za diskretno grupo G_d je $L^\infty(G_d) = l^\infty(G)$. Ker je $C_b(G) \subset l^\infty(G)$, je za vsako levo invariantno sredino m na $l^\infty(G)$ zožitev $m|_{C_b(G)}$ levo invariantna sredina na $C_b(G)$. Torej je po izreku 1 grupa G amenabilna.

Kasneje bomo videli, da obratno nasploh ne velja.

Desna amenabilnost

Amenabilnost grupe smo definirali s pomočjo levo invariantne sredine na $L^\infty(G)$. Podobno bi lahko definirali desno (ali obojestransko) amenabilnost z desno invariantno ali (obojestransko) invariantno sredino. K sreči vse te različice amenabilnosti med seboj sovpadajo, kot bomo videli v izreku 2. Prej potrebujemo še eno karakterizacijo amenabilnosti.

Trditev 5. Lokalno kompaktna grupa G je amenabilna natanko takrat, ko v $S_1(G)$ obstaja posplošeno zaporedje (f_α) , tako da je $\lim_\alpha \|L_x f_\alpha - f_\alpha\|_1 = 0$ za vsak $x \in G$.

Dokaz. Če je m levo invariantna sredina, jo lahko po lemi 1 v šibki- $*$ topologiji aproksimiramo s funkcijami iz $S_1(G)$. Potem za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ in vsak $x \in G$ velja

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi - L_x \phi, m \rangle = \lim_\alpha \langle f_\alpha, \phi - L_x \phi \rangle = \lim_\alpha \left(\int f_\alpha(y) \phi(y) dy - \int f_\alpha(y) \phi(x^{-1}y) dy \right) = \\ &= \lim_\alpha \left(\int f_\alpha(y) \phi(y) dy - \int f_\alpha(xy) \phi(y) dy \right) = \lim_\alpha \int (f_\alpha - L_{x^{-1}} f_\alpha)(y) \phi(y) dy = \\ &= \lim_\alpha \langle f_\alpha - L_{x^{-1}} f_\alpha, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Torej je 0 v šibkem zaprtju množice $\{f - L_{x^{-1}} f; f \in S_1(G)\}$. Ker je ta množica konveksna in ker se šibko zaprtje konveksne množice ujema z zaprtjem po normi, obstaja posplošeno zaporedje $f_\alpha \in S_1(G)$ tudi $\lim_\alpha \|f_\alpha - L_{x^{-1}} f_\alpha\|_1 = 0$ oziroma $\lim_\alpha \|L_x f_\alpha - f_\alpha\|_1 = 0$ za vsak $x \in G$. Obratno lahko sklepamo še lažje in dokaz je končan.

Izrek 2. *Za lokalno kompaktno grupo G je ekvivalentno:*

- (i) *Grupa G je amenabilna.*
- (ii) *Na $L^\infty(G)$ obstaja desno invariantna sredina.*
- (iii) *Na $L^\infty(G)$ obstaja invariantna sredina.*

Dokaz. Točki (i) in (ii) sta ekvivalentni. Če je namreč m levo invariantna sredina na $L^\infty(G)$, je s predpisom $\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \check{\phi}, m \rangle$, kjer je $\check{\phi}(x) = \phi(x^{-1})$ za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ in $x \in G$, določena na $L^\infty(G)$ desno invariantna sredina, in obratno. Iz (iii) sledi (i) trivialno. Dokažimo še obratno implikacijo (i) \implies (iii).

Naj bo (f_α) posplošeno zaporedje iz trditve 5. Ker je $L_x f_\alpha = \delta_x * f_\alpha$, velja enakost $\lim_\alpha \|\delta_x * f_\alpha - f_\alpha\|_1 = 0$ in zato tudi

$$\lim_\alpha \|f_\alpha^* * \delta_{x^{-1}} - f_\alpha^*\|_1 = \lim_\alpha \|(\delta_x * f_\alpha - f_\alpha)^*\|_1 = 0$$

za vsak $x \in G$. Potem je zaradi

$$(f_\alpha * f_\alpha^*)(x) = \int f_\alpha(xy) f_\alpha(y) \Delta(y) dy \geq 0, \quad \|f_\alpha * f_\alpha^*\|_1 = \left(\int f_\alpha(y) dy \right)^2 = 1$$

tudi $g_\alpha = f_\alpha * f_\alpha^* \in S_1(G)$ za vsak α in za vsak $x \in G$ velja

$$\lim_\alpha \|\delta_x * g_\alpha - g_\alpha\|_1 = \lim_\alpha \|(\delta_x * f_\alpha - f_\alpha) * f_\alpha^*\|_1 = 0$$

in

$$\lim_\alpha \|g_\alpha * \delta_x - g_\alpha\|_1 = \lim_\alpha \|f_\alpha * (f_\alpha^* * \delta_x - f_\alpha^*)\|_1 = 0.$$

Naj bo m šibko- $*$ stekališče (limita) posplošenega zaporedja g_α v $L^\infty(G)^*$. Zaradi zgornjih limit je m invariantna sredina na $L^\infty(G)$, saj za vsak $x \in G$ in vsak $\phi \in L^\infty(G)$ velja

$$\begin{aligned} \langle L_x \phi, m \rangle &= \lim_\alpha \langle L_x \phi, g_\alpha \rangle = \lim_\alpha \int \phi(x^{-1}y) g_\alpha(y) dy = \lim_\alpha \int \phi(y) g_\alpha(xy) dy = \\ &= \lim_\alpha \langle \phi, \delta_{x^{-1}} * g_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle \phi, g_\alpha \rangle = \langle \phi, m \rangle \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \langle R_x \phi, m \rangle &= \lim_\alpha \langle R_x \phi, g_\alpha \rangle = \lim_\alpha \int \phi(yx) g_\alpha(y) dy = \lim_\alpha \int \phi(y) g_\alpha(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) dy = \\ &= \lim_\alpha \langle \phi, g_\alpha * \delta_x \rangle = \lim_\alpha \langle \phi, g_\alpha \rangle = \langle \phi, m \rangle. \end{aligned}$$

Ogledali si bomo še vprašanje, ali se amenabilnost ohranja pri prehodu na zaprto podgrupo ali na kvocientno grupo.

Amenabilnost faktorskih grup

Izrek 3. *Naj bo G amenabilna lokalno kompaktna grupa, H druga lokalno kompaktna grupa in $\theta : G \rightarrow H$ zvezen homomorfizem grup z gosto zalogo vrednosti. Potem je tudi H amenabilna grupa.*

Dokaz. Definirajmo zvezen homomorfizem $\theta^* : C_b(H) \rightarrow C_b(G)$ s predpisom $\theta^*(\phi) = \phi \circ \theta$ za $\phi \in C_b(H)$. Če je celo $\phi \in C_{lu}(H)$, je $\theta^*(\phi) \in C_{lu}(G)$. To vidimo iz definicije leve enakomerne zveznosti (glej definicijo I.1.4). Iz $x_\alpha \rightarrow x$ v G namreč sledi (enakomerno po $y \in G$)

$$\begin{aligned} L_{x_\alpha} \theta^*(\phi)(y) &= \theta^*(\phi)(x_\alpha^{-1}y) = \phi(\theta(x_\alpha^{-1}y)) = \phi(\theta(x_\alpha)^{-1}\theta(y)) = \\ &= (L_{\theta(x_\alpha)} \phi)(\theta(y)) = \theta^*(L_{\theta(x_\alpha)} \phi)(y) \rightarrow \theta^*(L_{\theta(x)} \phi)(y) = \dots = L_x \theta^*(\phi)(y). \end{aligned}$$

Naj bo m levo invariantna sredina na $C_{lu}(G)$. Definirajmo $\tilde{m} \in C_{lu}(H)^*$ s predpisom $\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^*(\phi), m \rangle$ za vsak $\phi \in C_{lu}(H)$. Takoj vidimo, da je \tilde{m} sredina na $C_{lu}(H)$. Nadalje je za vsak $x \in G$ res

$$(2) \quad \langle L_{\theta(x)} \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \theta^*(L_{\theta(x)} \phi), m \rangle = \langle L_x \theta^*(\phi), m \rangle = \langle \theta^*(\phi), m \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle.$$

Če je $\xi \in H$ poljuben element, obstaja zaradi gostosti zaloge vrednosti homomorfizma θ tako zaporedje elementov $x_\alpha \in G$, da velja $\theta(x_\alpha) \rightarrow \xi$. Za $\phi \in C_{lu}(H)$ je potem $\lim_\alpha L_{\theta(x_\alpha)}\phi = L_\xi\phi$ in iz (2) dobimo $\langle L_\xi\phi, \tilde{m} \rangle = \lim_\alpha \langle L_{\theta(x_\alpha)}\phi, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle$, tako da je \tilde{m} levo invariantna sredina na $C_{lu}(H)$.

Posledica. Naj bo G amenabilna lokalno kompaktna grupa in N zaprta podgrupa edinka v G . Potem je factorska grupa G/N amenabilna.

Dokaz. Kvocientna preslikava je zvezen homomorfizem iz G na G/N .

Trditev 6. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in (H_α) z inkluzijo usmerjeno zaporedje zaprtih amenabilnih podgrup v G , katerih unija $\cup_\alpha H_\alpha$ je gosta v G . Potem je tudi grupa G amenabilna.

Dokaz. Za vsak α naj bo m_α levo invariantna sredina na $C_b(H_\alpha)$. Za vsak α naj bo funkcional $\tilde{m}_\alpha \in C_b(G)^*$ definiran s predpisom ($\phi \in C_b(G)$)

$$\langle \phi, \tilde{m}_\alpha \rangle = \langle \phi|_{H_\alpha}, m_\alpha \rangle.$$

Naj bo m šibko- $*$ stekališče posplošenega zaporedja (\tilde{m}_α) v $C_b(G)^*$. Potem je m sredina na $C_b(G)$. Izberimo $x \in \cup_\alpha H_\alpha$; ta element pripada neki podgrupi H_β in vsaki poznejši podgrupi, zato v tem primeru za vsak $\phi \in C_b(G)$ velja

$$\langle L_x\phi, m \rangle = \lim_\alpha \langle L_x\phi, \tilde{m}_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle L_x\phi|_{H_\alpha}, m_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle \phi|_{H_\alpha}, m_\alpha \rangle = \lim_\alpha \langle \phi, \tilde{m}_\alpha \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

Kot v dokazu izreka 3 dobimo, da velja $\langle L_x\phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle$ za vsak $x \in G$ in vsak $\phi \in C_{lu}(G)$. Torej je $m|_{C_{lu}(G)}$ levo invariantna sredina na $C_{lu}(G)$.

Grupa G je lokalno končna, če vsaka končna množica elementov v G generira končno podgrupo v G . Naj bo \mathcal{F} družina vseh končnih podmnožic v G , za vsak $F \in \mathcal{F}$ pa označimo z $\langle F \rangle$ podgrupo v G , generirano z F .

Posledica. Vsaka lokalno končna grupa je amenabilna.

Dokaz. Za lokalno končno grupo G je $(\langle F \rangle)_{F \in \mathcal{F}}$ z inkluzijo usmerjena družina podgrup v G z lastnostjo $\cup_{F \in \mathcal{F}} \langle F \rangle = G$. Ker so končne grupe kompaktne v diskretni topologiji, so amenabilne. Po trditvi 6 je potem tudi grupa G amenabilna.

Amenabilnost zaprtih podgrup

Za amenabilnost zaprte podgrupe $H \subset G$ potrebujemo tako imenovane Bruhatove funkcije za H .

Definicija 5. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in H njena zaprta podgrupa. Bruhatova funkcija za H je taka zvezna pozitivna funkcija β na grupi G , da je nosilec $\text{supp}(\beta|_{KH})$ kompakten za vsako kompaktno podmnožico $K \subset G$ in da je $\int_H \beta(x\xi)d\xi = 1$ za vsak $x \in G$.

V posebnem primeru je nosilec zožitve funkcije β na vsak levi odsek po podgrupi H kompakten. Eksistenco Bruhatove funkcije zagotavlja naslednja lema.

Lema 2. Za vsako zaprto podgrupo H lokalno kompaktna grupe G obstaja na G Bruhatova funkcija.

Dokaz. Naj bo f funkcija iz leme 3.4. Definirajmo novo funkcijo α na G s predpisom

$$\alpha(x) = \int_H f(x\xi)d\xi.$$

Po lemi 3.4(ii) je za vsak $x \in G$ integrand na podgrupi H integrabilen, zato je funkcija α dobro definirana in zvezna. Zaradi leve invariantnosti Haarove mere na H je α konstantna na vsakem levem odseku po podgrupi H . Po lemi 3.4(i) je celo $\alpha(x) > 0$ za vsak $x \in G$. Zdaj za β lahko vzamemo normirano funkcijo f , tj. $\beta = f/\alpha$. Potem je tudi β pozitivna zvezna funkcija na G . Zaradi leme 3.4(ii) je $\text{supp}(\beta|_{KH})$ kompakten za vsako kompaktno množico K . Poleg tega je β res Bruhatova funkcija, saj velja

$$\int_H \beta(x\xi)d\xi = \int_H f(x\xi)/\alpha(x\xi)d\xi = \int_H f(x\xi)d\xi/\alpha(x) = 1.$$

Izrek 4. *Naj bo G amenabilna lokalno kompaktna grupa in H zaprta podgrupa v G . Potem je tudi podgrupa H amenabilna.*

Dokaz. Naj bo β Bruhatova funkcija za podgrupo H . Definirajmo linearno preslikavo $T : C_b(H) \rightarrow C_b(G)$ s predpisom ($x \in G$)

$$(T\phi)(x) = \int_H \phi(\xi)L_x\beta(\xi)d\xi = \int_H \phi(\xi)\beta(x^{-1}\xi)d\xi.$$

Zaradi kompaktnega nosilca funkcije $\beta|_{x^{-1}H}$ je $\phi L_x\beta \in C_c(H)$, zato integral obstaja. Ker je tudi $\text{supp}(\beta|_{KH})$ kompakten za vsako kompaktno podmnožico $K \subset G$ in je $C_c(G) \subset C_{lu}(G)$, hitro vidimo, da je $T\phi \in C_b(G)$. Torej je operator T dobro definiran, omejen in celo kontrakcija. Poleg tega zaradi druge lastnosti Bruhatove funkcije velja $T1 = 1$.

Naj bo m levo invariantna sredina na $C_b(G)$ in $\tilde{m} = T^*m$. Potem je očitno \tilde{m} sredina na $C_b(H)$. Je pa tudi levo invariantna, saj za vsak $x \in G$, $\eta \in H$ in $\phi \in C_b(H)$ velja

$$T(L_\eta\phi)(x) = \int_H \phi(\eta^{-1}\xi)\beta(x^{-1}\xi)d\xi = \int_H \phi(\xi)\beta(x^{-1}\eta\xi)d\xi = (T\phi)(\eta^{-1}x) = (L_\eta T\phi)(x)$$

in zato

$$\langle L_\eta\phi, \tilde{m} \rangle = \langle T(L_\eta\phi), m \rangle = \langle L_\eta(T\phi), m \rangle = \langle T\phi, m \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle.$$

Amenabilnost rešljivih grup

Izreka 3 in 4 skupaj povesta, da sta za amenabilno lokalno kompaktno grupo G amenabilni zaprta podgrupa edinka N in factorska grupa G/N . Velja pa tudi obratno.

Izrek 5. *Naj bo G lokalno kompaktna grupa in N taka zaprta podgrupa edinka v G , da sta tako N kot G/N amenabilni. Potem je tudi grupa G amenabilna.*

Dokaz. Naj bo \tilde{m} levo invariantna sredina na $C_b(N)$, ki obstaja zaradi amenabilnosti podgrupe N . Za $\phi \in C_{lu}(G)$ pa definirajmo funkcijo $T\phi$ na grupi G s predpisom ($x \in G$)

$$(T\phi)(x) = \langle L_x\phi|_N, \tilde{m} \rangle.$$

Zaradi $\phi \in C_{lu}(G)$ je $T\phi$ omejena zvezna funkcija na G , torej $T\phi \in C_b(G)$. Poleg tega je $T1 = 1$ in $T\phi \geq 0$ za $\phi \geq 0$. Prav tako hitro vidimo, da je $T : C_{lu}(G) \rightarrow C_b(G)$ omejena linearna preslikava. Če elementa $x, y \in G$ pripadata istemu odseku po podgrupi N , obstaja tak $\xi \in N$, da je $x = \xi y$ in zato

$$(T\phi)(x) = \langle L_x\phi|_N, \tilde{m} \rangle = \langle L_\xi(L_y\phi|_N), \tilde{m} \rangle = \langle L_y\phi|_N, \tilde{m} \rangle = (T\phi)(y).$$

Funkcija $T\phi$ je torej konstantna na odsekih, zato definira omejeno zvezno funkcijo na G/N . To pomeni, da T inducira omejeno linearno preslikavo $\tilde{T} : C_{lu}(G) \rightarrow C_b(G/N)$. Očitno je $\tilde{T}1 = 1$ in $\tilde{T}\phi \geq 0$ za $\phi \geq 0$. Poleg tega se lahko prepričamo, da za vsak $x \in G$ velja $\tilde{T}(L_x\phi) = R_{xN}\tilde{T}\phi$. Za $x, y \in G$ namreč imamo

$$\begin{aligned} \tilde{T}(L_x\phi)(yN) &= T(L_x\phi)(y) = \langle L_y(L_x\phi)|_N, \tilde{m} \rangle = \langle L_{yx}\phi|_N, \tilde{m} \rangle = \\ &= (T\phi)(yx) = (\tilde{T}\phi)(yxN) = (\tilde{T}\phi)(yNxN) = (R_{xN}\tilde{T}\phi)(yN). \end{aligned}$$

Naj bo zdaj m_r desno invariantna sredina na $C_b(G/N)$, ki obstaja zaradi amenabilnosti faktorke grupe G/N . Definirajmo $m \in C_{lu}(G)^*$ s predpisom ($\phi \in C_{lu}(G)$)

$$\langle \phi, m \rangle = \langle \tilde{T}\phi, m_r \rangle.$$

Sledi $\langle 1, m \rangle = 1$ in $\langle \phi, m \rangle \geq 0$ za $\phi \geq 0$. Torej je m po trditvi 1 sredina na $C_{lu}(G)$, celo levo invariantna, saj za vsak $x \in G$, $\phi \in C_{lu}(G)$ velja

$$\langle L_x\phi, m \rangle = \langle \tilde{T}(L_x\phi), m_r \rangle = \langle R_{xN}\tilde{T}\phi, m_r \rangle = \langle \tilde{T}\phi, m_r \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

Z uporaba izreka 5 lahko dokažemo amenabilnost rešljivih grup. Ponovimo definicijo.

Definicija 6. Grupa G je *rešljiva*, če obstaja taka končna veriga podgrup edink $\{1\} = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = G$, da so faktorke grupe N_j/N_{j-1} Abelove za vsak $j = 1, 2, \dots, n$.

Posledica. Vsaka rešljiva lokalno kompaktna grupa je amenabilna.

Dokaz. Po trditvi 3 je zaradi komutativnosti vsaka faktorke grupa N_j/N_{j-1} amenabilna. Pri predpostavki, da je N_{j-1} amenabilna, je potem po izreku 5 amenabilna tudi podgrupa N_j . Preprost induktivni argument pove, da je potem tudi rešljiva grupa G , opremljena z diskretno topologijo, amenabilna. Rešljivost pa ni odvisna od topologije. Če je torej lokalno kompaktna grupa G rešljiva, je grupa G_d amenabilna. Po posledici izreka 1 je potem amenabilna tudi grupa G .

Zgledi. 1. Videli smo, da je grupa G vseh afinih transformacij realne osi (glej zgled I.4.5) enaka (semidirektnem) produktu dveh zaprtih Abelovih podgrup, namreč podgrupe edinke translacij N in podgrupe raztegov H , torej $G = NH$. Ker je $G/N \cong H$ in sta obe podgrupi, N in H , Abelovi, je grupa G rešljiva in zato amenabilna. To je primer nekompatne nekomutativne amenabilne grupe.

2. Drug primer take grupe je Heisenbergova grupa \mathcal{H} (glej zgled I.4.7), ki je izomorfna grupi \mathbb{R}^3 z množenjem $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + ay)$. Ker je center $Z\mathcal{H}$ te grupe izomorfen aditivni grupi \mathbb{R} , faktorke grupa po centru $\mathcal{H}/Z\mathcal{H}$ pa aditivni grupi \mathbb{R}^2 (homomorfizem $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ima jedro enako $Z\mathcal{H}$), je Heisenbergova grupa \mathcal{H} rešljiva in zato amenabilna.

Neamenabilne grupe

Tipičen primer grupe, ki ni amenabilna, je naslednji.

Trditev 7. Prosta grupa \mathbb{F}_2 z dvema generatorjema ni amenabilna.

Dokaz. Bodita a, b generatorja proste grupe \mathbb{F}_2 . Denimo, da obstaja invariantna sredina m na tej grupi. Ker je grupa neskončna, mora biti $\langle \chi_{\{x\}}, m \rangle = 0$ za vsak $x \in \mathbb{F}_2$, sicer bi lahko za vsak n našli množico $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ z n elementi, tako da bi veljajo

$$\langle \chi_E, m \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \chi_{\{x_j\}}, m \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \chi_{\{x_j\}}, m \rangle = n \langle \chi_{\{x_1\}}, m \rangle.$$

Ta izraz pa ne bi bil omejen, če $\langle \chi_{\{x_1\}}, m \rangle \neq 0$.

Grupo \mathbb{F}_2 lahko razkosamo na paroma disjunktne podmnožice na naslednji način. Za vsak $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ naj bo $F(x)$ podmnožica vseh reduciranih besed v \mathbb{F}_2 , ki se začenjajo s simbolom x . Potem je $\mathbb{F}_2 = \{1\} \cup F(a) \cup F(a^{-1}) \cup F(b) \cup F(b^{-1})$. Torej lahko konstantno funkcijo 1 zapišemo v obliki $1 = \chi_{\{1\}} + \chi_{F(a)} + \chi_{F(a^{-1})} + \chi_{F(b)} + \chi_{F(b^{-1})}$, od koder je

$$(1) \quad \langle \chi_{F(a)}, m \rangle + \langle \chi_{F(a^{-1})}, m \rangle + \langle \chi_{F(b)}, m \rangle + \langle \chi_{F(b^{-1})}, m \rangle = \langle 1, m \rangle = 1.$$

Toda $F(a) = a(\mathbb{F}_2 \setminus F(a^{-1}))$ in zaradi leve invariantnosti sredine m velja

$$\langle \chi_{F(a)}, m \rangle = \langle L_a \chi_{\mathbb{F}_2 \setminus F(a^{-1})}, m \rangle = \langle \chi_{\mathbb{F}_2 \setminus F(a^{-1})}, m \rangle = 1 - \langle \chi_{F(a^{-1})}, m \rangle.$$

Zato je $\langle \chi_{F(a)}, m \rangle + \langle \chi_{F(a^{-1})}, m \rangle = 1$ in podobno $\langle \chi_{F(b)}, m \rangle + \langle \chi_{F(b^{-1})}, m \rangle = 1$, kar je oboje skupaj v nasprotju z enakostjo (1).

Posledica. Če lokalno kompaktna grupa G vsebuje zaprto podgrupo, ki je izomorfná prosti grupi \mathbb{F}_2 z dvema generatorjema, ni amenabilna.

Zgled. Ker je grupa $SO(3)$ kompaktna, je amenabilna. V 4. poglavju bomo videli, da vsebuje podgrupo izomorfná grupi \mathbb{F}_2 , torej grupa $SO(3)_d$ z diskretno topologijo ni amenabilna. To je primer amenabilne lokalno kompaktne grupe G , za katero diskretna grupa G_d ni amenabilna. (Obratno je vedno res po posledici izreka 1.) Podobno velja za vsako grupo $SO(n)$, $n \geq 3$.

Da se tudi pokazati, da vsebuje grupa $PSL(2, \mathbb{R}) \cong SL(2, \mathbb{R})/\{I, -I\}$ zaprto podgrupo, ki je izomorfná prosti grupi \mathbb{F}_2 , tako da $PSL(2, \mathbb{R})$ in potem tudi $SL(2, \mathbb{R})$ ni amenabilna (glej [30], str. 28-29). Odtod potem lahko sklepamo, da nobena od grup $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$ in $GL(n, \mathbb{C})$ ni amenabilna. To so primeri nekompaktnih polenostavnih Liejevih grup, ki nikoli niso amenabilne (glej [26], razdelek 8.7).

Nekaj časa so mislili, da mora biti grupa amenabilna, če ne vsebuje zaprte podgrupe, ki bi bila izomorfná prosti grupi z dvema generatorjema. Vendar je Olšanski leta 1980 konstruiral grupo, ki ni amenabilna, vsaka njena prava podgrupa pa je ciklična (glej [24]). Taka grupa ne more vsebovati zaprte podgrupe, izomorfne prosti grupi \mathbb{F}_2 .

5. Odvajanja grupne algebre

Videli bomo, da je amenabilnost lokalno kompaktne grupe tesno povezana z odvajanji iz njene grupne algebre v bimodule. Spoznali bomo dve novi karakterizaciji amenabilnih grup in nekaj odprtih problemov v zvezi z odvajanji grupne algebre. Najprej potrebujemo nekaj splošnih definicij.

Splošno o bimodulih

Spomnimo se, da je Banachov *bimodul* nad Banachovo algebro \mathcal{A} Banachov prostor E , ki je hkrati levi in desni modul nad \mathcal{A} , levo modulsko množenje $(a, \xi) \mapsto a \cdot \xi$ pa je z desnim modulskim množenjem $(b, \xi) \mapsto \xi \cdot b$ povezano z asociativnostnim zakonom $(a \cdot \xi) \cdot b = a \cdot (\xi \cdot b)$ za vsak $a, b \in \mathcal{A}$ in vsak $\xi \in E$.

Naslednja trditev pove, kako danemu levemu ali desnemu modulu, oziroma bimodulu, na naraven način tudi njegov dual napravimo za modul oziroma bimodul.

Trditev 1. Naj bo \mathcal{A} poljubna Banachova algebra.

(a) Če je E levi Banachov modul nad \mathcal{A} , je njegov dual E^* desni Banachov modul nad \mathcal{A} z desnim modulskim množenjem, definiranim s predpisom ($a \in \mathcal{A}$, $\xi \in E$, $\phi \in E^*$)

$$\langle \xi, \phi \cdot a \rangle = \langle a \cdot \xi, \phi \rangle.$$

(b) Če je E desni Banachov modul nad \mathcal{A} , je njegov dual E^* levi Banachov modul nad \mathcal{A} z desnim modulskim množenjem, definiranim s predpisom ($a \in \mathcal{A}$, $\xi \in E$, $\phi \in E^*$)

$$\langle \xi, a \cdot \phi \rangle = \langle \xi \cdot a, \phi \rangle.$$

(c) Če je E Banachov bimodul nad \mathcal{A} , je njegov dual E^* Banachov bimodul nad \mathcal{A} z levim in desnim modulskim množenjem, definiranim v točkah (a) in (b).

Dokaz. Hitro se lahko prepričamo, da imata tudi levo in desno množenje na dualnem prostoru, definirani v točkah (a) in (b) vse potrebne lastnosti modulskega množenja.

Pokažimo le njuno asociativnost v primeru točke (c): za vsak $a, b \in \mathcal{A}$, $\xi \in E$ in $\phi \in E^*$ velja

$$\langle \xi, (a \cdot \phi) \cdot b \rangle = \langle b \cdot \xi, a \cdot \phi \rangle = \langle (b \cdot \xi) \cdot a, \phi \rangle = \langle b \cdot (\xi \cdot a), \phi \rangle = \langle \xi \cdot a, \phi \cdot b \rangle = \langle \xi, a \cdot (\phi \cdot b) \rangle.$$

Definicija 1. Dualnemu prostoru E^* danega Banachovega (levega, desnega, bi-) modula E nad Banachovo algebro \mathcal{A} , opremljenega z (desnim, levim, obojestranskim) množenjem kot trditvi 1, rečemo *dualni* Banachov (desni, levi, bi-) modul.

Zgled. Grupna algebra $L^1(G)$ je Banachov bimodul nad algebro mer $M(G)$ s konvolucijo kot levim in desnim modulskim množenjem, ker je dvostranski ideal v $M(G)$. Dual prostora $L^1(G)$ je $L^\infty(G)$ in ga lahko po trditvi 1 napravimo za Banachov bimodul nad $M(G)$. Naslednja trditev identificira levo in desno dualno modulsko množenje.

Trditev 2. Naj bo G lokalno kompaktna grupa. Za vsak $\mu \in M(G)$ naj bo $d\check{\mu}(x) = d\mu(x^{-1})$. Potem za vsak $\mu \in M(G)$ in vsak $\phi \in L^\infty(G)$ velja

$$\mu \cdot \phi = \phi * \check{\mu} = \int_G R_{y^{-1}} \phi d\check{\mu}(y) = \int_G R_y \phi d\mu(y)$$

in

$$\phi \cdot \mu = \check{\mu} * \phi = \int_G L_y \phi d\check{\mu}(y) = \int_G L_{y^{-1}} \phi d\mu(y)$$

Dokaz. Po definiciji dualnega množenja in po formulah iz razdelka 2 najdemo

$$\begin{aligned} \langle f, \mu \cdot \phi \rangle &= \langle f * \mu, \phi \rangle = \int \phi(x) (f * \mu)(x) dx = \\ &= \int \phi(x) \int f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) d\mu(y) dx = \int \left(\int \phi(x) f(xy^{-1}) dx \right) \Delta(y^{-1}) d\mu(y) = \\ &= \int \left(\int \phi(xy) f(x) dx \right) d\mu(y) = \int f(x) \left(\int \phi(xy) d\mu(y) \right) dx. \end{aligned}$$

Torej je

$$\mu \cdot \phi = \int_G R_y \phi d\mu(y) = \int_G R_{y^{-1}} \phi d\check{\mu}(y) = \phi * \check{\mu}.$$

Podobno imamo

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \cdot \mu \rangle &= \langle \mu * f, \phi \rangle = \int \phi(x) (\mu * f)(x) dx = \\ &= \int \phi(x) \int f(y^{-1}x) d\mu(y) dx = \int \left(\int \phi(x) f(y^{-1}x) dx \right) d\mu(y) = \\ &= \int \left(\int \phi(yx) f(x) dx \right) d\mu(y) = \int f(x) \left(\int \phi(yx) d\mu(y) \right) dx, \end{aligned}$$

torej

$$\phi \cdot \mu = \int_G L_{y^{-1}} \phi d\mu(y) = \int_G L_y \phi d\check{\mu}(y) = \check{\mu} * \phi.$$

Posebni primer. Naj bo $d\mu_f(x) = f(x)dx$ za vsak $x \in G$ in $f \in L^1(G)$. Ker se hitro vidi, da je tedaj $d(\check{\mu}_f)(x) = \tilde{f}(x)dx$, kjer je $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ za vsak $x \in G$, imamo v tem primeru za vsak $\phi \in L^\infty(G)$

$$\mu_f \cdot \phi = \phi * \tilde{f} \quad \text{in} \quad \phi \cdot \mu_f = \tilde{f} * \phi.$$

Torej je $L^\infty(G)$ dualni bimodul nad $L^1(G)$ z levim modulskim množenjem $f \cdot \phi = \phi * \tilde{f}$ in desnim modulskim množenjem $\phi \cdot f = \tilde{f} * \phi$.

Potrebovali bomo tudi pojem psevdo unitalnega bimodula.

Definicija 2. Rečemo, da je Banachov bimodul E nad Banachovo algebro \mathcal{A} *levo (desno) psevdo unitalen*, če je $E = \{a \cdot \xi; a \in \mathcal{A}, \xi \in E\}$ ($E = \{\xi \cdot b; b \in \mathcal{A}, \xi \in E\}$). Če je hkrati levo in desno psevdo unitalen, rečemo, da je E *psevdo unitalen*. V tem primeru je $E = \{a \cdot \xi \cdot b; a, b \in \mathcal{A}, \xi \in E\}$.

Kadar ima algebra \mathcal{A} enoto, je seveda vsak bimodul nad njo psevdo unitalen. Denimo, da ima \mathcal{A} le omejeno približno (obojeustransko) enoto (u_α) . Tedaj je bimodul E psevdo unitalen natanko takrat, ko je (u_α) približna enota tudi za modul E . Očitno je ta pogoj potreben, zadostnost pa sledi iz Cohenovega faktorizacijskega izreka.

Ker v $L^1(G)$ obstaja omejena dvostranska približna enota, ki je tudi približna enota za $C_u(G)$, je to zgled psevdo unitalnega bimodula nad grupno algebro. Prostora $C_{lu}(G)$ in $C_{ru}(G)$ pa sta zгледа levo oziroma desno psevdo unitalnega bimodula. Brez težav se lahko tudi prepričamo, da je dualni Banachov bimodul E^* (levo, desno) psevdo unitalen, če je tak osnovni Banachov modul E .

Pojem levo (desno) psevdo unitalnosti bi lahko definirali samo za leve (desne) Banachove module.

Splošno o odvajanjih

Definicija 3. Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra in E Banachov bimodul nad \mathcal{A} . Linearen operator $D : \mathcal{A} \rightarrow E$ se imenuje *odvajanje*, če za vsak $a, b \in \mathcal{A}$ velja

$$D(ab) = a \cdot Db + Da \cdot b.$$

Poseben primer bimodula nad \mathcal{A} je kar algebra \mathcal{A} sama. Tedaj je odvajanje D preslikava iz \mathcal{A} v \mathcal{A} . Pomemben zgled odvajanj so t.i. notranja odvajanja.

Definicija 4. Naj bo E Banachov bimodul nad Banachovo algebro \mathcal{A} . Za vsak $\xi \in E$ je *notranje odvajanje* definirano s predpisom ($a \in \mathcal{A}$)

$$D_\xi(a) = a \cdot \xi - \xi \cdot a.$$

Lahko se prepričamo, da je to res odvajanje. Zaradi asociativnosti modulskih množenj namreč za vsak $a, b \in \mathcal{A}$ velja

$$D_\xi(ab) = ab \cdot \xi - \xi \cdot ab = a \cdot (b \cdot \xi) - (\xi \cdot a) \cdot b = a \cdot (b \cdot \xi - \xi \cdot b) + (a \cdot \xi - \xi \cdot a) \cdot b = a \cdot D_\xi b + D_\xi a \cdot b.$$

V posebnem primeru je notranje odvajanje iz \mathcal{A} v \mathcal{A} pri poljubnem $b \in \mathcal{A}$ dano s predpisom $D_b(a) = ab - ba$ ($a \in \mathcal{A}$).

Opombe. V definiciji 3 nismo zahtevali, da je odvajanje D omejen operator. Zveznost odvajanja je včasih avtomatično izpolnjena:

- (1) Notranje odvajanje je vedno zvezno in za njegovo normo velja $\|D_\xi\| \leq 2\|\xi\|$.
- (2) Če je \mathcal{A} polenostavna komutativna Banachova algebra, je edino odvajanje $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ trivialno (ničelno), torej gotovo zvezno (glej npr. [1], str. 95).
- (3) Če je \mathcal{A} C^* -algebra, je vsako odvajanje iz \mathcal{A} v poljuben bimodul E zvezno (glej [36], str. 121, in tamkajšnje reference).

Zveznost odvajanj so dokazali še v mnogih drugih primerih, ni pa to splošna zakonitost. Obstajajo tudi primeri Banachovih algeber in Banachovih bimodulov, na katerih obstajajo nezvezna odvajanja, npr. iz algebre $A(\mathbb{D})$ vseh zveznih funkcij na enotskem disku \mathbb{D} , analitičnih v notranjosti, v določene bimodule (glej [5], str. 57). Glej tudi [4], str. 756.

V nadaljevanju bomo seveda pozornost posvetili odvajanjem na grupni algebri. Naša Banachova algebra bo torej $\mathcal{A} = L^1(G)$, bimoduli nad njo pa bodo lahko še zelo različni. Kar takoj povejmo, da ostaja še vedno nerešeno naslednje osnovno vprašanje:

Ali je vsako odvajanje iz $L^1(G)$ v poljuben Banachov bimodul nad $L^1(G)$ zvezno?

To ni znano niti v primeru amenabilnih grup niti v primeru diskretnih grup. Pri dodatnih pogojih na grupo (ali na bimodul) pa je seveda marsikdaj znano, da je vsako odvajanje zvezno. To je npr. res, kadar je lokalno kompaktna grupa G Abelova, kompaktna ali povezana ([36], Prop. 12.3.1), prav tako, kadar je grupa G rešljiva ali lokalno končna ([36], str. 126). Glede pogoja na bimodule, lahko navedemo rezultat, da je npr. vsako odvajanje iz $L^1(G)$ v simetrični (komutativni) Banachov bimodul nad $L^1(G)$ zvezno (glej [4], str. 760). (Bimodul E je simetričen ali komutativen, če za vsak element algebre a in vsak $\xi \in E$ velja $a \cdot \xi = \xi \cdot a$).

Odslej se bomo za *zvezna* odvajanja na grupni algebri spraševali, kdaj so notranja. Nekaj pozitivnih rezultatov imamo (glej [4], str. 736-749):

- (1) Če je grupa Abelova, je vsako odvajanje iz $L^1(G)$ v poljuben Banachov bimodul nad $L^1(G)$ trivialno.
- (2) Vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v bimodul $L^p(G)$ (glej razdelek 2) je notranje pri pogoju $1 < p < \infty$.
- (3) Vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v bimodul $L^\infty(G) = L^1(G)^*$ je notranje.

Zgledi. 1. Ker pri grupi G , ki ni Abelova, grupna algebra $L^1(G)$ ni komutativna, obstaja tak $g \in L^1(G)$, ki ne komutira z vsemi elementi iz algebre, zato $D_g f = f * g - g * f$, $f \in L^1(G)$, definira netrivialno notranje odvajanje v $L^1(G)$.

2. Algebro mer $M(G)$ lahko imamo za Banachov bimodul nad $L^1(G)$ za konvolucijo. Ker je $L^1(G)$ dvostranski ideal v $M(G)$, je namreč konvolucija funkcije in mere vedno v $L^1(G) \subset M(G)$. Za vsak $\mu \in M(G)$ je operator D_μ , definiran s predpisom $D_\mu f = f * \mu - \mu * f$ ($f \in L^1(G)$) odvajanje na algebri $L^1(G)$, ki ni nujno notranje (tj. določeno z absolutno zvezno mero μ). Seveda pa je to odvajanje notranje, če ga gledamo kot operator iz $L^1(G)$ v $M(G)$. Po drugi strani ima vsako odvajanje D iz $L^1(G)$ v $M(G)$ zalogo vrednosti v $L^1(G)$. Ker je namreč $L^1(G) = L^1(G) * L^1(G)$ (po Cohenovem faktorizacijskem izreku), lahko za vsak $h \in L^1(G)$ zapišemo $h = f * g$, kjer sta $f, g \in L^1(G)$, in zato $Dh = D(f * g) = f * Dg + Df * g \in L^1(G)$.

Odpirt pa je še vedno naslednji problem:

Ali je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v bimodul $M(G)$ notranje?

Oziroma, ekvivalentno:

*Ali je vsako zvezno odvajanje na $L^1(G)$ dano z mero μ , torej $Df = D_\mu f = f * \mu - \mu * f$?*

Če je G amenabilna grupa, je to res, kot bomo videli ob koncu tega razdelka, ko bomo pokazali, da je v tem primeru vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v poljuben dualni Banachov bimodul nad $L^1(G)$ notranje.

Odvajanja v dualne bimodule

Trditvev 3. *Če je E Banachov bimodul nad grupno algebro $L^1(G)$ s trivialnim levim modulskim množenjem ($f \cdot \xi = 0$ za vsak $f \in L^1(G)$ in vsak $\xi \in E$), je vsako odvajanje $D : L^1(G) \rightarrow E^*$ notranje.*

Dokaz. Po definiciji dualnega modulskega množenja je pri zgornjih pogojih $\phi \cdot f = 0$ za vsak $f \in L^1(G)$ in vsak $\phi \in E^*$. Torej je za $f, g \in L^1(G)$ za vsako odvajanje $D : L^1(G) \rightarrow E^*$ res $D(f * g) = f \cdot Dg$. S trditvijo 2.6, ki je posledica Cohenovega izreka o faktorizaciji, lahko na podoben način kot v dokazu trditve 2.7 odtod dokažemo, da je odvajanje D

zvezno. Naj bo zdaj (u_α) omejena približna enota v $L^1(G)$ (glej trditev 2.4) in ϕ šibko- $*$ stekališče (omejenega) zaporedja (Du_α) v E^* . Lahko kar privzamemo, da je $\phi = \lim_\alpha Du_\alpha$ v šibki- $*$ topologiji. Potem za vsak $f \in L^1(G)$ velja $Df = \lim_\alpha D(f * u_\alpha) = \lim_\alpha f \cdot Du_\alpha = f \cdot \phi$, saj imamo za vsak $x \in E$ konvergenco

$$\langle \xi, f \cdot Du_\alpha \rangle = \langle \xi \cdot f, Du_\alpha \rangle \rightarrow \langle \xi \cdot f, \phi \rangle = \langle \xi, f \cdot \phi \rangle.$$

Ker je $\phi \cdot f = 0$, je odvajanje D notranje.

Trditev 4. *Naj bo G lokalno kompaktna grupa. Ekvivalentno je:*

- (i) *Za vsak Banachov bimodul E nad $L^1(G)$ je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* notranje.*
- (ii) *Za vsak levo psevdo unitalni Banachov bimodul E nad $L^1(G)$ je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* notranje.*
- (iii) *Za vsak desno psevdo unitalni Banachov bimodul E nad $L^1(G)$ je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* notranje.*
- (iv) *Za vsak psevdo unitalni Banachov bimodul E nad $L^1(G)$ je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* notranje.*

Dokaz. Implikacije (i) \implies (ii) \implies (iv) in (i) \implies (iii) \implies (iv) so trivialne. Dokazali bomo implikacijo (ii) \implies (i), implikacija (iii) \implies (i) je samo njena "desna" varianta. Prav tako dobimo implikacijo (iv) \implies (ii) z uporabo "desne" variante na poljubnem levo psevdo unitalnem modulu in implikacijo (iv) \implies (iii) z uporabo "leve" variante na poljubnem desno psevdo unitalnem modulu.

Naj bo torej E poljuben Banachov bimodul nad $L^1(G)$ in D zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* . Definirajmo $E_0 = \{h \cdot \xi; h \in L^1(G), \xi \in E\}$. Potem je E_0 levo psevdo unitalen Banachov bimodul nad $L^1(G)$. Ker ima algebra $L^1(G)$ omejeno približno enoto, je namreč po Cohenovem izreku $E_0 = \overline{\text{span } E_0}$. Naj bo $r : E^* \rightarrow E_0^*$ zožitvena funkcija, tj. $r(\phi) = \phi|_{E_0}$ za $\phi \in E^*$. Zaradi za vsak $f, g, h \in L^1(G)$, $\xi \in E$ in $\phi \in E^*$ veljavne enakosti

$$\langle h \cdot \xi, r(f \cdot \phi \cdot g) \rangle = \langle h \cdot \xi, f \cdot \phi \cdot g \rangle = \langle g \cdot (h \cdot \xi) \cdot f, \phi \rangle = \langle g \cdot (h \cdot \xi) \cdot f, r(\phi) \rangle = \langle h \cdot \xi, f \cdot r(\phi) \cdot g \rangle$$

je r bimodulski homomorfizem. Torej je tudi $r \circ D$ zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E_0^* in zato po predpostavki notranje. Obstaja $\phi_0 \in E_0^*$, tako da je $r(Dh) = h \cdot \phi_0 - \phi_0 \cdot h$ za vsak $h \in L^1(G)$. Izberimo tak $\phi \in E^*$, da je $\phi_0 = r(\phi)$, in definirajmo $\tilde{D} = D - D_\phi$. Ker je razlika odvajanj odvajanje, je \tilde{D} odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* . Za vsak $h \in L^1(G)$ očitno velja

$$Dh|_{E_0} = r(Dh) = h \cdot \phi_0 - \phi_0 \cdot h = h \cdot r(\phi) - r(\phi) \cdot h = r(h \cdot \phi - \phi \cdot h) = D_\phi h|_{E_0}.$$

Torej je $\tilde{D}h \in E_0^\perp \cong (E/E_0)^*$ za vsak $h \in L^1(G)$ in \tilde{D} lahko imamo za odvajanje v dualni Banachov bimodul $(E/E_0)^*$. Po definiciji bimodula E_0 je levo modulsko množenje na Banachovem bimodulu E/E_0 trivialno, zato je po trditvi 3 odvajanje \tilde{D} notranje. Torej obstaja tak $\psi \in E_0^\perp$, da je $\tilde{D} = D_\psi$. Sledi $D = D_\phi + \tilde{D} = D_\phi + D_\psi = D_{\phi+\psi}$.

Krepka in šibka operatorska topologija na $M(G)$

Na algebri $B(L^1(G))$ omejenih linearnih operatorjev na $L^1(G)$ imamo tako krepko kot šibko operatorsko topologijo. Videli smo, da deluje vsak $\mu \in M(G)$ z levim ali desnim konvolucijskim množenjem kot levi ali desni multiplikator, torej kot omejen linearen operator, na algebri $L^1(G)$. Zato lahko topologijo iz $B(L^1(G))$ prenesemo na $M(G)$.

Definicija 5. Rekli bomo, da konvergira zaporedje mer μ_α proti meri μ *krepko* (šibko) *operatorsko*, če $L_{\mu_\alpha} \rightarrow L_\mu$ in $R_{\mu_\alpha} \rightarrow R_\mu$ v krepki (šibki) operatorski topologiji.

Pri krepki operatorski konvergenci mer torej za vsak $f \in L^1(G)$ velja $\mu_\alpha * f \rightarrow \mu * f$ in $f * \mu_\alpha \rightarrow f * \mu$, pri šibki operatorski topologiji pa za vsak $f \in L^1(G)$ in vsak $\phi \in L^\infty(G)$ velja $\langle \mu_\alpha * f, \phi \rangle \rightarrow \langle \mu * f, \phi \rangle$ in $\langle f * \mu_\alpha, \phi \rangle \rightarrow \langle f * \mu, \phi \rangle$.

Naslednja lema povzema nekaj dejstev o krepki in šibki operatorski topologiji na $M(G)$, ki nam bodo koristila pri glavnih rezultatih tega razdelka.

Lema 1. *Naj bo G lokalno kompaktna grupa. Potem velja:*

- (a) Če $x_\alpha \rightarrow x$ v G , velja $\delta_{x_\alpha} \rightarrow \delta_x$ krepko operatorsko v $M(G)$.
 (b) Linearna ovojnica $\text{span}\{\delta_x; x \in G\}$ je krepko operatorsko gosta v $M(G)$.

Dokaz. (a) Željeno konvergenco dobimo po trditvi 2.3, ker je pri pogoju $x_\alpha \rightarrow x$

$$\|\delta_{x_\alpha} * f - \delta_x * f\|_1 = \|L_{x_\alpha} f - L_x f\|_1 = \|L_x(L_{x^{-1}x_\alpha} f - f)\|_1 = \|L_{x^{-1}x_\alpha} f - f\|_1 \rightarrow 0$$

(glej zgled za definicijo 1.6) in

$$\|f * \delta_{x_\alpha} - f * \delta_x\|_1 = \|\Delta(x_\alpha^{-1})R_{x_\alpha^{-1}} f - \Delta(x^{-1})R_{x^{-1}} f\|_1 =$$

$$\|\Delta(x^{-1})\|R_{x^{-1}}(\Delta(xx_\alpha^{-1})R_{xx_\alpha^{-1}} f - f)\|_1 = \|\Delta(xx_\alpha^{-1})R_{xx_\alpha^{-1}} f - f\|_1 \leq$$

$$\|(\Delta(xx_\alpha^{-1}) - 1)R_{xx_\alpha^{-1}} f\|_1 + \|R_{xx_\alpha^{-1}} f - f\|_1 = |1 - \Delta(xx_\alpha^{-1})| \|f\|_1 + \|R_{xx_\alpha^{-1}} f - f\|_1 \rightarrow 0.$$

To obenem pomeni, da sta za vsak $f \in L^1$ preslikavi $y \mapsto \delta_y * f$ in $y \mapsto f * \delta_y$ iz G v $L^1(G)$ zvezni.

(b) Za vsako mero $\mu \in M(G)$ je s predpisom $\langle f, \mu \rangle = \int_G f(x) d\mu(x)$ ($f \in C_b(G)$) definiran omejen linearen funkcional na $C_b(G)$. Torej lahko imamo $M(G)$ za podprostor v $C_b(G)^*$. Vsako funkcijo $f \in C_b(G)$ lahko v supremum normi poljubno natančno aproksimiramo z enostavnimi funkcijami oblike $\sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{E_j}$, $x_j \in G$ za vsak j , njen integral po meri μ pa s končnimi vsotami $\sum_{j=1}^n c_j f(x_j)$, kjer je $c_j = \mu(E_j)$ za vsak j . Zaloga vrednosti funkcije f je namreč totalno omejena, se pravi, da za vsak $\epsilon > 0$ obstajajo točke $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, tako da je $f(G) \subset \cup_{j=1}^n \{z \in \mathbb{C}; |z - f(x_j)| < \epsilon\}$. Če je $V_j = \{y \in G; |f(y) - f(x_j)| < \epsilon\}$, je $G = \cup_{j=1}^n V_j$ oziroma $G = \cup_{j=1}^n E_j$, kjer so E_j paroma disjunktne množice, dobljene iz množic V_j . Potem za $f = \sum_{j=1}^m f \chi_{E_j}$ in $s = \sum_{j=1}^m f(x_j) \chi_{E_j}$ velja $|f(y) - s(y)| \leq \sum_{j=1}^m |f(y) - f(x_j)| \chi_{E_j}(y) < \epsilon$ za vsak $y \in G$ in zato tudi

$$\left| \int_G f(y) d\mu(y) - \int_G s(y) d\mu(y) \right| \leq \int_G |f(y) - s(y)| d|\mu|(y) < |\mu|(G) \epsilon.$$

Toda $\int_G s(y) d\mu(y) = \sum_{j=1}^n c_j f(x_j) = \langle f, \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j} \rangle$, kar pomeni, da je linearna ovojnica $\text{span}\{\delta_x; x \in G\}$ šibko- $*$ gosta v $M(G)$. Za vsak $\mu \in M(G)$ torej obstaja zaporedje $\mu_\alpha \in \text{span}\{\delta_x; x \in G\}$, tako da $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ v šibki- $*$ topologiji na $C_b(G)^*$.

Za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ in vsak $f \in L^1(G)$ imamo

$$\langle \mu * f, \phi \rangle = \int_G \phi(x) (\mu * f)(x) dx = \int_G \phi(x) \int_G f(y^{-1}x) d\mu(y) dx =$$

$$\int_G \left(\int_G \phi(x) f(y^{-1}x) dx \right) d\mu(y) = \int_G \langle L_y f, \phi \rangle d\mu(y) = \int_G \langle \delta_y * f, \phi \rangle d\mu(y)$$

in

$$\langle f * \mu, \phi \rangle = \int_G \phi(x) (f * \mu)(x) dx = \int_G \phi(x) \int_G f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) d\mu(y) dx =$$

$$\int_G \left(\int_G \phi(x) f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) dx \right) d\mu(y) = \int_G \langle \Delta(y^{-1}) R_{y^{-1}} f, \phi \rangle d\mu(y) = \int_G \langle f * \delta_y, \phi \rangle d\mu(y).$$

Ker sta za vsak $y \in G$ funkciji $\delta_y * f$ in $f * \delta_y$ v $L^1(G)$, v točki (a) pa smo videli, da sta preslikavi $y \mapsto \delta_y * f$ in $y \mapsto f * \delta_y$ zvezni, sta funkciji $y \mapsto \langle \delta_y * f, \phi \rangle$ in $y \mapsto \langle f * \delta_y, \phi \rangle$ v $C_b(G)$. Po prejšnji ugotovitvi torej velja $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ v šibki operatorski topologiji na $M(G)$ in $\text{span}\{\delta_x; x \in G\}$ je šibko operatorsko gosta množica v $M(G)$. Toda šibko operatorsko zaprtje podprostora (ali konveksne množice) se ujema s krepkim operatorskim zaprtjem (glej dodatek C), tako da je linearna ovojnica $\text{span}\{\delta_x; x \in G\}$ tudi krepko operatorsko gosta v $M(G)$.

Razširitev odvajanja na $M(G)$

Trditev 5. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in E pseudo unitalen Banachov bimodul nad $L^1(G)$. Potem je E Banachov bimodul tudi nad $M(G)$ in vsako zvezno odvajanje $D : L^1(G) \rightarrow E^*$ lahko na en sam način razširimo do omejenega odvajanja $\tilde{D} : M(G) \rightarrow E^*$, ki je zvezno glede na krepko operatorsko topologijo na $M(G)$ in šibko- $*$ topologijo na E^* . Odvajanje \tilde{D} je enolično določeno s svojimi vrednostmi na množici $\{\delta_x; x \in G\}$.

Dokaz. Najprej moramo napraviti E za bimodul nad $M(G)$. Naj bo $\xi \in E$. Zaradi psevdounitalnosti bimodula E obstaja $f \in L^1(G)$ in $\eta \in E$ z lastnostjo $\xi = f \cdot \eta$. Za vsak $\mu \in M(G)$ definirajmo

$$\mu \cdot \xi = (\mu * f) \cdot \eta.$$

Pokažimo, da je levo množenje z μ na bimodulu E dobro definirano, tj. neodvisno od zapisa $\xi = f \cdot \eta$. Pa naj bo še $\xi = g \cdot \zeta$, $g \in L^1(G)$, $\zeta \in E$. Izberimo omejeno približno enoto (u_α) v $L^1(G)$. Potem je za $\mu \in M(G)$

$$\begin{aligned} (\mu * g) \cdot \zeta &= \lim_{\alpha} (\mu * u_\alpha * g) \cdot \zeta = \lim_{\alpha} (\mu * u_\alpha) \cdot (g \cdot \zeta) = \\ \lim_{\alpha} (\mu * u_\alpha) \cdot (f \cdot \eta) &= \lim_{\alpha} (\mu * u_\alpha * f) \cdot \eta = (\mu * f) \cdot \eta. \end{aligned}$$

S tem postane E levi Banachov modul nad $M(G)$. Na podoben način definiramo tudi desno modulsko množenje, tako da je končno $M(G)$ Banachov bimodul nad $M(G)$.

Odvajanje D razširimo do odvajanja \tilde{D} s predpisom ($\xi \in E$, $\mu \in M(G)$)

$$\langle \xi, \tilde{D}\mu \rangle = \lim_{\alpha} \langle \xi, D(\mu * u_\alpha) - \mu \cdot Du_\alpha \rangle.$$

Spet se moramo prepričati, da je \tilde{D} dobro definirana preslikava iz $M(G)$ v E^* , tj. da limita na desni obstaja. Če zapišemo $\xi = f \cdot \eta \cdot g$, kjer je $f, g \in L^1(G)$ in $\eta \in E$, dobimo

$$\begin{aligned} \langle \xi, D(\mu * u_\alpha) - \mu \cdot Du_\alpha \rangle &= \langle f \cdot \eta, g \cdot D(\mu * u_\alpha) - (g * \mu) \cdot Du_\alpha \rangle = \\ \langle f \cdot \eta, D(g * \mu * u_\alpha) - Dg \cdot (\mu * u_\alpha) - D(g * \mu * u_\alpha) + D(g * \mu) \cdot u_\alpha \rangle &= \\ \langle (u_\alpha * f) \cdot \eta, D(g * \mu) \rangle - \langle (\mu \cdot (u_\alpha * f)) \cdot \eta, Dg \rangle. \end{aligned}$$

Desna stran konvergira, zato dobimo v limiti

$$(1) \quad \langle \xi, \tilde{D}\mu \rangle = \langle f \cdot \eta, D(g * \mu) \rangle - \langle (\mu * f) \cdot \eta, Dg \rangle.$$

Očitno je tako razširjena preslikava \tilde{D} linearna in omejena. Iz (1) sledi tudi njena ustreznost zveznosti, saj pri pogoju $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ (krepko operatorsko) v $M(G)$ velja

$$\langle \xi, \tilde{D}\mu_\alpha \rangle = \langle f \cdot \eta, D(g * \mu_\alpha) \rangle - \langle (\mu_\alpha * f) \cdot \eta, Dg \rangle \rightarrow \langle f \cdot \eta, D(g * \mu) \rangle - \langle (\mu * f) \cdot \eta, Dg \rangle = \langle \xi, \tilde{D}\mu \rangle.$$

Poleg tega imamo za $f \in L^1(G)$ in $\xi \in E$ enakost

$$\langle \xi, \tilde{D}f \rangle = \lim_{\alpha} \langle \xi, D(f * u_\alpha) - f \cdot Du_\alpha \rangle = \lim_{\alpha} \langle \xi, Df \cdot u_\alpha \rangle = \langle \xi, Df \rangle.$$

Torej je \tilde{D} razširitev odvajanja D .

Pokažimo nazadnje, da je \tilde{D} res odvajanje. Ker je v krepki operatorski topologiji $\mu = \lim_{\alpha} (\mu * u_\alpha)$ in $\nu = \lim_{\beta} (\nu * u_\beta)$, dobimo v šibki- $*$ topologiji

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\mu * \nu) &= \lim_{\alpha} \lim_{\beta} D((\mu * u_\alpha) * (\nu * u_\beta)) = \\ \lim_{\alpha} \lim_{\beta} ((\mu * u_\alpha) \cdot D(\nu * u_\beta) + D(\mu * u_\alpha) \cdot (\nu * u_\beta)) &= \mu \cdot D\nu + D\mu \cdot \nu. \end{aligned}$$

Ker je razširitev \tilde{D} linearna in zvezna v krepki operatorski topologiji na $M(G)$ in je po lemi 1 linearna ovojnica $\text{span}\{\delta_x; x \in G\}$ krepko operatorsko gosta v $M(G)$, vidimo odtod, da je res določena s svojimi vrednostmi na množici $\{\delta_x; x \in G\}$.

Karakterizacija amenabilnih grup

Za konec razdelka bomo navedli še dve karakterizaciji amenabilnih grup. Prva povezuje amenabilnost z eksistenco negibne točke, ki jo premore delovanje grupe na vsaki kompaktni

konveksni invariantni podmnožici lokalno konveksnega prostora. Druga pa je povezana z odvajanji iz grupne algebre v poljuben dualni bimodul.

Lema 2. *Konveksna ovojnica $\text{co}\{\delta_x; x \in G\}$ je šibko- $*$ gosta v množici S vseh sredin na prostoru $C_b(G)$.*

Dokaz. Ker je $\delta_x \geq 0$ in $\langle 1, \delta_x \rangle = 1$ je po trditvi 4.1 Diracova mera δ_x sredina na $C_b(G)$ za vsak $x \in G$. Če množica $\text{co}\{\delta_x; x \in G\}$ ne bi bila šibko- $*$ gosta v S , bi za vsako sredino $m \in S$, ki ne pripada šibko- $*$ zaprtju množice $\text{co}\{\delta_x; x \in G\}$ (kar je šibko- $*$ kompaktna konveksna podmnožica v $C_b(G)^*$) po Hahn-Banachovem izreku obstajala taka realna funkcija $\phi \in C_b(G)$ (tj. realen šibko- $*$ zvezen linearen funkcional na $C_b(G)^*$), da bi veljalo $\langle \phi, m \rangle > \sup\{\langle \phi, \delta_x \rangle; x \in G\}$. Toda zaradi ocene $\sup\{\phi(x); x \in G\} - \phi \geq 0$, lastnosti $\langle 1, m \rangle = 1$ in pozitivnosti sredine m dobimo odtod protislovje

$$\langle \phi, m \rangle > \sup\{\phi(x); x \in G\} \geq \langle \phi, m \rangle.$$

Izrek 1 (Day). *Za lokalno kompaktno grupo G sta ekvivalentni naslednji trditvi:*

- (i) *Grupa G je amenabilna.*
- (ii) *Če deluje grupa G afino na kompaktni konveksni podmnožici K lokalno konveksnega vektorskega prostora E , tj. če za vsak $x \in G$, $\xi, \eta \in K$ in $t \in [0, 1]$ velja*

$$x \cdot (t\xi + (1-t)\eta) = t(x \cdot \xi) + (1-t)(x \cdot \eta),$$

in je pri tem preslikava $(x, \xi) \mapsto x \cdot \xi \in K$ zvezna v prvi in v drugi spremenljivki, obstaja tak element $\xi \in K$, da velja $x \cdot \xi = \xi$ za vsak $x \in G$.

Dokaz. (i) \implies (ii). Izberimo $\xi_0 \in K$. Naj bo $A(K)$ množica vseh zveznih afinih kompleksnih funkcij na K . Seveda je $\{\phi|_K; \phi \in E^*\} \subset A(K)$. Za vsak $f \in A(K)$ definirajmo funkcijo $\phi_f : G \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom ($x \in G$)

$$\phi_f(x) = f(x \cdot \xi_0).$$

Ta funkcija je zvezna na G zaradi zveznosti preslikave $x \mapsto x \cdot \xi_0$ in zveznosti funkcije f . Zaradi zveznosti funkcije f je tudi omejena, saj pripada $x \cdot \xi_0$ kompaktni množici K za vsak $x \in G$. Torej je $\phi_f \in C_b(G)$.

Po predpostavki obstaja na $C_b(G)$ levo invariantna sredina m . Po lemi 2 lahko sredino m zapišemo kot šibko- $*$ limito posplošenega zaporedja sredin $m_\alpha \in \text{co}\{\delta_x; x \in G\}$. Zaradi

$$\langle \phi_f, m_\alpha \rangle = \sum_{j=1}^n t_j \langle \phi_f, \delta_{x_j} \rangle = \sum_{j=1}^n t_j \phi_f(x_j) = \sum_{j=1}^n t_j f(x_j \cdot \xi_0) = f\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j \cdot \xi_0\right)$$

obstaja taka točka $\xi_\alpha \in K$, da je $\langle \phi_f, m_\alpha \rangle = f(\xi_\alpha)$ za vsak $f \in A(K)$. Zaradi kompaktnosti množice K lahko predpostavimo, da zaporedje (ξ_α) konvergira proti nekemu elementu $\xi \in K$. Potem je za vsak $f \in A(K)$ res

$$f(\xi) = \lim_{\alpha} f(\xi_\alpha) = \lim_{\alpha} \langle \phi_f, m_\alpha \rangle = \langle \phi_f, m \rangle.$$

Izberimo zdaj poljubno točko $x \in G$ in poljuben funkcional $\phi \in E^*$ ter definirajmo funkcijo $f_{x,\phi} : K \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom ($\eta \in K$)

$$f_{x,\phi}(\eta) = \langle x \cdot \eta, \phi \rangle.$$

Ta funkcija je spet v $A(K)$, saj je očitno zvezna in afina. Pripada ji funkcija $\phi_{f_{x,\phi}} \in C_b(G)$, za katero za vsak $y \in G$ velja

$$\phi_{f_{x,\phi}}(y) = f_{x,\phi}(y \cdot \xi_0) = \langle x \cdot (y \cdot \xi_0), \phi \rangle = \langle (xy) \cdot \xi_0, \phi \rangle = f_{1,\phi}((xy) \cdot \xi_0) = \phi_{f_{1,\phi}}(xy).$$

Torej je $\phi_{f_{x,\phi}} = L_{x^{-1}} \phi_{f_{1,\phi}}$. Zato imamo

$$\langle x \cdot \xi, \phi \rangle = f_{x,\phi}(\xi) = \langle \phi_{f_{x,\phi}}, m \rangle = \langle L_{x^{-1}} \phi_{f_{1,\phi}}, m \rangle = \langle \phi_{f_{1,\phi}}, m \rangle = f_{1,\phi}(\xi) = \langle \xi, \phi \rangle.$$

Odtod sledi $x \cdot \xi = \xi$ za vsak $x \in G$ in $\xi \in K$ je negibna točka za delovanje grupe G na kompaktni konveksni množici K .

(ii) \implies (i). Za K izberimo množico vseh sredin ξ na prostoru $C_{lu}(G)$. Od prej vemo, da je to kompaktna konveksna množica v šibko- $*$ topologiji lokalno konveksnega prostora $C_{lu}(G)^*$. Delovanje grupe G na $C_{lu}(G)^*$, definirajmo s predpisom $(x, \xi) \mapsto L_{x^{-1}}^* \xi$, kjer je $\langle \phi, L_x^* \xi \rangle = \langle L_x \phi, \xi \rangle$ za vsak $x \in G$, $\phi \in C_{lu}(G)$ in $\xi \in C_{lu}(G)^*$. Očitno je delovanje grupe afino in je zvezno v vsaki spremenljivki posebej. Prav tako ohranja množico vseh sredin K . Po predpostavki obstaja negibna točka m za delovanje grupe, tj. tak $m \in K$, da je $L_x^* m = m$ za vsak $x \in G$ oziroma $\langle L_x \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle$ za vsak $x \in G$ in $\phi \in C_{lu}(G)$. Torej je m levo invariantna sredina na $C_{lu}(G)$ in grupa G je amenabilna.

Nazadnje je pred nami glavni izrek, ki združuje osnovni temi tega in prejšnjega razdelka, odvajanja iz grupe algebre v (dualne) bimodule in amenabilnost ustrezne lokalno kompaktne grupe.

Izrek 2 (Johnson). *Lokalno kompaktna grupa G je amenabilna natanko takrat, ko je vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v dualni bimodul E^* poljubnega Banachovega bimodula E nad $L^1(G)$ notranje.*

Dokaz. Naj bo najprej grupa G amenabilna, E poljuben Banachov bimodul nad $L^1(G)$ in $D : L^1(G) \rightarrow E^*$ poljubno zvezno odvajanje. Po trditvi 4 lahko predpostavimo, da je bimodul E psevdo unitalen. Naj bo $\tilde{D} : M(G) \rightarrow E^*$ razširitev odvajanja D iz trditve 5.

Z uporabo Dayevega izreka o negibni točki (izrek 1) bomo pokazali, da je odvajanje \tilde{D} notranje. Naj bo K šibko- $*$ zaprta konveksna ovojnica množice $\{(\tilde{D}\delta_x) \cdot \delta_{x^{-1}}; x \in G\}$. Ker je množica $\{\delta_x; x \in G\}$ omejena, je omejena tudi množica K . Torej je K šibko- $*$ kompaktna in konveksna.

Definirajmo $x \cdot \phi$ za $x \in G$ in $\phi \in E^*$ s predpisom

$$x \cdot \phi = \delta_x \cdot \phi \cdot \delta_{x^{-1}} + (\tilde{D}\delta_x) \cdot \delta_{x^{-1}}$$

in se prepričajmo, da gre za delovanje grupe G na dualnem bimodulu E^* . Za $x, y \in G$ in $\phi \in E^*$ res dobimo

$$\begin{aligned} xy \cdot \phi &= \delta_{xy} \cdot \phi \cdot \delta_{(xy)^{-1}} + (\tilde{D}\delta_{xy}) \cdot \delta_{(xy)^{-1}} = \\ &= \delta_x \cdot (\delta_y \cdot \phi \cdot \delta_{y^{-1}}) \cdot \delta_{x^{-1}} + (\delta_x \cdot \tilde{D}\delta_y + \tilde{D}\delta_x \cdot \delta_y) \cdot (\delta_{y^{-1}} * \delta_{x^{-1}}) = \\ &= \delta_x \cdot (\delta_y \cdot \phi \cdot \delta_{y^{-1}} + \tilde{D}\delta_y \cdot \delta_{y^{-1}}) \cdot \delta_{x^{-1}} + \tilde{D}\delta_x \cdot \delta_{x^{-1}} = x \cdot (y \cdot \phi). \end{aligned}$$

Očitno je to delovanje grupe afino. Prav tako hitro vidimo, da je šibko- $*$ zvezno v drugi spremenljivki. Ker iz konvergence na G sledi po lemi 1(a) krepka operatorska konvergenca na množici $\{\delta_x; x \in G\} \subset M(G)$ in je \tilde{D} zvezna preslikava iz te topologije v šibko- $*$ topologijo na E^* , vidimo, da je delovanje grupe zvezno tudi v prvi spremenljivki. Poleg tega delovanje grupe ohranja množico K .

Izpolnjeni so torej pogoji izreka 1, zato obstaja tak $\phi \in K$, da je $x \cdot \phi = \phi$ za vsak $x \in G$ oziroma, da za vsak $x \in G$ velja

$$\delta_x \cdot \phi \cdot \delta_{x^{-1}} + (\tilde{D}\delta_x) \cdot \delta_{x^{-1}} = \phi.$$

Dobimo $\tilde{D}\delta_x = \phi \cdot \delta_x - \delta_x \cdot \phi$ za vsak $x \in G$. Ker je z vrednostmi na množici $\{\delta_x; x \in G\}$ preslikava \tilde{D} natančno določena, velja tudi $\tilde{D}\mu = \phi \cdot \mu - \mu \cdot \phi$ za vsak $\mu \in M(G)$, kar pomeni, da je odvajanje \tilde{D} in s tem tudi odvajanje D notranje.

Obratno, naj bo zdaj vsako zvezno odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* notranje. Pokazati moramo, da je v tem primeru grupa G amenabilna, se pravi, najti levo invariantno sredino na $L^\infty(G)$. Napravimo $L^\infty(G)$ za Banachov bimodul nad $L^1(G)$ na poseben način, tako da postavimo $f \cdot \phi = f * \phi$ in $\phi \cdot f = \left(\int_G f(x) dx\right) \phi$ za vsak $f \in L^1(G)$ in $\phi \in L^\infty(G)$.

Izberimo $n \in L^\infty(G)^*$ z lastnostjo $\langle 1, n \rangle = 1$ in definirajmo notranje odvajanje D iz $L^1(G)$ v $L^\infty(G)^*$ s predpisom $Df = f \cdot n - n \cdot f$, $f \in L^1(G)$. Ker je $f * 1 = \left(\int_G f(x) dx\right) 1$ za vsak $f \in L^1(G)$ velja zanj

$$\langle 1, Df \rangle = \left\langle \left(\int_G f(x) dx\right) 1 - f * 1, n \right\rangle = 0.$$

Ker je tudi $\mathbb{C}1$ podbimodul nad $L^1(G)$, lahko naravno definiramo faktorski bimodul $E = L^\infty(G)/\mathbb{C}1$. Zaradi $\langle 1, Df \rangle = 0$ je $D(L^1(G)) \subset (\mathbb{C}1)^\perp = E^*$, zato lahko imamo D za odvajanje iz $L^1(G)$ v E^* . Ker je po predpostavki vsako tako odvajanje notranje, obstaja $\tilde{n} \in (\mathbb{C}1)^\perp \subset L^\infty(G)^*$, tako da je $Df = f \cdot \tilde{n} - \tilde{n} \cdot f$. Definirajmo $\tilde{m} = n - \tilde{n}$. Potem je $\langle 1, \tilde{m} \rangle = 1$ in za vsak $f \in L^1(G)$ zaradi dvojnega zapisa za Df dobimo $f \cdot \tilde{m} = \tilde{m} \cdot f$. Za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ in vsak $f \in S_1(G)$ (glej definicijo pred lemo 4.1) torej imamo

$$\langle f * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle f \cdot \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \cdot f \rangle = \langle \phi, f \cdot \tilde{m} \rangle = \langle \phi \cdot f, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle.$$

To spominja na definicijo 4.4 topološko levo invariantne sredine, le da je zdaj \tilde{m} kompleksen linearen funkcional. Kljub temu dobimo odtod za vsak $x \in G$ in $\phi \in L^\infty(G)$, podobno kot v dokazu trditve 4.4(a),

$$\langle L_x \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \delta_x * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle f * \delta_x * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle (f * \delta_x) * \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle,$$

saj je tudi $f * \delta_x \in S_1(G)$. Vidimo, da je funkcional \tilde{m} levo invarianten.

Nazadnje opazimo, da določa \tilde{m} kot omejen linearen funkcional na komutativni \mathbb{C}^* -algebri $\mathcal{A} = L^\infty(G)$, ki je izometrično izomorfna algebri vseh zveznih funkcij $C(\sigma(\mathcal{A}))$ na kompaktnem Hausdorffovem prostoru $\sigma(\mathcal{A})$, spektru algebre \mathcal{A} , po Rieszovem izreku kompleksno Radonovo mero \hat{m} na $\sigma(\mathcal{A})$. Pri tem za vsak $\phi \in \mathcal{A}$ velja $\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \hat{\phi} d\hat{m}$.

Na kompaktnem prostoru $\sigma(\mathcal{A})$ vseh netrivialnih multiplikativnih funkcionalov η na \mathcal{A} definiramo levo delovanje grupe G s predpisom $y \cdot \eta = \eta \circ L_{y^{-1}}$, $y \in G$. Hitro se namreč prepričamo, da spet dobimo multiplikativen funkcional na \mathcal{A} in da za $x, y \in G$ in $\eta \in \sigma(\mathcal{A})$ velja $xy \cdot \eta = x \cdot (y \cdot \eta)$. Pokažimo, da je mera \hat{m} levo invariantna. Iz $\hat{\phi}(y \cdot \eta) = \eta(L_{y^{-1}}\phi)$ vidimo, da velja $(L_y \hat{\phi})(\eta) = \widehat{L_y \phi}(\eta)$ za vsak $y \in G$, $\phi \in \mathcal{A}$ in $\eta \in \sigma(\mathcal{A})$. Torej je

$$\int_{\sigma(\mathcal{A})} L_y \hat{\phi} d\hat{m} = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \widehat{L_y \phi} d\hat{m} = \langle L_y \phi, \tilde{m} \rangle = \langle \phi, \tilde{m} \rangle = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \hat{\phi} d\hat{m}$$

in kompleksna mera \hat{m} je levo invariantna. Potem pa je njena totalna variacija $|\hat{m}|$ levo invariantna pozitivna mera na $\sigma(\mathcal{A})$ z lastnostjo $|\hat{m}|(\sigma(\mathcal{A})) \neq 0$. Torej lahko s predpisom $\langle \phi, \tilde{m} \rangle = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \hat{\phi} d|\hat{m}|/|\hat{m}|(\sigma(\mathcal{A}))$ definiramo na $L^\infty(G)$ levo invariantno sredino in grupa G je amenabilna.

Posledica. Če je lokalno kompaktna grupa G amenabilna, je vsako zvezno odvajanje na grupni algebri $L^1(G)$ oblike $Df = f * \mu - \mu * f$, kjer je $\mu \in M(G)$.

Dokaz. Prostor mer $M(G)$ je bimodul nad grupno algebro $L^1(G)$ s konvolucijo kot modulskim množenjem, saj za vsak $f \in L^1(G)$ in $\mu \in M(G)$ velja $f * \mu, \mu * f \in L^1(G) \subset M(G)$. Po drugi strani je $M(G)$ dualni prostor k podprostoru $C_0(G) \subset L^\infty(G)$. Še več, kot konvolucijski bimodul nad $L^1(G)$ je dualen k bimodulu $C_0(G)$ nad $L^1(G)$, če v slednjega vpeljemo modulski množenji s predpisom $f \cdot \phi = \phi * \tilde{f}$, $\phi \cdot f = \tilde{f} * \phi$ ($f \in L^1(G)$, $\phi \in C_0(G)$), kjer je $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ za vsak $x \in G$. Z nekaj truda se lahko prepričamo, da so vse bimodulske lastnosti za $C_0(G)$ izpolnjene in da sta dualni modulski operaciji na $M(G) = C_0(G)^*$ ravno konvoluciji.

Vsako odvajanje $D : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ imamo lahko za odvajanje iz $L^1(G)$ v dualni modul $M(G)$. Če je G amenabilna grupa, odvajanje D pa zvezno, obstaja po izreku 2 tak $\mu \in M(G)$, da velja $Df = f * \mu - \mu * f$ za vsak $f \in L^1(G)$.

Brez pogoja amenabilnosti ni znano, ali je vsako odvajanje na $L^1(G)$ zgornje oblike.

Opomba. Johnsonov izrek omogoča, da pojem amenabilnosti razširimo z lokalno kompaktnih grup na poljubne Banachove algebre. Rečemo, da je poljubna Banachova algebra \mathcal{A} amenabilna, če je vsako zvezno odvajanje iz \mathcal{A} v dual E^* poljubnega Banachovega bimodula E nad \mathcal{A} notranje. Teorija amenabilnih Banachovih algeber je danes zelo izdelano in raziskovalno aktivno področje funkcionalne analize.

III. poglavje : ANALIZA NA ABELOVIH GRUPAH

Abelove lokalno kompaktne grupe so unimodularne, zato se v marsikaterem pogledu obnašajo precej lepše kot splošne lokalno kompaktne grupe. Marsikatera formula, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju je bolj preprosta. Tako je npr. $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$ in $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ za vsak $x \in G$ in $f \in L^1(G)$, pa tudi zamenajva integracijskih spremenljivk $y \mapsto yx$ in $y \mapsto y^{-1}$ se zelo poenostavi, ker ni treba pisati modularne funkcije.

1. Dualna grupa

V tem razdelku bomo Abelovi grupi priredili t.i. dualno grupo, ki omogoča izvajati na njej Fourierovo analizo podobno kot v klasičnih primerih na \mathbb{T} in \mathbb{R} .

Karakterji

Pomembno vlogo v analizi na Abelovi grupi G igrajo zvezne preslikave iz G v grupo krožnice \mathbb{T} , ki so hkrati homomorfizmi grup. Damo jim posebno ime.

Definicija 1. Zvezen homomorfizem iz G v \mathbb{T} imenujemo *karakter* grupe G .

Množico vseh karakterjev grupe G bomo označevali z \widehat{G} , vrednost karakterja ξ na elementu x pa raje zapisali v obliki $\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$. Za vsak karakter ξ torej velja $\langle xy, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle \langle y, \xi \rangle$ ($x, y \in G$), poleg tega pa še $\langle 1, \xi \rangle = 1$ in $\langle x^{-1}, \xi \rangle = \overline{\langle x, \xi \rangle}$ za $x \in G$.

Izrek 1. *Spekter grupne algebre $L^1(G)$ lahko identificiramo z množico \widehat{G} .*

Dokaz. Grupna algebra Abelove grupe je komutativna, njen spekter je množica netrivialnih linearnih multiplikativnih funkcionalov, opremljena s šibko- $*$ topologijo iz dualnega prostora (Gelfandov prostor).

Za vsak $\xi \in \widehat{G}$ in $f \in L^1(G)$ definirajmo $\Phi_\xi(f) = \int_G \langle x, \xi \rangle f(x) dx$. Hitro vidimo, da je Φ_ξ netrivialen linearen funkcional na $L^1(G)$, ki je poleg tega multiplikativen zaradi

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(f * g) &= \int \langle x, \xi \rangle (f * g)(x) dx = \int \int \langle x, \xi \rangle f(xy^{-1}) g(y) dy dx = \\ &= \int \langle y, \xi \rangle \left(\int \langle xy^{-1}, \xi \rangle f(xy^{-1}) dx \right) g(y) dy = \int \langle y, \xi \rangle \Phi_\xi(f) g(y) dy = \Phi_\xi(f) \Phi_\xi(g). \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je zaradi komutativnosti grupa unimodularna oziroma Haarova mera tudi desno invariantna ter dejstvo, da je ξ karakter (homomorfizem grup).

Obratno, vsak od nič različen multiplikativen funkcional Φ na $L^1(G)$ je dan s takim integralom. Res, ker je Φ omejen linearen funkcional na $L^1(G)$, je dan s funkcijo $\phi \in L^\infty(G)$, torej $\Phi(g) = \int \phi(y) g(y) dy$. Ker je $\Phi \neq 0$, obstaja tak $f \in L^1(G)$, da je $\Phi(f) \neq 0$. Potem sledi

$$\begin{aligned} \Phi(f) \int \phi(y) g(y) dy &= \Phi(f) \Phi(g) = \Phi(f * g) = \int \left(\int f(xy^{-1}) g(y) dy \right) \phi(x) dx = \\ &= \int \left(\int \phi(x) f(xy^{-1}) dx \right) g(y) dy = \int \Phi(L_y f) g(y) dy. \end{aligned}$$

Odtod dobimo $\phi(y) = \Phi(L_y f) / \Phi(f)$ skoraj za vsak $y \in G$ (oziroma za vsak y , če ϕ ustrezno popravimo). Tako popravljen ϕ je zvezna funkcija, torej v $C(G)$, saj sta tako $y \mapsto L_y f$ kot Φ zvezni funkciji. Poleg tega velja $\phi(xy)\Phi(f) = \Phi(L_{xy} f) = \Phi(L_x L_y f) = \phi(x)\phi(y)\Phi(f)$ za vsak $x, y \in G$, torej $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ za vsak $x, y \in G$. V posebnem primeru je $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ za vsak $x \in G$ in vsak $n \in \mathbb{Z}$. Ker je ϕ omejena funkcija, mora biti zato $|\phi(x)| = 1$ in $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$. Torej je $\phi : G \rightarrow \mathbb{T}$ karakter na G in $\Phi = \Phi_\phi$.

Zadnji premislek je povedal, da je preslikava $\xi \mapsto \Phi_\xi$ surjektivna. Očitno je tudi injektivna, tako da imamo bijekcijo iz \widehat{G} na spekter grupne algebre $L^1(G)$. Na obeh prostorih vzamemo relativno šibko- $*$ topologijo, podedovano iz $L^\infty(G)$, ki je dual za $L^1(G)$. Po eni strani je $\widehat{G} \subset L^\infty(G)$, po drugi strani pa je tudi spekter algebre $L^1(G)$ vsebovan v $L^\infty(G)$. Bijekcija $\xi \mapsto \Phi_\xi$ je zvezna in odprta preslikava. Torej lahko spekter grupne algebre (v algebraičnem in topološkem smislu) kar identificiramo z \widehat{G} .

Množico \widehat{G} vseh karakterjev na Abelovi grupi G smo torej z uporabo izreka 1 opremili s šibko- $*$ topologijo, podedovano iz $L^\infty(G) = L^1(G)^*$. Lahko pa ravnamo tudi drugače.

Trditev 1. *Topologija v \widehat{G} se ujema s topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v G . Bazična okolica točke $\xi_0 \in \widehat{G}$ je pri vsakem $\epsilon > 0$ in vsaki kompaktni množici $K \subset G$ podana z*

$$N(\xi_0; K, \epsilon) = \{\xi \in \widehat{G}; |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi_0 \rangle| < \epsilon \text{ za vsak } x \in K\}.$$

Dokaz. Vsako funkcijo lahko poljubno natančno aproksimiramo z zveznimi funkcijami s kompaktnim nosilcem. Za $f \in L^1(G)$ in vsak $\epsilon > 0$ torej obstaja $g \in C_c(G)$, tako da velja $\|f - g\|_1 < \epsilon/4$. Naj bodo $f_i \in L^1(G)$, $i = 1, 2, \dots, n$ poljubne funkcije in g_i , $i = 1, 2, \dots, n$ njihove ustrezne aproksimacije pri danem $\epsilon > 0$. Označimo $K = \bigcup_{i=1}^n \text{supp } g_i$. Če uporabimo oznake iz izreka 1, lahko za $\xi, \xi_0 \in \widehat{G}$, $\xi \in N(\xi_0; K, \epsilon/2)$ in vsak $i = 1, 2, \dots, n$ ocenimo

$$\begin{aligned} |\Phi_\xi(f_i) - \Phi_{\xi_0}(f_i)| &\leq \int_G |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi_0 \rangle| |f_i(x)| dx \leq \\ &\int_G |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi_0 \rangle| |f_i(x) - g_i(x)| dx + \int_G |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi_0 \rangle| |g_i(x)| dx \leq \\ &2\|f_i - g_i\|_1 + \int_K |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi_0 \rangle| |g_i(x)| dx < \epsilon, \end{aligned}$$

tako da pripada Φ_ξ ustrezni šibki- $*$ okolici multiplikativnega funkcionala Φ_{ξ_0} . Torej iz enakomerne konvergence karakterjev na kompaktnih množicah v G sledi njihova šibko- $*$ konvergenca.

Obratno, v dokazu izreka 1 smo videli, da za vsak $y \in G$ velja $\langle y, \xi \rangle = \Phi_\xi(L_y f) / \Phi_\xi(f)$, če je le $\Phi_\xi(f) \neq 0$. Pri danem $\epsilon > 0$, dani funkciji $f \in L^1(G)$ in kompaktni podmnožici $K \subset G$ obstaja taka okolica V enote $1 \in G$ in končno mnogo elementov $y_i \in G$, tako da je $\|L_{y_i^{-1}} f - f\|_1 < \epsilon$ za vsak $y \in K$ in $y_i^{-1} y \in V$. Potem je tudi

$$|\Phi_\xi(L_y f) - \Phi_\xi(L_{y_i} f)| \leq \|L_y f - L_{y_i} f\|_1 = \|L_{y_i^{-1}} f - f\|_1 < \epsilon$$

za vsak $\xi \in \widehat{G}$, $y \in K$ in $y_i^{-1} y \in V$. Ker lahko zapišemo

$$\langle y, \xi \rangle = (\Phi_\xi(L_y f) - \Phi_\xi(L_{y_i} f)) / \Phi_\xi(f) + \Phi_\xi(L_{y_i} f) / \Phi_\xi(f)$$

in ker velja $\Phi_\xi(f) \rightarrow \Phi_{\xi_0}(f)$, $\Phi_\xi(L_{y_i} f) \rightarrow \Phi_{\xi_0}(L_{y_i} f)$, če $\xi \rightarrow \xi_0$ (zaradi šibke- $*$ konvergence $\Phi_\xi \rightarrow \Phi_{\xi_0}$), odtod hitro vidimo, da je $\langle y, \xi \rangle \rightarrow \langle y, \xi_0 \rangle$ enakomerno za vsak $y \in K$.

V množico \widehat{G} vpeljemo operacijo množenja po točkah. Za $x \in G$ in $\xi, \eta \in \widehat{G}$ naj bo

$$\langle x, \xi\eta \rangle = \langle x, \xi \rangle \langle x, \eta \rangle.$$

Enota za množenje je funkcija $\xi = 1$ (identično enaka 1), inverz dobimo z

$$\langle x, \xi^{-1} \rangle = \langle x^{-1}, \xi \rangle = \overline{\langle x, \xi \rangle}.$$

Torej je tudi \widehat{G} Abelova grupa. S podedovano šibko- $*$ topologijo ali ekvivalentno topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih množicah v G postane topološka grupa. V resnici je tudi lokalno kompaktna Abelova grupa. Množica $\widehat{G} \cup \{0\}$ vseh zveznih multiplikativnih funkcionalov na $L^1(G)$ je namreč šibko- $*$ zaprta podmnožica enotske krogle v $L^\infty(G)$, torej po Banach-Alaogluju šibko- $*$ kompaktna množica. Brez točke $\{0\}$ pa je potem \widehat{G} lokalno kompakten topološki prostor.

Definicija 2. Množico \widehat{G} vseh karakterjev na G imenujemo *dualna grupa* lokalno kompaktna Abelove grupe G .

Dualna grupa je za dano lokalno kompaktno grupo zelo pomemben objekt in bo v naslednjih razdelkih igrala odločilno vlogo pri definiciji Fourierove transformacije in tudi sicer.

Posebni primeri

Naj bo G lokalno kompaktna Abelova grupa. Videli smo, da je $\widehat{G} \subset L^\infty(G)$. Če pa je G celo kompaktna Abelova grupa, velja tudi $L^\infty(G) \subset L^p(G) \subset L^1(G)$ za vsak $p \geq 1$.

Trditev 2. Če je G kompaktna grupa in Haarova mera na G normalizirana (tj. $|G| = 1$), je \widehat{G} ortonormirana množica v $L^2(G)$.

Dokaz. Ker je $|\xi|^2 = 1$ za $\xi \in \widehat{G}$ in je Haarova mera na G normalizirana, je $\|\xi\|_2 = 1$. Če je $\xi \neq \eta$, je $\xi\eta^{-1} \neq 1$, zato obstaja tak $x_0 \in G$, da $\langle x_0, \xi\eta^{-1} \rangle \neq 1$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \int \xi(x)\bar{\eta}(x)dx &= \int \langle x, \xi\eta^{-1} \rangle dx = \langle x_0, \xi\eta^{-1} \rangle \langle x_0^{-1}, \xi\eta^{-1} \rangle \int \langle x, \xi\eta^{-1} \rangle dx = \\ &\langle x_0, \xi\eta^{-1} \rangle \int \langle x_0^{-1}x, \xi\eta^{-1} \rangle dx = \langle x_0, \xi\eta^{-1} \rangle \int \langle y, \xi\eta^{-1} \rangle dy = \langle x_0, \xi\eta^{-1} \rangle \int \xi(x)\bar{\eta}(x)dx, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\int \xi(x)\bar{\eta}(x)dx = 0$ oziroma $\xi \perp \eta$.

Trditev 3. Če je G diskretna grupa, je \widehat{G} kompaktna grupa. Če je G kompaktna grupa, je \widehat{G} diskretna grupa.

Dokaz. Za diskretno grupo G obstaja v grupni algebri $L^1(G)$ enota δ . (Spomnimo se, da je $\delta(x) = 1$ za $x = 1$ in $\delta(x) = 0$ za $x \neq 1$.) Če pa ima Banachova algebra $L^1(G)$ enoto, je njen spekter kompakten. Torej je po izreku 1 tudi \widehat{G} kompaktna grupa.

Naj bo G kompaktna grupa. Potem je konstantna funkcija 1 v $L^1(G)$ in zato množica $\{\phi \in L^\infty(G); |\int \phi(x)dx| > 1/2\}$ šibko- $*$ odprta. Po trditvi 2 velja $\int \xi(x)dx = 1$, če je $\xi = 1$, in $\int \xi(x)dx = 0$, če $\xi \neq 1$. Torej je $\{1\} = \{\xi \in \widehat{G}; |\int \xi(x)dx| > 1/2\}$ relativno odprta množica v \widehat{G} v šibki- $*$ topologiji. To pomeni, da je vsaka točka v \widehat{G} odprta in \widehat{G} je diskretna grupa.

Izrek 2. Dualne grupe klasičnih grup \mathbb{R} , \mathbb{T} , \mathbb{Z} in \mathbb{Z}_k , $k \in \mathbb{N}$, so spet klasične, karakterji so dani s spodnjimi izrazi:

- (a) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, $\langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i \xi x}$, $x, \xi \in \mathbb{R}$;
- (b) $\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$, $\langle \alpha, n \rangle = \alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$;
- (c) $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$, $\langle n, \alpha \rangle = \alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{T}$;
- (d) $\widehat{\mathbb{Z}}_k \cong \mathbb{Z}_k$, $\langle m, n \rangle = e^{2\pi i mn/k}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. (a) Naj bo ϕ zvezen homomorfizem iz aditivne grupe \mathbb{R} v \mathbb{T} , se pravi $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ zvezna, $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ za $x, y \in \mathbb{R}$, $|\phi(x)| = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $\phi(0) = 1$. Potem

obstaja tak $a > 0$, da je $A = \int_0^a \phi(x)dx \neq 0$ in iz

$$A\phi(x) = \phi(x) \int_0^a \phi(t)dt = \int_0^a \phi(x+t)dt = \int_x^{a+x} \phi(t)dt$$

za vsak x vidimo, da je ϕ odvedljiva in da velja

$$\phi'(x) = A^{-1}(\phi(a+x) - \phi(x)) = A^{-1}(\phi(a) - 1)\phi(x) = c\phi(x)$$

za vsak x . Odtod takoj najdemo, da je $\phi(x) = e^{cx}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in da mora (zaradi drugih zahtev) biti $c = 2\pi i\xi$, kjer je $\xi \in \mathbb{R}$.

(b) Ker je $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, so karakterji na \mathbb{T} tisti karakterji na \mathbb{R} , ki so periodični s periodo 1. Torej mora biti v prejšnjem primeru $\xi = n \in \mathbb{Z}$ in $\phi(x) = e^{2\pi inx} = \alpha^n$, kjer je $\alpha = e^{2\pi ix}$ ($x \mapsto \alpha$ je kvocientna preslikava iz \mathbb{R} na \mathbb{T}).

(c) Če je $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}}$ in je $\phi(1) = \alpha \in \mathbb{T}$, je $\phi(n) = \alpha^n$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Če je $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}}_k$, mora biti $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}}$ in hkrati periodična s periodo k , tj. $\phi(m) = 1$, če je $m = nk$. Torej je $\alpha^k = 1$ in zato $\alpha = e^{2\pi in/k}$ oziroma $\phi(m) = \alpha^m = e^{2\pi imn/k}$.

Trditev 4. Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n lokalno kompaktna Abelove grupe. Potem je

$$(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n)^\wedge \cong \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2 \times \dots \times \widehat{G}_n.$$

Dokaz. Vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2 \times \dots \times \widehat{G}_n$ določa karakter na $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, če definiramo $\langle x, \xi \rangle = \prod_{j=1}^n \langle x_j, \xi_j \rangle$. Obratno, vsak karakter ξ na $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ definira karakterje ξ_j na posameznih komponentah s predpisom $\langle \xi_j, x_j \rangle = \langle (1, \dots, x_j, \dots, 1), \xi \rangle$ (restrikcija na G_j). Potem je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Posledica. Za produktne grupe velja $(\mathbb{R}^n)^\wedge \cong \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{T}^n)^\wedge \cong \mathbb{Z}^n$, $(\mathbb{Z}^n)^\wedge \cong \mathbb{T}^n$ in $\widehat{G} \cong G$, če je G končna Abelova grupa G .

Dokaz. Izomorfizmi sledijo iz trditve 4. V zadnjem primeru je potrebno upoštevati strukturni izrek o končnih Abelovih grupah (glej npr. [16]).

Trditev 4 lahko v primeru kompaktnih grup nekoliko posplošimo.

Trditev 5. Naj bodo G_α kompaktna grupe in $G = \prod_\alpha G_\alpha$. Potem je $\widehat{G} \cong \bigoplus_\alpha \widehat{G}_\alpha = \{(x_\alpha); x_\alpha = 1 \text{ razen za končno mnogo } \alpha\}$.

Dokaz. Vsako zaporedje $(\xi_\alpha) \in \bigoplus_\alpha \widehat{G}_\alpha$ definira karakter na $\prod_\alpha G_\alpha$ s predpisom $\langle x, \xi \rangle = \prod_\alpha \langle x_\alpha, \xi_\alpha \rangle$ (končen produkt). Obratno, tako kot prej z restrikcijami vsakemu karakterju ξ na G pripada zaporedje (ξ_α) karakterjev na posameznih komponentah. Pokazati je treba edinole, da je $\xi_\alpha = 1$ razen za končno mnogo α .

Zaradi zveznosti karakterja ξ obstaja okolica V enote $1 \in G$, da je $|\langle x, \xi \rangle - 1| < 1$ za vsak $x \in V$. V okolici V obstaja bazična okolica produktne topologije $\prod_\alpha V_\alpha$, kjer je $V_\alpha = G_\alpha$ razen za končno mnogo α . Izberimo α tak, da je $V_\alpha = G_\alpha$. Potem je $\xi_\alpha(G_\alpha) = \xi_\alpha(V_\alpha) \subset \xi(V)$. Torej je $\xi_\alpha(G_\alpha)$ kot homomorfná slika grupe podgrupa v \mathbb{T} , vsebovana v $\xi(V)$, slednja pa leži v $\{\alpha \in \mathbb{T}; |\alpha - 1| < 1\}$. Torej je $\xi_\alpha(G_\alpha) = \{1\}$ oziroma $\xi_\alpha = 1$.

Mere na dualni grupi in Bochnerjev izrek

Videli smo, da je dualna grupa \widehat{G} tudi lokalno kompaktna grupa. Naj bo $M(\widehat{G})$ množica vseh kompleksnih Borelovih na \widehat{G} .

Definicija 3. Za vsak $\mu \in M(\widehat{G})$ in $x \in G$ definirajmo $\phi_\mu(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi)$.

Očitno je ϕ_μ omejena zvezna funkcija na G .

Trditev 6. Preslikava $\mu \mapsto \phi_\mu$ je kontrakcija (v enakomerni normi) in linearna injektivna iz $M(\widehat{G})$ v prostor omejenih zveznih funkcij $C_b(G)$.

Dokaz. Zveznost preslikave $\mu \mapsto \phi_\mu$ je očitna, kontrakcija v enakomerni normi sledi iz ocene $|\phi_\mu(x)| \leq \|\mu\|_1$ za vsak $x \in G$. Linearnost je tudi jasna, injektivnost pa vidimo takole. Če je $\phi_\mu = 0$, imamo za vsak $f \in L^1(G)$

$$0 = \int \left(\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi) \right) f(x) dx = \int \int f(x) \langle x, \xi \rangle dx d\mu(\xi) = \int_{\widehat{G}} \Phi_\xi(f) d\mu(\xi),$$

kjer smo uporabili oznako Φ_ξ za multiplikativni funkcional na $L^1(G)$ iz dokaza izreka 1. Preslikava $\xi \mapsto \Phi_\xi(f)$ je Gelfandova transformiranka funkcije $f \in L^1(G)$. Ker je množica vseh Gelfandovih transformirank gosta podalgebra v $C_0(\widehat{G})$ (glej dodatek C), iz zgornje enakosti sledi tudi enakost $\int_{\widehat{G}} \phi(\xi) d\mu(\xi) = 0$ in odtod $\mu = 0$.

Za formulacijo Bochnerjevega izreka potrebujemo pojem funkcije pozitivnega tipa, ki jih bomo podrobno in bolj splošno obravnavali v četrtem poglavju. Zdaj navedimo le definicijo.

Definicija 4. Funkcija pozitivnega tipa na lokalno kompaktni grupi G je funkcija $\phi \in L^\infty(G)$, za katero velja za vsak $f \in L^1(G)$ neenakost

$$\int_G \phi(x) (f^* * f)(x) dx \geq 0$$

oziroma ekvivalentno

$$\int_G \int_G \phi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} dx dy \geq 0.$$

Enakovrednost obeh neenakosti hitro spoznamo iz računa:

$$\begin{aligned} \int \phi(x) (f^* * f)(x) dx &= \int \int \phi(x) \overline{f(y^{-1})} f(y^{-1}x) dy dx = \int \int \phi(x) \overline{f(y)} f(yx) dy dx = \\ &= \int \int \phi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} dx dy. \end{aligned}$$

Množico zveznih funkcij pozitivnega tipa na G označimo z $\mathcal{P}(G)$, torej je $\mathcal{P}(G) \subset C_b(G)$. Zgled za (zvezno) funkcijo pozitivnega tipa je npr. konstantna funkcija 1, saj je vedno $\int (f^* * f)(x) dx = \left| \int f(x) dx \right|^2 \geq 0$ za vsak $f \in L^1(G)$.

Če so U okolice enote $1 \in G$ in je (ψ_U) normirana pozitivna približna enota v $L^1(G)$ (glej definicijo II.2.4), tako da je $\text{supp } \psi_U \subset U$, lahko za poljubno funkcijo $\phi \in \mathcal{P}(G)$ pri pogoju $x, y \in U$ pišemo

$$\begin{aligned} & \left| \int \phi(x) (\psi_U^* * \psi_U)(x) dx - \phi(1) \right| = \\ & \left| \int \int \phi(y^{-1}x) \psi_U(x) \psi_U(y) dx dy - \phi(1) \int \int \psi_U(x) \psi_U(y) dx dy \right| \\ & \leq \int \int |\phi(y^{-1}x) - \phi(1)| \psi_U(x) \psi_U(y) dx dy. \end{aligned}$$

To pomeni, da imamo konvergenco $\int \phi(x) (\psi_U^* * \psi_U)(x) dx \rightarrow \phi(1)$ ($U \rightarrow 1$). Med drugim odtod vidimo, da je $\phi(1) \geq 0$ za vsako funkcijo $\phi \in \mathcal{P}(G)$.

Nekoliko manj trivialen zgled funkcij iz $\mathcal{P}(G)$ je zajet v naslednji trditvi.

Trditev 7. Za vsak $h \in C_c(G)$ je funkcija $\phi = h^* * h \in \mathcal{P}(G)$.

Dokaz. Po eni strani je seveda ϕ zvezna funkcija s kompaktnim nosilcem, po drugi strani pa hitro vidimo, da zaradi $(h^* * h)(y^{-1}x) = \int h^*(z)h(z^{-1}y^{-1}x)dz$ za vsako funkcijo $f \in L^1(G)$ velja

$$\begin{aligned} \int \int f(x)\overline{f(y)}(h^* * h)(y^{-1}x)dxdy &= \int \int f(x) \int h^*(z)\overline{f(yz^{-1})}dz h(y^{-1}x)dxdy = \\ &= \int |(h^* * \overline{f})(y)|^2 dy \geq 0. \end{aligned}$$

Posledica 1. Za vsak $f \in L^2(G)$ je $f^* * f \in \mathcal{P}(G)$.

Dokaz. Funkcijo $f \in L^2(G)$ lahko poljubno natančno aproksimiramo s funkcijo $h \in C_c(G)$ v normi $\|\cdot\|_2$, torej tudi funkcijo $f^* * f$ s funkcijo $h^* * h$ v normi $\|\cdot\|_\infty$. Ker je $\mathcal{P}(G)$ zaprta podmnožica v $L^\infty(G)$, je tudi $f^* * f \in \mathcal{P}(G)$.

Posledica 2. Linearna ovojnica $\text{span } \mathcal{P}(G)$ vsebuje vse funkcije oblike $f * g$, $f, g \in C_c(G)$.

Dokaz. Uporabimo t.i. polarizacijo za funkciji $f, g \in C_c(G)$:

$4f^* * g = (g + f)^* * (g + f) - (g - f)^* * (g - f) + i(g + if)^* * (g + if) - i(g - if)^* * (g - if)$. Ker so na desni strani po trditvi 7 vsi členi v $C_c(G)$, je v $C_c(G)$ tudi leva stran. Če zamenjamo f z f^* , dobimo $f * g \in C_c(G)$.

Trditev 8. Za $\mu \in M(G)$ je $\phi_\mu \in \mathcal{P}(G)$ natanko takrat, ko je $\mu \geq 0$. V tem primeru velja $\|\phi_\mu\|_\infty = \|\mu\|$.

Dokaz. Veljavnost trditve spoznamo iz naslednjega računa, veljavnega za vsak $f \in L^1(G)$,

$$(1) \quad \int \int f(x)\overline{f(y)}\phi_\mu(y^{-1}x)dxdy = \int \int \int f(x)\overline{f(y)}\langle y, \xi \rangle \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi)dxdy = \int_{\widehat{G}} |\Phi_\xi(f)|^2 d\mu(\xi).$$

Če je $\mu \geq 0$, je očitno desna stran nenegativna, torej funkcija ϕ pozitivnega tipa. Ker je zvezna, je v $\mathcal{P}(G)$. Obratno pa iz dejstva $\int_{\widehat{G}} |\Phi_\xi(f)|^2 d\mu(\xi) \geq 0$ za vsak $f \in L^1(G)$ zaradi gostosti Gelfandovih transformirank v $C_0(\widehat{G})$ sledi $\int_{\widehat{G}} |\psi(\xi)|^2 d\mu(\xi) \geq 0$ za vsak $\psi \in C_0(\widehat{G})$ oziroma $\int_{\widehat{G}} \psi'(\xi) d\mu(\xi) \geq 0$ za vsako nenegativno funkcijo $\psi' \in C_0(\widehat{G})$. To pa že pove, da določa integral pozitiven funkcional na $C_0(\widehat{G})$, zato mora biti ustrezna mera pozitivna. Poleg tega je tedaj očitno $\|\phi_\mu\|_\infty \leq \|\mu\|$ in $\|\mu\| = \mu(\widehat{G}) = \phi_\mu(1) \leq \|\phi_\mu\|_\infty$.

Zgled. Če npr. izberemo $\mu = \delta_\xi$ za $\xi \in \widehat{G}$, je $\phi_\mu(x) = \langle x, \xi \rangle$ za vsak $x \in G$, torej ϕ_μ karakter na G . Karakterji so torej funkcije pozitivnega tipa, njihova norma je enaka 1. Kot bomo takoj spoznali, za vsako funkcijo $\phi \in \mathcal{P}(G)$ velja $\|\phi\|_\infty = \phi(1)$.

Obrat trditve 8 je znameniti Bochnerjev izrek.

Izrek 3 (Bochner). Če je $\phi \in \mathcal{P}(G)$, obstaja ena sama pozitivna Radonova mera $\mu \in M(G)$, tako da je $\phi = \phi_\mu$ in $\|\phi\|_\infty = \|\mu\|$.

Dokaz. Da je μ ena sama, sledi iz trditve 6 (injektivnost preslikave $\mu \mapsto \phi_\mu$). Navedli bomo dva dokaza za eksistenco ustrezne mere μ .

(A) Dovolj je vzeti poljuben $\phi \in \mathcal{P}$ z lastnostjo $\|\phi\|_\infty \leq 1$. Naj bo

$$M_0 = \{\mu \in M(\widehat{G}); \mu \geq 0, \mu(\widehat{G}) \leq 1\}.$$

Potem je M_0 šibko- $*$ zaprta konveksna podmnožica enotske krogle v $M(\widehat{G})$, torej šibko- $*$ kompaktna množica. Če je $\mu_\alpha \in M_0$ in $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ v šibki- $*$ topologiji, potem ob upoštevanju, da je funkcija $\xi \mapsto \Phi_\xi(f)$ v $C_0(\widehat{G})$ za vsak $f \in L^1(G)$ velja

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\phi_{\mu_\alpha}(x)dx &= \int \int f(x)\langle x, \xi \rangle d\mu_\alpha(\xi)dx = \int \Phi_\xi(f)d\mu_\alpha(\xi) \rightarrow \int \Phi_\xi(f)d\mu(\xi) = \\ &= \int \int f(x)\langle x, \xi \rangle d\mu(\xi)dx = \int_G f(x)\phi_\mu(x)dx. \end{aligned}$$

Torej velja $\phi_{\mu_\alpha} \rightarrow \phi_\mu$ v šibki- $*$ topologiji na podmnožici

$$\mathcal{P}_0 = \{\psi \in \mathcal{P}(G); \|\psi\|_\infty \leq 1\} \subset L^\infty(G).$$

To pomeni, da je preslikava $\mu \mapsto \phi_\mu$ iz M_0 v \mathcal{P}_0 zvezna (obakrat v šibki- $*$ topologiji). Njena zaloga vrednosti je zato kompaktna konveksna podmnožica $\mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{P}_0$. Toda \mathcal{P}'_0 vsebuje vse karakterje $\xi \in \widehat{G}$ (izberemo $\mu = \delta_\xi \in M_0$) in tudi mero 0. To pa so ravno ekstremne točke množice \mathcal{P}_0 . Po Krein-Milmanovem izreku je

$$\mathcal{P}_0 = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(\mathcal{P}_0)) = \overline{\text{co}}(\widehat{G} \cup \{0\}) \subset \mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{P}_0.$$

Torej je $\{\phi_\mu; \mu \in M_0\} = \mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0$. Iz trditve 8 vemo, da se normi mere in ustrezne funkcije ujemata.

(B) Dovolj je izrek dokazati za primer, ko je $\phi(1) = 1$. Če je $\phi \in \mathcal{P}(G)$, je po definiciji množice $\mathcal{P}(G)$ res $\int \phi(x)(f^* * f)(x)dx \geq 0$ za $f \in L^1(G)$. Zato lahko uporabimo Cauchy-Schwarzovo neenakost za pozitivno sesquilineararno formo $\langle f, g \rangle_\phi = \int \phi(x)(g^* * f)(x)dx$ in dobimo za $f, g \in L^1(G)$

$$(2) \quad \left| \int \phi(x)(g^* * f)(x)dx \right|^2 \leq \int \phi(x)(f^* * f)(x)dx \int \phi(x)(g^* * g)(x)dx.$$

Naj bo (ψ_U) normirana pozitivna približna enota v $L^1(G)$ kot prej. Potem je tudi ψ_U^* približna enota in za vsak $f \in L^1(G)$ velja

$$(3) \quad \int \phi(x)(\psi_U^* * f)(x)dx \rightarrow \int \phi(x)f(x)dx.$$

Poleg tega smo prej ugotovili tudi konvergenco $\int \phi(x)(\psi_U^* * \psi_U)(x)dx \rightarrow \phi(1) = 1$ ($U \rightarrow 1$). Če v (2) vzamemo $g = \psi_U$, dobimo v limiti

$$\left| \int \phi(x)f(x)dx \right|^2 \leq \int \phi(x)(f^* * f)(x)dx.$$

Označimo $h = f^* * f$, tako da je $\left| \int \phi(x)f(x)dx \right|^2 \leq \int \phi(x)h(x)dx$. Poleg tega je $h^* = h$ in za $h^{(2)} = h * h$ velja isto: $\left| \int \phi(x)h(x)dx \right|^2 \leq \int \phi(x)h^{(2)}(x)dx$ itd. V splošnem dobimo za vsak n

$$\begin{aligned} \left| \int \phi(x)f(x)dx \right| &\leq \left| \int \phi(x)h(x)dx \right|^{1/2} \leq \left| \int \phi(x)h^{(2)}(x)dx \right|^{1/4} \leq \dots \leq \\ &\left| \int \phi(x)h^{(2^n)}(x)dx \right|^{1/2^{n+1}} \end{aligned}$$

oziroma

$$\left| \int \phi(x)f(x)dx \right| \leq \|\phi\|_\infty^{1/2^{n+1}} \|h^{(2^n)}\|_1^{1/2^{n+1}}.$$

V limiti, ko $n \rightarrow \infty$, dobimo odtod

$$\left| \int \phi(x)f(x)dx \right| \leq r(h)^{1/2} = \sup\{|\Phi_\xi(h)|; \xi \in \widehat{G}\}^{1/2} = \sup\{|\Phi_\xi(f)|; \xi \in \widehat{G}\}.$$

Torej je $\int \phi(x)f(x)dx$ vrednost zveznega linearne funkcionala na algebri Gelfandovih transformirank funkcij iz $L^1(G)$ z normo pod 1. Ker je to gosta podalgebra v $C_0(\widehat{G})$, lahko

funkcional po zveznosti razširimo na ves prostor $C_0(\widehat{G})$. Po Rieszovem izreku torej obstaja taka mera $\mu \in M(\widehat{G})$ z normo $\|\mu\| \leq 1$, da je za vsak $f \in L^1(G)$

$$\int_G \phi(x)f(x)dx = \int_{\widehat{G}} \Phi_\xi(f)d\mu(\xi).$$

Potem imamo

$$\int_G \phi(x)f(x)dx = \int_{\widehat{G}} \int_G \langle x, \xi \rangle f(x)dx d\mu(\xi) = \int_G \left(\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi) \right) f(x)dx.$$

Iz te enakosti vidimo, da mora biti $\phi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi)$, torej $\phi = \phi_\mu$. Trditev 8 potem pove, da je $\mu \geq 0$ in $\|\phi\|_\infty = \|\mu\|$.

Opomba. Funkcije pozitivnega tipa se ujemaajo s t.i. pozitivno definitnimi funkcijami (glej definicijo IV.4.2 in trditev IV.4.9). Bochner je pokazal, da so pozitivno definitne funkcije na realni osi Fourier-Stieltjesove transformiranke pozitivnih mer (od tod poimenovanje izreka 3). V naslednjem razdelku bomo videli tesno zvezo med temi transformirankami in funkcijami oblike ϕ_μ iz definicije 3. V primeru diskretne grupe \mathbb{Z} je ustrezna analogija znana kot Herglotzov izrek (glej npr. [19], str. 38).

2. Fourierova transformacija

Definirali bomo Fourierovo transformacijo funkcij in mer, slednje povezali s funkcijami pozitivnega tipa, poiskali inverz Fourierove transformacije in dokazali Plancherelov izrek.

Spomnimo se, da lahko v primeru Abelove lokalno kompaktne grupe G konvolucijo poljubnih dveh elementov f, g njene grupne algebre $L^1(G)$ zapišemo tudi v naslednji obliki $(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)dy$ za $x \in G$.

Definicija 1. *Fourierova transformiranka* funkcije $f \in L^1(G)$ je kompleksna funkcija $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$, definirana za vsak $\xi \in \widehat{G}$ s predpisom

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x)dx.$$

Preslikavo $\mathcal{F}: f \mapsto \widehat{f}$ imenujemo *Fourierova transformacija*. Vidimo, da je v resnici $\widehat{f}(\xi) = \Phi_{\xi^{-1}}(f)$.

Osnovne lastnosti

Vse osnovne lastnosti Fourierove transformacije sledijo iz zadnje ugotovitve, vendar jih zaradi pomembnosti še enkrat dokažimo.

Trditev 1. *Fourierova transformacija \mathcal{F} je kontraktivni $*$ -homomorfizem iz grupne algebre $L^1(G)$ v prostor $C_0(\widehat{G})$ z gosto zalogo vrednosti.*

Dokaz. Izračunajmo za $\xi \in \widehat{G}$ in $f, g \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} (f * g)\widehat{(\xi)} &= \int \overline{\langle x, \xi \rangle} (f * g)(x)dx = \int \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(xy^{-1})g(y)dydx = \\ &= \int \overline{\langle y, \xi \rangle} g(y)dy \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x)dx = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \end{aligned}$$

in

$$\widehat{f^*}(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f^*(x)dx = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x^{-1})dx = \int \langle x^{-1}, \xi \rangle f(x)dx = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x)dx = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Torej Fourierova transformacija preslika konvolucijo v produkt in ohranja involucijo. Poleg tega za vsak $f \in L^1(G)$ velja

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

V izreku 1.1. smo identificirali \widehat{G} z Gelfandovim spektrom algebre $L^1(G)$. Ker je $\xi \mapsto \xi^{-1}$ homeomorfizem dualne grupe in $\widehat{f}(\xi) = \Phi_{\xi^{-1}}(f)$, je tudi \widehat{f} v bistvu Gelfandova transformiranka za f na spektru algebre $L^1(G)$ in zato $\widehat{f} \in C_0(\widehat{G})$, kot je znano iz Gelfandove teorije.

Množica vseh Fourierovih transformirank $\mathcal{FL}^1(G)$ je involutivna (simetrična) podalgebra v $C_0(\widehat{G})$. Za vsak $\xi \in \widehat{G}$ obstaja $f \in L^1(G)$ z lastnostjo $\widehat{f}(\xi) \neq 0$. Ker za $\xi \neq \eta$ velja tudi $\widehat{f}(\xi) \neq \widehat{f}(\eta)$, algebra loči točke. Po verziji Stone-Weierstrassovega izreka za lokalno kompaktno prostore (glej dodatek C) je algebra $\mathcal{FL}^1(G)$ gosta v $C_0(\widehat{G})$.

Posledica. Za vsak $f \in L^1(G)$ je $(f^* * f)^\wedge = |f|^2$.

Dokaz. Za vsak $\xi \in \widehat{G}$ je $(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ in $\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$ (glej dokaz trditve 1).

Trditev 2. Za $y \in G$, $f \in L^1(G)$ in $\xi, \eta \in \widehat{G}$ velja:

- (a) $(L_y f)^\wedge(\xi) = \overline{\langle y, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi)$,
- (b) $(\eta f)^\wedge(\xi) = (L_\eta \widehat{f})(\xi)$.

Dokaz. (a) Izračunajmo $(L_y f)^\wedge(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} f(y^{-1}x) dx = \overline{\langle y, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi)$.

(b) Zda j je $(\eta f)^\wedge(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi \rangle} \langle x, \eta \rangle f(x) dx = \int \overline{\langle x, \xi \eta^{-1} \rangle} f(x) dx = \widehat{f}(\eta^{-1}\xi) = (L_\eta \widehat{f})(\xi)$.

Razširitev na mere

Spomnimo se, da so kompleksne Radonove mere kompleksne Borelove mere, ki so končne na vseh kompaktnih množicah, zunanje regularne na vseh Borelovih množicah in notranje regularne na vseh odprtih množicah v G . Ker smo predpostavili σ -kompaktnost grupe G , je vsaka Radonova mera σ -končna in zato regularna. Prostor vseh kompleksnih Radonovih mer smo označili z $M(G)$. To je involutivna Banachova algebra za konvolucijo, dano z $\int \phi d(\mu * \nu) = \int \int \phi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$ za vsak $\phi \in C_0(G)$, in involucijo, dano z $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ za vsako Borelovo množico E (glej definiciji II.1.1 in II.1.2).

Definicija 2. Fourierova transformiranka mere $\mu \in M(G)$ je kompleksna funkcija $\widehat{\mu} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$, definirana za vsak $\xi \in \widehat{G}$ s predpisom

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} d\mu(x).$$

Tudi preslikavo $\mathcal{F} : \mu \mapsto \widehat{\mu}$ imenujemo Fourierova (ali Fourier-Stieltjesova) transformacija.

Trditev 3. Za $\xi \in \widehat{G}$ in $\mu, \nu \in M(G)$ velja $(\mu * \nu)^\wedge(\xi) = \widehat{\mu}(\xi)\widehat{\nu}(\xi)$.

Dokaz. Izračunajmo

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)^\wedge(\xi) &= \int \overline{\langle x, \xi \rangle} d(\mu * \nu)(x) = \int \int \overline{\langle xy, \xi \rangle} d\mu(x) d\nu(y) = \\ &= \int \int \overline{\langle x, \xi \rangle} \overline{\langle y, \xi \rangle} d\mu(x) d\nu(y) = \widehat{\mu}(\xi)\widehat{\nu}(\xi). \end{aligned}$$

Tu smo pri drugem enačaju upoštevali, da lahko μ in ν aproksimiramo z merami s kompaktnim nosilcem, sicer bi enakost po definiciji konvolucije veljala le za funkcije iz $C_0(G)$, ne pa za omejene zvezne funkcije.

Trditev 3 pomeni, da določa ξ (netrivialen) multiplikativen funkcional na merah, tako da je \widehat{G} podmnožica spektra algebre $M(G)$ in $\widehat{\mu}$ zožitev Gelfandove transformiranke mere μ na spektru algebre $M(G)$ na podmnožico \widehat{G} . Spekteer algebre $M(G)$ je sicer precej večji.

Inverzna Fourierova transformacija

Z uporabo kompleksnih Radonovih mer lahko definiramo nove funkcijske prostore.

Definicija 4. Za lokalno kompaktno Abelovo grupo G z dualno grupo \widehat{G} naj bo

$$B(G) = \{\phi_\mu; \mu \in M(\widehat{G})\}$$

in za $1 \leq p < \infty$ še

$$B^p(G) = B(G) \cap L^p(G).$$

Po Bochnerjevem izreku (glej izrek 1.2), je $\{\phi_\mu; \mu \in M(\widehat{G}), \mu \geq 0\} = \mathcal{P}(G)$. Ker je vsaka mera μ linearna kombinacija pozitivnih mer, je v skladu z zgornjo definicijo $B(G) = \text{span } \mathcal{P}(G)$. Od prej, iz posledice trditve 5, vemo, da ta linearna ovojnica vsebuje množico $\{f * g; f, g \in C_c(G)\}$. Ker lahko za g vzamemo elemente približne enote v $L^1(G)$, vidimo, da je ta množica gosta v $C_c(G)$ v supremum normi in v $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) v normi $\|\cdot\|_p$. Torej je podprostor $B(G) \cap C_c(G)$ gost v $C_c(G)$ in podprostor $B^p(G)$ gost v $L^p(G)$.

Pred izrekom o inverzni Fourierovi transformaciji potrebujemo dve pomožni lemi.

Lema 1. Naj bo $K \subset \widehat{G}$ neprazna kompaktna množica. Potem obstaja taka funkcija $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$, da je $\widehat{f} \geq 0$ na \widehat{G} in $\widehat{f} > 0$ na K .

Dokaz. Izberimo $h \in C_c(G)$ z lastnostjo $\widehat{h}(1) = \int_G h(x) dx = 1$ in definirajmo $g = h^* * h$. Potem je $\widehat{g} = |\widehat{h}|^2 \geq 0$ in $\widehat{g}(1) = 1$. Torej obstaja taka okolica V enote $1 \in \widehat{G}$, da je $\widehat{g} > 0$ na V . Kompaktno množico K lahko pokrijemo s končno mnogo premaknjenimi okolicami oblike $\xi_j V$, torej $K \subset \cup_{j=1}^n \xi_j V$ za neko naravno število n . Postavimo $f = (\sum_{j=1}^n \xi_j)g$, kar je zvezna funkcija na G . Zanj velja $\widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^n (\xi_j g)^\wedge(\xi) = \sum_{j=1}^n \widehat{g}(\xi_j^{-1} \xi) \geq 0$ za vsak $\xi \in \widehat{G}$. Če pa je $\xi \in K$, velja $\widehat{f}(\xi) > 0$, ker obstaja tak indeks j , da velja $\xi \in \xi_j V$ oziroma $\xi_j^{-1} \xi \in V$. Seveda je $g \in \mathcal{P}(G)$, saj je oblike $g = h^* * h$. Potem pa je tudi $f \in \mathcal{P}(G)$. Po definiciji elementov iz $\mathcal{P}(G)$ namreč velja

$$\int_G f(x)(a^* * a)(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_G g(x) \xi_j(x)(a^* * a)(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_G g(x)((\xi_j a)^* * (\xi_j a))(x) dx \geq 0$$

za vsak $a \in L^1(G)$ zaradi naslednjega izračuna ($x \in G, a \in L^1(G)$)

$$\begin{aligned} \xi_j(x)(a^* * a)(x) &= \int \xi_j(x) a^*(xy^{-1}) a(y) dy = \int \xi_j(xy^{-1}) a^*(xy^{-1}) \xi_j(y) a(y) dy = \\ &= \int (\xi_j a)^*(xy^{-1}) (\xi_j a)(y) dy = ((\xi_j a)^* * (\xi_j a))(x). \end{aligned}$$

Očitno je preslikava $\mu \mapsto \phi_\mu$ bijekcija z $M(\widehat{G})$ na $B(G)$. Surjektivna je namreč po definiciji, injektivnost pa smo videli v trditvi 4. Inverzno sliko te preslikave pri dani funkciji $\phi \in B(G)$ označimo z μ_ϕ . Torej je za vsak $\phi \in B(G)$ inverzna slika μ_ϕ mera z lastnostjo $\phi_{\mu_\phi} = \phi$.

Lema 2. Če je $f, g \in B^1(G)$, in sta μ_f, μ_g ustrežni meri, je

$$\widehat{f} d\mu_g = \widehat{g} d\mu_f.$$

Dokaz. Pokazati moramo, da za vsak $\psi \in C_0(\widehat{G})$ velja

$$\int_G \psi(\xi) \widehat{f}(\xi) d\mu_g(\xi) = \int_G \psi(\xi) \widehat{g}(\xi) d\mu_f(\xi).$$

Pa naj bo $h \in L^1(G)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\xi) d\mu_f(\xi) &= \int_{\widehat{G}} \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} h(x) dx d\mu_f(\xi) = \int_G h(x) \int_{\widehat{G}} \langle x^{-1}, \xi \rangle d\mu_f(\xi) dx = \\ &= \int_G h(x) f(x^{-1}) dx = (h * f)(1). \end{aligned}$$

Zamenjajmo h z $h * g$, nato pa še f in g (kar lahko storimo zaradi komutativnosti), pa dobimo

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\mu_f(\xi) = ((h * g) * f)(1) = ((h * f) * g)(1) = \int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\xi) \widehat{f}(\xi) d\mu_g(\xi).$$

Imamo torej $\int_{\widehat{G}} \widehat{h} \widehat{g} d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \widehat{h} \widehat{f} d\mu_g$ za vsak $\widehat{h} \in \mathcal{FL}^1(G)$. Ker pa je ta množica gosta v $C_0(\widehat{G})$, velja $\widehat{g} d\mu_f = \widehat{f} d\mu_g$.

Kasneje bomo spoznali še drugo verzijo naslednjega pomembnega izreka.

Izrek 1 (Inverzna Fourierova transformacija, I). *Iz $f \in B^1(G)$ sledi $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Če je Haarova mera $d\xi$ na \widehat{G} primerno normalizirana glede na Haarovo mero dx na G , velja $d\mu_f(\xi) = \widehat{f}(\xi) d\xi$, torej za vsak $x \in G$*

$$(1) \quad f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Dokaz. Poiskali bomo ustrezen pozitiven invarianten funkcional na prostoru $C_c(\widehat{G})$. Naj bo $\psi \in C_c(\widehat{G})$. Potem po lemi 1 obstaja taka funkcija $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$, da je $\widehat{f} > 0$ na $\text{supp } \psi$. Definirajmo

$$I(\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} d\mu_f(\xi).$$

Če je g druga funkcija z isto lastnostjo, velja po lemi 2

$$\int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} d\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)} \widehat{g}(\xi) d\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\mu_g(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{g}(\xi)} d\mu_g(\xi).$$

Torej je funkcional I neodvisen od izbire funkcije f , ampak le od funkcije ψ . Očitno je linearen. Prav tako se hitro vidi, da je $I(\psi) \geq 0$ za $\psi \geq 0$ (ker je hkrati $\widehat{f} \geq 0$ in potem $\mu_f \geq 0$). Torej je I pozitiven linearen funkcional na $C_c(\widehat{G})$. Ali se lahko zgodi, da je $I(\psi) = 0$ za vsak $\psi \in C_c(\widehat{G})$? To ni mogoče. Če je namreč $g \in B^1(G)$, $g \neq 0$, je tudi $\mu_g \neq 0$, ker je $g \mapsto \mu_g$ bijekcija iz $B(G)$ na $M(\widehat{G})$. Tedaj pa obstaja $\psi \in C_c(\widehat{G})$, tako da je $\int_{\widehat{G}} \psi(\xi) d\mu_g(\xi) \neq 0$. Potem pa velja (z uporabo leme 2) tudi

$$(2) \quad I(\widehat{g}\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} \widehat{g}(\xi) d\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\mu_g(\xi) = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi) d\mu_g(\xi) \neq 0.$$

Torej je $I \neq 0$, se pravi netrivialen pozitiven linearen funkcional na $C_c(\widehat{G})$.

Poleg tega za vsak $\eta \in \widehat{G}$ velja

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu_f(\eta\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \eta^{-1}\xi \rangle d\mu_f(\xi) = \langle x, \eta^{-1} \rangle \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu_f(\xi) = \langle x, \eta \rangle f(x) = (\eta f)(x),$$

tj. $d\mu_f(\eta\xi) = d\mu_{\eta f}(\xi)$ za $\xi, \eta \in \widehat{G}$ zaradi enolične izražave funkcije ηf z integralom. Prav tako velja za vsak $\xi, \eta \in \widehat{G}$

$$(\eta f)^\wedge(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} \eta(x) f(x) dx = \int_G \overline{\langle x, \xi \eta \rangle} f(x) dx = \widehat{f}(\eta\xi).$$

Če izberemo f tako, da je $\widehat{f} > 0$ na $\text{supp } \psi \cup \text{supp } L_\eta \psi$, imamo

$$I(L_\eta \psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\eta^{-1}\xi)}{\widehat{f}(\xi)} d\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{f}(\eta\xi)} d\mu_f(\eta\xi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{(\widehat{\eta f})(\xi)} d\mu_{\widehat{\eta f}}(\xi).$$

Zadnji integral pa je zaradi neodvisnosti od izbire funkcije f spet enak $I(\psi)$. Torej je I invarianten integral funkcional na \widehat{G} , zato ga lahko zapišemo v obliki $I(\psi) = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi) d\xi$, kjer je $d\xi$ neka Haarova mera na \widehat{G} .

Naj bo še $f \in B^1(G)$ poljubna funkcija in $\psi \in C_c(\widehat{G})$. Potem je, tako kot v (2),

$$\int_{\widehat{G}} \psi(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = I(\psi \widehat{f}) = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi) d\mu_f(\xi).$$

Sledi $\widehat{f}(\xi) d\xi = d\mu_f(\xi)$. Torej je \widehat{f} Radon-Nikodymov odvod mere μ_f po Haarovi meri. Ker je variacija mere μ_f končna, je $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Poleg tega velja $\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu_f(\xi) = f(x)$ in izrek je dokazan.

Posledica. Če je $f \in L^1(G) \cap \mathcal{P}(G)$, je $\widehat{f} \geq 0$.

Dokaz. Ker je po Bochnerjevem izreku v tem primeru $\mu_f \geq 0$ in $\widehat{f}(\xi) d\xi = d\mu_f(\xi)$, je tudi $\widehat{f} \geq 0$.

Definicija 5. Haarovo mero $d\xi$ na dualni grupi \widehat{G} , za katero velja formula (1), imenujemo *dualna Haarova mera* k Haarovi meri dx na grupi G .

Denimo, da na grupi G izberemo drugo Haarovo mero cdx (vsaka je proporcionalna prvotni). Potem se Fourierova transformiranka funkcije f spremeni v $c\widehat{f}$. Če hočemo, da bo še vedno veljala formula (1) moramo za dualno Haarovo mero izbrati $c^{-1}d\xi$. V Fourierovi analizi na konkretnih grupah je zelo pomembno, kako so Haarove mere normalizirane. Zaradi izreka 1 je smiselno, da na dualni grupi vedno izberemo dualno Haarovo mero.

Zgled 1. Dualno grupo $\widehat{\mathbb{R}}$ aditivne grupe \mathbb{R} smo v izreku 1.2(a) identificirali z \mathbb{R} preko dualnosti $\langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x \xi}$, $x, \xi \in \mathbb{R}$. Pokažimo, da je v tem primeru dualna Haarova mera k Lebesguovi meri na \mathbb{R} spet Lebesguova mera na \mathbb{R} .

Fourierova transformiranka funkcije $g(x) = e^{-\pi x^2}$ je $\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi - \pi x^2} dx$. Izračunamo jo z odvajanjem na parameter in integracijo po delih. Najprej je

$$\widehat{g}'(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = -2\pi \xi \widehat{g}(\xi)$$

in

$$\widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \Gamma(1/2)/\sqrt{\pi} = 1.$$

Torej je $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$, se pravi $\widehat{g} = g$. Toda to je soda funkcija, zato velja

$$g(x) = \widehat{g}(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi - \pi \xi^2} d\xi.$$

Dualna Haarova mera je torej tudi $d\xi$ (Lebesguova mera), za vsak $f \in B^1(G)$, $x \in G$, $\xi \in \widehat{G}$ velja

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad \text{in} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Če bi uporabili dualnost $\langle x, \xi \rangle = e^{ix\xi}$, bi bila dualna mera k Lebesguovi enaka $d\xi/2\pi$. V tem primeru bi namreč pri isti funkciji g kot prej dobili $\widehat{g}'(\xi) = -\xi \widehat{g}(\xi)/2\pi$, $\widehat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/4\pi} = g(\xi/2\pi)$ in

$$g(x) = g(-x) = \widehat{g}(-2\pi x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi \xi^2} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2/4\pi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, \xi \rangle \widehat{g}(\xi) d\xi.$$

V klasični Fourierovi analizi na realni osi je taka izbira običajna. Dualna mera k Haarovi meri $dx/\sqrt{2\pi}$ pa bi bila pri isti dualnosti enaka $d\xi/\sqrt{2\pi}$, ker tudi včasih uporabljamo, torej

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Trditve 4. Če je Abelova grupa G kompaktna in je Haarova mera normalizirana tako, da je $|G| = 1$, je k njej dualna Haarova mera na (diskretni grupi) \widehat{G} mera, ki šteje točke. Obratno, če je grupa G diskretna in je Haarova mera enaka meri, ki šteje točke, je dualna Haarova mera na (kompaktni grupi) \widehat{G} taka, da je $|\widehat{G}| = 1$.

Dokaz. Naj bo G kompaktna Abelova grupa. Izberimo na G funkcijo g , ki je identično enaka 1. Potem je za vsak $\xi \in \widehat{G}$

$$\widehat{g}(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} g(x) dx = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} dx = \int_G \overline{\xi}(x) \cdot 1 dx = \chi_{\{1\}}(\xi).$$

Za vsak $x \in G$ lahko zapišemo

$$\sum_{\xi \in \widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{g}(\xi) = \langle x, 1 \rangle = 1 = g(x).$$

Torej je dualna mera ravno mera, ki šteje točke. Če je G diskretna Abelova grupa, izberimo $g = \chi_{\{1\}}$. Potem je $\widehat{g}(\xi) = \sum_{x \in G} \overline{\langle x, \xi \rangle} g(x) = \langle 1, \xi \rangle = 1$ za vsak $\xi \in \widehat{G}$, torej $\widehat{g} = 1$ na \widehat{G} . Za vsak $x \in G$ lahko zapišemo

$$\int_{\xi \in \widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{\xi \in \widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\xi = \chi_{\{1\}}(x) = g(x).$$

Dualna mera k meri, ki šteje točke, je Haarova mera z lastnostjo $|\widehat{G}| = 1$.

Zgled 2. Grupi \mathbb{T} in \mathbb{Z} sta si dualni (izrek 1.2(b,c)). Haarova mera na kompaktni grupi \mathbb{T} je normalizirana Lebesguova (ločna) mera $dx/2\pi$. Potem je na \mathbb{Z} dualna tista mera, ki šteje točke. Velja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ za $n \in \mathbb{Z}$ (klasični Fourierovi koeficienti) ter $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ za $x \in [0, 2\pi)$ (klasična Fourierova vrsta).

Zgled 3. Zdaj vzemimo za G ciklično grupo \mathbb{Z}_k ostankov po modulu k , ki je dualna sama sebi (glej izrek 1.2(d)). Imejmo na \mathbb{Z}_k za Haarovo mero tako mero, ki šteje točke. Potem je $\widehat{g}(m) = \sum_{n=0}^{k-1} g(n) e^{-2\pi imn/k}$ za vsak $m = 0, 1, \dots, k-1$. Če je $g = \chi_{\{0\}}$, torej $g(0) = 1$ in $g(n) = 0$ za $n \neq 0$, velja $\widehat{g}(m) = 1$ za vsak m . Ker pa je tedaj tudi $\frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \widehat{g}(m) e^{2\pi imn/k} = \chi_{\{0\}}(n) = g(n)$ za vsak n , je dualna Haarova mera povprečje na grupi \mathbb{Z}_k (tj. normalizirana mera, ki šteje točke).

Plancherelov izrek

Izrek 2 (Plancherel). Fourierovo transformacijo $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ lahko iz skupnega prostora $L^1(G) \cap L^2(G)$ enolično razširimo do izometričnega izomorfizma iz $L^2(G)$ na $L^2(\widehat{G})$.

Dokaz. Naj bo $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Ker je $f \in L^2(G)$, je tudi $f^* \in L^2(G)$, zato je $f^* * f \in L^1(G)$. Poleg tega vemo, da je za $f \in L^2(G)$ konvolucija $f^* * f$ zvezna funkcija pozitivnega tipa, torej $f^* * f \in \mathcal{P}(G)$ (glej posledico 1 trditve 1.7), in da velja $(f^* * f)^\wedge(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$ (glej posledico trditve 1). Torej je po izreku 1

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_G f(x) f^*(x^{-1}) dx = (f^* * f)(1) = \int_{\widehat{G}} \langle 1, \xi \rangle (f^* * f)^\wedge(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Torej je $f \mapsto \widehat{f}$ izometrija v normi $\|\cdot\|_2$, definirana na podprostoru $L^1(G) \cap L^2(G)$, ki je gost v $L^2(G)$, saj je celo $C_c(G)$ gost v $L^2(G)$ (in v $L^1(G)$). Zato jo lahko enolično razširimo, do izometrije iz $L^2(G)$ v $L^2(\widehat{G})$. Pokažimo, da je tako razširjena izometrija surjektivna.

Naj bo funkcija $\psi \in L^2(\widehat{G})$ pravokotna na vsak \widehat{f} , $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Potem za vsak $x \in G$ velja

$$0 = \int_{\widehat{G}} \psi(\xi) \overline{(L_x f)^\wedge(\xi)} d\xi = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \psi(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi.$$

Toda $\psi \widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, ker je $\psi \in L^2(\widehat{G})$ in $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$, zato je $\psi(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} \in M(\widehat{G})$. Zaradi enoličnosti preslikave $\mu \mapsto \phi_\mu$ (glej trditev 1.6), mora biti ta mera enaka nič. Torej velja $\psi \widehat{f} = 0$ s.p. za vsak $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Ker pa obstajajo funkcije $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}(G)$, katerih Fourierove transformiranke so strogo pozitivne na poljubni vnaprej izbrani kompaktni podmnožici (glej lemo 1), mora biti $\psi = 0$ s.p. Torej je samo funkcija $\psi = 0$ pravokotna na vse funkcije \widehat{f} , $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ in razširjena izometrija $f \mapsto \widehat{f}$ je surjektivna.

Posledica. Če je G kompaktna Abelova grupa in $|G| = 1$, je \widehat{G} kompletna ortonormirana množica funkcij na G , se pravi ortonormirana baza za $L^2(G)$.

Dokaz. Vemo že, da je \widehat{G} ortonormirana množica (trditev 1.1). Če je $f \in L^2(G)$ funkcija, ki je pravokotna na vsak element iz \widehat{G} , je $0 = \int_G f(x) \overline{\xi(x)} dx = \int_G \langle x, \xi \rangle f(x) dx = \widehat{f}(\xi)$ za vsak $\xi \in \widehat{G}$. Po Plancherelovem izreku (izrek 2) je potem tudi $f = 0$ s.p. na G oziroma $f = 0$.

3. Pontrjaginovalna dualnost

Elementi dualne grupe \widehat{G} so karakterji na lokalno kompaktni Abelovi grupi G . Toda z enako pravico lahko gledamo na elemente grupe G kot na karakterje na \widehat{G} . Za vsak $x \in G$ naj bo namreč $\Phi(x)$ karakter na \widehat{G} , definiran s predpisom

$$\langle \xi, \Phi(x) \rangle = \langle x, \xi \rangle.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je $\Phi(x)$ res karakter na \widehat{G} . Prav tako je očitno preslikava $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ grupni homomorfizem. Pokazali bomo, da je v resnici izomorfizem.

Lema 1. Za vsako okolico U točke $x \in G$, obstajata taki funkciji $\phi, \psi \in C_c(G)$, da velja $(\phi * \psi)(x) \neq 0$ in $\text{supp}(\phi * \psi) \subset U$.

Dokaz. Okolici U točke x poiščimo tako simetrično okolico V enote $1 \in G$, da je $(xV)V \subset U$. Izberimo poljubno od nič različno funkcijo $\psi \in C_c(G)$ z nosilcem $\text{supp} \psi \subset V$ in definirajmo $\phi(y) = \overline{\psi(xy^{-1})}$ za $y \in G$. Potem je tudi $\phi \in C_c(G)$ z nosilcem $\text{supp} \phi \subset xV$. Torej je $(\phi * \psi)(x) = \int_G \phi(xy^{-1}) \psi(y) dy = \int_G |\psi(y)|^2 dy > 0$ in $\text{supp}(\phi * \psi) \subset (\text{supp} \phi)(\text{supp} \psi) \subset (xV)V \subset U$.

Posledica. Preslikava $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ je injektivna.

Dokaz. Bodita $x, y \in G$, $x \neq y$, in $U = G \setminus \{y\}$. Potem je U okolica točke x in po lemi 1 obstaja taka funkcija $f = \phi * \psi$ iz $B^1(G)$, da je $f(x) \neq 0$ in $\text{supp} f \subset U$, torej $f(y) = 0$. Če bi veljalo $\Phi(x) = \Phi(y)$, bi bilo $\langle x, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle$ res za vsak $\xi \in \widehat{G}$. Potem pa bi po izreku 2.1 imeli $f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \langle y, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi = f(y)$, kar ni res.

Lema 2. Za poljubni funkciji $\phi, \psi \in C_c(\widehat{G})$ obstaja taka funkcija $h \in B^1(G)$, da je $\phi * \psi = \widehat{h}$. V posebnem primeru je algebra $\mathcal{FB}^1(G) \cap L^p(\widehat{G})$ gosta v prostoru $L^p(\widehat{G})$ za $1 \leq p < \infty$.

Dokaz. Za vsak $x \in G$ definirajmo $f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \phi(\xi) d\xi$, $g(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \psi(\xi) d\xi$ in $h(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle (\phi * \psi)(\xi) d\xi$. Vse tri funkcije f, g in h so dobro definirane, saj so $\phi, \psi, \phi * \psi \in L^1(\widehat{G})$, in zato $f, g, h \in B(G)$. Pokazali bomo, da je celo $h \in B^1(G)$ in uporabili izrek o inverzni Fourierovi transformaciji.

Naj bo $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$ poljubna funkcija. Potem je po Cauchy-Schwarzovi oceni in Plancherelovem izreku

$$\left| \int_G \overline{f(x)} k(x) dx \right| = \left| \int_G \int_{\widehat{G}} \overline{\langle x, \xi \rangle \phi(\xi)} k(x) dx d\xi \right| = \left| \int_{\widehat{G}} \overline{\phi(\xi)} \widehat{k}(\xi) d\xi \right| \leq \|\phi\|_2 \|\widehat{k}\|_2 = \|\phi\|_2 \|k\|_2.$$

Odtod vidimo, da funkcija f določa omejen linearen funkcional $k \mapsto \int_G \overline{f(x)} k(x) dx$ na $L^2(G)$, torej je (po Rieszovem izreku) sama v $L^2(G)$. Podobno vidimo, da je $g \in L^2(G)$. Poleg tega je

$$h(x) = \int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \phi(\xi \eta^{-1}) \psi(\eta) d\eta d\xi = \int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \eta \rangle \phi(\xi) \psi(\eta) d\xi d\eta = f(x)g(x).$$

Znano je, da je produkt dveh funkcij iz $L^2(G)$ v $L^1(G)$ (Cauchy-Schwarzova neenakost). Torej je $h \in L^1(G)$, se pravi $h \in B^1(G)$. Po prvi verziji inverzne Fourierove transformacije (izrek 2.1) je $h(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{h}(\xi) d\xi$. Primerjajmo to z definicijo funkcije h , pa spoznamo, da je zaradi enolične izražave (glej trditve 1.6) $\widehat{h} = \phi * \psi$.

Naslednja lema pove, da je preslikava Φ homeomorfizem iz G na svojo sliko $\Phi(G)$ v $\widehat{\widehat{G}}$.

Lema 3. Naj bo $x \in G$ in $\{x_\alpha\}$ posplošeno zaporedje v G . Naslednje trditve so ekvivalentne:

- (i) $x_\alpha \rightarrow x$ v G ,
- (ii) $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ za vsak $f \in B^1(G)$,
- (iii) $\int_{\widehat{G}} \langle x_\alpha, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi$ za vsak $f \in B^1(G)$,
- (iv) $\Phi(x_\alpha) \rightarrow \Phi(x)$ v $\widehat{\widehat{G}}$.

Dokaz. Implikacija (i) \implies (ii) je trivialna, ker je funkcija f zvezna. Denimo, da (i) ne velja, se pravi $x_\alpha \not\rightarrow x$. Potem obstaja taka okolica U točke x , da za vsak β_0 obstaja $\beta > \beta_0$ z lastnostjo $x_\beta \notin U$. Poleg tega obstaja po lemi 1 v $B^1(G)$ taka funkcija $f = \phi * \psi$, da je $f(x) \neq 0$ in $\text{supp } f \subset U$. Če bi veljalo $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$, bi obstajal β_0 , tako da bi za vsak $\beta > \beta_0$ veljalo $f(x_\beta) \neq 0$, vemo pa da obstaja tak $\beta > \beta_0$, da je $f(x_\beta) = 0$. Protislovje dokazuje, da $f(x_\alpha) \not\rightarrow f(x)$ in točki (i) in (ii) sta ekvivalentni.

Točka (iii) je le drugače zapisana točka (ii) (glej izrek 2.1). Če velja (iii), velja po definiciji preslikave Φ v resnici

$$\int_{\widehat{G}} \Phi(x_\alpha)(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\widehat{G}} \Phi(x)(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

za vsak $\widehat{f} \in \mathcal{FB}^1(G)$. Ker je topologija na $\widehat{\widehat{G}}$ inducirana s šibko- $*$ topologijo iz $L^\infty(\widehat{G})$, algebra $\mathcal{FB}^1(G)$ pa je gosta v $L^1(\widehat{G})$ (lema 2), iz (iii) sledi (iv) in obratno.

Vse skupaj pomeni, da so točke (i),(ii),(iii) in (iv) iz leme 3 med seboj enakovredne. Med drugim je točka (i) ekvivalentna točki (iv), kar pomeni, da je Φ kot bijekcija iz G na svojo zalogo vrednosti $\Phi(G)$ v obe strani zvezna preslikava, torej homeomorfizem iz G na $\Phi(G)$.

Izrek 1 (Pontrjagin). Preslikava $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ je izomorfizem topoloških grup.

Dokaz. Pokazati moramo samo še surjektivnost za Φ , se pravi, da je $\Phi(G) = \widehat{\widehat{G}}$. Po lemi 3 je tako kot G tudi $\Phi(G)$ lokalno kompaktna grupa in sicer podgrupa v lokalno kompaktni grupi $\widehat{\widehat{G}}$. Po trditvi I.1.5 je potem $\Phi(G)$ zaprta podgrupa v $\widehat{\widehat{G}}$.

Če je $x \in \widehat{G} \setminus \Phi(G)$ in U odprta okolica točke x z lastnostjo $U \cap \Phi(G) = \emptyset$, lahko po lemi 1 izberimo taki funkciji $\phi, \psi \in C_c(\widehat{G})$, da je $\phi * \psi \neq 0$ in $\text{supp}(\phi * \psi) \subset U$. Po lemi 2 potem obstaja taka funkcija $h \in B^1(\widehat{G})$, da je $\phi * \psi = \widehat{h}$. Toda za vsak $y \in G$ je

$$\int_{\widehat{G}} \langle y, \xi \rangle h(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \langle \xi, \Phi(y) \rangle h(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \overline{\langle \xi, \Phi(y^{-1}) \rangle} h(\xi) d\xi = \widehat{h}(\Phi(y^{-1})) = 0,$$

saj je nosilec funkcije $\widehat{h} = \phi * \psi$ vsebovan v U , ta množica pa je disjunktna s $\Phi(G)$. Zaradi enoličnosti (glej trditev 1.6) je potem $h = 0$ in zato $\phi * \psi = \widehat{h} = 0$, kar je v nasprotju z izbiro funkcij ϕ in ψ . Torej mora biti $\Phi(G) = \widehat{G}$.

Odslej bomo identificirali \widehat{G} in G ter izpustili zapis izomorfizma Φ . Tako bomo namesto $\langle \xi, \Phi(x) \rangle$ pisali preprosto $\langle \xi, x \rangle$ za $x \in G$ in $\xi \in \widehat{G}$. Za nas bo odslej torej veljala enakost $\langle x, \xi \rangle = \langle \xi, x \rangle$.

Zdaj lahko navedemo nekatere zanimive posledice Pontrjaginove dualnosti.

Posledice izreka o dualnosti

Najprej dajmo inverzni Fourierovi transformaciji drugo, bolj znano obliko.

Izrek 2 (Inverzna Fourierova transformacija, II). Če je $f \in L^1(G)$ in $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ velja $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(x^{-1})$ oziroma $f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi$ skoraj za vsak $x \in G$. Če je funkcija f zvezna, velja ta enakost za vsak $x \in G$.

Dokaz. Po definiciji Fourierove transformiranke funkcije f dobimo z zamenjavo spremenljivke za vsak $\xi \in \widehat{G}$ enakost

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \int_G \langle x^{-1}, \xi \rangle f(x) dx = \int_G \langle x, \xi \rangle f(x^{-1}) dx.$$

Ker je $f \in L^1(G)$ in $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, ta enakost pomeni, da je $\widehat{f} \in B^1(\widehat{G})$ in $d\mu_{\widehat{f}}(x) = f(x^{-1}) dx$.

Po prvi verziji inverzne Fourierove transformacije (izrek 2.1), uporabljeni za grupi \widehat{G} in $\widehat{\widehat{G}} = G$ je $\widehat{\widehat{f}} \in L^1(\widehat{\widehat{G}}) = L^1(G)$ (enakost velja zaradi izreka 1) in $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \int_G \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(x) dx$, torej $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(x^{-1})$ skoraj za vsak $x \in G$ zaradi enoličnosti. Torej je skoraj za vsak $x \in G$ res $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(x^{-1})$, se pravi (po definiciji Fourierove transformiranke na grupi \widehat{G})

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \overline{\langle x^{-1}, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Formuliramo lahko izrek o enoličnosti Fourierove oz. Fourier-Stieltjesove transformacije.

Izrek 3. Če sta $\mu, \nu \in M(G)$ in je $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, velja $\mu = \nu$. V posebnem primeru, če sta $f, g \in L^1(G)$ in je $\widehat{f} = \widehat{g}$, velja $f = g$.

Dokaz. Če je $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$, imamo za vsak $\xi \in \widehat{G}$ po definiciji funkcij ϕ_μ in ϕ_ν

$$\begin{aligned} \phi_\mu(\xi) &= \int_G \langle x, \xi \rangle d\mu(x) = \int_G \overline{\langle x, \xi^{-1} \rangle} d\mu(x) = \widehat{\mu}(\xi^{-1}) = \widehat{\nu}(\xi^{-1}) = \\ &= \int_G \overline{\langle x, \xi^{-1} \rangle} d\nu(x) = \int_G \langle x, \xi \rangle d\nu(x) = \phi_\nu(\xi). \end{aligned}$$

Vemo, da je funkcija ϕ_μ z mero $\mu \in M(G)$ natanko določena, zato odtod sledi $\mu = \nu$.

Posledica. $M(G)$ in $L^1(G)$ sta polenostavni Banachovi algebri.

Dokaz. Po izreku 3 sta Fourierovi transformaciji $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ oziroma $f \mapsto \widehat{f}$ injektivni. Toda $\widehat{\mu}$ je zožitev Gelfandove transformiranke mere $\mu \in M(G)$ na \widehat{G} , medtem ko je \widehat{f} kar enaka Gelfandovi transformiranki funkcije $f \in L^1(G)$. Torej sta tudi Gelfandovi transformaciji algebre $M(G)$ oziroma $L^1(G)$ injektivni in obe algebri sta polenostavni.

Trditev 1. Če je grupa \widehat{G} kompaktna, je grupa G diskretna. Če je \widehat{G} diskretna, je G kompaktna.

Dokaz. Uporabimo trditev 1.3 in upoštevamo Pontrjagino dualnost.

Trditev 2. Če sta $f, g \in L^2(G)$, je $(fg)^\wedge = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Dokaz. Najprej predpostavimo, da sta $f, g \in L^2(G) \cap \mathcal{FB}^1(\widehat{G})$. Torej sta f in g Fourierovi transformiranki funkcij iz $B^1(\widehat{G})$, ki sta (po Plancherelu) hkrati v $L^2(\widehat{G})$. Obstajata torej $\phi, \psi \in L^2(\widehat{G}) \cap B^1(\widehat{G})$, tako da je $f(x) = \widehat{\phi}(x^{-1})$ in $g(x) = \widehat{\psi}(x^{-1})$ (tu smo namesto x raje vzeli x^{-1} , zato da imamo preprostejšo zvezo $f(x) = \int \langle x, \xi \rangle \phi(\xi) d\xi$ in $g(x) = \int \langle x, \xi \rangle \psi(\xi) d\xi$). Potem je, kot smo že videli v dokazu leme 1,

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)^\wedge(x^{-1}) &= \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle (\phi * \psi)(\xi) d\xi = \int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \phi(\xi \eta^{-1}) \psi(\eta) d\eta d\xi = \\ &= \int_{\widehat{G}} \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \eta \rangle \phi(\xi) \psi(\eta) d\xi d\eta = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \phi(\xi) d\xi \int_{\widehat{G}} \langle x, \eta \rangle \psi(\eta) d\eta = f(x)g(x). \end{aligned}$$

Prvo verzijo inverzne Fourierove transformacije (izrek 2.1) lahko uporabimo na funkciji ϕ in ψ , pa dobimo za vsak $\xi \in \widehat{G}$

$$\phi(\xi) = \int_G \langle x, \xi \rangle \widehat{\phi}(x) dx = \int_G \overline{\langle x^{-1}, \xi \rangle} f(x^{-1}) dx = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \widehat{f}(\xi)$$

in podobno $\psi(\xi) = \widehat{g}(\xi)$. Poleg tega je $\phi * \psi \in L^1(\widehat{G})$, ker sta $\phi, \psi \in L^2(\widehat{G})$. Prav tako je $fg \in L^1(G)$, ker sta oba faktorja $f, g \in L^2(G)$. Torej lahko uporabimo drugi izrek o inverzni Fourierovi transformaciji (izrek 2) za funkcijo $\phi * \psi$, saj je zaradi $(\phi * \psi)^\wedge(x) = f(x^{-1})$ za vsak $x \in G$ tudi $(\phi * \psi)^\wedge \in L^1(G)$. Za vsak ξ velja

$$(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi) = (\phi * \psi)(\xi) = \int_G \langle x, \xi \rangle (\phi * \psi)^\wedge(x) dx = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} (fg)(x) dx = (fg)^\wedge(\xi).$$

Doslej smo predpostavljali, da sta $f, g \in L^2(G) \cap \mathcal{FB}^1(\widehat{G})$. Zdaj pa se znebimo pogoja $\mathcal{FB}^1(\widehat{G})$. Naj bosta $f, g \in L^2(G)$ poljubni funkciji. Ker je $\mathcal{FB}^1(\widehat{G})$ gosta podmnožica v $L^2(G)$ po lemi 1, obstajata zaporedji funkcij $f_n, g_n \in L^2(G) \cap \mathcal{FB}^1(\widehat{G})$, tako da $f_n \rightarrow f$ in $g_n \rightarrow g$ v $L^2(G)$. Torej velja $f_n g_n \rightarrow fg$ v $L^1(G)$ in zato $(f_n g_n)^\wedge \rightarrow (fg)^\wedge$ v $L^\infty(\widehat{G})$. Poleg tega so po Plancherelovem izreku tudi $\widehat{f}_n, \widehat{g}_n \in L^2(\widehat{G})$, enako $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\widehat{G})$. Nadalje velja tudi $\widehat{f}_n * \widehat{g}_n \rightarrow \widehat{f} * \widehat{g}$ v $L^\infty(\widehat{G})$. Iz Cauchy-Schwarzove ocene $\|\widehat{h} * \widehat{k}\|_\infty \leq \|\widehat{h}\|_2 \|\widehat{k}\|_2$ namreč dobimo pri pogoju $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{f}_n * \widehat{g}_n - \widehat{f} * \widehat{g} = (\widehat{f}_n - \widehat{f}) * (\widehat{g}_n - \widehat{g}) + \widehat{f} * (\widehat{g}_n - \widehat{g}) + (\widehat{f}_n - \widehat{f}) * \widehat{g} \rightarrow 0.$$

Torej sledi $\widehat{f} * \widehat{g} = (fg)^\wedge$ v $L^\infty(\widehat{G})$.

Dualnost med podgrupami in kvocientnimi grupami

Naj bo H zaprta podgrupa v lokalno kompaktni Abelovi grupi G . *Anihilator* podgrupe H definiramo s predpisom

$$H^\perp = \{\xi \in \widehat{G}; \langle x, \xi \rangle = 1 \text{ za vsak } x \in H\}.$$

Hitro vidimo, da je tudi H^\perp zaprta podgrupa v \widehat{G} .

Trditvev 3. Za vsako zaprto podgrupo $H \subset G$ velja $(H^\perp)^\perp = H$.

Dokaz. Očitno je $H \subset (H^\perp)^\perp$. Naj bo $q : G \rightarrow G/H$ kanonična kvocientna preslikava. Če $x_0 \notin H$, obstaja tak karakter η kvocientne grupe G/H , da je $\eta(q(x_0)) \neq 1 = \eta(q(1))$. V nasprotnem primeru bi zaradi Pontrjaginove dualnosti moralo veljati $q(x_0) = q(1)$, saj je tudi $q(x_0)$ karakter na dualni grupi. Toda $\eta \circ q$ je potem karakter na grupi G , velja pa $(\eta \circ q)(x) = \eta(1) = 1$ za $x \in H$, saj je $q(x)$ tedaj enota v G/H . Torej je $\eta \circ q \in H^\perp$. Ker $(\eta \circ q)(x_0) \neq 1$, torej $x_0 \notin (H^\perp)^\perp$.

Naslednji izrek, ki je eden temeljnih strukturnih rezultatov o dualnosti, pove, kako lahko dualno grupo zaprte podgrupe $H \subset G$ in dualno grupo faktorske grupe G/H opišemo z dualno grupo \widehat{G} in anihilatorsko podgrupo H^\perp .

Izrek 4. Naj bo H zaprta podgrupa v lokalno kompaktni Abelovi grupi G in $\Phi : (G/H)^\wedge \rightarrow H^\perp$, $\Psi : \widehat{G}/H^\perp \rightarrow \widehat{H}$ preslikavi, definirani s predpisoma

$$\Phi(\eta) = \eta \circ q, \quad \Psi(\xi H^\perp) = \xi|_H$$

za $\xi \in \widehat{G}$, $\eta \in (G/H)^\wedge$. Potem sta Φ in Ψ izomorfizma topoloških grup.

Dokaz. Iz dokaza trditve 3 vemo, da je $\eta \circ q \in H^\perp$ in da je $\eta \circ q = 1$ natanko takrat, ko je $\eta = 1$. Preslikava Φ je torej injektivna. Surjektivna je, ker za vsak $\xi \in \widehat{G}$ z lastnostjo $\xi(x) = \langle x, \xi \rangle = 1$ za vsak $x \in H$ po osnovnem algebraičnem izreku o grupah (glej dodatek A) obstaja natanko en homomorfizem $\eta : G/H \in \mathbb{C}$, tako da je $\eta(xH) = \xi(x)$ za vsak $x \in G$ oziroma $\eta \circ q = \xi$. Hitro tudi vidimo, da je Φ homomorfizem. Torej je Φ algebraični izomorfizem med grupama $(G/H)^\wedge$ in H^\perp . Pokažimo še, da je homeomorfizem topoloških prostorov.

Naj velja $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ v $(G/H)^\wedge$ in naj bo $K \subset G$ poljubna kompaktna podmnožica. Potem je $q(K)$ kompaktna podmnožica v G/H in po definiciji topologije v $(G/H)^\wedge$ (primerjaj trditvev 1.1) konvergenca $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ enakomerna na $q(K)$, konvergenca $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ pa enakomerna na K , torej v topologiji dualne grupe \widehat{G} . Obratno, naj velja $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ v \widehat{G} in naj bo $F \subset G/H$ poljubna kompaktna podmnožica. Potem po lemi II.3.1 obstaja taka kompaktna podmnožica $K \subset G$, da je $q(K) = F$. Torej ponovno po trditvi 1.1 velja $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ enakomerno na K , se pravi $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ enakomerno na $F = q(K)$, torej $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ v topologiji dualne grupe $(G/H)^\wedge$. To pomeni, da je Φ homeomorfizem topoloških prostorov.

Zamenjajmo zdaj grupo G z grupo \widehat{G} in podgrupo $H \subset G$ s podgrupo $H^\perp \subset \widehat{G}$. po prvem delu dokaza imamo $(\widehat{G}/H^\perp)^\wedge \cong (H^\perp)^\perp$, toda slednje je po trditvi 3 enako H . Če je torej $x \in H$, je ustrezni karakter $\eta_x \in (\widehat{G}/H^\perp)^\wedge$, za katerega je $\Phi(\eta_x) = x$, dan s predpisom

$$(\eta_x \circ q)(\xi) = \Phi(\eta_x)(\xi) = x(\xi)$$

za vsak $\xi \in \widehat{G}$ (glej dokaz surjektivnosti preslikave $(G/H)^\wedge \rightarrow H^\perp$) oziroma s predpisom

$$(*) \quad \langle \eta_x, \xi H^\perp \rangle = \langle x, \xi \rangle.$$

Pontrjaginova dualnost zdaj zagotavlja izomorfizem grup $\widehat{G}/H^\perp \cong (\widehat{G}/H^\perp)^\wedge \cong \widehat{H}$, ki je zaradi zgornje relacije (*) določen s predpisom $\xi H^\perp \mapsto \xi|_H$. Ta preslikava pa je ravno Ψ in dokaz je končan.

Posledica. Če je H zaprta podgrupa v lokalno kompaktni Abelovi grupi G , lahko vsak karakter na podgrupi H razširimo do karakterja na grupi G .

Dokaz. To je res zaradi surjektivnosti preslikave Ψ : če je $\eta \in \widehat{H}$, obstaja $\xi \in \widehat{G}$, tako da je $\eta = \xi|_H$.

Poissonova sumacijska formula

Naj bo H zaprta podgrupa v G . Z ustrezno normalizirano Haarovo mero na G/H , ki je v primeru Abelove lokalno kompaktno grupe G tudi sama lokalno kompaktna Abelova grupa, imamo za vsak $f \in C_c(G)$ znano Weilovo formulo (glej formulo (2) v izreku II.3.2)

$$(1) \quad \int_G f(x)dx = \int_{G/H} \int_H f(xy)dyd(xH).$$

Izrek 5. Naj bo H zaprta podgrupa v G in $f \in C_c(G)$. Za vsak $x \in G$ definirajmo funkcijo $F \in C_c(G/H)$ s predpisom $F(xH) = \int_H f(xy)dy$. Potem je $\widehat{F} = \widehat{f}|_{H^\perp}$, če identifikiramo $(G/H)^\wedge \cong H^\perp$ z izomorfizmom Φ iz izreka 4. Če je poleg tega $\widehat{f}|_{H^\perp} \in L^1(H^\perp)$, za ustrezno normalizirani Haarovi meri na H in H^\perp velja za vsak $x \in G$

$$(2) \quad \int_H f(xy)dy = \int_{H^\perp} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Dokaz. Če je $\xi \in H^\perp$, velja $\langle xy, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle \langle y, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle$ za vsak $x \in G$, $y \in H$ oziroma $\langle xH, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle$ za vsak $x \in G$. Torej je upoštevaje (1)

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\xi) &= \int_{G/H} \overline{\langle xH, \xi \rangle} F(xH) d(xH) = \int_{G/H} \int_H \overline{\langle x, \xi \rangle} f(xy) dy d(xH) = \\ &= \int_{G/H} \int_H \overline{\langle xy, \xi \rangle} f(xy) dy d(xH) = \int_G \overline{\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}|_{H^\perp}(\xi). \end{aligned}$$

Če je še $\widehat{f}|_{H^\perp} \in L^1(H^\perp)$, lahko uporabimo drugi izrek o inverzni Fourierovi transformaciji (izrek 2) za funkcijo F in dobimo

$$\int_H f(xy)dy = F(xH) = \int_{(G/H)^\wedge} \langle xH, \xi \rangle \widehat{F}(\xi) d\xi = \int_{H^\perp} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Opomba. Izrek se da posplošiti tako, da predpostavke ošibimo in zahtevamo le $f \in L^1(G)$, ne pa $f \in C_c(G)$. Funkcija F je tudi tedaj skoraj povsod dobro definirana in je v $L^1(G/H)$. Ker se da pokazati, da je Weilova formula (1) veljavna tudi za $f \in L^1(G)$ in ne le za $f \in C_c(G)$ (primerjaj opombe v [11], str. 64), prav tako velja $\widehat{F} = \widehat{f}|_{H^\perp}$. Če pa je $\widehat{f}|_{H^\perp} \in L^1(H^\perp)$, velja skoraj za vsak $x \in G$ tudi formula (2).

Izrek 5 oziroma formula (2) pomeni splošno obliko t.i. *Poissonove sumacijske formule*.

Zgled. Klasični primer dobimo, če za G in H izberemo klasični aditivni grupi, $G = \mathbb{R}$ in $H = \mathbb{Z}$. Tedaj je $H^\perp = \mathbb{Z}$, saj je $e^{2\pi inx} = 1$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ natanko takrat, ko je $x = m \in \mathbb{Z}$. Torej za $f \in L^1(\mathbb{R})$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(3) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi inx}.$$

V posebnem primeru pri $x = 0$ npr. dobimo $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

V zgledu 2.1 smo npr. videli, da je za funkcijo $f(x) = e^{-\pi x^2}$ Fourierova transformiranka ista: $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. Za vsak $t > 0$ naj bo $f_t(x) = e^{-\pi x^2/t}$. S primerno substitucijo brez težav ugotovimo, da je $\widehat{f}_t(\xi) = \sqrt{t} e^{-\pi \xi^2 t}$. Potem se Poissonova formula v točki 0 glasi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Če označimo $\vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, velja torej $\vartheta(1/t) = \sqrt{t} \vartheta(t)$. To je t.i. *Jacobijeva identiteta* za funkcijo ϑ .

Z dualnostjo $\langle x, \xi \rangle = e^{inx}$, pa bi se Poissonova sumacijska formula (3) za funkcijo g , definirano z $g(t) = f(t/2\pi)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, glasila $2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t + 2\pi n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{itn}$.

Bohrova kompakfikacija

Naj bo zdaj G nekompatna lokalno kompaktna Abelova grupa. Potem po trditvi 1 dualna grupa \hat{G} ni diskretna. Označimo z \hat{G}_d njeno *diskretizacijo*, tj. opremimo jo z diskretno topologijo. Na ta način dobimo novo, diskretno, lokalno kompaktno Abelovo grupo, katere dualna grupa $(\hat{G}_d)^\wedge$ je zdaj kompaktna. Dali ji bomo novo oznako bG .

Definicija 1. Grupa $bG = (\hat{G}_d)^\wedge$ se imenuje *Bohrova kompakfikacija* grupe G .

Zaradi Pontrjaginove dualnosti lahko imamo grupo G za množico vseh *zveznih* grupnih homomorfizmov iz \hat{G} v \mathbb{T} . Potem pa lahko njeno Bohrovo kompakfikacijo bG gledamo kot množico *vseh* grupnih homomorfizmov iz \hat{G} v \mathbb{T} , tudi nezveznih. Na naraven način je torej $G \subset bG$ in očitno je G podgrupa v bG . Velja pa še več.

Trditev 4. Grupa G je gosta v svoji Bohrovi kompakfikaciji bG .

Dokaz. Če je \bar{G} zaprtje grupe G v bG , je to zaprta podgrupa v bG , njen anihilator pa je enak

$$\begin{aligned} \bar{G}^\perp &= \{\phi \in (bG)^\wedge; \langle x, \phi \rangle = 1 \text{ za vsak } x \in \bar{G}\} = \{\phi \in \hat{G}; \langle x, \phi \rangle = 1 \text{ za vsak } x \in \bar{G}\} = \\ &= \{\phi \in \hat{G}; \langle x, \phi \rangle = 1 \text{ za vsak } x \in G\} = \{1\}. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $(bG)^\wedge = (\hat{G}_d)^\wedge = \hat{G}_d = \hat{G}$ (kot množica), torej je vsak $\phi \in (bG)^\wedge$ karakter na G , torej zvezen homomorfizem iz G v \mathbb{T} .

Ker po izreku 4 velja $\bar{G} \cong (bG)^\wedge / \bar{G}^\perp = (bG)^\wedge$, velja tudi $\bar{G} = \bar{G} \wedge \wedge = (bG)^\wedge = bG$.

Topologija na G je (po dualnosti) enaka topologiji enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v \hat{G} (glej trditev 1.1 in dokaz izreka 4), medtem ko je topologija na bG enaka topologiji konvergence po točkah v \hat{G} , saj so kompaktno množice v \hat{G}_d končne množice. Torej je slednja topologija šibkejša, zato je inkluzija $G \subset bG$ zvezna. Ni pa ta inkluzija homeomorfizem (iz G na sliko v bG). Če bi bilo to res, bi bila po trditvi I.1.5 G zaprta podgrupa v bG , torej kompaktna, kar pa po predpostavki ni res.

V tem smislu Bohrova kompakfikacija ni prava kompakfikacija topološkega prostora (kot npr. kompakfikacija lokalno kompaktnega prostora z eno točko). Je pa $G \mapsto bG$ funktor iz kategorije lokalno kompaktnih Abelovih grup v kategorijo kompaktnih Abelovih grup. Ta funktor ima naslednjo univerzalno lastnost.

Trditev 5. Če je K poljubna kompaktna grupa in $\rho : G \rightarrow K$ poljuben zvezen homomorfizem, lahko ρ razširimo do zveznega homomorfizma $\tilde{\rho}$ iz bG v K .

Dokaz. Brez škode lahko predpostavimo, da je K Abelova kompaktna grupa, sicer bi namesto nje vzeli zaprto Abelovo podgrupo $\overline{\rho(G)}$.

Homomorfizem ρ inducira zvezen homomorfizem $\tilde{\rho}$ dualnih grup, dan s predpisom $\tilde{\rho}(\eta) = \eta \circ \rho$ za vsak $\eta \in \hat{K}$. Očitno je namreč $\tilde{\rho}(\eta)$ karakter na G in velja $\langle x, \tilde{\rho}(\eta) \rangle = \langle \rho(x), \eta \rangle$ za vsak $x \in G$. Če pozabimo na topologijo v \hat{G} , lahko $\tilde{\rho}$ vidimo tudi kot homomorfizem med \hat{K} in \hat{G}_d . Ta homomorfizem pa na enak način inducira zvezen homomorfizem $\tilde{\tilde{\rho}}$ med $(\hat{G}_d)^\wedge$ in \hat{K} , se pravi med bG in K . Ker za $x \in G \subset bG$ in $\eta \in \hat{K}$ velja zaradi dualnosti

$$\langle \tilde{\tilde{\rho}}(x), \eta \rangle = \langle x, \tilde{\rho}(\eta) \rangle = \langle \rho(x), \eta \rangle,$$

dobimo $\tilde{\tilde{\rho}}(x) = \rho(x)$ za vsak $x \in G$, torej je $\tilde{\tilde{\rho}}$ res razširitev homomorfizma ρ na bG .

Kompaktifikacija grupe G iz definicije 1 nosi ime po H. Bohru, ki je študiral skoraj periodične funkcije. V resnici lahko to kompaktifikacijo povežemo s teorijo skoraj periodičnih funkcij.

Skoraj periodične funkcije

Najprej potrebujemo splošno lemo o izometrijah metričnega prostora.

Lema 4. *Naj bo M kompakten metrični prostor z metriko d . Potem je:*

- (a) *Enakomerna limita (surjektivnih) izometrij spet (surjektivna) izometrija.*
- (b) *Grupa $Iso(M)$ vseh surjektivnih izometrij iz M na M kompaktna v supremum normi.*

Dokaz. Preslikava $f : M \rightarrow M$ je surjektivna izometrija, če je bijekcija z lastnostjo $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ za $x, y \in M$.

(a) Iz $|d(f(x), f(y)) - d(f_n(x), f_n(y))| \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(y), f(y))$ sledi enakost $d(f(x), f(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f_n(y))$ za vsak $x, y \in M$. Torej je limita izometrij spet izometrija. Naj bo zdaj f enakomerna limita surjektivnih izometrij f_n . Njena zaloga vrednosti je kompaktna množica, saj je enakomerna limita zveznih funkcij zvezna funkcija, zvezna slika kompakta pa kompaktna. Za vsak $y \in M$, ki ga zaradi surjektivnosti funkcije f_n za vsak n lahko zapišemo v obliki $y = f_n(x_n)$, $x_n \in M$, dobimo za vsak $\epsilon > 0$ oceno $d(f(x_n), y) \leq d(f(x_n), f_n(x_n)) + d(f_n(x_n), y) = d(f(x_n), f_n(x_n)) < \epsilon$, če je n dovolj velik. Ker je bil $y \in M$ poljuben, je zaloga vrednosti preslikave f gosta v M . Skupaj s kompaktnostjo to pomeni, da je f surjekcija.

(b) Pravkar smo videli, da je $Iso(M)$ zaprta podmnožica v metričnem prostoru $C(M, M)$ vseh zveznih funkcij iz M v M , opremljenem s supremum metriko. Še več, $Iso(M)$ je enakozvezna in enako omejena družina funkcij iz $C(M, M)$. Za vsak $\epsilon > 0$ iz $d(x, y) < \epsilon$ namreč sledi $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \epsilon$ za vsak $x, y \in M$ in vsak $f \in Iso(M)$, poleg tega pa je pri vsakem $z \in M$ res tudi $d(f(x), z) = d(f(x)f(y_f)) = d(x, y_f) \leq diam(M) < \infty$ za vsak $x \in M$ in vsak $f \in Iso(M)$, pri čemer je $z = f(y_f)$ za $y_f \in M$. Po Arzelá-Ascolijevem izreku (glej dodatek B) je potem $Iso(M)$ relativno kompaktna podmnožica v $C(M, M)$. Ker pa je po točki (a) zaprta, je celo kompaktna podmnožica v $C(M, M)$.

Definicija 2. Omejena funkcija f na lokalno kompaktni Abelovi grupi G je *enakomerno skoraj periodična*, če je množica vseh premikov $\{R_x f; x \in G\}$ totalno omejena, se pravi relativno kompaktna, v supremum normi na G .

Spomnimo se, da totalna omejenost pomeni, da za vsak $\epsilon > 0$ obstajajo take točke $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, da lahko za vsak $x \in G$ najdemo x_j z lastnostjo $\|R_x f - R_{x_j} f\|_\infty < \epsilon$ oziroma $\|R_{x_j^{-1}x} f - f\|_\infty < \epsilon$.

Opomba. Opravičimo naziv take funkcije. Naj bo K kompaktna podmnožica v nekompaktni grupi G . Potem lahko izberemo tak $x \in G$, da $x_j^{-1}x \notin K$ za $j = 1, 2, \dots, n$. V nasprotnem primeru bi bil vsak $x \in G$ vsebovan v kompaktni množici $\cup_{j=1}^n x_j K$. To pomeni, da zunaj poljubne kompaktno množice $K \subset G$ obstajajo za vsak ϵ točke $y_j = x_j^{-1}x$, za katere velja $\|R_{y_j} f - f\|_\infty < \epsilon$. Torej je funkcija f res skoraj periodična s periodo y_j .

Sledi prej omenjena povezava Bohrove kompaktifikacije in skoraj periodičnih funkcij.

Izrek 6. *Naj bo f omejena zvezna funkcija na nekompaktni lokalno kompaktni Abelovi grupi G . Potem je ekvivalentno:*

- (i) *Funkcija f je zožitev na G zvezne funkcije, definirane na bG .*
- (ii) *Funkcija f je enakomerna limita linearnih kombinacij karakterjev na G .*
- (iii) *Funkcija f je enakomerno skoraj periodična.*

Dokaz. (i) \implies (ii). Linearna ovojnica \mathcal{L} karakterjev na bG je po Stone-Weierstrassovem izreku gosta v algebri $C(bG)$ vseh zveznih funkcija na bG v enakomerni normi, saj \mathcal{L} (v resnici že množica karakterjev) loči točke, vsebuje konstante (1 je karakter) in je simetrična (hkrati z F je v \mathcal{L} tudi \overline{F}). Torej je vsaka funkcija $F \in C(bG)$ enakomerna limita funkcij iz \mathcal{L} , njena zožitev $f = F|_G$ na G zato enakomerna limita linearnih kombinacij karakterjev na G .

Obratna implikacija (ii) \implies (i) sledi iz dejstva, da je enakomerna limita enakomerno zveznih funkcij f_n spet enakomerno zvezna funkcija f . Karakterje na G lahko namreč razširimo do karakterjev na bG , zato so enakomerno zvezni na G v relativni topologiji iz bG . Isto velja za njihove linearne kombinacije. Če je torej f enakomerna limita linearnih kombinacij karakterjev na G , je f enakomerno zvezna funkcija v relativni topologiji iz bG , zato jo lahko po zveznosti razširimo do (enakomerno) zvezne funkcije na $\overline{G} = bG$ in velja (i).

(i) \implies (iii). Naj bo $f = F|_G$, kjer je $F \in C(bG)$. Ker je $x \mapsto R_x F$ zvezna preslikava iz bG v $C(bG)$, je množica $\{R_x F; x \in bG\}$ kompaktna v $C(bG)$. Restrikcija $r : F \rightarrow F|_G$ je celo izometrija v enakomerni normi na $C(bG)$, ker je G gosta podmnožica v bG . Potem je $\{(R_x F)|_G; x \in bG\} = r(\{R_x F; x \in bG\})$ kompaktna podmnožica v $C_b(G)$, ki vsebuje $\{R_x f; x \in G\}$. Torej je ta množica totalno omejena, se pravi f enakomerno skoraj periodična funkcija.

(iii) \implies (i). Naj bo f enakomerno skoraj periodična funkcija na G . Enakomerno zaprtje množice vseh premikov funkcije f v $C(G)$ označimo z M , torej $M = \{R_x f; x \in G\}^-$. Torej je M kompakten metrični prostor. Prepričajmo se, da je funkcija f enakomerno zvezna na G . V nasprotnem primeru obstaja posplošeno zaporedje točk $x_\alpha \in G$ z lastnostjo $x_\alpha \rightarrow 1$, vendar $R_{x_\alpha} f$ ne konvergira enakomerno proti f . Po drugi strani pa zaradi kompaktnosti množice M obstaja podzaporedje v $R_{x_\alpha} f$, ki konvergira proti neki funkciji g . Zaradi konvergence $R_{x_\alpha} f \rightarrow f$ po točkah mora biti $g = f$, kar pa je protislovje.

Zaradi enakomerne zveznosti funkcije f je preslikava $x \mapsto R_x f$ zvezen grupni homomorfizem iz G v $Iso(M)$, ki je po lemi 4 kompaktna grupa. Po trditvi 5 lahko ta homomorfizem razširimo do zveznega homomorfizma iz bG v $Iso(M)$. Toda potem lahko tudi funkcijo f razširimo na bG . Njena razširitev Φ je dana s predpisom $\Phi(x) = (R_x f)(1)$ za vsak $x \in bG$. Če je namreč $x \in G$, je $(R_x f)(1) = f(1 \cdot x) = f(x)$.

4. Zaprti ideali v $L^1(G)$

Vzpostavili bomo korespondenco med zaprtimi ideali v grupni algebri $L^1(G)$ in zaprtimi podmnožicami v dualni grupi \widehat{G} . Ta korespondenca ne bo vedno idealna, izkazala pa se bo za zelo koristno orodje pri proučevanju idealske strukture grupne algebre .

Operatorja h in k v grupni algebri

V vsaki komutativni Banachovi algebri \mathcal{A} s spektrom $\sigma(\mathcal{A})$ uvedemo standardna operatorja h in k , s katerima skušamo vzpostaviti zvezo med zaprtimi ideali v \mathcal{A} in zaprtimi podmnožicami v $\sigma(\mathcal{A})$. Gelfandovo transformiranko elementa $f \in \mathcal{A}$ označimo z \widehat{f} .

Definicija 1. Za vsak zaprti ideal $I \subset \mathcal{A}$ je njegov *ovoj*

$$h(I) = \bigcap_{f \in I} \{\phi \in \sigma(\mathcal{A}); \widehat{f}(\phi) = 0\} = \{\phi \in \sigma(\mathcal{A}); \widehat{f}(\phi) = 0 \text{ za vsak } f \in I\}.$$

Za vsako zaprto podmnožico $S \subset \sigma(\mathcal{A})$ je njeno *jedro*

$$k(S) = \{f \in \mathcal{A}; \widehat{f}|_S = 0\} = \{f \in \mathcal{A}; \widehat{f}(\phi) = 0 \text{ za vsak } \phi \in S\}.$$

Očitno je $h(I)$ zaprta podmnožica v $\sigma(\mathcal{A})$ in $k(S)$ zaprt ideal v \mathcal{A} . Iz $I_1 \subset I_2$ sledi $h(I_2) \subset h(I_1)$, iz $S_1 \subset S_2$ pa $k(S_2) \subset k(S_1)$. Poleg tega je za zaprt ideal I vedno res $I \subset k(h(I))$, za zaprto podmnožico S pa $S \subset h(k(S))$ (pisali bomo krajše: $kh(I)$ namesto $k(h(I))$ in $hk(S)$ namesto $h(k(S))$).

Za zgled si pogledjmo poseben primer algebre zveznih funkcij.

Trditev 1. *Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor in $\mathcal{A} = C_0(X)$ algebra vseh zveznih funkcij na X , ki so v neskončnosti enake nič. Tedaj lahko spekter $\sigma(\mathcal{A})$ identificiramo z X . Za vsako zaprto podmnožico $S \subset X$ velja $S = hk(S)$, za vsak zaprt ideal $I \subset C_0(X)$ pa $I = kh(I)$.*

Dokaz. Da je $\sigma(\mathcal{A}) = X$, je dobro znano. Naj bo $S \subset X$ zaprta podmnožica in $x \notin S$. Po Urysohnovem izreku (glej dodatek B) obstaja zvezna funkcija $f \in k(S)$ z lastnostjo $f(x) = 1$, torej $x \notin hk(S)$. Dokazali smo, da je $hk(S) \subset S$, v drugo smer pa inkluzijo poznamo že od prej.

Naj bo zdaj I zaprt ideal v $C_0(X)$. Za poljubni točki $x, y \in X$ z lastnostjo $x \neq y$ in $x, y \notin h(I)$ obstaja najprej taka funkcija $f \in I$, da $f(x) \neq 0$, nato pa po Urysohnu tudi taka funkcija $g \in C_c(X)$, da je $g(x) = 1$ in $g = 0$ na $h(I) \cup \{y\}$. Tedaj je $fg \in I$ in $(fg)(x) \neq 0 = (fg)(y)$. Torej ideal I loči točke na množici $X \setminus h(I)$. Ker je za vsako zaprto podmnožico $S \subset X$ komplement $X \setminus S$ lokalno kompakten Hausdorffov prostor, za katerega je $C_0(X \setminus S) = \{f|_{X \setminus S}; f \in k(S)\} = k(S)|_{X \setminus S}$, je $I|_{X \setminus h(I)} \subset C_0(X \setminus h(I))$ zaprta simetrična podalgebra, ki loči točke na $X \setminus h(I)$ in nima nobene skupne ničle v $X \setminus h(I)$. Po Stone-Weierstrassovem izreku za lokalno kompaktno prostore (glej dodatek C) je potem $I|_{X \setminus h(I)} = C_0(X \setminus h(I)) = kh(I)|_{X \setminus h(I)}$, torej tudi $I = kh(I)$.

Če je G lokalno kompaktna Abelova grupa, je njena grupna algebra $\mathcal{A} = L^1(G)$ komutativna Banachova algebra s spektrom $\sigma(\mathcal{A}) = \widehat{G}$ (izrek 1.1). Potrebujemo dve pomožni lemi.

Lema 1. *Če je $K \subset G$ kompaktna podmnožica in W okolica množice K , obstaja taka okolica U enote $1 \in G$, da je $UK \subset W$.*

Dokaz. Za vsak $x \in K$ obstaja taka okolica U_x enote $1 \in G$, da je $U_x^2 x \subset W$. Ker je K kompaktna množica, obstaja končno mnogo elementov $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, tako da vse množice $U_{x_i} x_i$ skupaj pokrivajo K . Naj bo $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$. Če je $x \in K$, obstaja tak indeks i , da je $x \in U_{x_i} x_i$, torej tudi $Ux \subset UU_{x_i} x_i \subset W$. Se pravi, da velja $UK \subset W$.

Lema 2. *Če je $K \subset \widehat{G}$ kompaktna podmnožica in W okolica množice K , obstaja taka funkcija $f \in L^1(G)$, da je $\widehat{f} = 1$ na K in $\text{supp } \widehat{f} \subset W$.*

Dokaz. Ker je tudi dualna grupa \widehat{G} lokalno kompaktna in Abelova, obstaja po lemi 1 taka kompaktna simetrična okolica U enote $1 \in \widehat{G}$, da je $U^2 K \subset W$. Ker sta tako U kot UK kompaktni množici, sta $\chi_U, \chi_{UK} \in L^2(\widehat{G})$. Po Plancherelovem izreku (glej izrek 2.2) obstajata taki funkciji $g, h \in L^2(G)$, da je $\widehat{g} = \chi_U$ in $\widehat{h} = \chi_{UK}$. Naj bo $f = gh/|U|$. Potem je $f \in L^1(G)$ in po trditvi 3.2 velja $\widehat{f} = (\widehat{g} * \widehat{h})/|U|$. Torej je $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{|U|} \int_U \chi_{UK}(\eta^{-1}\xi) d\eta$ za vsak $\xi \in \widehat{G}$. Iz $\xi \notin W$ sledi $\eta^{-1}\xi \notin UK$, zato je $\widehat{f}(\xi) = 0$ za $\xi \notin W$. Če pa je $\xi \in K$, velja $\eta^{-1}\xi \in UK$ in zato $\widehat{f}(\xi) = 1$.

Ovoj ideala in jedro množice definiramo pri grupni algebri enako kot pri splošni komutativni Banachovi algebri, le da namesto Gelfandove uporabljamo kar Fourierovo transformiranko \widehat{f} funkcije $f \in L^1(G)$.

Izrek 1. *Za vsako zaprto podmnožico $S \subset \widehat{G}$ velja $hk(S) = S$.*

Dokaz. Vemo, da je $S \subset hk(S)$. Če $\xi \notin S$, izberimo v lemi 2 kompaktno množico $K = \{\xi\}$ in njeno okolico $W = \widehat{G} \setminus S$. Po lemi 2 potem obstaja taka funkcija $f \in L^1(G)$, da je $\widehat{f}(\xi) = 1$ in $\text{supp } \widehat{f} \subset \widehat{G} \setminus S$. Taka funkcija je v $k(S)$, zato $\xi \notin hk(S)$.

Kadar je G kompaktna grupa, velja analogna enakost tudi za ideale. Za dokaz tega potrebujemo naslednjo splošno lemo, v kateri upoštevajmo, da je konvolucija funkcije iz $L^1(G)$ in funkcije iz $L^\infty(G)$ (zvezna) funkcija iz $L^\infty(G)$ (glej trditve II.2.1(b)).

Lema 3. *Naj bo G lokalno kompaktna Abelova grupa. Če je $f \in L^1(G)$ in $\xi \in \widehat{G}$, je $f * \xi = \widehat{f}(\xi)\xi$.*

Dokaz. To sledi iz računa

$$(f * \xi)(x) = \int_G f(y)\xi(y^{-1}x)dy = \int_G \langle xy^{-1}, \xi \rangle f(y)dy = \\ \langle x, \xi \rangle \int_G \overline{\langle y, \xi \rangle} f(y)dy = \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\xi(x).$$

Izrek 2. *Naj bo G kompaktna Abelova grupa. Za vsak zaprt ideal $I \subset L^1(G)$ velja $kh(I) = I$.*

Dokaz. Vemo, da je $I \subset kh(I)$. Naj bo zdaj $f \in kh(I)$. Če $\widehat{f}(\xi) \neq 0$, potem $\xi \notin h(I)$; torej obstaja tak $g \in I$, da je $\widehat{g}(\xi) = 1$, se pravi $\xi = g * \xi$ po lemi 3. Torej je $\xi \in I$. Če pa je $\widehat{f}(\xi) = 0$, velja $f * \xi = 0$. V obeh primerih je $f * \xi \in I$, torej tudi $f * g \in I$ za vsak $g \in \text{span}(\widehat{G})$. Toda po trditvi 1.1 je pri kompaktni Abelovi grupi G množica \widehat{G} ortonormirana baza za $L^2(G)$, zato je množica $\text{span}(\widehat{G})$ gosta v $L^2(G)$. To velja tudi v šibkejši normi iz $L^1(G)$. Torej je $f * g \in I$ za vsak $g \in L^2(G)$, saj je ideal I zaprt v $L^1(G)$. Ker obstaja približna enota $\{g_\alpha\}$ za $L^1(G)$, katere elementi pripadajo prostoru $L^2(G)$, dobimo od tod v limiti $f \in I$.

Protiprimer

Za nekompaktne lokalno kompaktno Abelove grupe je vprašanje enakosti $kh(I) = I$ mnogo bolj delikatno. Odgovor je včasih negativen. Klasičen protiprimer na aditivni grupi $G = \mathbb{R}^n$ bomo spoznali v naslednjem izreku, za katerega pa prej potrebujemo pomožen rezultat.

Lema 4. *Naj bo μ taka mera na \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, da je $\mu|_S$ površinska mera na sferi S . Potem obstaja taka pozitivna konstanta $C > 0$, da za vsak x velja $|\widehat{\mu}(x)| \leq C/(1 + |x|)$.*

Dokaz. Ker je $\widehat{\mu}$ zvezna funkcija in enotska krogla kompaktna, velja $|\widehat{\mu}(x)| \leq M$ za $|x| \leq 1$ in neko konstanto $M > 0$. Naj bo zdaj $|x| \geq 1$. Mera μ je skoncentrirana na sferi, zato lahko pri izračunu njene Fourierove transformiranke integriramo le po sferi. Uporabili bomo sferične koordinate. Če je θ kot med vektorjema x in $\xi \in S$, torej $\cos \theta = (x \cdot \xi)/|x|$, je del sfere S pri konstantnem θ ravno sfera v \mathbb{R}^{n-1} s polmerom $\sin \theta$. Njena površina je torej $c_n \sin^{n-2} \theta$, kjer smo s c_n označili površino enotske sfere v \mathbb{R}^{n-1} . Površinski element na enotski sferi S je torej $d\mu(\xi) = c_n \sin^{n-2} \theta d\theta$, zato imamo

$$\widehat{\mu}(x) = \int_S e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(\xi) = c_n \int_0^\pi e^{-2\pi i |x| \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta.$$

Integrirajmo ta izraz po delih (to lahko storimo le pri pogoju $n \geq 3$). Dobimo

$$\widehat{\mu}(x) = \frac{c_n}{2\pi i |x|} \left[e^{-2\pi i |x| \cos \theta} \sin^{n-3} \theta \Big|_0^\pi - (n-3) \int_0^\pi e^{-2\pi i |x| \cos \theta} \sin^{n-4} \theta \cos \theta d\theta \right].$$

Izraz v oglatem oklepaju ostane omejen, zato imamo za $|x| \geq 1$ oceno $|\widehat{\mu}(x)| \leq C_1/|x|$. Naj bo $C_2 = \max\{M, C_1\}$. Potem je $M \leq C_2 \leq 2C_2/(1 + |x|)$ za $|x| \leq 1$ in $C_1/|x| \leq C_2/|x| \leq 2C_2/(1 + |x|)$ za $|x| \geq 1$. torej velja tudi $|\widehat{\mu}(x)| \leq 2C_2/(1 + |x|) \leq C/(1 + |x|)$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$.

Izrek 3. Naj bo S enotska sfera v \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Obstaja zaprt ideal $I \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, tako da velja $h(I) = S$ in $I \neq k(S)$.

Dokaz. Vemo, da je dualna grupa k \mathbb{R}^n spet \mathbb{R}^n . Označimo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ter $x_1 f = x_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Če sta $f, x_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, velja

$$-2\pi i(x_1 f)^\wedge(\xi) = \int (-2\pi i x_1 e^{-2\pi i x \cdot \xi}) f(x) dx = \int \frac{\partial e^{-2\pi i x \cdot \xi}}{\partial \xi_1} f(x) dx = \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1} \right) (\xi).$$

V zadnji enakosti smo zamenjali integracijo in parcialno odvajanje, kar smemo storiti, ker je funkcija $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, eksponentna funkcija pa omejena. Hkrati vidimo, da je $\left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1} \right)$ zvezna funkcija.

Naj bo $I_1 = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); x_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n), \widehat{f}|_S = 0, \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1} \right)|_S = 0\}$ in $I = \overline{I_1}$. Za vsak $y \in \mathbb{R}^n$ je $(L_y f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}$. Če je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, je tudi $L_y f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Isto velja za $L_y(x_1 f)(x) = (x_1 + y_1)f(x + y)$. Poleg tega iz $\widehat{f}|_S = 0$ sledi $(L_y f)^\wedge|_S = 0$ in

$$\left(\frac{\partial L_y \widehat{f}}{\partial \xi_1} \right) (\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \right) = -2\pi i y_1 e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) + e^{-2\pi i y \cdot \xi} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) = 0$$

za $\xi \in S$, če je hkrati $\widehat{f}|_S = 0$ in $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}|_S = 0$. Torej je I_1 translacijsko invarianten podprostor, I pa translacijsko invarianten zaprt podprostor, torej po izreku II.2.2 zaprt ideal v $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Množica $\widehat{I} = \{\widehat{f}; f \in I\}$ vsebuje vse neskončnokrat odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem ϕ , za katere je $\text{supp } \phi \cap S = \emptyset$. Znano je namreč, da je vsaka taka funkcija Fourierova transformiranka $\phi = \widehat{f}$, kjer je f hitro padajoča funkcija (glej Rudin), torej v $L^1(\mathbb{R}^n)$. Podobno velja za $\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}$. Zaradi $\widehat{f}|_S = 0$ in $\left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1} \right)|_S = 0$ je potem tak $\phi \in I_1 \subset I$. Zato množica $h(I)$ ne more biti večja od S . Ker je po konstrukciji $S \subset h(I)$, mora veljati enakost $h(I) = S$. Pokažimo, da $I \neq k(S)$.

Definirajmo funkcijo $g(x) = -2\pi i x_1 \widehat{\mu}(x)$, kjer je μ površinska mera na sferi S . Potem je g zvezna funkcija v $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zveznost je jasna, omejenost pa sledi iz ocene $|g(x)| \leq 2\pi C|x_1|/(1+|x|)$ iz leme 4. Naj bo $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$ za vsak $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Torej je Φ omejen linearen funkcional na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Po definiciji funkcije g imamo

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \int f(x)g(x)dx = -2\pi i \int \int x_1 e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) d\mu(\xi) dx = \\ &= -2\pi i \int (x_1 f)^\wedge(\xi) d\mu(\xi) = \int_S \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Odtod vidimo, naslednje: če je $f \in I_1$, je $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) = 0$ za vsak $\xi \in S$, torej mera μ skoncentrirana na S , se pravi $\Phi(f) = 0$. Zaradi zveznosti funkcionala Φ velja tudi $\Phi(f) = 0$ tudi za vsak $f \in I$.

Po drugi strani naj bo f inverzna Fourierova transformiranka neskončnokrat odvedljive funkcije ϕ s kompaktnim nosilcem in z lastnostjo $\phi(\xi) = \xi_1(|\xi|^2 - 1)$ za $|\xi| \leq 2$. Taka funkcija ϕ obstaja, funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ z lastnostjo $\phi = \widehat{f}$ pa tudi lahko najdemo. Potem je $\widehat{f}(\xi) = \phi(\xi) = 0$ za $|\xi| = 1$, torej za $\xi \in S$ (to pomeni $f \in k(S)$). Poleg tega je

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(\xi) = |\xi|^2 - 1 + 2\xi_1^2 = 2\xi_1^2$$

za $\xi \in S$, se pravi, da je tudi

$$\Phi(f) = \int_S \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) d\mu(\xi) = 2 \int_S \xi_1^2 d\mu(\xi) > 0.$$

Torej $f \notin I$. Pokazali smo, da $k(S) \not\subset I$, se pravi $k(S) \neq I$.

Pozitivni rezultati

Trditev 2. Naj bo $f \in L^1(G)$, $\xi_0 \in \widehat{G}$, $\widehat{f}(\xi_0) = 0$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $h \in L^1(G)$, da je $\widehat{h} = 1$ v okolici točke ξ_0 in $\|f * h\|_1 < \epsilon$.

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je $\xi_0 = 1$, sicer bi namesto f vzeli funkcijo $\xi_0 f$ in namesto h funkcijo $\xi_0 h$. Imeli bi $(\xi_0 f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi_0^{-1}\xi)$, $(\xi_0 h)^\wedge(\xi) = \widehat{h}(\xi_0^{-1}\xi)$ in $\xi_0 f * \xi_0 h = \xi_0(f * h)$ ter zato $\|\xi_0 f * \xi_0 h\|_1 = \|f * h\|_1$.

Naj bo $\delta = \epsilon/(3 + 3\|f\|_1)$. Zaporedi bomo na poseben način izbrali tri kompaktne podmnožice: $F \subset G$, $V \subset \widehat{G}$, $K \subset \widehat{G}$.

(i) Ker je G σ -kompaktna grupa in $\int_G |f(x)|dx < \infty$, obstaja taka kompaktna podmnožica $F \subset G$, da je $\int_{G \setminus F} |f(x)|dx < \delta$.

(ii) Nadalje je $|\langle x, 1 \rangle - 1| = 0 < \delta$ za vsak $x \in F$. Zaradi zveznosti funkcije $(x, \xi) \mapsto \langle x, \xi \rangle$ obstajata za vsak $x \in F$ taka okolica U_x točke x in taka okolica V_x enote $1 \in \widehat{G}$, da je $|\langle y, \xi \rangle - 1| < \delta$ za vsak $y \in U_x$ in vsak $\xi \in V_x$. Unija vseh okolici U_x pokrije kompaktno množico F , zato obstaja končno mnogo točk x_1, x_2, \dots, x_n , tako da je $F \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Naj bo $V_0 = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. Potem za vsak $\xi \in V_0$ in vsak $x \in F$ velja $|\langle x, \xi \rangle - 1| < \delta$. Izberimo tako kompaktno simetrično okolico V enote $1 \in \widehat{G}$, da je $V^2 \subset V_0$. Tedaj velja $|\langle x, \xi \rangle - 1| < \delta$ za vsak $x \in F$ in vsak $\xi \in V$.

(iii) Ker je Haarova mera od zunaj regularna, lahko po tej meri množico V od zunaj aproksimiramo z odprto množico $W \supset V$, tako da je $|W \setminus V| < |V|$.

Po lemi 1 obstaja za kompaktno množico $V \subset W$ taka kompaktna okolica K enote $1 \in \widehat{G}$, da je $KV \subset W$. Če po potrebi presekamo K in V , lahko celo dosežemo, da je $K \subset V$. Poleg tega velja $|KV| \leq |W| \leq |V| + |W \setminus V| < 2|V|$.

Naj bosta ϕ, ψ inverzni Fourierovi (Plancherelovi) transformiranki za funkciji χ_V in χ_{KV} in naj bo $h = \phi\psi/|V|$. Po Cauchy-Schwarzu in Plancherelu imamo

$$\|h\|_1 \leq \frac{1}{|V|} \|\phi\|_2 \|\psi\|_2 = \frac{1}{|V|} \|\chi_V\|_2 \|\chi_{KV}\|_2 = \frac{1}{|V|} |V|^{1/2} |KV|^{1/2} < \sqrt{2}.$$

Po posledici Pontrjaginovega izreka (trditev 3.2) je $\widehat{h} = (\chi_V * \chi_{KV})/|V|$. Toda za $\xi \in K$ je $\widehat{h}(\xi) = 1$, saj je V simetrična okolica in je $\xi\eta^{-1} \in KV$ hkrati z $\eta \in V$. Torej je $\widehat{h} = 1$ v okolici K enote $1 \in \widehat{G}$. Ocenimo še normo $\|f * h\|_1$. Ker je $\int_G f(x)dx = \widehat{f}(1) = 0$, je

$$(f * h)(x) = \int_G f(y)(h(y^{-1}x) - h(x))dy = \int_G f(y)(L_y h - h)(x)dy,$$

zato je

$$\|f * h\|_1 \leq \int_F |f(y)| \|L_y h - h\|_1 dy + \int_{G \setminus F} |f(y)| \|L_y h - h\|_1 dy.$$

Drugi člen je omejen z $2\|h\|_1 \int_{G \setminus F} |f(y)|dy < 2\sqrt{2}\delta < 3\delta$. Prvi člen pa je omejen z izrazom $\|f\|_1 \sup_{y \in F} \|L_y h - h\|_1$. Pokažimo, da je $\|L_y h - h\|_1 < 3\delta$ za vsak $y \in F$. Zapišimo $L_y h - h = ((L_y \phi)(L_y \psi) - \phi\psi)/|V|$ in $(L_y \phi)(L_y \psi) - \phi\psi = (L_y \phi)(L_y \psi - \psi) + (L_y \phi - \phi)\psi$. Ker za $y \in F$ po Plancherelu dobimo

$$\|L_y \phi - \phi\|_2^2 = \|\widehat{y\phi} - \widehat{\phi}\|_2^2 = \int_{\widehat{G}} |\langle y, \xi \rangle - 1|^2 \|\widehat{\phi}(\xi)\|_2^2 d\xi = \int_V |\langle y, \xi \rangle - 1|^2 d\xi < \delta^2 |V|$$

in podobno $\|L_y \psi - \psi\|_2^2 = \int_{KV} |\langle y, \xi \rangle - 1|^2 d\xi < \delta^2 |KV|$,

imamo končno

$$\|L_y h - h\|_1 \leq \frac{1}{|V|} (\|L_y \phi\|_2 \|L_y \psi - \psi\|_2 + \|L_y \phi - \phi\|_2 \|\psi\|_2) <$$

$$\frac{1}{|V|} \left(|V|^{1/2} \cdot \delta |KV|^{1/2} + \delta |V|^{1/2} \cdot |KV|^{1/2} \right) < 2\sqrt{2}\delta < 3\delta.$$

Potem pa je

$$\|f * h\|_1 \leq \|f\|_1 \sup_{y \in F} \|L_y h - h\|_1 + 2\|h\|_1 \int_{G \setminus F} |f(y)| dy < 3\delta \|f\|_1 + 3\delta = \epsilon.$$

Trditev 3. Naj bo $f \in L^1(G)$, $\xi_0 \in \widehat{G}$, $\widehat{f}(\xi_0) = 0$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $u \in L^1(G)$, da je $\widehat{u} = 0$ v okolici točke ξ_0 in $\|f - f * u\|_1 < \epsilon$.

Dokaz. Izberimo tak element približne enote u_α , da je $\|f - f * u_\alpha\|_1 < \epsilon/2$. Ker je $(f * u_\alpha)\widehat{(\xi_0)} = \widehat{f}(\xi_0)\widehat{u}_\alpha(\xi_0) = 0$, obstaja po trditvi 2 tak element $h \in L^1(G)$, da je $\widehat{h} = 1$ v okolici točke ξ_0 in $\|f * u_\alpha * h\|_1 < \epsilon/2$. Potem je $u = u_\alpha - u_\alpha * h$ tak, da je $\widehat{u} = 0$ v okolici točke ξ_0 in $\|f - f * u\|_1 < \|f - f * u_\alpha\|_1 + \|f * u_\alpha * h\|_1 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Trditev 4. Naj bo $f \in L^1(G)$, $\xi_0 \in \widehat{G}$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $v \in L^1(G)$, da je $\|v\|_1 < \epsilon$ in $\widehat{f} + \widehat{v} = \widehat{f}(\xi_0)$ v okolici točke ξ_0 .

Dokaz. Po lemi 2 obstaja tak $g_0 \in L^1(G)$, da je $\widehat{g}_0 = 1$ v okolici točke ξ_0 . Potem za $g = \widehat{f}(\xi_0)g_0$ velja $\widehat{g} = \widehat{f}(\xi_0)$ v okolici točke ξ_0 . Po trditvi 2 obstaja tak $h \in L^1(G)$, da je $\widehat{h} = 1$ v okolici točke ξ_0 in $\|(g - f) * h\|_1 < \epsilon$. Izberimo $v = (g - f) * h$ in imamo $\|v\|_1 < \epsilon$ ter $\widehat{v} = (\widehat{g} - \widehat{f})\widehat{h} = \widehat{f}(\xi_0) - \widehat{f}$ v okolici točke ξ_0 .

Naslednja trditev pove, da lahko vsako funkcijo $f \in L^1(G)$ aproksimiramo s funkcijami, katerih Fourierova transformiranka ima kompakten nosilec.

Trditev 5. Naj bo $f \in L^1(G)$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja tak $w \in L^1(G)$, da je nosilec $\text{supp } \widehat{w}$ kompakten in je $\|f - f * w\|_1 < \epsilon$.

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je $f \neq 0$, sicer je trditev trivialna. Najprej izberemo tak element približne enote $u_\alpha \geq 0$, da je $\|u_\alpha\|_1 = 1$ in $\|f - f * u_\alpha\|_1 < \epsilon/2$. Naj bo $v_\alpha = \sqrt{u_\alpha}$. Torej $\|\widehat{v}_\alpha\|_2 = \|v_\alpha\|_2 = \|u_\alpha\|_1^{1/2} = 1$. Če pomnožimo \widehat{v}_α s karakteristično funkcijo dovolj velike kompaktne množice v \widehat{G} in izračunamo inverzno Fourierovo transformacijo, dobimo funkcijo $v \in L^2(G)$, tako da je nosilec $\text{supp } \widehat{v}$ vsebovan v kompaktni množici, $\|v\|_2 \leq 1$ in $\|v_\alpha - v\|_2 < \epsilon/4\|f\|_1$.

Naj bo zdaj $w = v^2$, torej $\widehat{w} = \widehat{v} * \widehat{v}$. Zato je $\text{supp } \widehat{w} \subset (\text{supp } \widehat{v})(\text{supp } \widehat{v})$ kompaktna množica in velja

$$\begin{aligned} \|f - f * w\|_1 &\leq \|f - f * u_\alpha\|_1 + \|f\|_1 \|u_\alpha - w\|_1 < \\ \epsilon/2 + \|f\|_1 (\|v_\alpha(v_\alpha - v)\|_1 + \|(v_\alpha - v)v\|_1) &< \epsilon/2 + 2\epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

Wienerjev izrek

Naš naslednji cilj je dokaz enega imed prvih globljih izrekov harmonične analize za (nekompatne) lokalno kompaktne Abelove grupe. Prej potrebujemo pojem lokalne pripadnosti in dve trditvi, povezani s tem pojmom.

Definicija 2. Če je $I \subset L^1(G)$ poljubni ideal, $f \in L^1(G)$ in $\xi_0 \in \widehat{G}$, rečemo, da *pripada* f lokalno idealu I v točki ξ_0 , če obstaja tak $g \in I$, da je $\widehat{f} = \widehat{g}$ v okolici točke ξ_0 .

Včasih lokalno pripadnost funkcije f idealu I v točki ξ_0 označimo z $f \in_{\xi_0} I$.

Trditev 6. Naj bo I zaprt ideal v $L^1(G)$ in $\xi_0 \notin h(I)$. Potem je vsak $f \in L^1(G)$ lokalno v I v točki ξ_0 .

Dokaz. Izberimo funkcijo $g \in I$ z lastnostjo $\widehat{g}(\xi_0) = 1$. Po trditvi 4 obstaja taka funkcija $v \in L^1(G)$, da je $\|v\|_1 < 1/2$ in $\widehat{v} + \widehat{g} = 1$ v okolici točke ξ_0 . Naj bo $v_n = v * v * \dots * v$ (n faktorjev). Potem je $\|\widehat{v}_n\|_\infty \leq \|v_n\|_1 < 2^{-n}$. Če je torej $f \in L^1(G)$, vrsta $f + \sum_{n=1}^{\infty} f * v_n$ konvergira po normi v $L^1(G)$ k neki funkciji h , za katero velja

$$\widehat{h} = \widehat{f} + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f} \widehat{v}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f} (\widehat{v})^n = \widehat{f} / (1 - \widehat{v}).$$

Toda $1 - \widehat{v} = \widehat{g}$ blizu ξ_0 , tako da je $\widehat{f} = \widehat{h}(1 - \widehat{v}) = \widehat{h}\widehat{g} = (g * h)^\wedge$ blizu ξ_0 . Ker je $g * h \in I$, funkcija f pripada idealu I lokalno v točki ξ_0 .

Trditev 7. *Naj bo I zaprt ideal v $L^1(G)$ in $f \in L^1(G)$. Če ima funkcija \widehat{f} kompakten nosilec in če pripada f lokalno idealu I v vsaki točki $\xi \in \widehat{G}$, je $f \in I$.*

Dokaz. Za vsak $\xi \in \widehat{G}$ obstaja odprta množica U_ξ točke ξ in funkcija $g_\xi \in I$, tako da je $\widehat{f} = \widehat{g}_\xi$ na U_ξ . Družina $\{U_\xi\}$ je odprto pokritje kompaktno množice $\text{supp } \widehat{f}$, zato obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ in končno mnogo elementov $g_1, g_2, \dots, g_n \in I$, tako da je $\widehat{f} = \widehat{g}_j$ na U_j in $\text{supp } \widehat{f} \subset \cup_{j=1}^n U_j$.

Vsak $\xi \in U_j \cap \text{supp } \widehat{f}$ ima kompaktno okolico, vsebovano v U_j . Spet preidimo na končno podpokritje za $\text{supp } \widehat{f}$, pa dobimo kompaktno množico K_1, K_2, \dots, K_n z lastnostjo $K_j \subset U_j$ za vsak j in $\text{supp } \widehat{f} \subset \cup_{j=1}^n K_j$. Po lemi 2 obstajajo take funkcije $h_1, h_2, \dots, h_n \in L^1(G)$, tako da je $\widehat{h}_j = 1$ na K_j in $\text{supp } \widehat{h}_j \subset U_j$. Potem je $\prod_{j=1}^n (1 - \widehat{h}_j) = 0$ na $\text{supp } \widehat{f}$, saj je vsak $\xi \in \text{supp } \widehat{f}$ v neki množici K_j . Torej je $\widehat{f} = \widehat{f}(1 - \prod_{j=1}^n (1 - \widehat{h}_j))$.

Zmnožimo vse oklepaje, enka se pokrajša, vsak člen dobljene vsote je produkt različnih \widehat{h}_j , torej tudi sam Fourierova transformiranka konvolucij različnih funkcij h_j . Združujoč člene, ki vsebujejo najprej h_1 , nato ostale, ki vsebujejo h_2 itd., lahko zapišemo $f = \sum_j f * H_j$, kjer $H_j \in L^1(G)$ in $\text{supp } \widehat{H}_j \subset U_j$ za vsak j . Toda $(f * H_j)^\wedge = \widehat{f} \widehat{H}_j = \widehat{g}_j \widehat{H}_j = (g_j * H_j)^\wedge$, se pravi, da velja $f * H_j = g_j * H_j \in I$. Torej velja tudi $f \in I$.

Izrek 4 (Wiener). *Če je I zaprt ideal v $L^1(G)$ in $h(I) = \emptyset$, je $I = L^1(G)$.*

Dokaz. Po trditvi 5 je množica $\mathcal{K} = \{f \in L^1(G); \text{supp } \widehat{f} \text{ kompakten}\}$ gosta v $L^1(G)$. Po trditvi 6 pripada vsak $f \in L^1(G)$ lokalno idealu I v vsaki točki $\xi \in \widehat{G}$, torej velja isto za vsak $f \in \mathcal{K}$. Po trditvi 7 je tedaj tak f v I , se pravi $\mathcal{K} \subset I$. Ker pa je I zaprt ideal, velja tudi $L^1(G) = \overline{\mathcal{K}} \subset I$.

Kadar je grupa G kompaktna, Wienerjev izrek takoj sledi iz izreka 2, ki ga je relativno lahko dokazati, saj je $k(\emptyset) = L^1(G)$. Tudi v primeru diskretne grupe G je Wienerjev izrek trivialen. Tedaj ima namreč njena grupna algebra $L^1(G)$ enoto, zato je vsak pravi ideal v njej vsebovan v maksimalnem idealu, ki je nujno oblike $k(\{\xi_0\}) = \{f \in L^1(G); \widehat{f}(\xi_0) = 0\}$ za neko točko $\xi_0 \in \widehat{G}$. Odtod takoj sledi rezultat izreka 4 za diskretne grupe.

Pravzaprav lahko Wienerjev izrek preformuliramo v ekvivalentno obliko, ki je analogija (za nediskretne grupe) zadnjega rezultata.

Izrek 4'. *Vsak pravi zaprti ideal v grupni algebri $L^1(G)$ je vsebovan v enem od maksimalnih idealov $k(\{\xi_0\})$ za $\xi_0 \in \widehat{G}$.*

Brez zaprtosti ta rezultat ne velja nujno za nediskretne grupe. Npr. množica vseh funkcij $f \in L^1(G)$, katerih Fourierova transformiranka \widehat{f} ima kompakten nosilec, je pravi ideal v $L^1(G)$, ki pa ni vsebovan v nobenem idealu oblike $k(\{\xi_0\})$, $\xi_0 \in \widehat{G}$. Wienerjev izrek lahko povemo tudi na naslednji način.

Posledica. Naj bo $f \in L^1(G)$. Potem je $\overline{\text{span}}\{L_x f; x \in G\} = L^1(G)$ natanko takrat, ko je $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ za vse $\xi \in \widehat{G}$.

Dokaz. Zaprta linearna ovojnica vseh premikov funkcije f je očitno translacijsko invarianten zaprt podprostor v $L^1(G)$, torej po izreku II.2.2 zaprt ideal I v $L^1(G)$. Če je $\widehat{f}(\xi_0) = 0$ za neko točko $\xi_0 \in \widehat{G}$, je $I \subset k(\{\xi_0\}) \neq L^1(G)$. Če pa je $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ za vse $\xi \in \widehat{G}$, je $h(I) = 0$ in zato $I = L^1(G)$ po Wienerjevem izreku.

Počasi oscilirajoče funkcije

Naj bo ϕ omejena funkcija na grupi G in $a \in \mathbb{C}$. Rečemo, da $\phi(x) \rightarrow a$, ko $x \rightarrow \infty$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja kompaktna množica $K \subset G$, tako da za $x \notin K$ velja $|\phi(x) - a| < \epsilon$.

Definicija 3. Omejena funkcija ϕ na lokalno kompaktni Abelovi grupi G je *počasi oscilirajoča funkcija*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja kompaktna množica $K \subset G$ in okolica V enote $1 \in G$, tako da za vsak $x \notin K$ in vsak $y \in V$ velja $|\phi(x) - \phi(y^{-1}x)| < \epsilon$.

Vsaka funkcija ϕ , ki je enakomerno zvezna na G , je počasi oscilirajoča. Za kompaktno množico K lahko izberemo kar prazno množico.

Izrek 5 (Wiener-Pitt). Naj bo G lokalno kompaktna Abelova grupa, $\phi \in L^\infty(G)$, $f \in L^1(G)$, $\int_G f(x)dx = 1$, $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ za vse $\xi \in \widehat{G}$ in $(\phi * f)(x) \rightarrow a$, ko $x \rightarrow \infty$. Tedaj velja:

- (a) $(\phi * g)(x) \rightarrow a \int_G g(y)dy$, ko $y \rightarrow \infty$, za vsak $g \in L^1(G)$.
 (b) Če je funkcija ϕ počasi oscilirajoča, je $\phi(x) \rightarrow a$, ko $x \rightarrow \infty$.

Dokaz. (a) Naj bo \mathcal{L} množica vseh funkcij $g \in L^1(G)$ z lastnostjo $(\phi * g)(x) \rightarrow a \int_G g(y)dy$, ko $y \rightarrow \infty$. To je očitno linearen podprostor v $L^1(G)$, zaprt, ker iz $g_n \rightarrow g$ v $L^1(G)$ po eni strani sledi $\phi * g_n \rightarrow \phi * g$ enakomerno na G (glej trditev II.2.1(b)), po drugi strani pa $\int_G g_n(x)dx \rightarrow \int_G g(x)dx$. Poleg tega je \mathcal{L} invarianten za premike, saj za vsak $y \in G$ velja

$$(\phi * (L_y g))(x) = L_y(\phi * g)(x) \rightarrow a \int_G g(t)dt = a \int_G (L_y g)(t)dt,$$

ko $x \rightarrow \infty$. Po predpostavki vsebuje podprostor \mathcal{L} funkcijo f , za katero je vedno $\widehat{f} \neq 0$. Po posledici 2 je potem $\mathcal{L} = L^1(G)$.

(b) Naj bo zdaj funkcija ϕ počasi oscilirajoča. Za vsak $\epsilon > 0$ izberimo kompaktno množico K in okolico V enote $1 \in G$ tako, da bo $|\phi(x) - \phi(y^{-1}x)| < \epsilon$ za $x \notin K$ in $y \in V$. Lahko predpostavimo, da je $|V| < \infty$. Če je $g = \chi_V/|V|$, imamo $\phi(x) - (\phi * g)(x) = \frac{1}{|V|} \int_V (\phi(x) - \phi(y^{-1}x))dy$ in zato $|\phi(x) - (\phi * g)(x)| < \epsilon$ za $x \notin K$. Ker $(\phi * g)(x) \rightarrow a$, ko $x \rightarrow \infty$, in je ϵ poljuben, sledi $\phi(x) \rightarrow a$, ko $x \rightarrow \infty$.

5. Spektralna sinteza

V tem razdelku bomo dopolnili dosedanje rezultate glede zaprtih idealov v $L^1(G)$ in definirali analogen pojem koidealov v dualnem prostoru $L^\infty(G)$. Za funkcije in koideale v $L^\infty(G)$ bomo raziskali možnost šibke- $*$ aproksimacije s karakterji.

Perfektne podmnožice v \widehat{G}

Vpeljimo naslednjo definicijo.

Definicija 1. Za poljubno podmnožico $E \subset L^1(G)$ naj bo

$$h(E) = \{\xi \in \widehat{G}; \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ za vsak } f \in E\}.$$

To je posplošitev množice $h(I)$ z začetka prejšnjega razdelka, ki je pomenila ovoj ideala I . V posebnem primeru za vsako funkcijo $f \in L^1(G)$ predstavlja $h(f) = \{\xi \in \widehat{G}; \widehat{f}(\xi) = 0\}$ množico ničel Fourierove transformiranke \widehat{f} . Če je $I_f = \{f * g; g \in L^1(G)\}^-$ zaprt ideal v algebri $L^1(G)$, generiran s funkcijo f , lahko v skladu z oznakami na začetku razdelka zapišemo $h(f) = h(I_f)$, ovoj ideala I_f .

Spomnimo se, da je enakost $kh(I) = I$ zaradi stalne inkluzije $I \subset kh(I)$ ekvivalentna inkluziji $kh(I) \subset I$, se pravi, dejstvu, da je $f \in I$ za vsak f z lastnostjo $h(I) \subset h(f)$.

Trditvev 1. *Naj bo I zaprt ideal v $L^1(G)$, $f \in L^1(G)$ in $h(I) \subset h(f)$. Če je*

$$D(f) = \{\xi \in \widehat{G}; f \text{ ni lokalno v } I \text{ v točki } \xi\},$$

je množica $D(f)$ perfektna, tj. zaprta in brez izoliranih točk.

Dokaz. V komplementu množice $D(f)$ so točke $\xi \in \widehat{G}$, v katerih pripada f lokalno idealu I . Taka množica je po definiciji lokalne pripadnosti odprta, torje je $D(f)$ zaprta množica. Pokažimo, da je brez izoliranih točk. Denimo nasprotno, da za neko točko $\xi_0 \in D(f)$ obstaja taka kompaktna okolica W , da je $W \cap D(f) = \{\xi_0\}$. Po lemi 4.2 obstaja $g \in L^1(G)$ z lastnostjo $\widehat{g} = 1$ blizu ξ_0 in $\text{supp } \widehat{g} \subset W$. Po trditvi 4.6 je $\xi_0 \in h(I)$, sicer bi bila f lokalno v I v točki ξ_0 . Torej je $\xi_0 \in h(f)$ in zato $\widehat{f}(\xi_0) = 0$. Po trditvi 4.3 obstaja zaporedje funkcij $u_n \in L^1(G)$, tako da je $\widehat{u}_n = 0$ v okolici točke ξ_0 in $\|f - f * u_n\|_1 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Potem pa je funkcija $g * f * u_n$ lokalno v I v vsaki točki $\xi \in \widehat{G}$. Lokalno je namreč v I v točki ξ_0 , ker je $\widehat{u}_n = 0$ v okolici točke ξ_0 , v točkah $\xi \in W \setminus \{\xi_0\}$, ker je f lokalno v I v točkah $\xi \notin D(f)$, in v točkah $\xi \notin W$, ker je $\widehat{g} = 0$ zunaj W . Poleg tega je $\text{supp } (\widehat{g}\widehat{f}\widehat{u}_n) \subset W$, torej kompaktna množica. Po trditvi 4.7 je $g * f * u_n \in I$. Ker je I zaprt ideal, je tudi $g * f = \lim_{n \rightarrow \infty} g * f * u_n \in I$. Toda $\widehat{f} = \widehat{g}\widehat{f}$ blizu ξ_0 , zato je f lokalno v I v točki ξ_0 , kar je v nasprotju s predpostavko, da je $\xi_0 \in D(f)$.

Rob množice E v topološkem prostoru označimo z ∂E . Spomnimo se, da iz $E \subset F$ vedno sledi $E \cap \partial F = \partial E \cap \partial F$.

Izrek 1. *Naj bo I zaprt ideal v $L^1(G)$ in $f \in L^1(G)$ taka funkcija, da je $h(I) \subset h(f)$. Če $\partial h(I) \cap \partial h(f)$ ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice, je $f \in I$.*

Dokaz. Najprej privzemimo, da ima funkcija \widehat{f} kompakten nosilec. Naj bo tako kot prej $D(f) = \{\xi \in \widehat{G}; f \text{ ni lokalno v } I \text{ v točki } \xi\}$. Po trditvi 4.6 mora biti $D(f) \subset h(I)$, torej tudi v $h(f)$. Poleg tega je presek množice $D(f)$ z notranjostjo množice $h(f)$ prazen, saj je $\widehat{f} = 0$ v okolici vsake notranje točke v $h(f)$. Torej je $D(f) \subset h(I) \cap \partial h(f) = \partial h(I) \cap \partial h(f)$. Po trditvi 1 je množica $D(f)$ perfektna, po predpostavki izreka pa takih podmnožic v $\partial h(I) \cap \partial h(f)$ ni, torej mora biti množica $D(f)$ prazna. Potem pa je $f \in I$ po trditvi 4.7, saj ima \widehat{f} kompakten nosilec.

Če \widehat{f} nima kompaktnega nosilca, obstaja po trditvi 4.5 zaporedje funkcij $u_n \in L^1(G)$ s kompaktnim nosilcem, tako da $f * u_n \rightarrow f$. Označimo $f_n = f * u_n$, torej je $\{f_n\}$ zaporedje funkcij s kompaktnim nosilcem in $f_n \rightarrow f$. Seveda je $h(I) \subset h(f) \subset h(f_n)$ za vsak n . Poleg tega je

$$h(I) \cap \partial h(f_n) = h(I) \cap h(f) \cap \partial h(f_n) = h(I) \cap \partial h(f) \cap \partial h(f_n) \subset$$

$$h(I) \cap \partial h(f) \cap h(f_n) = h(I) \cap \partial h(f) \cap h(f_n) \subset \partial h(I) \cap \partial h(f).$$

Kot vemo, je $D(f_n) \subset h(I) \cap \partial h(f_n) \subset \partial h(I) \cap \partial h(f)$, zato $D(f_n) = \emptyset$. Po trditvi 4.6 je potem $f_n \in I$, saj ima \widehat{f}_n kompakten nosilec. Torej je tudi $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in I$.

Posledica 1. *Če $\partial h(I)$ ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice, je $kh(I) = I$.*

Dokaz. Vedno je $I \subset kh(I)$. Če je $f \in kh(I)$, je $h(I) \subset h(f)$ in po izreku 1 sledi $f \in I$.

Posledica 2. Če za funkcijo $f \in L^1(G)$ velja $\hat{f} = 0$ v okolici množice $h(I)$, je $f \in I$.

Dokaz. Po predpostavki je množica $h(I)$ vsebovana v notranjosti množice $h(f)$, zato je $\partial h(I) \cap \partial h(f) = \emptyset$, torej $f \in I$ po izreku 1.

Množice sinteze

Naj bo S zaprta množica v \widehat{G} . Potem je $k(S)$ očitno največji zaprt ideal I v $L^1(G)$ z lastnostjo $h(I) = S$. Po izreku 4.1 je namreč $h(k(S)) = S$, po drugi strani pa je očitno vsak zaprt ideal I , za katerega je $h(I) = S$, vsebovan v $k(S)$. Najmanjši ideal I z lastnostjo $h(I) = S$ pa najdemo na naslednji način. Definirajmo

$$(1) \quad j_0(S) = \{f \in L^1(G); \hat{f} = 0 \text{ na okolici množice } S\} \text{ in } j(S) = \overline{j_0(S)}$$

Po posledici 2 je vsaka funkcija $f \in L^1(G)$ z lastnostjo $\hat{f} = 0$ na okolici množice $S = h(I)$, kjer je I zaprt ideal v $L^1(G)$, vsebovana v I . Torej je $j_0(S) \subset I$ in zato tudi $j(S) \subset I$, kakor hitro je $h(I) \subset S$. Da ima ideal $j(S)$ res to lastnost, celo lastnost $h(j(S)) = S$, saj je vedno $S \subset h(j(S))$, pa vidimo neposredno. Za vsako točko $\xi \notin S$, namreč obstaja tudi funkcija $f \in L^1(G)$ z lastnostjo $\hat{f}(\xi) \neq 0$ in $\text{supp } \hat{f} \subset S^c$, tako da je $f \in j_0(S) \subset j(S)$ in $\hat{f}(\xi) \neq 0$, se pravi, $\xi \notin h(j(S))$.

Za vsak zaprt ideal I v $L^1(G)$ z lastnostjo $h(I) = S$ torej velja $j(S) \subset I \subset k(S)$. Kadar je $j(S) = k(S)$, je to potemtakem hkrati tudi edini zaprt ideal v $L^1(G)$ z ovojem $h(I) = S$. To je dovolj pomembno, da zasluži posebno ime.

Definicija 2. Rečemo, da je zaprta množica $S \in \widehat{G}$ množica spektralne sinteze, če velja $j(S) = k(S)$.

Wienerjev izrek pove, da ima prazna množica to lastnost, saj je $j(\emptyset) = k(\emptyset) = L^1(G)$. Po drugi strani je množica spektralne sinteze tudi celotna dualna grupa \widehat{G} , saj je $k(\widehat{G}) = \{0\}$. Po posledici 1 izreka 1 je $j(S) = k(S)$, če ∂S ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice; torej je tedaj S množica spektralne sinteze. V posebnem primeru velja to za vsako končno množico. Po trditvi 4.3 je npr. enotočkasta množica $\{\xi_0\}$ množica spektralne sinteze.

Če je grupa G kompaktna, je vsaka zaprta podmnožica v \widehat{G} množica sinteze. Če namreč v izreku 4.2 izberemo za ideal $I = j(S)$, velja $j(S) = kh(j(S)) = k(S)$. Obstoj zaprtih množic, ki niso množice spektralne sinteze, je prvi pokazal L. Schwartz leta 1948. Primer iz izreka 4.3, ki v resnici razkriva, da enotska sfera v prostoru \mathbb{R}^n ni množica sinteze, če je $n \geq 3$, je njegov. Kasneje, leta 1959, je P. Malliavin dokazal, da za vsako nekompaktno lokalno kompaktno Abelovo grupo G obstaja podmnožica v \widehat{G} , ki ni množica spektralne sinteze (glej npr. [17], str. 597, ali [19], str. 231).

Poseben primer množic spektralne sinteze so t.i. *Calderonove* ali *C-množice*. To so podmnožice $S \subset \widehat{G}$ z lastnostjo, da je vsaka funkcija $f \in k(S)$ limita funkcij iz $f * j(S)$. To pomeni, da lahko vsako funkcijo f , za katero je $\hat{f} = 0$ na S poljubno natančno aproksimiramo s funkcijami oblike $f * g$, kjer je $\hat{g} = 0$ na okolici množice S . Poleg prazne množice so C-množice npr. enotočkaste množice (trditve 4.3) in končne množice. Nasploh je vsaka končna unija C-množic spet C-množica. Če je rob ∂S dane množice C-množica, je tudi množica S sama C-množica. Na realni osi \mathbb{R} , so zato npr. C-množice vsi intervali, v ravnini \mathbb{R}^2 vsi večkotniki, v prostoru \mathbb{R}^3 poliedri itd. Nadalje je npr. C-množica vsaka zaprta podgrupa v \widehat{G} . Ker pa je družina C-množic invariantna za premike, so C-množice tudi vsi odseki po dani podgrupi v \widehat{G} . Za vse naštetje primere in dejstva glej npr. [27].

Pogosto je koristno vpeljati tudi pojem dopuščanja spektralne sinteze.

Definicija 3. Rečemo, da množica $E \subset L^1(G)$ *dopušča spektralno sintezo*, če je $E \subset I$ za vsak zaprt ideal I z lastnostjo $h(I) \subset h(E)$.

V posebnem primeru $E = \{f\}$ za $f \in L^1(G)$ rečemo, da funkcija f dopušča spektralno sintezo, če je $f \in I$ za vsak zaprt ideal I , za katerega je $h(I) \subset h(f)$. Ker je $h(f) = h(I_f)$, kjer je I_f zaprt ideal v $L^1(G)$, generiran s funkcijo f , dopušča funkcija f spektralno sintezo natanko takrat, ko jo dopušča ideal I_f . Primer zaprtega ideala, ki dopušča spektralno sintezo, je ideal $j(S)$ iz (1), saj iz $h(I) \subset h(j(S)) = S$ sledi $j(S) \subset I$ po posledici 2 izreka 1. Naslednja trditev pove, da je to tudi edini tak ideal.

Trditev 2. *Ideal I dopušča spektralno sintezo natanko takrat, ko je $I = j(h(I))$.*

Dokaz. Denimo, da I dopušča spektralno sintezo. Zaradi $h(j(h(I))) = h(I)$ velja tudi $I \subset j(h(I))$. Ker pa je $j(h(I))$ najmanjši ideal z ovojem $h(I)$, velja enakost $I = j(h(I))$. Obratno je tudi res: če je $I = j(h(I))$ in $h(I') \subset h(I)$ za zaprt ideal I' , je tudi $j(h(I)) \subset j(h(I')) \subset I'$, tj. $I \subset I'$.

V posebnem primeru za vsako zaprto podmnožico $S \subset \widehat{G}$ ideal $k(S)$ dopušča spektralno sintezo natanko takrat, ko je $k(S) = j(h(k(S))) = j(S)$, se pravi, ko je S množica spektralne sinteze.

Posledica. *Funkcija $f \in L^1(G)$ dopušča spektralno sintezo natanko takrat, ko je $f \in j(h(f))$.*

Dokaz. Vemo, da funkcija f dopušča spektralno sintezo natanko takrat, ko jo dopušča ideal $I_f = \overline{f * L^1(G)}$, torej ko je $I_f = j(h(I_f)) = j(h(f))$. Hitro pa vidimo, da je to res natanko takrat, ko je $f \in j(h(f))$. V eno smer upoštevajmo, da obstaja v $L^1(G)$ približna enota in je zato $f \in I_f$, v drugo smer pa iz $f \in j(h(f))$ sledi $I_f = j(h(f))$.

Funkcija $f \in L^1(G)$ torej dopušča spektralno sintezo, kadar jo lahko aproksimiramo s funkcijami, katerih Fourierove transformiranke so enake nič na okolici množice $h(f)$.

Opomba. Pojem spektralne sinteze lahko definiramo tudi v vsaki regularni polenos-tavni komutativni Banachovi algebri \mathcal{A} . Namesto \widehat{G} vzamemo prostor multiplikativnih funkcionalov, tj. spekter $\sigma(\mathcal{A})$ algebre \mathcal{A} , namesto Fourierovih transformirank pa Gelfandove transformiranke. Tako je npr. tudi v algebri $\mathcal{A} = C_0(X)$, kjer je X lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor (trditev 1.1), vsaka podmnožica v $\sigma(\mathcal{A}) = X$ množica spektralne sinteze.

Koideali

Poleg idealov v grupni algebri $L^1(G)$ lahko definiramo tudi t.i. koideale v njenem dualu $L^\infty(G)$. Med seboj so v lepi bijektivni povezavi. Koideale uporabimo pri novi formulaciji Wienerjevega izreka in pri problemu dopuščanja spektralne sinteze.

Spomnimo se, da za poljuben podprostor \mathcal{M} (podmnožico) Banachovega prostora E definiramo njegov *anihulator* s predpisom

$$\mathcal{M}^\perp = \{\phi \in E^*; \phi = 0 \text{ na } \mathcal{M}\}.$$

To je šibko- $*$ zaprt podprostor v dualu E^* Banachovega prostora E . Prav tako lahko za vsak podprostor \mathcal{N} (podmnožico) v E^* definiramo njegov *predanihulator* (ki je zaprt

podprostor v E) s predpisom

$${}^{\perp}\mathcal{N} = \{x \in E; \langle x, \phi \rangle = 0 \text{ za } \phi \in \mathcal{N}\}.$$

Z uporabo Hahn-Banachovega izreka takoj vidimo, da je ${}^{\perp}(\mathcal{M}^{\perp})$ zaprtje podprostora \mathcal{M} v E in $({}^{\perp}\mathcal{N})^{\perp}$ šibko- $*$ zaprtje podprostora \mathcal{N} v E^* . Torej velja ${}^{\perp}(\mathcal{M}^{\perp}) = \mathcal{M}$ natanko takrat, ko je podprostor \mathcal{M} zaprt, in $({}^{\perp}\mathcal{N})^{\perp} = \mathcal{N}$ natanko takrat, ko je podprostor \mathcal{N} šibko- $*$ zaprt. Tudi vidimo, da je med zaprtimi podprostori v E in med šibko- $*$ zaprtimi podprostori v E^* povratno enolična korespondenca, dana z bijekcijo $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\perp}$ oziroma njenim inverzom $\mathcal{N} \mapsto {}^{\perp}\mathcal{N}$.

Oglejmo si zdaj poseben primer Banachovega prostora $E = L^1(G)$ in njegovega duala $E^* = L^{\infty}(G)$, kjer je G lokalno kompaktna Abelova grupa. Za vsak $y \in G$, $f \in L^1(G)$ in $\phi \in L^{\infty}(G)$ imamo

$$(2) \quad \langle L_y f, \phi \rangle = \int_G (L_y f)(x) \phi(x) dx = \int_G f(y^{-1}x) \phi(x) dx = \int_G f(x) \phi(yx) dx = \\ \int_G f(x) (L_{y^{-1}} \phi)(x) dx = \langle f, L_{y^{-1}} \phi \rangle$$

Trditve 3. Če je \mathcal{M} translacijsko invarianten zaprt podprostor v $L^1(G)$ in \mathcal{N} translacijsko invarianten šibko- $*$ zaprt podprostor v $L^{\infty}(G)$, sta tudi \mathcal{M}^{\perp} in ${}^{\perp}\mathcal{N}$ translacijsko invariantna podprostora v $L^{\infty}(G)$ oziroma v $L^1(G)$.

Dokaz. Iz enakosti (2) sledi naslednje. Če je $L_y f \in \mathcal{M}$ za $f \in \mathcal{M}$, je tudi $L_{y^{-1}} \phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ za $\phi \in \mathcal{M}^{\perp}$. In obratno, če je $L_{y^{-1}} \phi \in \mathcal{N}$ za $\phi \in \mathcal{N}$, je tudi $L_y f \in {}^{\perp}\mathcal{N}$ za $f \in {}^{\perp}\mathcal{N}$.

Pripadnost anihilatorju oziroma predanihilatorju lahko opišemo še drugače. Definirajmo $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ in $\check{\phi}(x) = \phi(x^{-1})$ za vsak $x \in G$. Potem je za $y \in G$, $f \in L^1(G)$ in $\phi \in L^{\infty}(G)$

$$\int_G (L_y f)(x) \phi(x) dx = \int_G f(y^{-1}x) \phi(x) dx = \int_G \check{f}(x^{-1}y) \phi(x) dx = (\check{f} * \phi)(y)$$

in

$$\int_G f(x) (L_{y^{-1}} \phi)(x) dx = \int_G f(x) \phi(yx) dx = \int_G f(x) \check{\phi}(x^{-1}y^{-1}) dx = (f * \check{\phi})(y^{-1}).$$

Zaradi (2) velja torej $(\check{f} * \phi)(y) = (f * \check{\phi})(y^{-1})$ za vsak $y \in G$ in imamo naslednji rezultat.

Trditve 4. Če je \mathcal{M} translacijsko invarianten zaprt podprostor v $L^1(G)$, je $\phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ natanko takrat, ko je $\check{f} * \phi = 0$ oziroma $f * \check{\phi} = 0$ za vsak $f \in \mathcal{M}$. Če pa je \mathcal{N} translacijsko invarianten šibko- $*$ zaprt podprostor v $L^{\infty}(G)$, je $f \in {}^{\perp}\mathcal{N}$ natanko takrat, ko je $\check{f} * \phi = 0$ oziroma $f * \check{\phi} = 0$ za vsak $\phi \in \mathcal{N}$.

Dokaz. Sledi iz predhodnega razmisleka in iz trditve 3.

Naj bosta I in J translacijsko invariantna podprostora v $L^1(G)$ oziroma v $L^{\infty}(G)$. Definirajmo

$$(3) \quad I_{\perp} = \{\phi \in L^{\infty}(G); \check{\phi} \in I^{\perp}\} = \{\phi \in L^{\infty}(G); f * \phi = 0 \text{ za vsak } f \in I\}$$

in

$$(3') \quad {}^{\perp}J = \{f \in L^1(G); \check{f} \in {}^{\perp}J\} = \{f \in L^1(G); f * \phi = 0 \text{ za vsak } \phi \in J\}.$$

Podobno kot prej vidimo, da je ${}^{\perp}(I_{\perp})$ zaprtje podprostora $I \subset L^1(G)$ in $({}^{\perp}J)_{\perp}$ šibko- $*$ zaprtje podprostora $J \subset L^{\infty}(G)$. V posebnem primeru, če je I zaprt, J pa šibko- $*$ zaprt podprostor, je ${}^{\perp}(I_{\perp}) = I$ in $({}^{\perp}J)_{\perp} = J$.

Spomnimo se, da so zaprti translacijsko invariantni podprostori v $L^1(G)$ ravno zaprti ideali v grupni algebr (glej izrek II.2.2). Po analogiji je na mestu naslednja definicija.

Definicija 4. Šibko- $*$ zaprti translacijsko invariantni podprostori v $L^\infty(G)$ se imenujejo *koideali*.

Lahko torej rečemo, da obstaja povratno enolična korespondenca med ideali v $L^1(G)$ in koideali v $L^\infty(G)$. Dana je z bijekcijo $I \mapsto I_\perp$ oziroma njenim inverzom $J \mapsto \perp J$.

Definicija 5. *Spekter* podprostora $\mathcal{N} \subset L^\infty(G)$ definiramo s predpisom

$$\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cap \widehat{G}.$$

Trditev 5. Če je I zaprt ideal v $L^1(G)$, je $\sigma(I_\perp) = h(I)$.

Dokaz. Naj bo $\xi \in \widehat{G}$. Potem je $\xi \in I_\perp$ natanko takrat, ko je $\xi * f = 0$ za vsak $f \in I$ (definicija 1). Toda od prej vemo (glej lemo 5.3), da je $\xi * f = \widehat{f}(\xi)\xi$. Torej je $\xi \in I_\perp$ natanko takrat, ko je $\widehat{f}(\xi) = 0$ za vsak $f \in I$, se pravi, ko je $\xi \in h(I)$.

Zaprto podmnožico $S \subset \widehat{G}$ lahko imamo za podmnožico v $L^\infty(G)$. Označimo z $w^*(S)$ šibko- $*$ zaprto linearno ovojnico množice S v prostoru $L^\infty(G)$, torej $w^*(S) = \overline{\text{span } S}^{w^*}$.

Ker je $L_y \xi = \xi(y^{-1})\xi$ za vsak $y \in G$ in $\xi \in \widehat{G}$, je $w^*(S)$ šibko- $*$ zaprt translacijsko invarianten podprostor, torej koideal, v $L^\infty(G)$, ki je v zvezi z jedrom množice S .

Trditev 6. Če je S zaprta podmnožica v \widehat{G} , je $\perp w^*(S) = k(S)$.

Dokaz. Po definiciji 1 velja $f \in \perp w^*(S)$ natanko takrat, ko velja $f * \phi = 0$ za vsak $\phi \in w^*(S)$. Po drugi strani je zaradi šibke- $*$ gostosti linearne ovojnice množice S v $w^*(S)$ in definicije konvolucije $f * \phi = 0$ za vsak $\phi \in w^*(S)$ res natanko takrat, ko velja $f * \xi = 0$ za vsak $\xi \in S$. Kot prej spoznamo, da je slednje res natanko takrat, ko je $f \in k(S)$.

Definicija 6. Koideal $J \subset L^\infty(G)$ dopušča spektralno sintezo, če je $w^*(\sigma(J)) = J$.

Trditev 7. Koideal $J \subset L^\infty(G)$ dopušča spektralno sintezo natanko tedaj, ko za ideal $I = \perp J$ velja $kh(I) = I$.

Dokaz. Denimo, da je $w^*(\sigma(J)) = J$. Potem po trditvi 5 velja $kh(I) = k(\sigma(I_\perp))$, torej $kh(I) = k(\sigma(J))$ (glej definicijo 1). Po trditvi 6 je zato $kh(I) = \perp w^*(\sigma(J)) = \perp J = I$. Obratno, naj bo $kh(I) = I$. Potem je $w^*(\sigma(J)) = w^*(\sigma(I_\perp)) = w^*(h(I))$ (trditev 5), torej $w^*(\sigma(J)) = (\perp w^*(h(I)))_\perp = (kh(I))_\perp$ (trditev 6). Zadnji izraz pa je po predpostavki enak $I_\perp = J$ in trditev je dokazana.

Zgled. Za $f \in L^1(G)$ je $I_f = \overline{f * L^1(G)}$ ideal v $L^1(G)$; ustrezeni koideal je $(I_f)_\perp = \{\phi \in L^\infty(G); g * \phi = 0 \text{ za vsak } g \in I_f\} = \{\phi \in L^\infty(G); f * \phi = 0\}$. Ker je $h(I_f) = h(f)$, vedno velja

$$j(h(f)) \subset I_f \subset k(h(f)).$$

Kadar se leva inkluzija spremeni v enakost, tj. $j(h(f)) = I_f$, dopušča spektralno sintezo funkcija f oziroma ideal I_f (posledica trditve 2), kadar pa velja enakost na desni, tj. $I_f = k(h(f))$, dopušča spektralno sintezo koideal $(I_f)_\perp$.

Pripravili smo dovolj orodij, da lahko uporabimo rezultate prejšnjega razdelka za hiter dokaz naslednjega izreka.

Izrek 2. Naj bo J koideal v $L^\infty(G)$. Potem velja:

- (a) Če $\partial\sigma(J)$ ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice, koideal J dopušča spektralno sintezo.
 (b) Če je $\sigma(J) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, je $J = \text{span} \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.
 (c) Če velja $J \neq \{0\}$, velja $\sigma(J) \neq \emptyset$.

Dokaz. (a) Ker $\partial h(I) = \partial\sigma(I_\perp) = \partial\sigma(J)$ ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice, po posledici 1 izreka 1 velja $kh(I) = I$. Ta pogoj pa je ekvivalenten dopuščanju sinteze koideal J (trditev 7).

(b) Če je $\sigma(J)$ končna množica, je $w^*(\sigma(J)) = \text{span}(\sigma(J))$ (šibko- $*$ zaprtje ni potrebno). Ker pa $\partial\sigma(J)$ v tem primeru očitno ne vsebuje nobene neprazne perfektne podmnožice, po točki (a) koideal J dopušča spektralno sintezo, zato je $w^*(\sigma(J)) = J$.

(c) To je zaradi trditve 5 in dualnosti med I in J le drugačna formulacija Wienerjevega izreka (glej izrek 4.4).

Definicija 7. Naj bo $\phi \in L^\infty(G)$ in J_ϕ koideal v $L^\infty(G)$, generiran s funkcijo ϕ , torej $J_\phi = \text{span} \{L_x\phi; x \in G\}^-$ (šibko- $*$ zaprtje). Definirajmo

$$\sigma(\phi) = \sigma(J_\phi) = J_\phi \cap \widehat{G}.$$

Z uporabo spektra lahko še na en način okarakteriziramo dopuščanje spektralne sinteze.

Trditev 8. Funkcija $f \in L^1(G)$ dopušča spektralno sintezo natanko takrat, ko za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ iz $\sigma(\phi) \subset h(f)$ sledi $f * \phi = 0$.

Dokaz. Denimo, da f dopušča spektralno sintezo. Če je $\sigma(\phi) \subset h(f)$, oziroma $h(\perp J_\phi) \subset h(f)$, je $f \in \perp J_\phi$ po definiciji 3, torej $f * \phi = 0$. Obratno, naj iz $\sigma(\phi) \subset h(f)$ sledi $f * \phi = 0$. Če f ne dopušča spektralne sinteze, po posledici trditve 2 velja $f \notin j(h(f))$. Potem pa obstaja tak $\check{\phi} \in j(h(f))^\perp$, da $\langle f, \check{\phi} \rangle \neq 0$; torej tak $\phi \in j(h(f))_\perp$, da $f * \phi \neq 0$ (trditev 4). Toda $\phi \in j(h(f))_\perp$ pomeni $j(h(f)) \subset \perp J_\phi$ in zato $\sigma(\phi) = h(\perp J_\phi) \subset h(f)$, medtem ko $f * \phi \neq 0$ po predpostavki pomeni ravno nasprotno $\sigma(\phi) \not\subset h(f)$.

Na podoben način lahko opišemo tudi množice spektralne sinteze.

Trditev 9. $S \subset \widehat{G}$ je množica spektralne sinteze natanko takrat, ko za vsak $f \in L^1(G)$ in $\phi \in L^\infty(G)$ iz $\sigma(\phi) \subset S \subset h(f)$ sledi $f * \phi = 0$.

Dokaz. Če je S množica sinteze in $\sigma(\phi) \subset S \subset h(f)$, je $f \in k(S) = j(S)$ in zato f limita funkcij $f_n \in j_0(S)$. Torej so $\widehat{f}_n = 0$ na okolici S , se pravi na okolici $h(\perp J_\phi) = \sigma(\phi)$. Po posledici 2 izreka 1 so potem funkcije $f_n \in \perp J_\phi$, torej tudi $f \in \perp J_\phi$ oziroma $f * \phi = 0$.

Obratno, naj iz $\sigma(\phi) \subset S \subset h(f)$ sledi $f * \phi = 0$ za poljubni funkciji $f \in L^1(G)$ in $\phi \in L^\infty(G)$ in naj bo I poljuben zaprt ideal z lastnostjo $h(I) = S$. Če $I \neq j(S)$, obstaja $\phi \in j(S)_\perp$ in $f \in I$ z lastnostjo $f * \phi = 0$. Torej je $j(S) \subset \perp J_\phi$ in zato $\sigma(\phi) = h(\perp J_\phi) \subset h(j(S)) = S$. Ker je $f \in I$, je tudi $S = h(I) \subset h(f)$. Po predpostavki je potem $f * \phi = 0$, kar je v nasprotju z izbiro funkcije f .

Posledica. $S \subset \widehat{G}$ je množica spektralne sinteze natanko takrat, ko je $\sigma(\phi) \perp k(S)$ za vsak $\phi \in L^\infty(G)$ z lastnostjo $\sigma(\phi) \subset S$.

Dokaz. Pogoj, da iz $\sigma(\phi) \subset S \subset h(f)$ sledi $f * \phi = 0$ je ekvivalenten pogoju, da je $\phi \perp k(S)$ za vsak ϕ z lastnostjo $\sigma(\phi) \subset S$.

Trditev 10. Če je $\phi \in L^\infty(G) \cap L^1(G)$, je $\sigma(\phi) = \text{supp } \widehat{\phi}$.

Dokaz. Po trditvi 5 je $\xi \in \sigma(\phi)$ natanko takrat, ko je $\widehat{f}(\xi) = 0$ za vsak $f \in \perp J_\phi$, se pravi za vsak $f \in L^1(G)$ z lastnostjo $f * \phi = 0$. Za take funkcije f velja $\widehat{f}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = (f * \phi)^\wedge(\xi) = 0$, od koder dobimo $\widehat{f}(\xi) = 0$ za $\widehat{\phi}(\xi) \neq 0$. To pomeni, da mora biti $\text{supp } \widehat{\phi} \subset \sigma(\phi)$. Obratno, če obstaja $\xi \in \sigma(\phi) \setminus \text{supp } \widehat{\phi}$, obstaja tudi funkcija $f \in L^1(G)$, tako da je $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ in hkrati $\text{supp } \widehat{f} \cap \text{supp } \widehat{\phi} = \emptyset$. Zanj velja $(f * \phi)^\wedge = 0$ in po izreku o enoličnosti (izrek 3.3) tudi $f * \phi = 0$. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je $\xi \in \sigma(\phi)$.

Spomnimo se: $B(G) = \{\phi \in C_b(G); \phi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi) \text{ za neko mero } \mu \in M(\widehat{G})\}$.

Izrek 3. Če je $\phi \in B(G)$, je $\sigma(\phi) = \text{supp } \mu$ in koideal J_ϕ dopušča spektralno sintezo.

Dokaz. Za vsak $f \in L^1(G)$ je

$$(f * \phi)(x) = \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)dy = \int_G \int_{\widehat{G}} f(y)\langle y^{-1}x, \xi \rangle d\mu(\xi)dy = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{f}(\xi) d\mu(\xi).$$

Odtod sledi $f * \phi = 0$ natanko takrat, ko je $\widehat{f} = 0$ na $\text{supp } \mu$. Tudi obratno, če je $\widehat{f} = 0$ na $\text{supp } \mu$, je $f * \phi = 0$. Torej, podobno kot v prejšnji trditvi velja $\xi \in \sigma(\phi)$ natanko takrat, ko je $\widehat{f} = 0$ za vsak f z lastnostjo $f * \phi = 0$ oziroma natanko takrat, ko je $\widehat{f} = 0$ za vsak f z lastnostjo $\widehat{f}|_{\text{supp } \mu} = 0$. Se pravi, da je $\xi \in \sigma(\phi)$ natanko takrat, ko je $\xi \in \text{hk}(\text{supp } \mu) = \text{supp } \mu$. To pomeni, da je $\sigma(\phi) = \text{supp } \mu$.

Poleg tega je $f \in \perp J_\phi$ natanko takrat, ko je $f * \phi = 0$, se pravi natanko takrat, ko je $\widehat{f} = 0$ na $\text{supp } \mu = \sigma(\phi)$. Torej je $\perp J_\phi = k(\sigma(\phi))$. Ker pa je tudi $\perp w^*(\sigma(\phi)) = k(\sigma(\phi))$ (trditev 6), velja $J_\phi = w^*(\sigma(\phi)) = w^*(\sigma(J_\phi))$ in koideal J_ϕ dopušča spektralno sintezo.

Rečemo, da funkcija $\phi \in L^\infty(G)$ dopušča spektralno sintezo, kadar jo dopušča koideal J_ϕ , se pravi, kadar je $w^*(\sigma(\phi)) = J_\phi$. Izrek 3 torej med drugim pove, da vsaka funkcija $\phi \in B(G)$ dopušča spektralno sintezo.

Ker je očitno $\phi \in J_\phi$, hitro vidimo, da dopušča ϕ spektralno sintezo natanko takrat, ko jo lahko v šibki- $*$ topologiji aproksimiramo s funkcijami iz $\sigma(\phi)$. Na drug način pa lahko dejstvo, da ϕ dopušča spektralno sintezo, opišemo s pogojem $\phi \perp k(\sigma(\phi))$.

IV. poglavje : UPODOBITVE LOKALNO KOMPAKTNIH GRUP

V tem poglavju bomo pozornost posvetili upodobitvam splošnih lokalno kompaktnih grup, s poudarkom na teoriji unitarnih upodobitev, o katerih znamo povedati največ.

1. Unitarne upodobitve

Ogledali si bomo osnovne pojme o unitarnih upodobitvah splošnih lokalno kompaktnih grup in njihove lastnosti, ki jih bomo potrebovali pri obravnavi posebnih grup.

Definicija 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa. *Unitarna upodobitev (unitarna reprezentacija)* grupe G je homomorfizem $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ v grupo unitarnih operatorjev na netrivialnem Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π , ki je zvezen v krepki operatorski topologiji.

Za vsak $x \in G$ je torej $\pi(x)$ unitaren operator na \mathcal{H}_π , pri čemer je $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$, $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$ za $x, y \in G$ in je $x \mapsto \pi(x)u$ za vsak $u \in \mathcal{H}_\pi$ zvezna preslikava iz G v \mathcal{H}_π . Prostoru \mathcal{H}_π rečemo *upodobitveni prostor*, $\dim \mathcal{H}_\pi$ je *razsežnost (dimenzija)*, včasih tudi *stopnja* upodobitve.

Preslikava $x \mapsto \pi(x)$ iz G v $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ ni nujno zvezna po normi. To je prestroga zahteva, možna le v zelo posebnih primerih. Namesto krepke zveznosti bi lahko pri unitarnih upodobitvah enako dobro shajali z zveznostjo v šibki operatorski topologiji, saj velja naslednje.

Lema 1. Naj bo $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ homomorfizem grupe G v grupo unitarnih operatorjev na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π . Preslikava $x \mapsto \pi(x)u$ je zvezna za vsak $u \in \mathcal{H}_\pi$ natanko takrat, ko je zvezna preslikava $x \mapsto \langle \pi(x)u, v \rangle$ za vsak par $u, v \in \mathcal{H}_\pi$.

Dokaz. V eno smer je implikacija očitna. V drugo smer upoštevajmo dejstvo, da na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} iz šibke konvergence unitarnih operatorjev T_α proti unitarnemu operatorju T sledi krepka konvergenca. Res, za vsak $u \in \mathcal{H}$ imamo

$$\|(T_\alpha - T)u\|^2 = \|T_\alpha u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle T_\alpha u, Tu \rangle + \|Tu\|^2 = 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle T_\alpha u, Tu \rangle \rightarrow 0.$$

Regularne upodobitve

Kako pridemo naravno do unitarnih upodobitev?

Naj deluje grupa G na lokalno kompaktnem prostoru S , torej tudi na funkcijah na S po predpisu $(\pi(x)f)(s) = f(x^{-1}s)$. Oglejmo si dva primera:

1. Če na S obstaja Radonova mera μ , ki je invariantna za delovanje grupe (glej razdelek II.3), je π unitarna upodobitev na prostoru $L^2(\mu)$, saj velja

$$\|\pi(x)f\|_2^2 = \int_S |(\pi(x)f)(s)|^2 d\mu(s) = \int_S |f(x^{-1}s)|^2 d\mu(s) = \|f\|_2^2.$$

Torej je $\pi(x)$ unitaren operator na $L^2(\mu)$ za vsak x , očitno je π homomorfizem. Zveznost sledi iz trditve II.2.3.

2. Če S ne premere invariantne mere, ima gotovo kvazi invariantno mero μ , pri čemer je $d\mu(xs) = \phi(x, s)d\mu(s)$ in ϕ pozitivna, v obeh spremenljivkah zvezna funkcija (glej razdelek II.3). Potem definiramo unitarno upodobitev drugače: $(\pi(x)f)(s) = \phi(x, x^{-1}s)^{-1/2}f(x^{-1}s)$. Tedaj tudi dobimo

$$\begin{aligned}\|\pi(x)f\|_2^2 &= \int |(\pi(x)f)(s)|^2 d\mu(s) = \int \phi(x, x^{-1}s)^{-1} |f(x^{-1}s)|^2 d\mu(s) = \\ &= \int \phi(x, s)^{-1} |f(s)|^2 d\mu(xs) = \int |f(s)|^2 d\mu(s) = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

torej je spet $\pi(x)$ unitaren operator za vsak $x \in G$. Da je π homomorfizem, sledi iz naslednjega računa ($s \in S$):

$$\begin{aligned}(\pi(xy)f)(s) &= \phi(xy, y^{-1}x^{-1}s)^{-1/2}f(y^{-1}x^{-1}s) = \\ \phi(x, x^{-1}s)^{-1/2}\phi(y, y^{-1}x^{-1}s)^{-1/2}f(y^{-1}x^{-1}s) &= \phi(x, x^{-1}s)^{-1/2}(\pi(y)f)(x^{-1}s) = \\ &= (\pi(x)\pi(y)f)(s).\end{aligned}$$

Tu smo uporabili verižno pravilo za Radon-Nikodymove odvode $d\mu_{xy}/d\mu = d\mu_x/d\mu_y \cdot d\mu_y/d\mu$ za $x, y \in G$ oziroma $\phi(xy, s) = \phi(x, ys)\phi(y, s)$, kar sledi iz

$$\phi(xy, s)d\mu(s) = d\mu(xys) = \phi(x, ys)d\mu(y) = \phi(x, ys)\phi(y, s)d\mu(s).$$

Zveznost dobimo kot prej.

Poseben primer je naslednja situacija, ko izberemo $S = G$, se pravi, ko deluje grupa G na sebi z levim množenjem.

Definicija 2. *Leva regularna upodobitev* grupe lokalno kompaktna G je definirana z levim premikom na $L^2(G, \lambda)$ (λ leva Haarova mera na G):

$$(\pi_L(x)f)(y) = L_x f(y) = f(x^{-1}y), \quad x, y \in G, \quad f \in L^2(G, \lambda).$$

Desna regularna upodobitev grupe lokalno kompaktna G je definirana z desnim premikom na $L^2(G, \rho)$ (ρ desna Haarova mera na G):

$$(\pi_R(x)f)(y) = R_x f(y) = f(yx), \quad x, y \in G, \quad f \in L^2(G, \rho).$$

Desno regularno upodobitev lahko definiramo tudi na prostoru $L^2(G, \lambda)$, vendar moramo v tem primeru postaviti $(\tilde{\pi}_R(x)f)(y) = \Delta(x)^{1/2}R_x f(y) = \Delta(x)^{1/2}f(yx)$ za $f \in L^2(G, \lambda)$.

Z upoštevanjem lastnosti integriranja po levi ali desni Haarovi meri se lahko prepričamo, da je v vseh treh primerih podana prava unitarna upodobitev.

Osnovne definicije

Naštejmo nekaj uporabnih pojmov v zvezi z upodobitvami:

1. Ekvivalenca. Unitarni upodobitvi, π_1 na prostoru \mathcal{H}_{π_1} in π_2 na prostoru \mathcal{H}_{π_2} , sta *ekvivalentni*, na kratko $\pi_1 \sim \pi_2$, če obstaja tak unitaren operator $U : \mathcal{H}_{\pi_1} \rightarrow \mathcal{H}_{\pi_2}$, da velja $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^{-1}$ za vsak $x \in G$. Očitno je to ekvivalenčna relacija med upodobitvami.

Trditev 1. *Naj bo λ leva in ρ desna Haarova mera lokalno kompaktna grupe G .*

- (a) *Desna regularna upodobitev π_R na prostoru $L^2(G, \rho)$ je ekvivalentna levi regularni upodobitvi π_L na prostoru $L^2(G, \lambda)$.*
 (b) *Desna regularna upodobitev π_R na prostoru $L^2(G, \rho)$ je ekvivalentna desni regularni upodobitvi $\tilde{\pi}_R$ na prostoru $L^2(G, \lambda)$.*

Dokaz. (a) Definirajmo $Uf(x) = f(x^{-1})$ za vsak $x \in G$ in $f \in L^2(G, \lambda)$. Zaradi

$$\int |Uf(x)|^2 d\rho(x) = \int |f(x^{-1})|^2 d\rho(x) = \int |f(x)|^2 d\rho(x^{-1}) = \int |f(x)|^2 d\lambda(x)$$

je U unitaren operator iz $L^2(G, \lambda)$ v $L^2(G, \rho)$ in velja

$$\begin{aligned} (\pi_R(x)f)(y) &= f(yx) = U^{-1}f((yx)^{-1}) = U^{-1}f(x^{-1}y^{-1}) = \\ &= (\pi_L(x)U^{-1}f)(y^{-1}) = (U\pi_L(x)U^{-1}f)(y), \end{aligned}$$

torej $\pi_R(x) = U\pi_L(x)U^{-1}$.

(b) Zdaj naj bo $Uf(x) = \Delta(x)^{1/2}f(x)$. Zaradi

$$\int |Uf(x)|^2 d\rho(x) = \int |f(x)|^2 \Delta(x) d\rho(x) = \int |f(x)|^2 d\lambda(x)$$

je U unitaren operator iz $L^2(G, \lambda)$ v $L^2(G, \rho)$. Poleg tega je

$$\begin{aligned} (\pi_R(x)f)(y) &= f(yx) = \Delta(yx)^{1/2}U^{-1}f(yx) = \Delta(y)^{1/2}\Delta(x)^{1/2}U^{-1}f(yx) = \\ &= \Delta(y)^{1/2}\tilde{\pi}_R(x)U^{-1}f(y) = U\tilde{\pi}_R(x)U^{-1}f(y) \end{aligned}$$

oziroma $\pi_R(x) = U\tilde{\pi}_R(x)U^{-1}$.

2. Spletične in komutanti. Omejenemu linearnemu operatorju $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \rightarrow \mathcal{H}_{\pi_2}$, ki spleta upodobitvi π_1 in π_2 v smislu $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$ za vsak $x \in G$, rečemo *spletična*. Množico vseh spletičen označimo s $C(\pi_1, \pi_2)$ in je zaprt podprostor v prostoru vseh omejenih lineranih operatorjev iz \mathcal{H}_{π_1} v \mathcal{H}_{π_2} . Če sta npr. upodobitvi π_1 in π_2 unitarno ekvivalentni, je unitaren operator U , ki posreduje to ekvivalenco, spletična, torej $U \in C(\pi_1, \pi_2)$.

V posebnem primeru označimo s $C(\pi) = C(\pi, \pi)$ *komutant* oziroma *centralizator* upodobitve π . To je podalgebra v algebri vseh omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π , vsebuje identični operator na \mathcal{H}_π in je zaprta v šibki operatorski topologiji, ker iz $\langle T_\alpha \pi(x)u, v \rangle = \langle \pi(x)T_\alpha u, v \rangle = \langle T_\alpha u, \pi(x^{-1})v \rangle$ za vsak $x \in G$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ sledi $\langle T\pi(x)u, v \rangle = \langle Tu, \pi(x^{-1})v \rangle = \langle \pi(x)Tu, v \rangle$, če $T_\alpha \rightarrow T$ v šibki operatorski topologiji. Poleg tega je sebiadjungirana zaradi $T^*\pi(x) = (\pi(x^{-1})T)^* = (T\pi(x^{-1}))^* = \pi(x)T^*$ za vsak x , če $T \in C(\pi)$. Torej je $C(\pi)$ von Neumannova algebra.

3. Kontragradienčna upodobitev. Označimo z \mathcal{H}'_π dual prostora \mathcal{H}_π v smislu Banachovih prostorov (po izbiri ortonormirane baze so vsi koeficienti konjugirano linearni, tako da je identifikacija prostora \mathcal{H}_π z \mathcal{H}'_π antilinearna. V dani bazi so adjungirani operatorji v Banachovem smislu predstavljeni s transponirano matriko). Vsaki unitarni upodobitvi π grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π lahko priredimo t.i. *kontragradienčno upodobitev* $\bar{\pi}$ na prostoru \mathcal{H}'_π , definirano z $\bar{\pi}(x) = \pi(x^{-1})'$ (transponirani inverz). Lahko se prepričamo, da je $\bar{\pi}$ res unitarna upodobitev.

4. Podupodobitve. Zaprt podprostor $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_\pi$ je *invarianten* za π , če velja $\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ za vsak $x \in G$. Invariantnemu podprostoru $\mathcal{M} \neq \{0\}$ priredimo *podupodobitev* (podreprezentacijo) $\pi^\mathcal{M}$ upodobitve π na podprostoru \mathcal{M} , tako da omejimo (zožimo) delovanje π na \mathcal{M} , torej $\pi^\mathcal{M}(x) = \pi(x)|_\mathcal{M}$. Tudi $\pi^\mathcal{M}$ je unitarna upodobitev grupe G .

5. Nerazcepne in ciklične upodobitve. Če obstaja netrivialen (tj. od $\{0\}$ in \mathcal{H}_π različen) invarianten podprostor za π , rečemo, da je upodobitev π *razcepna* (*reducibilna*), v nasprotnem primeru pa je *nerazcepna* (*ireducibilna*).

Trditev 2. Če je podprostor \mathcal{M} invarianten za π , je tudi ortogonalni komplement \mathcal{M}^\perp invarianten za π .

Dokaz. Naj bo $u \in \mathcal{M}$ in $v \in \mathcal{M}^\perp$. Potem je $\langle \pi(x)v, u \rangle = \langle v, \pi(x^{-1})u \rangle = 0$ za vsak $x \in G$, torej $\pi(x)v \in \mathcal{M}^\perp$ za vsak $x \in G$.

Včasih je invarianten podprostor generiran samo z enim vektorjem $u \in \mathcal{H}_\pi$, tako da je zaprta linearna ovojnica $\mathcal{M}_u = \overline{\text{span}}\{\pi(x)u; x \in G\}$. Tak podprostor imenujemo *ciklični*. Če je $\mathcal{M}_u = \mathcal{H}_\pi$, imenujemo u *ciklični vektor*, π pa *ciklična upodobitev*.

6. Direktna vsota upodobitev. Naj bo $\{\pi_i\}$ poljubna družina unitarnih upodobitev grupe G , pri čemer naj π_i deluje na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_{π_i} . *Direktna vsota upodobitev* $\bigoplus \pi_i$ je upodobitev π na direktni vsoti Hilbertovih prostorov $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_{\pi_i}$, definirana s predpisom $\pi(x)(\sum_i v_i) = \sum \pi_i(x)v_i$ ($v_i \in \mathcal{H}_{\pi_i}, x \in G$). V tem primeru je vsaka upodobitev π_i podupodobitev za π .

Če je npr. \mathcal{M} invarianten podprostor za π , je $\pi = \pi^{\mathcal{M}} \oplus \pi^{\mathcal{M}^\perp}$ zaradi trditve 2. Rečemo, da je upodobitev π *povsem razcepna*. Za upodobitve, ki niso unitarne, popolna razcepnost ne velja; zgled je upodobitev \mathbb{R} na \mathbb{C}^2 , ki je dana z $\pi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Trditev 3. *Vsaka unitarna upodobitev je direktna vsota cikličnih upodobitev.*

Dokaz. Po Zornovi lemi obstaja maksimalna družina $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ paroma ortogonalnih podprostorov v \mathcal{H}_π , ki so ciklični za unitarno upodobitev π . Potem je $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ in $\pi = \bigoplus_{\alpha \in A} \pi_\alpha$, torej direktna vsota cikličnih upodobitev.

Trditev 4. *Naj bo \mathcal{M} zaprt podprostor v \mathcal{H}_π in $P: \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ pravokotni projektor na podprostor \mathcal{M} . Tedaj je podprostor \mathcal{M} invarianten za upodobitev π natanko takrat, ko je $P \in C(\pi)$.*

Dokaz. Če je $P\pi(x) = \pi(x)P$ za vsak $x \in G$, za $v \in \mathcal{M}$ velja $\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \in \mathcal{M}$ za vsak $x \in G$. Torej je podprostor \mathcal{M} invarianten za upodobitev π . Obratno, če je \mathcal{M} invarianten, je $\pi(x)Pv = \pi(x)v = P\pi(x)v$ ter $\pi(x)Pw = 0 = P\pi(x)w$ za vsak $x \in G, v \in \mathcal{M}$ in $w \in \mathcal{M}^\perp$. Ker je vsak $u \in \mathcal{H}_\pi$ oblike $u = v + w$, kjer je $v \in \mathcal{M}$ in $w \in \mathcal{M}^\perp$, velja $\pi(x)Pu = \pi(x)v = P\pi(x)v = P\pi(x)u$ in $P \in C(\pi)$.

Schurova lema

Trditev 5 (Schur). *Naj bo π poljubna unitarna upodobitev, π_1 in π_2 pa nerazcepni unitarni upodobitvi lokalno kompaktne grupe G .*

(a) *Upodobitev π je nerazcepna natanko takrat, ko je $C(\pi) = \mathbb{C}I = \{\lambda I; \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

(b) *Če upodobitvi π_1 in π_2 nista ekvivalentni, je $C(\pi_1, \pi_2) = 0$. Če sta ekvivalentni, je $C(\pi_1, \pi_2)$ enorazsežen podprostor v $B(\mathcal{H}_{\pi_1}, \mathcal{H}_{\pi_2})$.*

Dokaz. (a) Če je upodobitev π razcepna, vsebuje $C(\pi)$ po trditvi 4 netrivialen pravokoten projektor P . Obratno, naj bo $T \in C(\pi)$ in $T \neq cI, c \in \mathbb{C}$. Potem je tudi $T^* \in C(\pi)$ in zato $A = (T + T^*)/2 \in C(\pi)$ ter $B = (T - T^*)/2i \in C(\pi)$. Vsaj eden od operatorjev A, B ni večkratnik identitete; denimo, da je to operator A . Ker je sebiadjungiran in komutira z vsemi unitarnimi operatorji $\pi(x), x \in G$, tudi vsi spektralni projektorji za A komutirajo z vsemi operatorji $\pi(x)$ (glej npr. [3], str. 263). Torej so vsi spektralni projektorji v $C(\pi)$ in vsaj eden netrivialen, zato je π razcepna upodobitev grupe G po trditvi 4.

(b) Denimo, da je $T \in C(\pi_1, \pi_2)$. Tako kot v primeru $C(\pi)$ vidimo, da je $T^* \in C(\pi_2, \pi_1)$. Torej je $T^*T \in C(\pi_1)$ in $TT^* \in C(\pi_2)$. Ker sta π_1 in π_2 nerazcepni upodobitvi, je po točki (a) $T^*T = cI$ in $TT^* = cI$ za določeno (isto!) nenegativno konstanto $c \geq 0$. Če $c > 0$, je T/\sqrt{c} unitaren operator iz \mathcal{H}_{π_1} na \mathcal{H}_{π_2} , ki spleta upodobitvi π_1 in π_2 , se pravi $\pi_1 \sim \pi_2$. Če torej π_1 in π_2 nista ekvivalentni, mora biti $c = 0$ oziroma $T = 0$, tj. $C(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$. Če pa sta π_1 in π_2 ekvivalentni in ekvivalenco posreduje unitarni operator U , za vsak nadaljnji $T \in C(\pi_1, \pi_2)$ tako kot prej ugotovimo, da je $U^*T \in C(\pi_1)$. Zaradi nerazcepnosti upodobitve π_1 je potem $U^*T = cI$ oziroma $T = cU$, kar pomeni enorazsežnost prostora

$C(\pi_1, \pi_2)$.

Posledica. Če je grupa Abelova, je vsaka njen nerazcepna upodobitev enorazsežna.

Dokaz. V primeru, da je grupa G Abelova, vsi operatorji $\pi(x)$ med seboj komutirajo. Torej je vsak $\pi(x) \in C(\pi)$. Če je upodobitev π nerazcepna, je $\pi(x) = c_x I$, $c_x \in \mathbb{C}$ za vsak $x \in G$. Potem pa je vsak enorazsežen podprostor v \mathcal{H}_π invarianten za π , se pravi da mora biti $\dim \mathcal{H}_{\pi_2} = 1$.

Ker je v primeru Abelove lokalno kompaktne grupe nerazcepna upodobitev π enorazsežna, je π zvezen homomorfizem iz G v \mathbb{T} , torej karakter na G . V razdelku III.1. smo videli, da je karakterjev Abelove grupe G veliko in da sestavljajo t.i. dualno grupo \widehat{G} , ki preko Pontrjaginove dualnosti ponovno določa prvotno grupo G .

Tudi v splošnem je struktura nerazcepnih upodobitev pomemben podatek za vsako lokalno kompaktno grupo. Zaenkrat še ne vemo, ali vedno obstajajo. V četrtem razdelku bomo v izreku Gelfanda in Raikova videli, da jih je dovolj, toliko, da celo ločijo točke: za vsak $x \neq y$ iz G obstaja nerazcepna unitarna upodobitev grupe G z lastnostjo $\pi(x) \neq \pi(y)$.

Osnovna ideja harmonične analize

Glavna naloga harmonične analize je sestavljena iz dveh delov:

1. Opisati vse nerazcepne unitarne upodobitve dane grupe do unitarne ekvivalence natančno.
2. Ugotoviti, kako je poljubna unitarna upodobitev zgrajena iz nerazcepnih upodobitev.

Prva točka je seveda odvisna od narave grupe G . Za določen razred morda poznamo strukturo nerazcepnih upodobitev (za Abelove grupe npr. že vemo, da so nerazcepne upodobitve enorazsežne), morda pa jih znamo poiskati le za konkretne grupe. Morda jih znamo celo klasificirati.

Pri drugi točki nas npr. zanima, ali je vsaka unitarna upodobitev enaka direktni vsoti nerazcepnih upodobitev. Včasih je to res, npr. pri kompaktnih grupah, ki jih bomo obravnavali v četrtem poglavju. Včasih pa unitarna upodobitev **ni** direktna vsota nerazcepnih upodobitev.

Zgled 1. Oglejmo si grupo krožnice $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{e^{ix}; x \in \mathbb{R}\}$, ki je hkrati kompaktna in Abelova, vsaka nerazcepna upodobitev torej enorazsežna. Ker so unitarni operatorji na enorazsežnem prostoru v resnici dani z (množenjem s) kompleksnimi števili z absolutno vrednostjo 1, je $\pi(x) \in \mathbb{T}$, torej $|\pi(x)| = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker je $x \mapsto \pi(x)$ homomorfizem iz aditivne grupe realnih števil, reduciranih po modulu 2π , hitro ugotovimo, da je $\pi(x) = \pi_n(x) = e^{-inx}$ za določen $n \in \mathbb{Z}$.

Naj bo zdaj π (leva) regularna upodobitev grupe \mathbb{T} na prostoru $L^2(\mathbb{T})$, dana z (levim) premikom L_x , torej $\pi(x)f(t) = f(t-x)$ za vsak $x, t \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{T})$. Očitno je π_n podreprezentacija za π , delujoča na enorazsežnem prostoru \mathcal{H}_{π_n} , napetem na funkcijo $e_n(t) = e^{int}$, saj je $\pi(x)e_n(t) = e_n(t-x) = e^{in(t-x)} = e^{-inx}e^{int} = e^{-inx}e_n(t)$. Ker je $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza v $L^2(\mathbb{T})$, lahko zapišemo klasični Fourierov razvoj v Hilbertovem prostoru: $f = \sum_n \widehat{f}(n)e_n$. Zaradi krepke zveznosti regularne reprezentacije velja tudi $\pi(x)f(t) = \sum_n \widehat{f}(n)e_n(t-x) = \sum_n \widehat{f}(n)\pi_n(x)e_n(t)$ oziroma $\pi(x)f = \sum_n \widehat{f}(n)\pi_n(x)e_n$. Torej je π direktna vsota (enorazsežnih) podreprezentacij π_n .

Zgled 2. Grupa naj bo zdaj realna os, $G = \mathbb{R}$. Ker je Abelova, so nerazcepne upodobitve spet enorazsežne. Podobno kot prej spoznamo, da so nerazcepne upodobitve oblike $\pi_\xi(x) = e^{-ix\xi}$, $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Ponovno si oglejmo (levo) regularno upodobitev $\pi(x)f(t) = f(t-x)$ za $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ta upodobitev **nima** netrivialnih nerazcepnih podupodobitev. Vsaka bi bila namreč enorazsežna, se pravi, da bi morala obstajati funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ z lastnostjo $f(t-x) = c_x f(t)$ za vsak $x, t \in \mathbb{R}$, kjer je c_x kompleksno število za vsak x . Če izračunamo normo na obeh straneh, vidimo, da mora biti $|c_x| = 1$. Tedaj pa bi veljalo $|f(t-x)| = |f(t)|$ za vsak $x, t \in \mathbb{R}$, torej bi bila $|f|$ konstantna funkcija v $f \in L^2(\mathbb{R})$, kar je mogoče le za $f = 0$.

Regularna upodobitev torej ni direktna vsota nerazcepnih (pod)upodobitev (saj jih, kot smo videli, nima), je pa t.i. *direktni integral* nerazcepnih upodobitev. Klasična inverzna formula za Fourierove integrale namreč pove, da je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

kjer pa moramo integral razumeti v posplošenem smislu, kadar $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Če je npr. $f \in L^2(\mathbb{R})$, velja Parsevalova formula $\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2/2\pi$ (glej izrek III.2.2). Zato lahko imamo $\{\widehat{f}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{R}}$ za element direktnega integrala enorazsežnih Hilbertovih prostorov (glej dodatek D). Formalno je

$$\pi(x)f(t) = f(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(t-x)} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \pi_\xi(x) e_\xi(t) d\xi$$

za $x, t \in \mathbb{R}$ oziroma

$$\pi(x)f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_\xi(x) (\widehat{f}(\xi) e_\xi) d\xi.$$

Se pravi, da je π direkten integral enorazsežnih upodobitev π_ξ , $\xi \in \mathbb{R}$ (glej dodatek D).

Da se pokazati, da je vsaka unitarna upodobitev lokalno kompaktne Abelove grupe ekvivalentna direktnemu integralu nerazcepnih upodobitev (glej dodatek D, izrek 4). Podobno velja za nekompaktne grupe, ki niso Abelove (glej dodatek D, izrek 5). Unitarna upodobitev kompaktne grupe pa je, kot v zgledu 1, ekvivalentna direktni vsoti nerazcepnih upodobitev, kar bomo videli kasneje (glej izrek IV.1.1).

2. Omejene upodobitve

V prvem razdelku smo obravnavali osnovne pojme v zvezi z unitarnimi upodobitvami lokalno kompaktnih grup. V resnici pa lahko problematiko upodabljanja grup zastavimo veliko bolj splošno (ne upodabljammo vedno v grupo unitarnih operatorjev in tudi ne vedno le na Hilbertovem prostoru).

Definicija 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa, E kompleksen Banachov prostor in $B(E)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na E . *Upodobitev grupe* G na prostoru E je grupni homomorfizem iz G v grupo obrnljivih omejenih linearnih operatorjev na E , ki je zvezen glede na dano topologijo v G in krepko operatorsko topologijo na $B(E)$.

Natančneje, za upodobitev $\pi : G \rightarrow E$ velja $\pi(1) = I$ in $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ za $x, y \in G$. Vsak $\pi(x)$ je obrnljiv omejen linearen operator na E in velja $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$. Poleg tega je preslikava $x \mapsto \pi(x)\xi$ zvezna za vsak $\xi \in E$.

Zveznost

Vsaka upodobitev je seveda zvezna tudi glede na šibko operatorsko topologijo na $B(E)$. V resnici velja tudi obratno. Tako kot v prvem razdelku za unitarne upodobitve tudi v tej bolj splošni situaciji zadošča, da namesto krepke operatorske topologije na $B(E)$ izberemo šibko operatorsko topologijo. Dokaz pa je precej težji kot dokaz leme 1.1; zanj potrebujemo naslednji splošni rezultat iz funkcionalne analize (primerjaj izrek 3.27 v [28]).

Lema 1. Naj bo E poljuben Banachov prostor in μ verjetnostna Borelova mera na kompaktnem Hausdorffovem prostoru X . Za vsako šibko zvezno funkcijo f (tj. zvezno funkcijo iz X v prostor E , opremljen s šibko topologijo) obstaja tak vektor ξ v zaprti konveksni ovojnici $\overline{co} f(X)$ v E , da za vsak $\phi \in E^*$ velja

$$(1) \quad \langle \xi, \phi \rangle = \int_X \langle f(x), \phi \rangle d\mu(x).$$

Dokaz. Opazujmo E kot realen vektorski prostor in označimo $H = \overline{co} f(X)$. Ker je $f(X)$ šibko kompaktna podmnožica v E , je po Krein-Smulianovem izreku (glej [3], str. 164) tudi H šibko kompaktna množica. Naj bo $L = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ končna podmnožica v E^* in E_L množica vseh $\xi \in H$, za katere velja (1) za vsak $\phi \in L$. Zaradi zveznosti funkcionalov ϕ_i je E_L šibko zaprta, torej šibko kompaktna podmnožica v H . Če pokažemo, da je množica E_L neprazna za vsako končno množico F , bo imela družina vseh takih množic E_F lastnost končnega preseka. Torej bo tudi presek vseh takih množic neprazen presek in za vsak element ξ tega preseka bo veljala enakost (2) za vsak $\phi \in E^*$.

Glejmo $L = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ kot linearno preslikavo iz X v \mathbb{R}^n , postavimo $K = L(f(X))$ in definirajmo

$$m_i = \int_X \langle f(x), \phi_i \rangle d\mu(x)$$

za $i = 1, 2, \dots, n$. Pokažimo, da točka $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ leži v konveksni ovojnici kompaktne množice $K \subset \mathbb{R}^n$. Če točka $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ni v tej ovojnici, obstajajo po Hahn-Banachovem izreku taka realna števila c_1, c_2, \dots, c_n , da velja $\sum_{i=1}^n c_i u_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i$ za vsak $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in K$. Za vsak $x \in X$ torej imamo

$$\sum_{i=1}^n c_i \langle f(x), \phi_i \rangle < \sum_{i=1}^n c_i t_i$$

in z integracijo po meri μ tudi $\sum_{i=1}^n c_i m_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i$. Torej je $t \neq m$, kar pomeni, da m pripada konveksni ovojnici množice K . Zaradi linearnosti preslikave L obstaja $\xi \in \overline{co} f(X) \subset H$ z lastnostjo $m = L\xi$. Za tak ξ velja $\langle \xi, \phi_i \rangle = m_i = \int_X \langle f(x), \phi_i \rangle d\mu(x)$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$. Se pravi, da je $y \in E_L$.

Ker funkcionali ločijo točke, je očitno vektor $\xi \in E$, ki zadošča enakosti (1), en sam. Eksistenco vektorja ξ bomo uporabili v naslednji trditvi.

Trditev 1. Naj bo G lokalno kompaktna grupa, E Banachov prostor in $\pi : G \rightarrow B(E)$ homomorfizem grupe G v grupo obrnljivih omejenih linearnih operatorjev na E , ki je zvezen glede na šibko operatorsko topologijo v $B(E)$. Potem je π zvezna preslikava tudi glede na krepko operatorsko topologijo v $B(E)$, se pravi, upodobitev grupe G v skladu z definicijo 1.

Dokaz. Izberimo kompaktno okolico K enote $1 \in G$ in poljuben $\xi \in E$. Potem je po predpostavki množica $\{\pi(x)\xi; x \in K\}$ kompaktna v šibki topologiji na E . Z dvakratno uporabo principa enakomerne omejenosti tudi vidimo, da obstaja taka konstanta $C > 0$, da je $\sup_{x \in K} \|\pi(x)\| \leq C$.

Nadalje naj bo U taka simetrična okolica enote 1, da je $U^2 \subset K$. Po trditvi II.2.4 lahko najdemo omejeno približno enoto (u_α) za grupno algebro $L^1(G)$ z dodatno lastnostjo, da so vsi nosilci $\text{supp } u_\alpha \subset U$. Za vsak $y \in U$ je preslikava $x \mapsto u_\alpha(y^{-1}x)\pi(x)\xi$ šibko zvezna preslikava iz G v E oziroma iz K v E (saj je zunaj K enaka nič), zato lahko uporabimo lemo 1, ki pove, da obstaja tak vektor $\eta_\alpha(y) \in E$, da je za vsak $\phi \in E^*$ res

$$(2) \quad \langle \eta_\alpha(y), \phi \rangle = \int_K u_\alpha(y^{-1}x) \langle \pi(x)\xi, \phi \rangle dx = \int_G u_\alpha(y^{-1}x) \langle \pi(x)\xi, \phi \rangle dx.$$

Označimo $\eta_\alpha(y) = \int_G u_\alpha(y^{-1}x)\pi(x)\xi dx$ in $\xi_\alpha = \eta_\alpha(1) = \int_G u_\alpha(x)\pi(x)\xi dx$. Potem se iz definicije obeh elementov hitro vidi, da za $y \in U$ velja $\pi(y)\xi_\alpha = \eta_\alpha(y)$. Iz ocene

$$\|\pi(y)\xi_\alpha - \xi_\alpha\| = \left\| \int_G (u_\alpha(y^{-1}x) - u_\alpha(x))\pi(x)\xi dx \right\| \leq C\|\xi\| \|L_y u_\alpha(x) - u_\alpha(x)\|_1.$$

spoznamo zveznost preslikave $x \mapsto \pi(x)\xi_\alpha$ v normi prostora E .

Naj bo

$$F = \{\eta \in E; \text{preslikava } x \mapsto \pi(x)\eta \text{ je zvezna v normi prostora } E\}.$$

Mnozica F je linearen podprostor v E , ki vsebuje vse vektorje ξ_α . Pokažimo, da je zaprt podprostor. Naj bo $\eta_n \in F$ in naj velja $\eta_n \rightarrow \eta \in E$, posplošeno zaporedje $y_\beta \in K$ pa naj konvergira proti enoti $1 \in G$. Potem lahko ocenimo

$$\begin{aligned} \|\pi(y_\beta)\eta - \eta\| &\leq \|\pi(y_\beta)\eta - \pi(y_\beta)\eta_n\| + \|\pi(y_\beta)\eta_n - \eta_n\| + \|\eta_n - \eta\| \leq \\ &(C+1)\|\eta_n - \eta\| + \|\pi(y_\beta)\eta_n - \eta_n\|. \end{aligned}$$

Če najprej izberemo dovolj velik n , da je prvi člen majhen, nato pa pri izbranem n še dovolj pozen indeks β , da je tudi drugi člen majhen, vidimo, da $\pi(y_\beta)\eta \rightarrow \eta$. Torej je tudi pri $\eta \in E$ preslikava $x \mapsto \pi(x)\eta$ zvezna (v enoti), se pravi $\eta \in F$, in F je zaprt podprostor v E .

Končno lahko pokažemo, da je ξ šibka limita zaporedja ξ_α . To sledi iz enakosti

$$\xi_\alpha - \xi = \int_G u_\alpha(x)(\pi(x)\xi - \xi)dx = \int_U u_\alpha(x)(\pi(x)\xi - \xi)dx$$

oziroma ocene za vsak ϕ

$$|\langle \xi_\alpha - \xi, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in U} |\langle \pi(x)\xi, \phi \rangle - \langle \xi, \phi \rangle|.$$

Ker so vsi $\xi_\alpha \in F$, je tudi $\xi \in F$. Ker smo izbrali $\xi \in E$ poljubno, je $F = E$, kar je bilo treba dokazati.

Enakomerna omejenost

Nekatere upodobitve imajo lepše lastnosti; ena med njimi je enakomerna omejenost.

Definicija 2. Rečemo, da je splošna upodobitev π grupe G na Banachovem prostoru E enakomerno omejena, če velja $\sup_{x \in G} \|\pi(x)\| < \infty$.

V tem primeru lahko delovanje grupe G na prostoru E še izboljšamo.

Trditev 2. Za vsako enakomerno omejeno upodobitev π lokalno kompaktne grupe G na Banachovem prostoru E obstaja na E ekvivalentna norma, v kateri so vsi operatorji $\pi(x)$, $x \in G$ izometrije.

Dokaz. Označimo $C = \sup_{x \in G} \|\pi(x)\|$ in za vsak $\xi \in E$ definirajmo novo normo $\|\|\xi\|\| = \sup_{x \in G} \|\pi(x)\xi\|$. To je očitno res norma na E , ki je močnejša od stare zaradi $\|\xi\| = \|\pi(1)\xi\| \leq \|\|\xi\|\|$. Po drugi strani pa je zaradi enakomerne omejenosti upodobitve π res tudi $\|\|\xi\|\| \leq \sup_{x \in G} \|\pi(x)\| \|\xi\| = C\|\xi\|$, tako da sta normi ekvivalentni. Poleg tega je v novi normi upodobitev π izometrija, saj za vsak $y \in G$ in vsak $\xi \in E$ velja

$$\|\|\pi(y)\xi\|\| = \sup_{x \in G} \|\pi(x)\pi(y)\xi\| = \sup_{x \in G} \|\pi(xy)\xi\| = \sup_{z \in G} \|\pi(z)\xi\| = \|\|\xi\|\|.$$

Podobnost unitarni upodobitvi

V teoriji upodobitev grup igrajo glavno vlogo seveda unitarne upodobitve na Hilbertovem prostoru, predvsem zaradi tesne povezave s teorijo C^* -algeber. Zato je zaželjeno, če moremo povezati poljubne upodobitve dane grupe z unitarnimi.

Definicija 3. Naj bo G lokalno kompaktna grupa.

- (a) Upodobitvi π_1 in π_2 grupe G na Banachovem prostoru E sta si *podobni*, če obstaja tak obrnljiv operator $S \in B(E)$, da za vsak $x \in G$ velja $\pi_1(x) = S\pi_2(x)S^{-1}$.
- (b) Če je $E = \mathcal{H}$ Hilbertov prostor in je upodobitev π grupe G na \mathcal{H} podobna neki unitarni upodobitvi $\tilde{\pi}$ na \mathcal{H} , rečemo, da je upodobitev π *unitarizabilna*.

Odslej upodabljammo grupo G le na Hilbertovem prostoru. Unitarizabilna upodobitev je seveda enakomerno omejena, saj za vsak $x \in G$ velja $\|\pi(x)\| = \|S\tilde{\pi}(x)S^{-1}\| \leq \|S\|\|S^{-1}\|$. Ali je tudi, obratno, vsaka enakomerno omejena upodobitev π grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} unitarizabilna, tj. podobna neki unitarni upodobitvi? Nekaj časa je bilo to vprašanje odprto, čeprav so v posebnih primerih poznali (pozitiven) odgovor.

Zgled. Če je $T \in B(\mathcal{H})$ obrnljiv operator z lastnostjo $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty$, definira preslikava $n \mapsto T^n$ iz \mathbb{Z} v $B(\mathcal{H})$ enakomerno omejeno upodobitev celih števil. Že pred skoraj šestdeset leti je B. Sz.-Nagy dokazal, da je v tem primeru operator T podoben nekemu unitarnemu operatorju, kar pomeni, da je upodobitev $n \mapsto T^n$ podobna unitarni.

Ta zgled je zajet v naslednjem izreku.

Izrek 1. Vsaka enakomerno omejena upodobitev π lokalno kompaktna Abelove grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} je podobna unitarni.

Dokaz. Denimo, da je $\|\pi(x)\| \leq C$ za vsak $x \in G$. Potem je $\pi(x)^*\pi(x) \leq C^2I$ in zaradi

$$I = \pi(x)^*(\pi(x^{-1})^*\pi(x^{-1}))\pi(x) \leq C^2\pi(x)^*\pi(x)$$

tudi $C^{-2}I \leq \pi(x)^*\pi(x)$ za vsak $x \in G$. Če je $\mathcal{K} = \overline{\text{co}}\{\pi(x)^*\pi(x); x \in G\}$ (zaprtje v šibki operatorski topologiji), sledi odtod $C^{-2}I \leq T \leq C^2I$ za vsak $T \in \mathcal{K}$. V posebnem primeru je $\|T\| \leq C^2$ za vsak $T \in \mathcal{K}$. Ker so zaprte krogle v $B(\mathcal{H})$ kompaktne v šibki operatorski topologiji (glej npr. [3], str. 275), je kompaktna tudi \mathcal{K} kot šibko operatorsko zaprta podmnožica. Očitno je \mathcal{K} tudi konveksna množica.

Za vsak $x \in G$ in $T \in B(\mathcal{H})$ naj bo $\Phi_x(T) = \pi(x)^*T\pi(x)$. Potem je Φ_x v šibki operatorski topologiji zvezna linearna preslikava, ki ohranja množico \mathcal{K} . Ker je grupa G Abelova, te preslikave Φ_x , $x \in G$, med seboj komutirajo in lahko uporabimo izrek Markov-Kakutani, ki pove, da obstaja zanje skupna negibna točka, torej tak $T \in \mathcal{K}$, da je $\Phi_x(T) = T$ oziroma $\pi(x)^*T\pi(x) = T$ za vsak $x \in G$. Ker je $T \geq C^{-2}I$, je T obrnljiv pozitiven operator. Potem je tudi $S = T^{1/2}$ obrnljiv pozitiven operator. Iz enakosti $\pi(x)^*S^2\pi(x) = S^2$, ki je veljavna za vsak $x \in G$, sledi $(S\pi(x)S^{-1})^*(S\pi(x)S^{-1}) = I$ in tudi $(S\pi(x)S^{-1})(S\pi(x)S^{-1})^* = I$ (če x nadomestimo z x^{-1}). To pomeni, da je $S\pi(x)S^{-1}$ za vsak $x \in G$ unitaren operator in upodobitev π je podobna unitarni.

Amenabilnost

Abelove lokalno kompaktno grupe so amenabilne, zato morda ne preseneča naslednji izrek, ki ga je dokazal J. Dixmier leta 1955 in je najbolj splošen izrek te vrste.

Izrek 2. Če je lokalno kompaktna grupa G amenabilna, je vsaka enakomerno omejena upodobitev π na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} podobna unitarni.

Dokaz. Naj bo $C = \sup_{x \in G} \|\pi(x)\|$. Za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ definirajmo omejeno zvezno funkcijo $\phi_{\xi, \eta}$, definirano za vsak $x \in G$ s predpisom

$$\phi_{\xi, \eta}(x) = \langle \pi(x^{-1})\xi, \pi(x^{-1})\eta \rangle.$$

Potem zaradi krepke operatorske zveznosti upodobitve π velja $\phi_{\xi,\eta} \in C_b(G)$, saj imamo za vsak $x, y \in G$

$$\begin{aligned} |\phi_{\xi,\eta}(x) - \phi_{\xi,\eta}(y)| &= |\langle \pi(x^{-1})\xi, \pi(x^{-1})\eta \rangle - \langle \pi(y^{-1})\xi, \pi(y^{-1})\eta \rangle| \leq \\ &|\langle \pi(x^{-1})\xi, \pi(x^{-1})\eta \rangle - \langle \pi(x^{-1})\xi, \pi(y^{-1})\eta \rangle| + |\langle \pi(x^{-1})\xi, \pi(y^{-1})\eta \rangle - \langle \pi(y^{-1})\xi, \pi(y^{-1})\eta \rangle| \leq \\ &C\|\xi\|\|\pi(x^{-1})\eta - \pi(y^{-1})\eta\| + C\|\eta\|\|\pi(x^{-1})\xi - \pi(y^{-1})\xi\|. \end{aligned}$$

Naj bo m levo invariantna sredina na $C_b(G)$, ki obstaja zaradi amenabilnosti grupe G . Za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ postavimo

$$(3) \quad [\xi, \eta] = \langle \phi_{\xi,\eta}, m \rangle.$$

S tem definirana pozitivno semidefinitna sesquilinearna forma na \mathcal{H} . Videli bomo, da je celo pozitivno definitna, torej skalarni produkt. Za $\xi \in \mathcal{H}$ definirajmo

$$\|\xi\| = [\xi, \xi]^{1/2}.$$

Potem zaradi

$$[\xi, \xi] = \langle \phi_{\xi,\xi}, m \rangle \leq \|\phi_{\xi,\xi}\|_\infty \leq C^2\|\xi\|^2$$

velja $\|\xi\| \leq C\|\xi\|$. Iz

$$\|\xi\|^2 = \|\pi(x)\pi(x^{-1})\xi\|^2 \leq \|\pi(x)\|^2\phi_{\xi,\xi}(x) \leq C^2\phi_{\xi,\xi}(x)$$

za vsak $x \in G$ pa dobimo

$$\|\xi\|^2 = \|\xi\|^2\langle 1, m \rangle \leq C^2\langle \phi_{\xi,\xi}, m \rangle = C^2\|\xi\|^2$$

in zato velja tudi obratna neenakost $\|\xi\| \leq C\|\xi\|$. Med drugim to pomeni, da je forma (3) pozitivno definitna in $\|\cdot\|$ res norma. Poleg tega sta normi $\|\cdot\|$ in $\|\cdot\|$ ekvivalentni. Pozitivno definitni formi $[\cdot, \cdot]$ seveda pripada obrnljiv pozitiven operator $T \in B(\mathcal{H})$, tako da za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle T\xi, \eta \rangle = [\xi, \eta].$$

Če je $S = T^{1/2}$, je za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{H}$

$$(4) \quad \langle S\xi, S\eta \rangle = [\xi, \eta].$$

Nazadnje ugotovimo, da je za vsak $x \in G$ in $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ res

$$(5) \quad \phi_{\pi(x)\xi, \pi(x)\eta} = L_x\phi_{\xi,\eta}.$$

Za $y \in G$ namreč imamo

$$L_x\phi_{\xi,\eta}(y) = \langle \pi(y^{-1}x)\xi, \pi(y^{-1}x)\eta \rangle = \phi_{\pi(x)\xi, \pi(x)\eta}(y).$$

Potem pa je $S\pi(x)S^{-1}$ unitaren operator za vsak $x \in G$, saj za $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ ob upoštevanju (4) in (5) ter leve invariantnosti sredine m velja

$$\begin{aligned} \langle S\pi(x)S^{-1}\xi, S\pi(x)S^{-1}\eta \rangle &= [\pi(x)S^{-1}\xi, \pi(x)S^{-1}\eta] = \langle \phi_{\pi(x)S^{-1}\xi, \pi(x)S^{-1}\eta}, m \rangle = \\ &\langle L_x\phi_{S^{-1}\xi, S^{-1}\eta}, m \rangle = \langle \phi_{S^{-1}\xi, S^{-1}\eta}, m \rangle = [S^{-1}\xi, S^{-1}\eta] = \langle \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Opomba. Zgornji dokaz najdemo na str. 6 v knjigi [25]. Alternativni dokaz, bi potekal natanko tako kot dokaz izreka 1, le da bi ob zamenjavi x z x^{-1} (zato da bi dobili delovanje grupe na množici \mathcal{K}) namesto izreka Markov-Kakutani (dodatek C) uporabili Dayev izrek o negibni točki (izrek II.5.1).

Posledica. Vsaka upodobitev π kompaktne grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} je podobna unitarni.

Dokaz. Ker je po definiciji upodobitev π zvezna v krepki operatorski topologiji na $B(\mathcal{H})$ in je grupa G kompaktna, je za vsak $\xi \in \mathcal{H}$ tudi množica $\{\pi(x)\xi; x \in G\}$ kompaktna, torej omejena. Po principu enakomerne omejenosti je potem π enakomerno omejena upodobitev. Zaradi amenabilnosti grupe G je po izreku 2 podobna unitarni upodobitvi.

Brez pogoja amenabilnosti izrek 2 ne velja. Istega leta, kot je Dixmier dokazal izrek 2, sta Ehrenpreis in Mauntner našla protiprimer za grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Kasneje so odkrili tudi bolj preproste protiprimerne v zvezi s prosto grupo \mathbb{F}_2 z dvema generatorjema (glej [25]). (Spomnimo se, da niti $SL(2, \mathbb{R})$ niti \mathbb{F}_2 nista amenabilni grupi.) Torej je odgovor na prejšnje vprašanje v splošnem negativen. Pač pa je še vedno nerazrešeno naslednje vprašanje:

Ali mora biti grupa G amenabilna, če je vsaka njena enakomerno omejena upodobitev podobna unitarni?

Kljub precejšnjim naporom se je doslej raziskovalcem uspelo dokopati le do nekaterih delnih rezultatov v tej smeri. Nekatera dejstva kažejo na to, da bi odgovor utegnil biti pozitiven. Tako so npr. odkrili, da ima prosta grupa \mathbb{F}_2 z dvema generatorjema enakomerno omejeno upodobitev, ki **ni** podobna unitarni upodobitvi (glej [25]).

3. Upodobitve grupne algebre

Vrnimo se k unitarnim upodobitvam. Unitarni upodobitvi π lokalno kompaktne grupe G bomo priredili upodobitev grupne algebre v algebro $B(\mathcal{H}_\pi)$. Pri tem bomo za upodobitev algebre obdržali isto oznako kot za upodobitev grupe.

Definicija in osnovne lastnosti

Definicija 1. Za vsak $f \in L^1(G)$ definirajmo omejen linearen operator

$$\pi(f) = \int f(x)\pi(x)dx,$$

kjer operatorski integral razumemo v šibkem smislu, tj. za vsak par $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ velja $\langle \pi(f)u, v \rangle = \int f(x)\langle \pi(x)u, v \rangle dx$.

Iz definicije sledi, da je izraz $\langle \pi(f)u, v \rangle$ linearno odvisen od u in antilinear od v ter omejen: $|\langle \pi(f)u, v \rangle| \leq \|f\|_1 \|u\| \|v\|$, torej res določa omejen linearen operator $\pi(f)$ na \mathcal{H}_π , torej element algebre $B(\mathcal{H}_\pi)$. Njegovo normo lahko ocenimo z $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$.

Zgled. Naj bo π_L leva regularna upodobitev grupe G na prostoru $L^2(G)$, tj. $\pi_L(x) = L_x$. Tedaj za vsak $f \in L^1(G)$ in $g \in L^2(G)$ velja $\pi_L(f)g = \int f(x)\pi_L(x)gdx = \int f(x)L_x gdx = f * g \in L^2(G)$.

Iz prvega poglavja (glej izrek II.1.2) vemo, da je $L^1(G)$ involutivna Banachova algebra za konvolucijo in involucijo, dano z definicijama II.1.4 in II.1.5. Isto velja za algebro $B(\mathcal{H}_\pi)$ za običajno množenje (superpozicijo) operatorjev in involucijo, dano z adjungiranjem.

Pokažimo zdaj, da je preslikava $f \mapsto \pi(f)$ iz $L^1(G)$ v $B(\mathcal{H})$ homomorfizem involutivnih Banachovih algeber. V tem primeru rečemo, da gre za involutivno upodobitev ali *-upodobitev. Upodobitev je *neizrojena* (*nedegenerirana*), če iz dejstva, da je $\pi(f)u = 0$ za vsak $f \in L^1(G)$, sledi $u = 0$.

Izrek 1. Naj bo π unitarna upodobitev grupe G . Preslikava $f \mapsto \pi(f)$ je neizrojena zvezna *-upodobitev grupne algebre $L^1(G)$ na prostoru \mathcal{H}_π . Pri tem za $x \in G$ in $f \in L^1(G)$ velja:

$$\pi(x)\pi(f) = \pi(L_x f) \quad \text{in} \quad \pi(f)\pi(x) = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}} f).$$

Dokaz. Preslikava $f \mapsto \pi(f)$ je linearna in zvezna zaradi naslednje preproste ocene $\|\pi(f) - \pi(f_0)\| = \|\pi(f - f_0)\| \leq \|f - f_0\|_1$. Za vsak $f, g \in L^1(G)$ velja (v šibkem smislu)

$$\begin{aligned}\pi(f * g) &= \int (f * g)(x)\pi(x)dx = \int \left(\int f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)dy \right) dx = \\ &= \int f(y) \left(\int g(y^{-1}x)\pi(x)dx \right) dy = \int f(y)\pi(y) \left(\int g(x)\pi(x)dx \right) dy = \pi(f)\pi(g)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\pi(f^*) &= \int f^*(x)\pi(x)dx = \int \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\pi(x)dx = \\ &= \int \overline{f(x)}\pi(x^{-1})dx = \left(\int f(x)\pi(x)dx \right)^* = \pi(f)^*.\end{aligned}$$

Poleg tega za vsak $x \in G, f \in L^1(G)$ velja tudi

$$\begin{aligned}\pi(x)\pi(f) &= \int f(y)\pi(x)\pi(y)dy = \int f(y)\pi(xy)dy = \\ &= \int f(x^{-1}y)\pi(y)dy = \int L_x f(y)\pi(y)dy = \pi(L_x f)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(x) &= \int f(y)\pi(y)\pi(x)dy = \int f(y)\pi(yx)dy = \Delta(x^{-1}) \int f(yx^{-1})\pi(y)dy = \\ &= \Delta(x^{-1}) \int R_{x^{-1}} f(y)\pi(y)dy = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}} f).\end{aligned}$$

Pokažimo še, da je upodobitev π neizrojena. Če je $u \in \mathcal{H}_\pi$ od nič različen vektor, obstaja zaradi krepke zveznosti upodobitve π taka kompaktna okolica V enote $1 \in G$, da je $\|\pi(x)u - u\| < \|u\|$ za vsak $x \in V$. Naj bo $f = \chi_V/|V|$. Tedaj je $f \in L^1(G)$ in

$$\begin{aligned}\|\pi(f)u - u\| &= \left\| \int f(x)\pi(x)u dx - \frac{u}{|V|} \int_V dx \right\| = \\ &= \frac{1}{|V|} \left\| \int_V (\pi(x)u - u) dx \right\| \leq \frac{1}{|V|} \int_V \|\pi(x)u - u\| dx < \|u\|.\end{aligned}$$

Torej velja tudi $\pi(f)u \neq 0$ in upodobitev je neizrojena.

Vzajemna določenost

Unitarni upodobitvi grupe smo priredili neizrojeno *-upodobitev grupne algebre. Naslednji rezultat pove, da lahko vse neizrojene *-upodobitve grupne algebre dobimo na ta način.

Izrek 2. *Poljubna neizrojena *-upodobitev π grupne algebre $L^1(G)$ na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} izhaja iz (natanko določene) unitarne upodobitve π grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} , tako da velja $\pi(f) = \int f(x)\pi(x)dx$.*

Dokaz. Ideja dokaza je v tem, da skušamo $\pi(x)$ izraziti kot limito $\lim \pi(f)$, ko $f \rightarrow \delta_x$ v določenem smislu. Ker to ne gre direktno, je potrebna večja previdnost.

Naj bo $\{u_\alpha\}$ aproksimativna enota v L^1 (glej razdelek II.2). Vemo, da za $f \in L^1(G)$ velja $u_\alpha * f \rightarrow f$ v $L^1(G)$ in zato tudi $L_x u_\alpha * f = L_x(u_\alpha * f) \rightarrow L_x f$ v $L^1(G)$ za vsak $x \in G$. Torej velja za vsak $x \in G, v \in \mathcal{H}$ tudi

$$(1) \quad \pi(L_x u_\alpha)\pi(f)v \rightarrow \pi(L_x f)v.$$

Prepričajmo se, da je množica $\mathcal{D} = \text{span}\{\pi(f)v; f \in L^1(G), v \in \mathcal{H}\}$ gost podprostor v \mathcal{H} . Če je $u \perp \mathcal{D}$, je $0 = \langle u, \pi(f)v \rangle = \langle \pi(f^*)u, v \rangle$ za vsak $f \in L^1(G)$ in $v \in \mathcal{H}$, torej $\pi(f^*)u = 0$ za vsak f in zaradi neizrojenosti upodobitve π tudi $u = 0$. To pomeni, da je \mathcal{D} gost podprostor v \mathcal{H} . Na \mathcal{D} lahko za vsak $x \in G$ definiramo linearen operator $\tilde{\pi}(x)$,

tako da najprej postavimo $\tilde{\pi}(x)\pi(f)v = \pi(L_x f)v$ in potem $\tilde{\pi}(x)$ linearno razširimo na ves \mathcal{D} . Ta operator je dobro definiran, saj iz $\sum_j \pi(f_j)v_j = 0$ sledi

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(x) \sum_j \pi(f_j)v_j &= \sum_j \pi(L_x f_j)v_j = \lim_{\alpha} \sum_j \pi(L_x u_{\alpha})\pi(f_j)v_j = \\ &= \lim_{\alpha} \pi(L_x u_{\alpha}) \sum_j \pi(f_j)v_j = 0.\end{aligned}$$

Poleg tega zadošča oceni

$$\begin{aligned}\|\tilde{\pi}(x) \sum_j \pi(f_j)v_j\| &= \lim_{\alpha} \|\pi(L_x u_{\alpha}) \sum_j \pi(f_j)v_j\| \leq \\ &= \sup_{\alpha} \|\pi(L_x u_{\alpha})\| \|\sum_j \pi(f_j)v_j\| \leq \|\sum_j \pi(f_j)v_j\|.\end{aligned}$$

Torej je $\|\tilde{\pi}(x)\| \leq 1$, zato lahko $\tilde{\pi}(x)$ po zveznosti enolično razširimo na ves prostor \mathcal{H} , tako da bo še vedno veljalo $\|\tilde{\pi}(x)\| \leq 1$ in $\tilde{\pi}(x)\pi(f) = \pi(L_x f)$ (tudi razširitev označimo enako).

Pokažimo, da je $\tilde{\pi}$ unitarna upodobitev grupe G na prostoru \mathcal{H} . Najprej je

$$\tilde{\pi}(xy)\pi(f) = \pi(L_{xy}f) = \pi(L_x L_y f) = \tilde{\pi}(x)\pi(L_y f) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)\pi(f),$$

torej $\tilde{\pi}(xy) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)$ na \mathcal{D} , torej na \mathcal{H} . Poleg tega je $\tilde{\pi}(1)\pi(f) = \pi(L_1 f) = \pi(f)$, se pravi $\tilde{\pi}(1) = I$. Odtod sledi, da je $\tilde{\pi}$ homomorfizem v grupo obrnljivih operatorjev. Zaradi

$$\|u\| = \|\tilde{\pi}(x^{-1})\tilde{\pi}(x)u\| \leq \|\tilde{\pi}(x)u\| \leq \|u\|$$

za vsak $u \in \mathcal{H}$ je $\tilde{\pi}(x)$ surjektivna izometrija, torej unitaren operator na \mathcal{H} . Če $x_{\alpha} \rightarrow x$ v G , velja $L_{x_{\alpha}} f \rightarrow L_x f$ v $L^1(G)$ za vsak $f \in L^1(G)$ (primerjaj trditev II.2.3). Torej velja tudi

$$\tilde{\pi}(x_{\alpha})\pi(f) = \pi(L_{x_{\alpha}} f) \rightarrow \pi(L_x f) = \tilde{\pi}(x)\pi(f)$$

v krepki operatorski topologiji na \mathcal{H} . To pomeni, da velja $\tilde{\pi}(x_{\alpha}) \rightarrow \tilde{\pi}(x)$ v krepki operatorski topologiji na \mathcal{D} in zaradi omejenosti operatorjev tudi na \mathcal{H} . Torej je preslikava $\tilde{\pi} : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ zvezna, če v kodomeni uporabimo krepko operatorsko topologijo.

Iz neizrojene upodobitve π grupne algebre $L^1(G)$ smo dobili unitarno upodobitev $\tilde{\pi}$ grupe G . Na običajen način ji lahko priredimo upodobitev grupne algebre:

$$\tilde{\pi}(f) = \int f(x)\tilde{\pi}(x)dx$$

za vsak $f \in L^1(G)$. Pokažimo, da se $\tilde{\pi}(f)$ ujema z $\pi(f)$. Če sta $f, g \in L^1(G)$, je njuna konvolucija enaka $f * g = \int f(y)L_y g dy$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\pi(f)\pi(g) &= \pi(f * g) = \int f(y)\pi(L_y g)dy = \int f(y)\tilde{\pi}(y)\pi(g)dy = \\ &= \int f(y)\tilde{\pi}(y)dy\pi(g) = \tilde{\pi}(f)\pi(g).\end{aligned}$$

To velja za vsak g , torej je res $\pi(f) = \tilde{\pi}(f)$ na \mathcal{H} .

Nazadnje se prepričajmo še o enoličnosti unitarne upodobitve grupe, ki določa upodobitev grupne algebre. Denimo, da je π_1 druga unitarna upodobitev grupe G , tako da je $\pi_1(f) = \pi(f)$ za vsak $f \in L^1(G)$. Za vsak $u, v \in \mathcal{H}$ je

$$\int f(x)\langle \pi_1(x)u, v \rangle dx = \int f(x)\langle \pi(x)u, v \rangle dx$$

oziroma $\int f(x)\langle (\pi_1(x) - \pi(x))u, v \rangle dx = 0$ za vsak f . Sledi $\langle (\pi_1(x) - \pi(x))u, v \rangle = 0$ za vsak $u, v \in \mathcal{H}$, saj je to zvezna in omejena funkcija na G . Torej velja $\pi_1(x) = \pi(x)$ za vsak $x \in G$.

Primerjava upodobitev grupe in algebre

Izrek 3. Naj bo π unitarna upodobitev grupe G .

- (a) C^* -algebra, generirana z $\pi(G)$, ima isto šibko oziroma krepko operatorsko zaprtje kot C^* -algebra, generirana z $\pi(L^1(G))$.
 (b) Operator $T \in B(\mathcal{H}_\pi)$ pripada komutantu $C(\pi)$ natanko takrat, ko velja $T\pi(f) = \pi(f)T$ za vsak $f \in L^1(G)$.
 (c) Zaprt podprostor $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_\pi$ je invarianten za π natanko takrat, ko velja $\pi(f)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ za vsak $f \in L^1(G)$.

Dokaz. (a) Če je $g \in C_c(G)$, je $\pi(g)$ krepka limita vsot oblike

$$s(E) = \sum_j g(x_j)\pi(x_j)|E_j|,$$

kjer je $E = \{E_j\}$ končna particija kompaktne množice $\text{supp } g$ in je $x_j \in E_j$ za vsak j .

Res, izberimo $\epsilon > 0$ in $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{H}_\pi$. Za vsak m je preslikava $x \mapsto g(x)\pi(x)u_m$ enakomerno zvezna funkcija na $\text{supp } g$. Za vsak $x \in \text{supp } g$ je

$$V_x = \{y \in G; \|g(x)\pi(x)u_k - g(y)\pi(y)u_k\| < \epsilon/2, k = 1, 2, \dots, n\}$$

odprta okolica točke x . Družina $\{V_x\}$ pokriva $\text{supp } g$ in zaradi kompaktnosti zadošča končno podpokritje: $\text{supp } g \subset \cup_j V_{x_j}$.

Unijo napravimo disjunktno in jo presekaemo z $\text{supp } g$, tako da dobimo končno particijo $E = \{E_j\}$ množice $\text{supp } g$. Za katerikoli točki $x, y \in E_i$ iz iste množice velja

$$\|g(x)\pi(x)u_k - g(y)\pi(y)u_k\| \leq$$

$$\|g(x)\pi(x)u_k - g(x_i)\pi(x_i)u_k\| + \|g(x_i)\pi(x_i)u_k - g(y)\pi(y)u_k\| < \epsilon$$

za vsak $k = 1, 2, \dots, n$. Potem je

$$\begin{aligned} \|s(E)u_k - \pi(g)u_k\| &= \left\| \sum_j g(x_j)\pi(x_j)u_k|E_j| - \int g(x)\pi(x)u_k dx \right\| = \\ &\left\| \sum_j \int_{E_j} g(x_j)\pi(x_j)u_k dx - \sum_j \int_{E_j} g(x)\pi(x)u_k dx \right\| \leq \\ &\sum_j \int_{E_j} \|g(x_j)\pi(x_j)u_k - g(x)\pi(x)u_k\| dx < \epsilon|\text{supp } g| \end{aligned}$$

za vsak $k = 1, 2, \dots, n$. Torej vsaka okolica (v krepki operatorski topologiji) za $\pi(g)$ vsebuje Riemannovo vsoto $s(E)$.

Vsako funkcijo $f \in L^1(G)$ lahko poljubno natančno aproksimiramo s funkcijo $g \in C_c(G)$, torej lahko v krepki operatorski topologiji poljubno natančno aproksimiramo tudi $\pi(f)$ z operatorjem $\pi(g)$. Ker pa je $\pi(g)$ krepka operatorska limita Riemannovih vsot $s(E)$ in so te vsote v C^* -algebri, generirani s $\pi(G)$, je vsak $\pi(f)$ v krepkem operatorskem zaprtju množice (algebre) $\text{span } \pi(G)$. V dokazu izreka 2 smo videli tudi obratno: vsak $\pi(x)$ za $x \in G$ je krepka limita operatorjev oblike $\pi(L_x u_\alpha)$, torej v krepkem operatorskem zaprtju algebre $\pi(L^1(G))$. To pomeni, da imata obe C^* -algebri, tista, generirana s $\pi(G)$, in tista, generirana s $\pi(L^1(G))$, isto krepko (in zato tudi šibko) operatorsko zaprtje.

(b) Če je $T \in C(\pi)$, komutira T z vsemi operatorji $\pi(x)$, $x \in G$, torej tudi z vsemi iz krepkega (oziroma šibkega) operatorskega zaprtja algebre, generirane s $\pi(G)$. Torej komutira po točki (a) tudi z vsemi operatorji $\pi(f)$, $f \in L^1(G)$. Obratno sklepamo na podoben način.

(c) Iz trditve 1.4 vemo, da je \mathcal{M} invarianten podprostor v \mathcal{H}_π natanko takrat, ko ortogonalni projektor P , ki projicira na \mathcal{M} , pripada komutantu $C(\pi)$, torej po točki (b) natanko takrat, ko je $P\pi(f) = \pi(f)P$ za vsak $f \in L^1(G)$. To pomeni, natanko takrat, ko je $\pi(f)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ za vsak $f \in L^1(G)$, kar je bilo treba dokazati.

Grupna C^* -algebra

C^* -algebro, generirano s $\pi(L^1(G))$, bomo na kratko označevali z $C_\pi^*(G)$. Torej je $C_\pi^*(G)$ zaprtje algebre $\pi(L^1(G))$ v algebri operatorjev $B(\mathcal{H}_\pi)$. V posebnem primeru, ko je $\pi = \pi_L$ leva regularna upodobitev grupe G na prostoru $L^2(G) = L^2(G, \lambda)$ z levo Haarovo mero, pišimo kar $C_L^*(G)$ namesto $C_{\pi_L}^*(G)$. Tej C^* -algebri damo posebno ime.

Definicija 2. C^* -algebro $C_L^*(G)$ imenujemo *reducirano C^* -algebra* lokalno kompaktnne grupe G oziroma *reducirano grupno C^* -algebra*.

Norma v C^* -algebri $C_L^*(G)$ je operatorska norma, podedovana iz $B(L^2(G))$, in jo je zato relativno preprosto izračunati. Zaradi posebne vloge leve regularne upodobitve je reducirana grupna C^* -algebra dovolj pomembna in za uporabo koristna.

Definicija 3. Za vsak $f \in L^1(G)$ definirajmo

$$(2) \quad \|f\|_{C^*(G)} = \sup_{\pi} \|\pi(f)\|,$$

kjer je na desni operatorska norma v $B(\mathcal{H}_\pi)$, supremum pa vzamemo po vseh neizrojenih $*$ -upodobitvah grupne algebre $L^1(G)$. Napolnitev v normi $\|\cdot\|_{C^*(G)}$ na $L^1(G)$, ki je manjša od norme $\|\cdot\|_1$, je t.i. *C^* -algebra grupe G oziroma grupna C^* -algebra*. Označimo jo z $C^*(G)$.

Da je z (2) res definirana norma na $L^1(G)$, ne le seminorma, sledi iz preproste ocene $\|\pi_L(f)\| \leq \|f\|_{C^*(G)}$ in dejstva, da je $\pi_L(f)g = f * g$ za $f \in L^1(G)$ in $g \in L^2(G)$, tako da iz $f * g = 0$ za vsak $g \in L^2(G)$ sklepamo $f = 0$ (za g lahko vzamemo elemente približne enote $u_\alpha \in C_c(G)$). Zaradi izreka 2 bi lahko supremum v definiciji 3 vzeli tudi po vseh unitarnih upodobitvah grupe G . Za vsako unitarno upodobitev π velja $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C^*(G)}$, zato je zvezna glede na C^* -normo v $C^*(G)$.

Množenje (konvolucijo) elementa $f \in C^*(G)$ z elementom $g \in L^1(G)$ definiramo s predpisom $f * g = \lim_n f_n * g$, če $f_n \in L^1(G)$ in $f_n \rightarrow f$ v $C^*(G)$, saj je hkrati z (f_n) tudi $(f_n * g)$ Cauchyjevo zaporedje v normi $\|\cdot\|_{C^*(G)}$. Podobno potem za $f, g \in C^*(G)$ postavimo $f * g = \lim_n f * g_n$, če tudi $g_n \rightarrow g$, $g_n \in L^1(G)$. Involucijo seveda uvedemo s predpisom $f^* = \lim_n f_n^*$, če $f = \lim_n f_n \in C^*(G)$.

Vsako neizrojeno $*$ -upodobitev π grupne algebre lahko iz $L^1(G)$ enolično razširimo do neizrojene $*$ -upodobitve $\tilde{\pi}$ grupne C^* -algebre $C^*(G)$, tako da postavimo $\tilde{\pi}(f) = \lim_n \pi(f_n)$, če $f_n \in L^1(G)$ in $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) v napolnitvi. Preslikava $\tilde{\pi} : C^*(G) \rightarrow C_\pi^*(G)$ je dobro definirana, saj iz $f_n \rightarrow f$ in $g_n \rightarrow g$ v $C^*(G)$ sledi $f_n - g_n \rightarrow 0$ v $C^*(G)$ in zato tudi $\pi(f_n) - \pi(g_n) \rightarrow 0$ v $C_\pi^*(G)$. Prav tako vidimo, da je $\tilde{\pi}$ involutivni homomorfizem C^* -algeber, saj je

$$\tilde{\pi}(f * g) = \lim_m \lim_n \pi(f_m * g_n) = \lim_m \lim_n \pi(f_m)\pi(g_n) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$$

in

$$\tilde{\pi}(f^*) = \lim_n \pi(f_n^*) = \lim_n \pi(f_n)^* = \tilde{\pi}(f)^*.$$

Seveda je $\tilde{\pi}(f) = \pi(f)$, če je $f \in L^1(G)$.

Tako kot so se lastnosti unitarne upodobitve grupe G odražale na upodobitvi grupne algebre $L^1(G)$, se tudi lastnosti upodobitve grupne algebre $L^1(G)$ prenesejo na upodobitev grupne C^* -algebre $C^*(G)$. V resnici sta obe teoriji upodobitev, za $L^1(G)$ in za $C^*(G)$, enakovredni (glej [8], chap. 13).

Šibka vsebovanost

V zvezi z razširitvami upodobitev na grupno C^* -algebro $C^*(G)$ bomo uvedli še pomemben pojem šibke vsebovanosti. Potrebujemo pa neko splošno lemo o omejenih pozitivnih

funkcionalih na C^* -algebri \mathcal{A} operatorjev na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Poseben primer takih funkcionalov je podan z vektorjem $\xi \in \mathcal{H}$, namreč preslikava $a \mapsto \langle a\xi, \xi \rangle$, $a \in \mathcal{A}$. Končne vsote takih funkcionalov, torej funkcionalne oblike $\psi(a) = \sum_{i=1}^k \langle a\xi_i, \xi_i \rangle$, $a \in \mathcal{A}$, imenujemo včasih *naravni funkcionali* na algebri \mathcal{A} . Hitro vidimo, da je $\|\psi\| = \sum_{i=1}^k \|\xi_i\|^2$.

Lema 1. *Naj bo \mathcal{A} C^* -algebra operatorjev na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Vsak omejen pozitiven linearen ϕ na algebri \mathcal{A} je v šibkem- $*$ zaprtju množice naravnih funkcionalov ψ z lastnostjo $\|\psi\| \leq \|\phi\|$.*

Dokaz. Dovolj je lemo dokazati v primeru $\|\phi\| = 1$. Pozitivne funkcionalne na \mathcal{A} opazujemo le na realnem Banachovem prostoru \mathcal{A}_s vseh sebiadjungiranih elementov v \mathcal{A} . Množica N vseh naravnih funkcionalov ψ z lastnostjo $\|\psi\| \leq 1$ je konveksna množica, ki vsebuje 0. Njena predpolara je ${}^0N = \{a \in \mathcal{A}_s; \psi(a) \geq -1 \text{ za } \psi \in N\}$ vsebuje vse elemente $a \in \mathcal{A}_s$, katerih negativni del a_- zadošča oceni $\|a_-\| \leq 1$, saj za $a = a_+ - a_-$ velja

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \sum_{i=1}^k \langle a\xi_i, \xi_i \rangle = \sum_{i=1}^k \langle a_+\xi_i, \xi_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle a_-\xi_i, \xi_i \rangle \geq - \sum_{i=1}^k \langle a_-\xi_i, \xi_i \rangle \geq \\ & -\|a_-\| \sum_{i=1}^k \|\xi_i\|^2 \geq -\|\psi\| \geq -1. \end{aligned}$$

Po drugi strani ne vsebuje nobenega drugega elementa, saj mora za vsak $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| \leq 1$ veljati $\langle a\xi, \xi \rangle \geq -1$ in v posebnem primeru tudi za vsak $\xi \in P_-\mathcal{H}$, $\|\xi\| \leq 1$, kjer je P_- spektralni projektor na negativni del operatorja a . Tedaj dobimo $-\langle a_-\xi, \xi \rangle \geq -1$ oziroma $0 \leq \langle a_-\xi, \xi \rangle \leq 1$ in zato $\|a_-\| \leq 1$.

Odtod potem sledi, da bipolara $({}^0N)^0 = \{\psi \in \mathcal{A}_s^*; \psi(a) \geq -1 \text{ za } a \in {}^0N\}$ vsebuje natanko vse pozitivne linearne funkcionalne na \mathcal{A}_s , saj je za $\psi \geq 0$ in $\|\psi\| \leq 1$ vedno res

$$\psi(a) = \psi(a_+) - \psi(a_-) \geq -\psi(a_-) \geq -\|\psi\|\|a_-\| \geq -1.$$

Toda po izreku o bipolaritvi (glej [6], točka (8) na str. 20) je bipolara $({}^0N)^0$ enaka ravno šibkem- $*$ zaprtju množice N . Ker je vsak linearen funkcional na \mathcal{A} natanko določen s svojimi vrednostmi na sebi adjungiranem delu \mathcal{A}_s , je dokaz končan.

Vsaki upodobitvi π lahko pri poljubnem vektorju $\xi \in \mathcal{H}$ priredimo funkcional $\phi_{\pi, \xi}$ na $C^*(G)$ s predpisom ($f \in C^*(G)$)

$$\phi_{\pi, \xi}(f) = \langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle.$$

ta funkcional je omejen z normo $\|\phi_{\pi, \xi}\| = \|\xi\|^2$ zaradi ocene

$$|\phi_{\pi, \xi}(f)| \leq \|\tilde{\pi}(f)\|\|\xi\|^2 \leq \|f\|_{C^*(G)}\|\xi\|^2$$

in konvergence

$$\phi_{\pi, \xi}(u_\alpha) = \langle \tilde{\pi}(u_\alpha)\xi, \xi \rangle \rightarrow \langle \xi, \xi \rangle,$$

kjer je (u_α) približna enota v $L^1(G)$ (primerjaj dokaz izreka 2). Poleg tega je pozitiven zaradi

$$\phi_{\pi, \xi}(f^* * f) = \langle \tilde{\pi}(f^* * f)\xi, \xi \rangle = \langle \tilde{\pi}(f^*)\tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle = \|\tilde{\pi}(f)\xi\|^2 \geq 0.$$

Trditev 1. *Naj bo G lokalno kompaktna grupa, π in π_1 njeni unitarni upodobitvi. Potem je ekvivalentno:*

- (i) Vsak pozitiven funkcional na $C^*(G)$ oblike $\phi_{\pi, \xi}$ je v šibkem- $*$ zaprtju množice končnih vsot $\phi_1 = \sum_{i=1}^k \phi_{\pi_1, \xi_i}$ pozitivnih funkcionalov na $C^*(G)$, pri čemer je $\|\phi_1\| \leq \|\phi_{\pi, \xi}\|$.
- (ii) Za vsak $f \in C^*(G)$ iz $\tilde{\pi}_1(f) = 0$ sledi $\tilde{\pi}(f) = 0$.
- (iii) Za vsak $f \in C^*(G)$ velja $\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \|\tilde{\pi}_1(f)\|$.
- (iv) Obstaja zvezen $*$ -homomorfizem $h : C_{\pi_1}^*(G) \rightarrow C_{\pi}^*(G)$ z lastnostjo $h(\tilde{\pi}_1(f)) = \tilde{\pi}(f)$ za vsak $f \in C^*(G)$.

Dokaz. Iz (iv) sledi (iii), ker je vsak *-homomorfizem C^* -algeber kontraktiven. Po drugi strani velja (iii) \implies (iv), saj lahko pri pogoju (iii) naravno definiramo h s predpisom $h : \tilde{\pi}_1(f) \mapsto \tilde{\pi}(f)$. Implikacija (iii) \implies (ii) je trivialna. Če velja (ii), je $\phi_{\pi,\xi}(f) = 0$ za vsak $f \in \ker \tilde{\pi}_1$. Zato funkcional $\phi_{\pi,\xi}$ inducira zvezen pozitiven funkcional $\phi'_{\pi,\xi}$ na C^* -algebri $\tilde{\pi}_1(C^*(G)) \cong C^*(G)/\ker \tilde{\pi}_1$. Po lemi 1 lahko funkcional $\phi'_{\pi,\xi}$ v šibki- $*$ topologiji poljubno natančno aproksimiramo s končnimi vsotami oblike $\psi' = \sum_{i=1}^k \langle \cdot, \xi'_i, \xi'_i \rangle$, pri čemer je $\|\psi'\| \leq \|\phi'_{\pi,\xi}\|$. Potem pa lahko tudi sam funkcional $\phi_{\pi,\xi}$ v šibki- $*$ topologiji poljubno natančno aproksimiramo s končnimi vsotami oblike $\phi_1 = \sum_{i=1}^k \phi_{\pi',\xi'_i}$, pri čemer je $\|\psi\| \leq \|\phi_{\pi,\xi}\|$. Torej velja tudi (i).

Nazadnje pokažimo, da iz (i) sledi (iii). Naj bo $f \in C^*(G)$ pozitiven element. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\|\xi\| = 1$, tako da velja $\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle \geq \|\tilde{\pi}(f)\| - \epsilon/2$. Zaradi pogoja (i) obstajajo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathcal{H}_{\pi'}$, tako da je $\sum_{i=1}^k \|\xi_i\|^2 = 1$ in $|\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle - \sum_{i=1}^k \langle \tilde{\pi}_1(f)\xi_i, \xi_i \rangle| < \epsilon/2$. Ker je $\sum_{i=1}^k \langle \tilde{\pi}_1(f)\xi_i, \xi_i \rangle \leq \|\tilde{\pi}_1(f)\|$, imamo tudi $\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle \leq \|\tilde{\pi}_1(f)\| + \epsilon/2$. Za vsak ϵ torej sledi $\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \langle \tilde{\pi}(f)\xi, \xi \rangle + \epsilon/2 \leq \|\tilde{\pi}_1(f)\| + \epsilon$, se pravi, da velja (iii).

Definicija 4. Naj bosta π in π_1 poljubni unitarni upodobitvi lokalno kompaktne grupe G , ne nujno na istem Hilbertovem prostoru. Rečemo, da je upodobitev π *šibko vsebovana* v upodobitvi π_1 , če velja katerikoli pogoj (i),(ii),(iii) ali (iv) iz trditve 1.

Šibko vsebovanost povežimo z obema grupnima C^* -algebrama.

Trditev 2. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in π_L njena leva regularna upodobitev. Potem velja $C^*(G) \cong C_L^*(G)$ (izometrično) natanko takrat, ko je vsaka unitarna upodobitev π šibko vsebovana v π_L .

Dokaz. Naj velja $C^*(G) \cong C_L^*(G)$ izometrično. Potem je $\|\pi_L(f)\| = \|f\|_{C^*(G)} \geq \|\pi(f)\|$ za vsak $f \in L^1(G)$ in poljubno unitarno upodobitev π . Zato velja tudi $\|\tilde{\pi}_L(f)\| = \lim_n \|\pi_L(f_n)\| \geq \lim_n \|\pi(f_n)\| = \|\tilde{\pi}(f)\|$ za vsak $f = \lim_n f_n \in C^*(G)$. Po definiciji 4 in točki (iii) trditve 1 je torej upodobitev π šibko vsebovana v levi regularni upodobitvi π_L .

Obratno, iz šibke vsebovanosti upodobitve π v levi regularni upodobitvi π_L sledi po definiciji 4 in točki (iii) trditve 1 neenakost $\|\tilde{\pi}(f)\| \leq \|\tilde{\pi}_L(f)\|$ za vsak $f \in C^*(G)$. Torej velja tudi $\|f\|_{C^*(G)} \leq \|\tilde{\pi}_L(f)\|$ za vsak $f \in C^*(G)$. Obratna neenakost je vedno res in imamo izometrični izomorfizem med $C^*(G)$ in $C_L^*(G)$.

V čem je smisel in pomen šibke vsebovanosti dane unitarne upodobitve v levi regularni upodobitvi? Od prej vemo, da je pomembno poiskati dekompozicijo dane unitarne upodobitve v nerazcepne upodobitve največkrat v obliki direktnega integrala. Unitarne upodobitve, ki so šibko vsebovane v π_L , so sestavljene samo iz tistih nerazcepnih upodobitev, ki so podupodobitve v π_L , in obratno. Rečemo, da tvorijo t.i. "glavno serijo" upodobitev, medtem ko sestavljajo vse druge upodobitve t.i. "komplementarno serijo" upodobitev.

Tiste lokalno kompaktne grupe, pri katerih so vse upodobitve iz "glavne serije", se posebej odlikujejo. Včasih so rekli, da imajo lastnost (R) (regularnost). Presenetljivo in pomembno je dejstvo, da se ujemajo ravno z amenabilnimi grupami. R. Godement in A. Hulanicki sta namreč dokazala naslednji izrek (za skico dokaza glej [14]).

Izrek 4. Naj bo G lokalno kompaktna grupa. Naslednje trditve so ekvivalentne:

- (i) Grupa G je amenabilna.
- (ii) Vsaka nerazcepna unitarna upodobitev grupe G je šibko vsebovana v levi regularni upodobitvi π_L .
- (iii) Trivialna upodobitev grupe G na enorazsežnem prostoru \mathbb{C} je šibko vsebovana v levi regularni upodobitvi π_L .

Naj omenimo, da je trivialna upodobitev tista upodobitev π_0 , ki vse grupne elemente preslika v identični operator na enorazsežnem prostoru \mathbb{C} , torej za vsak $x \in G$ velja $\pi_0(x) = 1$.

Če upoštevamo, da je vsaka unitarna upodobitev direktni integral nerazcepnih (glej izrek 4 v dodatku D) in da je hkrati z njimi tudi direktni integral sam šibko vsebovan v levi regularni upodobitvi, imamo z uporabo trditve 2 in izreka 4 tako še eno karakterizacijo amenabilne grupe.

Posledica. *Lokalno kompaktna grupa G je amenabilna natanko takrat, ko je $C^*(G) \cong C_L^*(G)$.*

4. Funkcije pozitivnega tipa

Ta razred funkcij smo že spoznali v primeru, kadar je grupa G Abelova (glej definicijo III.1.4). Ista definicija velja tudi v nekomutativnem primeru v obeh različicah. Ponovimo:

Definicija 1. Funkcija $\phi \in L^\infty(G)$ je pozitivnega tipa, če za vsak $f \in L^1(G)$ velja

$$\int_G \phi(x)(f^* * f)(x)dx \geq 0 \quad \text{oz} \quad \int \int f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy \geq 0.$$

Zdaj moramo seveda upoštevati involucijo funkcije f v obliki $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ za vsak $x \in G$ in ustrezno formulo za zamenjavo spremenljivk $x \mapsto x^{-1}$.

Funkcije pozitivnega tipa bomo v nadaljevanju karakterizirali na različne načine in jih povezali z nerazcepnimi upodobitvami lokalno kompaktne grupe. Končni cilj razdelka je pokazati, da je nerazcepnih upodobitev dovolj.

Osnovne lastnosti

Za zvezne funkcije pozitivnega tipa bomo uporabljali oznako $\mathcal{P}(G)$ oziroma na kratko \mathcal{P} . Najprej pokažimo, da je množica \mathcal{P} konveksen stožec, zaprt za konjugiranje.

Trditev 1. *Naj bosta $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ in $\alpha, \beta \geq 0$. Potem je*

- (a) $\alpha\phi + \beta\psi \in \mathcal{P}$,
- (b) $\overline{\phi} \in \mathcal{P}$.

Dokaz. Točka (a) velja za pojubno (ne nujno zvezno) funkcijo pozitivnega tipa in je trivialna posledica ene ali druge definicije.

(b) Zaprtost za konjugiranje tudi velja za splošne funkcije pozitivnega tipa. Če upoštevamo, da je

$$\overline{f^*}(x) = \Delta(x^{-1})\overline{\overline{f(x^{-1})}} = \Delta(x^{-1})f(x^{-1}) = \overline{f^*(x)}$$

za vsak $x \in G$, imamo

$$\begin{aligned} \int (f^* * f)(x)\overline{\phi}(x)dx &= \int \int f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy = \\ &= \overline{\int \int \overline{f(x)}f(y)\phi(y^{-1}x)dxdy} = \int (\overline{f^*} * \overline{f})(x)\phi(x)dx \geq 0. \end{aligned}$$

Trditev 2. *Naj bo π unitarna upodobitev grupe G in $u \in \mathcal{H}_\pi$.*

- (a) Če je $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ za $x \in G$, je $\phi \in \mathcal{P}$.
- (b) Če je hkrati $\phi(x) = \langle \rho(x)v, v \rangle$ za $x \in G$, $v \in \mathcal{H}_\rho$, kjer je ρ neka druga unitarna upodobitev grupe G , obstaja $T \in C(\pi, \rho)$, tako da je $Tu = v$.
- (c) Če sta reprezentaciji π in ρ iz točk (a) in (b) ciklični, sta ekvivalentni.

Dokaz. (a) Funkcija ϕ je očitno zvezna. Ker je $\phi(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, u \rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)u \rangle$, dobimo za vsak $f \in L^1(G)$

$$\int \int f(x) \overline{f(y)}(x) \phi(y^{-1}x) dx dy = \int \int \langle f(x) \pi(x)u, f(y) \pi(y)u \rangle dx dy = \|\pi(f)u\|^2 \geq 0.$$

(b) Za vsak $x, y \in G$ imamo zdaj

$$\langle \pi(x)u, \pi(y)u \rangle = \langle \pi(y^{-1}x)u, u \rangle = \langle \rho(y^{-1}x)v, v \rangle = \langle \rho(x)v, \rho(y)v \rangle.$$

Torej lahko na cikličnem podprostoru \mathcal{M} , generiranem z u , definiramo linearno izometrijo $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_\rho$ s predpisom $T(\pi(x)u) = \rho(x)v$ (in zvezno razširitvijo na zaprtje). Ta operator spleta podupodobitev $\pi^{\mathcal{M}}$ z upodobitvijo ρ in slika v ciklični podprostor $\overline{\{\rho(x)v; x \in G\}}$. Če na ortogonalnem komplementu \mathcal{M}^\perp postavimo $T = 0$, dobimo $T \in C(\pi, \rho)$.

(c) V primeru cikličnosti obeh upodobitev, je T surjektivna izometrija iz \mathcal{H}_π na \mathcal{H}_ρ , torej unitaren operator in upodobitvi sta ekvivalentni.

Posledica. Če je $f \in L^2(G)$ in $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ za vsak $x \in G$, je $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$.

Dokaz. Naj bo $\pi = \pi_L$ leva regularna upodobitev grupe G na prostoru $L^2(G)$. Zaradi

$$\langle \pi(x)f, f \rangle = \int f(x^{-1}y) \overline{f(y)} dy = \int f(y) \overline{f((y^{-1}x)^{-1})} dy = \int f(y) \overline{f(y^{-1}x)} dy = \overline{f * \tilde{f}(x)}$$

po trditvi 2 velja $\overline{f * \tilde{f}} \in \mathcal{P}$, zato je po trditvi 1 tudi $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$.

Cikličnost

V nadaljevanju bomo pokazali, da vsako od nič različno funkcijo pozitivnega tipa ϕ dobimo iz neke unitarne (ciklične) upodobitve tako kot v trditvi 2.

Najprej konstruirajmo ustrezni Hilbertov prostor. Naj bo $\phi \neq 0$ poljubna funkcija pozitivnega tipa na grupi G . S predpisom

$$(1) \quad \langle f, g \rangle_\phi = \int (g^* * f)(x) \phi(x) dx = \int \int f(x) \overline{g(y)} \phi(y^{-1}x) dx dy,$$

pri čemer zadnjo enakost utemeljimo tako kot pri definiciji funkcij pozitivnega tipa, je podana semi-definitna sesquilinearna forma na $L^1(G)$. To vidimo iz osnovne definicije funkcij pozitivnega tipa na enak način kot pri dokazu sesquilinearnosti kompleksnega skalarnega produkta v splošnem Hilbertovem prostoru. Pri tem forma (1) zadošča oceni $|\langle f, g \rangle_\phi| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$. Naj bo

$$\mathcal{N} = \{f \in L^1(G); \langle f, f \rangle_\phi = 0\}.$$

Po Cauchy-Schwarzovi oceni $|\langle f, g \rangle_\phi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\phi \langle g, g \rangle_\phi$ je $f \in \mathcal{N}$ natanko takrat ko je $\langle f, g \rangle_\phi = 0$ za vsak $g \in L^1(G)$, se pravi, da je \mathcal{N} zaprt linearni podprostor v $L^1(G)$. Ta forma torej inducira na kvocientnem prostoru $L^1(G)/\mathcal{N}$ skalarni produkt, ki ga tudi označimo na isti način: $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$, s \mathcal{H}_ϕ pa označimo napolnitev prostora $L^1(G)/\mathcal{N}$ v normi, ki jo določa ta skalarni produkt. Torej je \mathcal{H}_ϕ Hilbertov prostor. Element, ki v tem prostoru pripada funkciji $f \in L^1(G)$, označimo z $[f]$. Po prejšnji oceni je $\|[f]\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|\phi\|_\infty^{1/2} \|f\|_1$.

Zdaj nas čaka še konstrukcija ustrezne upodobitve. Če sta $f, g \in L^1(G)$ in $x \in G$, je

$$\begin{aligned} \langle L_x f, L_x g \rangle_\phi &= \int \int f(x^{-1}y) \overline{g(x^{-1}z)} \phi(y^{-1}z) dy dz = \\ &= \int \int f(y) \overline{g(z)} \phi(y^{-1}z) dy dz = \langle f, g \rangle_\phi. \end{aligned}$$

V posebnem primeru je $L_x \mathcal{N} \subset \mathcal{N}$, torej L_x inducira operator na $L^1(G)/\mathcal{N}$ oziroma na \mathcal{H}_ϕ , definiran z $L_x[f] = L_x f + \mathcal{N} = [L_x f]$, ki je unitaren, saj ohranja skalarni produkt.

Torej določa unitarno upodobitev π_ϕ grupe G na prostoru \mathcal{H}_ϕ , definirano z

$$\pi_\phi(x)[f] = [L_x f], \quad f \in L^1(G), \quad x \in G.$$

Izračunajmo še pripadajočo upodobitev grupne algebre $L^1(G)$ na prostoru \mathcal{H}_ϕ :

$$\pi_\phi(f)[g] = \int f(x)\pi_\phi(x)[g]dx = \int f(x)[L_x g]dx = \left[\int f(x)(L_x g)dx \right] = [f * g].$$

Izrek 1. Naj bo ϕ poljubna funkcija pozitivnega tipa in \mathcal{H}_ϕ Hilbertov prostor, določen s ϕ . Naj bo $f \mapsto [f]$ kanonična preslikava iz $L^1(G)$ v \mathcal{H}_ϕ in π_ϕ unitarna upodobitev grupe G na prostoru \mathcal{H}_ϕ , določena s predpisom $\pi_\phi(x)[f] = [L_x f]$, $f \in L^1(G)$, $x \in G$. Potem obstaja tak ciklični vektor ϵ za upodobitev π_ϕ , da je $\pi_\phi(f)\epsilon = [f]$ za vsak $f \in L^1(G)$ in $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon \rangle$ skoraj za vsak $x \in G$.

Dokaz. Izberimo aproksimativno enoto $\{u_\alpha\}$ v algebri $L^1(G)$. Potem je tudi $\{u_\alpha^*\}$ aproksimativna enota v $L^1(G)$, saj za $u_\alpha^*(x) = u_\alpha(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ velja enakost

$$u_\alpha^* * f - f = u_\alpha^* * f^{**} - f^{**} = (f^* * u_\alpha - f^*)^*$$

in $\|g^*\|_1 = \|g\|_1$ za vsak $g \in L^1(G)$. Za vsak $f \in L^1(G)$ je zato

$$\langle [f], [u_\alpha] \rangle_\phi = \int (u_\alpha^* * f)(x)\phi(x)dx \rightarrow \int f(x)\phi(x)dx.$$

Zaporedje $[u_\alpha]$ je omejeno v \mathcal{H} , saj je $\|[u_\alpha]\|_{\mathcal{H}_\phi} \leq \|\phi\|_\infty^{1/2} \|u_\alpha\|_1 = \|\phi\|_\infty^{1/2}$. Z morebitnim prehodom na podzaporedje lahko privzamemo, da limita $\lim_\alpha \langle v, [u_\alpha] \rangle_\phi$ obstaja za vsak $v \in \mathcal{H}_\phi$. Torej konvergira $[u_\alpha]$ šibko v \mathcal{H}_ϕ proti elementu ϵ , tako da velja $\langle [f], \epsilon \rangle_\phi = \int f(x)\phi(x)dx$ za vsak $f \in L^1(G)$.

Če sta $f, g \in L^1(G)$ in $y \in G$, imamo

$$\begin{aligned} \langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi &= \langle \pi_\phi(y^{-1})[g], \epsilon \rangle_\phi = \langle [L_{y^{-1}}g], \epsilon \rangle_\phi = \\ &= \int g(yx)\phi(x)dx = \int g(x)\phi(y^{-1}x)dx, \end{aligned}$$

torej $\langle [g], [f] \rangle_\phi = \int \int g(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy = \int \langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi \overline{f(y)}dy = \langle [g], \pi_\phi(f)\epsilon \rangle_\phi$.

Sledi $[f] = \pi_\phi(f)\epsilon$ za vsak $f \in L^1(G)$, iz $\langle [g], \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi = 0$ za vsak y pa $\langle [g], [f] \rangle_\phi = 0$ za vsak $f \in L^1(G)$, se pravi $[g] = 0$. Torej je linearna ovojnica elementov $\pi_\phi(y)\epsilon$, $y \in G$, gosta v \mathcal{H}_ϕ in ϵ je ciklični vektor za π .

Za vsak $f \in L^1(G)$ velja tudi

$$\begin{aligned} \int \langle \epsilon, \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi \overline{f(y)}dy &= \lim_\alpha \int \langle [u_\alpha], \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi \overline{f(y)}dy = \lim_\alpha \langle [u_\alpha], \pi_\phi(f)\epsilon \rangle = \\ &= \lim_\alpha \langle [u_\alpha], [f] \rangle_\phi = \langle \epsilon, [f] \rangle_\phi = \overline{\langle [f], \epsilon \rangle_\phi} = \int \overline{\phi(y)f(y)}dy. \end{aligned}$$

Torej je $\langle \pi_\phi(y)\epsilon, \epsilon \rangle_\phi = \overline{\langle \epsilon, \pi_\phi(y)\epsilon \rangle_\phi} = \phi(y)$ skoraj za vsak $y \in G$.

Posledica 1. Vsaka funkcija pozitivnega tipa je skoraj povsod enaka zvezni funkciji.

Dokaz. Izrek 1 je povedal, da je vsaka funkcija pozitivnega tipa $\phi(x)$ skoraj za vsak $x \in G$ enaka $\langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon \rangle$, torej zvezni funkciji pozitivnega tipa.

Posledica 2. Če je $\phi \in \mathcal{P}$, je $\|\phi\|_\infty = \phi(1)$ in $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$ za vsak $x \in G$.

Dokaz. Imamo $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ za neko upodobitev π in vektor $u \in \mathcal{H}_\pi$. Torej je $|\phi(x)| = |\langle \pi(x)u, u \rangle| \leq \|u\|^2 = \langle \pi(1)u, u \rangle = \phi(1)$ in $\phi(x^{-1}) = \langle \pi(x^{-1})u, u \rangle = \langle u, \pi(x)u \rangle = \overline{\langle \pi(x)u, u \rangle} = \overline{\phi(x)}$.

Vsaki funkciji pozitivnega tipa ϕ smo v izreku 1 priredili ciklično upodobitev π_ϕ , od prej pa vemo (glej trditev 2), da vsaka unitarna upodobitev za vsak vektor u porodi funkcijo pozitivnega tipa. Z združitvijo obeh postopkov, dobimo naslednji rezultat.

Trditev 3. *Naj bo π ciklična upodobitev grupe G s cikličnim vektorjem $u \in \mathcal{H}_\pi$ in $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ za vsak $x \in G$. Potem je upodobitev π ekvivalentna ciklični upodobitvi π_ϕ , ki pripada funkciji ϕ .*

Dokaz. Po izreku 1 je tudi $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)u, u \rangle$. Ker sta tako π kot π_ϕ ciklični upodobitvi grupe G sta po trditvi 2(c) ekvivalentni.

Nerazcepnost

Videli smo, da je \mathcal{P} konveksen stožec. Definirajmo nekaj koristnih podmnožic v \mathcal{P} .

$$(a) \mathcal{P}_1 = \{\phi \in \mathcal{P}; \|\phi\|_\infty = 1\}$$

$$(b) \mathcal{P}_0 = \{\phi \in \mathcal{P}; \|\phi\|_\infty \leq 1\}$$

Zaradi posledice 2 velja tudi $\mathcal{P}_1 = \{\phi \in \mathcal{P}; \phi(1) = 1\}$ in $\mathcal{P}_0 = \{\phi \in \mathcal{P}; 0 \leq \phi(1) \leq 1\}$. Iz obeh predstavitev vidimo, da sta \mathcal{P}_1 in \mathcal{P}_0 omejeni konveksni množici.

Definirajmo še $\mathcal{E}(\mathcal{P}_j)$ kot množico *ekstremnih točk* množice \mathcal{P}_j , $j = 1, 2$.

Izrek 2. *Naj bo $\phi \in \mathcal{P}_1$. Potem je $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ natanko takrat, ko je prirejena upodobitev π_ϕ nerazcepna.*

Dokaz. Denimo, da je π_ϕ razcepna upodobitev, torej $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ z netrivialnim invariantnim podprostorom \mathcal{M} za upodobitev π_ϕ . Naj bo ϵ ciklični vektor za π_ϕ , tako kot v izreku 1. Potem ϵ ne more biti niti v \mathcal{M} niti v \mathcal{M}^\perp , se pravi, da je $\epsilon = u + v$, $u \in \mathcal{M}$, $v \in \mathcal{M}^\perp$ in $u \neq 0$, $v \neq 0$. Toda tedaj ϕ ni ekstremna točka v \mathcal{P}_1 , ker velja

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)u, u \rangle_\phi + \langle \pi_\phi(x)v, v \rangle_\phi = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x),$$

kjer sta $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$, $c_1 = \|u\|^2$, $c_2 = \|v\|^2$ in $c_1 + c_2 = \phi(1) = 1$.

Obratno, naj bo zdaj upodobitev π_ϕ nerazcepna in denimo, da je $\phi = \psi + \psi'$, $\psi, \psi' \in \mathcal{P}$. Uporablja joč notacijo iz izreka 1 imamo za vsak $f \in L^1(G)$

$$\langle f, f \rangle_\psi = \langle f, f \rangle_\phi - \langle f, f \rangle_{\psi'} \leq \langle f, f \rangle_\phi$$

in zato za vsak $f, g \in L^1(G)$

$$|\langle f, g \rangle_\psi| \leq \langle f, f \rangle_\psi^{1/2} \langle g, g \rangle_\psi^{1/2} \leq \langle f, f \rangle_\phi^{1/2} \langle g, g \rangle_\phi^{1/2}.$$

Preslikava $([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle_\psi$ je torej omejena sesquilinearna forma na \mathcal{H}_ϕ , zato definira sebi adjungirani operator T s predpisom $\langle T[f], [g] \rangle_\phi = \langle f, g \rangle_\psi$. Če je $x \in G$ in $f, g \in L^1(G)$, imamo

$$\begin{aligned} \langle T\pi_\phi(x)[f], [g] \rangle_\phi &= \langle T[L_x f], [g] \rangle_\phi = \langle L_x f, g \rangle_\psi = \langle f, L_{x^{-1}}g \rangle_\psi = \\ &= \langle T[f], [L_{x^{-1}}g] \rangle_\phi = \langle T[f], \pi_\phi(x^{-1})[g] \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(x)T[f], [g] \rangle_\phi. \end{aligned}$$

Torej je $T \in C(\pi_\phi)$ in po Schurovi lemi je $T = cI$, $c \in \mathbb{R}$, zaradi nerazcepnosti upodobitve π_ϕ , se pravi, da je $\langle f, g \rangle_\psi = c\langle f, g \rangle_\phi$ za vsak $f, g \in L^1(G)$. To pomeni

$$\int \int f(x)\overline{g(y)}\psi(y^{-1}x)dx dy = c \int \int f(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dx dy$$

za vsak $f, g \in L^1(G)$, od koder sledi $\psi = c\phi$, pri čemer $c \neq 0$ in $\phi \neq 0$. Poleg tega je tudi

$$\psi' = \phi - \psi = \phi - c\phi = (1 - c)\phi$$

in ϕ je ekstremna točka v \mathcal{P}_1 .

Šibka- $*$ topologija

Ker se pogoj $\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx \geq 0$ ohranja pri šibki- $*$ konvergenci, je množica \mathcal{P}_0 šibko- $*$ zaprta podmnožica enotske krogle v $L^\infty(G)$. Po Banach-Alaouglujevem izreku je torej \mathcal{P}_0 šibko- $*$ kompaktna konveksna množica in je po Krein-Milmanovem izreku enaka šibko- $*$ zaprtju konveksne ogrinjače svojih ekstremnih točk. Množica \mathcal{P}_1 v splošnem ni šibko- $*$ zaprta (razen, če je G diskretna grupa), kljub temu je tudi šibko- $*$ zaprtje konveksne ogrinjače svojih ekstremnih točk, kot bomo videli v kratkem (glej izrek 3).

Trditvev 4. $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\}$.

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je $0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$ in $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$. Pa denimo, da je $0 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_1, c_2 > 0$. Tedaj je $0 = c_1\phi_1(1) + c_2\phi_2(1)$ in zaradi pozitivnosti $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 0$. To pomeni, da je $\|\phi_1\|_\infty = \|\phi_2\|_\infty = 0$ oziroma $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Torej je $0 \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$.

Če je $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ in $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_1, c_2 > 0$ in $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_0$, je $1 = \phi(1) = c_1\phi_1(1) + c_2\phi_2(1) \leq 1$, zato mora veljati $\phi_1(1) = 1$ in $\phi_2(1) = 1$. Torej sta $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}_1$ in zato $\phi_1 = \phi_2$ (sicer $\phi \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$). Torej je $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$.

Naj bo $\phi \neq 0$, $\phi \in \mathcal{P}_0$. Če je $\phi \in \mathcal{P}_1$ in $\phi \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, tudi $\phi \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$, ker $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$. Če pa $\phi \notin \mathcal{P}_1$, je $0 < \phi(1) < 1$ in zato $\phi = \phi(1)(\phi/\phi(1)) + (1 - \phi(1)) \cdot 0$. Ker je $\phi/\phi(1) \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$ in $0 \in \mathcal{P}_0$, funkcija ϕ ni ekstremna točka v \mathcal{P}_0 , se pravi $\phi \notin \mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$. Torej velja $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0) \subset \mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \cup \{0\}$ in dobimo enačaj.

Izrek 3. Konveksna ogrinjača $co\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ je šibko- $*$ gosta v \mathcal{P}_1 .

Dokaz. Naj bo $\phi \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$. Potem je ϕ šibka- $*$ limita konveksnih kombinacij elementov iz $\mathcal{E}(\mathcal{P}_0)$, torej po trditvi 4 šibka- $*$ limita posplošenega zaporedja funkcij oblike $\phi_\alpha = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n + c_{n+1} \cdot 0$, kjer je $c_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1$ in $\psi_i \in \mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Potem imamo

$$\|\phi_\alpha\|_\infty = \phi_\alpha(1) = c_1\psi_1(1) + c_2\psi_2(1) + \dots + c_n\psi_n(1) = c_1 + c_2 + \dots + c_n \leq 1$$

ter $\|\phi\|_\infty = \phi(1) = 1$. Ker $\phi_\alpha \rightarrow \phi$ v šibki- $*$ topologiji, mora veljati tudi $\|\phi_\alpha\|_\infty \rightarrow \|\phi\|_\infty = 1$. Če namreč to ne bi bilo res, bi za neko podzaporedje in za $\epsilon > 0$ veljalo $\|\phi_\alpha\|_\infty \leq 1 - \epsilon$. Zaprte krogle v $L^\infty(G)$ pa so šibko- $*$ zaprte, torej bi bilo tudi $\|\phi\|_\infty \leq 1 - \epsilon$. Torej imamo $\phi_\alpha(1) \rightarrow 1$. Postavimo zdaj

$$\phi'_\alpha = \phi_\alpha / \phi_\alpha(1) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\phi_\alpha(1)} \psi_i$$

Ta funkcija je v $co\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$, ker je $\sum_{i=1}^n c_i / \phi_\alpha(1) = 1$. Poleg tega velja $\phi'_\alpha \rightarrow \phi$ v šibki- $*$ topologiji.

Naš cilj je pokazati, da šibka- $*$ topologija na \mathcal{P}_1 sovпада s topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v G . V tej topologiji so bazične okolice točke ϕ_0 dane s kompaktno množico K in pozitivnim številom $\epsilon > 0$:

$$N(\phi_0; \epsilon, K) = \{\phi; |\phi(x) - \phi_0(x)| < \epsilon \text{ za vsak } x \in K\}.$$

Sovpadanje obeh topologij na \mathcal{P}_1 je zelo pomembno in nam bo v nadaljevanju zelo koristilo. V nasprotju s tem šibka- $*$ topologija in topologija enakomerne konvergence na kompaktnih množicah v \mathcal{P}_0 ne sovpadata. Vzemimo npr. aditivno grupo $G = \mathbb{R}$ in funkcije ϕ_ξ , definirane z $\phi_\xi(x) = e^{i\xi x}$ za vsak $x, \xi \in \mathbb{R}$. Te funkcije so v $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, saj so zvezne, pozitivnega tipa zaradi

$$\int \int f(x) \overline{f(y)} \phi_\xi(x - y) dx dy = \int f(x) e^{i\xi x} dx \int \overline{f(y) e^{i\xi y}} dy = |\widehat{f}(-\xi)|^2 \geq 0$$

in velja $\phi_\xi(0) = 1$. Posplošeno zaporedje $\{\phi_\xi\}$ v šibki- $*$ topologiji zaradi Reimann-Lebesguove leme konvergira k 0, ko $|\xi| \rightarrow \infty$. Ne konvergira pa nikamor v topologiji enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v \mathbb{R} .

Za dokaz ujemanja topologij potrebujemo naslednji splošni rezultat.

Lema 1. *Naj bo E Banachov prostor in B omejena podmnožica v dualnem prostoru E^* . Na B sovpadata šibka- $*$ topologija in topologija enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v E .*

Dokaz. Po eni strani šibka- $*$ topologija na E^* , ki je v bistvu topologija konvergence funkcionalov po točkah na prostoru E , ni močnejša od topologije enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah. Obratno, naj bo $\phi_0 \in B$, $\epsilon > 0$ in $K_1 \subset E$ kompaktna podmnožica. Pokazali bomo, da v vsaki okolici

$$V(\phi_0; \epsilon, K_1) = \{\phi; |\phi(\xi) - \phi_0(\xi)| < \epsilon \text{ za vsak } \xi \in K_1\}.$$

obstaja šibka- $*$ okolica. Naj bo $c = \sup\{\|\phi\|; \phi \in B\}$ in $\delta = \epsilon/3c$. Zaradi kompaktnosti množice K_1 obstajajo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in K_1$, tako da krogle $B(\xi_j, \delta)$ pokrijejo K_1 . Če je $\phi \in B$ in $\xi \in K_1$, obstaja tak ξ_j , da je $\|\xi - \xi_j\| < \delta$, zato imamo

$$|\phi(\xi) - \phi_0(\xi)| \leq |\phi(\xi - \xi_j)| + |(\phi - \phi_0)(\xi_j)| + |\phi_0(\xi_j - \xi)| < 2\epsilon/3 + |(\phi - \phi_0)(\xi_j)|.$$

Šibka- $*$ okolica $\{\phi; |(\phi - \phi_0)(\xi_j)| < \epsilon/3 \text{ za vsak } j = 1, 2, \dots, n\}$ je torej vsebovana v $V(\phi_0; \epsilon, K_1)$.

Trditev 5. *Naj bo $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$ in $f \in L^1(G)$. Za vsak $\epsilon > 0$ in poljubno kompaktno podmnožico $K \subset G$ obstaja taka šibka- $*$ okolica Φ točke ϕ_0 v \mathcal{P}_1 , da za vsak $\phi \in \Phi$ in vsak $x \in K$ velja*

$$|(f * \phi)(x) - (f * \phi_0)(x)| < \epsilon.$$

Dokaz. Izračunajmo

$$(f * \phi)(x) = \int f(y)\phi(y^{-1}x)dy = \int f(xy)\phi(y^{-1})dy = \int (L_{x^{-1}}f)(y)\overline{\phi(y)}dy.$$

Ker je $x \mapsto L_{x^{-1}}f$ zvezna funkcija iz G v $L^1(G)$, je $K_1 = \{L_{x^{-1}}f; x \in K\}$ kompaktna podmnožica v $L^1(G)$ in po lemi 1 obstaja šibka- $*$ okolica Φ točke ϕ_0 , ki je vsebovana v okolici $V(\phi_0; \epsilon, K_1)$. Torej je za vsak $x \in K$ in vsak $\phi \in \Phi$ res

$$\left| \int (L_{x^{-1}}f)(y)\overline{\phi(y)}dy - \int (L_{x^{-1}}f)(y)\overline{\phi_0(y)}dy \right| < \epsilon.$$

To pomeni, da je $|(f * \phi)(x) - (f * \phi_0)(x)| < \epsilon$ za vsak $x \in K$ in vsak $\phi \in \Phi$.

Trditev 6. *Če je $\phi \in \mathcal{P}_1$, velja $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 - 2\operatorname{Re}\phi(yx^{-1})$ za vsak $x, y \in G$.*

Dokaz. Vemo, da je $\phi(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$ za neko unitarno upodobitev π grupe G in za enotski vektor $u \in \mathcal{H}_\pi$, saj je $\phi \in \mathcal{P}_1$. Torej je

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 &= |\langle (\pi(x) - \pi(y))u, u \rangle|^2 = |\langle u, (\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1}))u \rangle|^2 \leq \\ &= \|\pi(x^{-1})u - \pi(y^{-1})u\|^2 = 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(x^{-1})u, \pi(y^{-1})u \rangle = \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}\langle \pi(yx^{-1})u, u \rangle = 2 - 2\operatorname{Re}\phi(yx^{-1}). \end{aligned}$$

Izrek 4. *Na množici \mathcal{P}_1 se šibka- $*$ topologija ujema s topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah v G .*

Dokaz. Če je $0 \neq f \in L^1(G)$ in $\epsilon > 0$, obstaja taka kompaktna podmnožica $K \subset G$, da je $\int_{G \setminus K} |f(x)| dx < \epsilon/4$. Če sta $\phi, \phi_0 \in \mathcal{P}_1$ in $|\phi - \phi_0| < \epsilon/(2\|f\|_1)$ na K , velja

$$\begin{aligned} & \left| \int (f(x)\phi(x) - f(x)\phi_0(x)) dx \right| \leq \\ & \int_K |f(x)| |\phi(x) - \phi_0(x)| dx + \int_{G \setminus K} |f(x)| |\phi(x) - \phi_0(x)| dx < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Torej kompaktna konvergenca na G implicira šibko- $*$ konvergenco.

Obratno, naj bo $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, $\epsilon > 0$ in $K \subset G$ kompaktna podmnožica v G . Želimo najti tako šibko- $*$ okolico Φ točke $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, da bo $|\phi - \phi_0| < \epsilon$ na K za vsak $\phi \in \Phi$. Izberimo $\eta > 0$ in kompaktno okolico V enote $1 \in G$, tako da je $|\phi_0(x) - 1| < \eta$ za $x \in V$. Postavimo

$$\Phi_1 = \{ \phi \in \mathcal{P}_1; \left| \int_V (\phi(x) - \phi_0(x)) dx \right| < \eta |V| \}.$$

Potem je Φ_1 šibko- $*$ okolica točke ϕ_0 , saj je $\chi_V/|V| \in L^1(G)$. Za $\phi \in \Phi_1$ velja

$$\left| \int_V (1 - \phi(x)) dx \right| \leq \left| \int_V (1 - \phi_0(x)) dx \right| + \left| \int_V (\phi(x) - \phi_0(x)) dx \right| < 2\eta |V|.$$

Če je $\phi \in \Phi_1$ in $x \in G$ pa velja

$$\begin{aligned} |(\chi_V * \phi)(x) - |V|\phi(x)| &= \left| \int_V (\phi(y^{-1}x) - \phi(x)) dy \right| \leq \\ & \int_V |\phi(y^{-1}x) - \phi(x)| dy \leq \left(\int_V |\phi(y^{-1}x) - \phi(x)|^2 dy \right)^{1/2} |V|^{1/2}. \end{aligned}$$

Po trditvi 6 je lahko zadnji izraz naprej ocenimo z

$$\left(\int_V (2 - 2\operatorname{Re}\phi(y)) dy \right)^{1/2} |V|^{1/2} < \sqrt{2} \left(\int_V |1 - \phi(y)| dy \right)^{1/2} |V|^{1/2} < 2|V|\sqrt{\eta}.$$

Po trditvi 5 obstaja tudi taka šibko- $*$ okolica Φ_2 točke $\phi_0 \in \mathcal{P}_1$, da za $\phi \in \Phi_2$ in $x \in K$ velja $|(\chi_V * \phi)(x) - (\chi_V * \phi_0)(x)| < \eta |V|$. Če je torej $\phi \in \Phi_1 \cap \Phi_2$ in $x \in K$, dobimo

$$\begin{aligned} & |\phi(x) - \phi_0(x)| \leq \\ & \frac{1}{|V|} (| |V|\phi(x) - (\chi_V * \phi)(x) | + |(\chi_V * \phi)(x) - (\chi_V * \phi_0)(x)| + |(\chi_V * \phi_0)(x) - |V|\phi_0(x)|) \leq \\ & \frac{1}{|V|} (2|V|\sqrt{\eta} + |V|\eta + 2|V|\sqrt{\eta}) = \eta + 4\sqrt{\eta}. \end{aligned}$$

Če izberemo še η tako, da je $\eta + 4\sqrt{\eta} < \epsilon$, je $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2 \subset N(\phi_0; \epsilon, K)$.

Trditev 7. Linearna ovojnica $\mathcal{L} = \operatorname{span} C_c(G) \cap \mathcal{P}$ vsebuje vse funkcije oblike $f * g$, kjer sta $f, g \in C_c(G)$. Ta ovojnica je gosta v $C_c(G)$ v normi $\|\cdot\|_\infty$ in gosta v $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) v normi $\|\cdot\|_p$.

Dokaz. Videli smo že, da je $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$, torej v \mathcal{L} . S polarizacijo odtod vidimo, da je tudi $f * \tilde{h} \in \mathcal{L}$ za $f, h \in C_c(G)$, torej v resnici $f * g \in \mathcal{L}$ za $f, g \in C_c(G)$. Ker lahko za g izberemo aproksimativno enoto, vidimo, da je množica $\{f * g; f, g \in C_c(G)\}$ gosta v $C_c(G)$ v normi $\|\cdot\|_\infty$ in gosta v $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) v normi $\|\cdot\|_p$.

Ločljivost točk

Zdaj lahko formuliramo glavni rezultat razdelka, ki zagotavlja zadostno število nerazcepnih upodobitev lokalno kompaktno grupe.

Izrek 5 (Gelfand-Raikov). Če je G lokalno kompaktna grupa, potem nerazcepne unitarne upodobitve grupe G ločijo točke na G , tj. za $x \neq y$, $x, y \in G$, obstaja nerazcepna unitarna upodobitev π , tako da je $\pi(x) \neq \pi(y)$.

Dokaz. Če $x \neq y$, obstaja $f \in C_c(G)$, da $f(x) \neq f(y)$. Lahko vzamemo, da je f linearna kombinacija funkcij pozitivnega tipa (trditvev 7). Po izrekih 3 in 4 obstaja linearna kombinacija g ekstremnih točk iz \mathcal{P}_1 , ki aproksimira funkcijo f na kompaktni množici $\{x, y\}$ dovolj dobro, da je tudi $g(x) \neq g(y)$. Torej mora obstajati tudi taka ekstremna točka $\phi \in \mathcal{P}_1$, da je $\phi(x) \neq \phi(y)$. Ustrezna upodobitev π_ϕ , ki po izreku 1 pripada funkciji ϕ , je po izreku 2 nerazcepna in zanjo velja $\langle \pi_\phi(x)\epsilon, \epsilon \rangle = \phi(x) \neq \phi(y) = \langle \pi_\phi(y)\epsilon, \epsilon \rangle$ s cikličnim vektorjem ϵ . Torej je tudi $\pi_\phi(x) \neq \pi_\phi(y)$.

Vpeljimo še en pojem, za katerega pa se bo izkazalo, da je enakovreden pojmu funkcije pozitivnega tipa.

Definicija 2. Funkcija $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ je *pozitivno definitna*, če je $\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi(x_j^{-1} x_i) \geq 0$ za vsak nabor števil $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ in za vsak nabor elementov $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$.

Trditev 8. Vsaka pozitivno definitna funkcija na grupi G je omejena, ne pa nujno zvezna.

Dokaz. V definiciji 2 izberimo $n = 2$, $x_1 = x$ in $x_2 = 1$. Če je ϕ pozitivno definitna funkcija, mora biti zaradi pogoja iz definicije matrika $\begin{bmatrix} \phi(1) & \phi(x) \\ \phi(x^{-1}) & \phi(1) \end{bmatrix}$ pozitivno semi-definitna, torej mora biti $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$ in $\phi(1)^2 - \phi(x)\phi(x^{-1}) \geq 0$ za vsak $x \in G$. Torej velja $|\phi(x)| \leq \phi(1)$.

Da pozitivno definitna funkcija ni nujno zvezna, vidimo iz primera funkcije ϕ , za katero je $\phi(1) = 1$ in $\phi(x) = 0$ za $x \neq 0$. Še več pozitivno definitna funkcija ni nujno niti merljiva. Če je npr. $G = \mathbb{R}$ in ψ poljuben nezvezen avtomorfizem vektorskega prostora \mathbb{R} nad \mathbb{Q} , je $e^{i\psi}$ pozitivno definitna funkcija na \mathbb{R} .

Trditev 9. Naj bo ϕ omejena zvezna funkcija na G . Potem je ekvivalentno:

- (i) ϕ je funkcija pozitivnega tipa;
- (ii) ϕ je pozitivno definitna funkcija;
- (iii) $\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx \geq 0$ za vsak $f \in C_c(G)$.

Dokaz. (i) \implies (ii). Naj bo $\{u_\alpha\}$ pozitivna simetrična normirana približna enota, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in G$ in $f_\alpha = \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j} u_\alpha$. Potem je

$$0 \leq \int (f_\alpha^* * f_\alpha)(x)\phi(x)dx = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \int \int u_\alpha(x_i^{-1}y)u_\alpha(x_j^{-1}z)\phi(z^{-1}y)dydz.$$

Ker je funkcija ϕ zvezna, integrali konvergirajo proti $\phi(x_j^{-1}x_i)$, torej dobimo v limiti po α tudi $\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \phi(x_j^{-1}x_i) \geq 0$.

(ii) \implies (iii). Če je $f \in C_c(G)$, je z $F(x, y) = f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)$, $x, y \in G$, definirana funkcija F v $C_c(G \times G)$ (če je $K = \text{supp } f$, je $\text{supp } F \subset K \times K$). Če je $\epsilon > 0$, lahko pokrijemo $K \times K$ s končno mnogo odprtimi okolicami oblike $U \times V$, tako da je variacija funkcije F na vsaki od njih pod ϵ . Napravimo particijo množice K v disjunktne množice E_1, \dots, E_n , tako da za $x_j \in E_j$ velja $|F(x, y) - F(x_i, x_j)| < \epsilon$, če $(x, y) \in E_i \times E_j$. Tedaj pa je

$$\begin{aligned} \int (f^* * f)(x)\phi(x)dx &= \int \int F(x, y)dx dy = \sum_{i,j} \int \int_{E_i \times E_j} F(x, y)dx dy = \\ &= \sum_{i,j} F(x_i, x_j)|E_i||E_j| + R = \sum_{i,j} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_j^{-1}x_i) + R, \end{aligned}$$

kjer je $|R| \leq \sum_{i,j} \int \int_{E_i \times E_j} |F(x, y) - F(x_i, x_j)|dx dy < \epsilon|K|^2$. Ker je $\epsilon > 0$ poljuben, odtod nujno sledi $\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx \geq 0$, sicer funkcija ϕ ne bi bila pozitivno definitna.

(iii) \implies (i). Če je $f \in L^1(G)$, obstaja zaporedje funkcij $f_n \in C_c(G)$, ki po normi v $L^1(G)$ konvergira proti $f \in L^1(G)$. Tedaj velja tudi $f_n^* * f_n \rightarrow f^* * f$ v $L^1(G)$ in zato $\int (f^* * f)(x)\phi(x)dx = \lim_n \int (f_n^* * f_n)(x)\phi(x)dx \geq 0$.

5. Upodobitve Abelovih grup

V tem razdelku bomo spoznali, kako lahko unitarne upodobitve Abelove lokalno kompaktno grupe G izrazimo z njenimi nerazcepnimi upodobitvami. Pri tem je ključna identifikacija dualne grupe \widehat{G} s spektrom grupne algebre $L^1(G)$, podana s preslikavo $\xi \mapsto \Phi_\xi$, kjer za vsak $f \in L^1(G)$ velja $\Phi_\xi(f) = \int_G \langle x, \xi \rangle f(x)dx$ (glej izrek III.1.1). Na kratko bomo pisali kar $\xi(f) = \Phi_\xi(f)$ za $\xi \in \widehat{G}$ in $f \in L^1(G)$. Poleg tega bomo uporabili spektralni izrek za komutativne C^* -algebre.

Kot posledico Schurove leme vemo, da so v primeru Abelovih lokalno kompaktnih grup vse nerazcepne upodobitve enorazsežne, dane s karakterji, ki sestavljajo t.i. dualno grupo (glej posledico trditve 1.5).

Hitro vidimo, da je tedaj grupna C^* -algebra $C^*(G)$ izometrično izomorfná algebrí $C_0(\widehat{G})$, saj je skupaj z $L^1(G)$ komutativna algebra za involucijo, multiplikativni funkcionali na $C^*(G)$ (kot posebne enorazsežne upodobitve) pa so enolične razširitve multiplikativnih funkcionalov na involutivni Banachovi algebrí $L^1(G)$. Torej lahko spekter C^* -algebre $C^*(G)$ identificiramo z \widehat{G} .

Spektralni izrek

Spomnimo se, da je spektralna mera na σ -algebrí Borelovih množic v \widehat{G} z vrednostmi v $B(\mathcal{H}_\pi)$ preslikava, ki vsaki Borelovi podmnožici $E \subset \widehat{G}$ priredi ortogonalen projektor $P(E) \in B(\mathcal{H}_\pi)$ z lastnostmi:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\widehat{G}) = I, \quad P(E \cap F) = P(E)P(F) \text{ in } P(\cup_j E_j) = \sum_j P(E_j)$$

(krepka operatorska konvergenca) za paroma disjunktne množice $E_j, j = 1, 2, \dots$. Spektralna mera P je regularna, če je regularna skalarna mera $E \mapsto \langle P(E)\xi, \eta \rangle$ za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Potrebovali bomo naslednji spektralni izrek (glej [11], Theorem 1.54).

Izrek 1. *Naj bo \mathcal{A} komutativna Banachova involutivna algebra in ϕ neizrojena $*$ -upodobitev algebre \mathcal{A} na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Potem obstaja ena sama regularna spektralna mera P na spektru $\sigma(\mathcal{A})$ tako da je $\phi(a) = \int \widehat{a}dP$ za vsak $a \in \mathcal{A}$. Operator $T \in B(\mathcal{H})$ komutira z $\phi(a)$ za vsak $a \in \mathcal{A}$ natanko takrat, ko velja $TP(E) = P(E)T$ za vsako Borelovo podmnožico $E \subset \sigma(\mathcal{A})$.*

Običajno uporabljamo ta izrek v primeru, ko je \mathcal{A} komutativna C^* -algebra z enoto I , delujoča na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Kadar nima enote, in to je pogosto primer pri grupni C^* -algebrí, je treba nekaj več previdnosti (glej [11]), razdelek 1.5).

V razdelku III.1 smo karakterizirali topologijo dualne grupe \widehat{G} z enakomerno konvergenco na kompaktnih podmnožicah v G (trditve III.1.1). Zaradi Pontrjagove dualnosti isto velja tudi na grupí G . Posledica je naslednji koristen rezultat, ki ga bomo uporabili v dokazu izreka 2.

Lema 1. *Če je $\{u_\alpha\}$ aproksimativna enota v algebrí $L^1(G)$, velja $\widehat{u}_\alpha \rightarrow 1$ enakomerno na kompaktnih množicah v \widehat{G} .*

Dokaz. Naj bo $K \subset \widehat{G}$ poljubna kompaktna podmnožica. Če je $\epsilon > 0$, je po prejšnjem premisleku $V = \{x \in G; |\langle x, \xi \rangle - 1| < \epsilon \text{ za vsak } \xi \in K\}$ okolica enote $1 \in G$. Za vsak α z lastnostjo $\text{supp}u_\alpha \subset V$ in $\int u_\alpha(x)dx = 1$ velja $|\widehat{u}_\alpha(\xi) - 1| = |\int_V (\langle x, \xi \rangle - 1)u_\alpha(x)dx| < \epsilon$ za vsak $\xi \in K$. To pomeni, da $\widehat{u}_\alpha \rightarrow 1$ enakomerno na kompaktnih množicah v \widehat{G} .

Izrek 2. Naj bo π unitarna upodobitev lokalno kompaktne Abelove grupe G na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π . Obstaja ena sama regularna spektralna mera P na dualni grupi \widehat{G} , tako da je za vsak $x \in G$

$$(1) \quad \pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi)$$

in za vsak $f \in L^1(G)$

$$(2) \quad \pi(f) = \int_{\widehat{G}} \xi(f) dP(\xi).$$

Operator $T \in B(\mathcal{H}_\pi)$ komutira s $\pi(f)$ za vsak $f \in L^1(G)$, torej v $C(\pi)$, natanko takrat, ko T komutira z vsemi projektorji $P(E)$, kjer je E poljubna Borelova podmnožica v \widehat{G} .

Dokaz. Množica $\{\pi(f); f \in L^1(G)\}^-$ je C^* -algebra operatorjev na prostoru \mathcal{H}_π . Spekter algebre $L^1(G)$ identificiramo z \widehat{G} (izrek III.1.1). Po izreku 1 obstaja ena sama spektralna mera na \widehat{G} , tako da velja $\pi(f) = \int_{\widehat{G}} \xi(f) dP(\xi)$. Poleg tega velja $T\pi(f) = \pi(f)T$ za vsak $f \in L^1(G)$ natanko takrat, ko $TP(E) = P(E)T$ za vsako Borelovo podmnožico $E \subset \widehat{G}$. Potrebno je torej pokazati edinole formulo $\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi)$.

Od prej vemo (glej dokaz izreka 3.2), da je $\pi(x)$ krepka limita operatorjev oblike $\pi(L_x u_\alpha)$, kjer je $\{u_\alpha\}$ približna enota v $L^1(G)$. Po drugi strani je po definiciji $\xi(f)$ za $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \pi(L_x u_\alpha) &= \int_{\widehat{G}} \xi(L_x u_\alpha) dP(\xi) = \int_{\widehat{G}} \int_G \langle y, \xi \rangle (L_x u_\alpha)(y) dy dP(\xi) = \\ &= \int_{\widehat{G}} \int_G \langle x(x^{-1}y), \xi \rangle u_\alpha(x^{-1}y) dy dP(\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \int_G \langle y, \xi \rangle u_\alpha(y) dy dP(\xi) = \\ &= \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \xi(u_\alpha) dP(\xi) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle \widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) dP(\xi). \end{aligned}$$

Če pokažemo, da zadnji integral konvergira v šibki operatorski topologiji proti integralu $\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi)$, smo končali.

Naj bosta $u, v \in \mathcal{H}_\pi$, $\epsilon > 0$ in $\mu_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v \rangle$ kompleksna regularna Borelova mera na \widehat{G} . Zaradi regularnosti obstaja taka kompaktna množica $K \subset \widehat{G}$, da je $|\mu_{u,v}|(\widehat{G} \setminus K) < \epsilon$. Potem lahko zapišemo, upoštevaje prejšnji račun

$$\begin{aligned} \langle (\pi(L_x u_\alpha) - \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi))u, v \rangle &= \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle (\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1) d\mu_{u,v}(\xi) = \\ &= \int_K \langle x, \xi \rangle (\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1) d\mu_{u,v}(\xi) + \int_{\widehat{G} \setminus K} \langle x, \xi \rangle (\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1) d\mu_{u,v}(\xi). \end{aligned}$$

Po lemi 1 je $|\int_K \langle x, \xi \rangle (\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1) d\mu_{u,v}(\xi)| \leq \epsilon$, zaradi $|\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1| \leq 2$ pa tudi $|\int_{\widehat{G} \setminus K} \langle x, \xi \rangle (\widehat{u}_\alpha(\xi^{-1}) - 1) d\mu_{u,v}(\xi)| \leq 2\epsilon$. Torej je

$$\langle \pi(x)u, v \rangle = \lim_{\alpha} \langle \pi(L_x u_\alpha)u, v \rangle = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu_{u,v}(\xi).$$

To pa ravno pomeni, da je $\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi)$.

Zgled 1. Naj bo spektralna mera P diskretna, tj. za vsako Borelovo podmnožico $E \subset \widehat{G}$ naj bo $P(E) = \sum_{\xi \in E} P(\{\xi\})$. Tu je $P(\{\xi\})$ pri vsakem $\xi \in \widehat{G}$ pravokotni projektor na Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π , njegova zaloga vrednosti naj bo podprostor $\mathcal{H}_\xi \subset \mathcal{H}_\pi$. Potem je $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{P(\{\xi\}) \neq 0} \mathcal{H}_\xi$, vsak podprostor \mathcal{H}_ξ pa je invarianten za vsak operator $\pi(x)$, $x \in G$. Če je $u_\xi \in \mathcal{H}_\xi$ poljuben vektor, iz (1) sledi $\pi(x)u_\xi = \langle x, \xi \rangle u_\xi$. Torej je

$\pi(x)|_{\mathcal{H}_\xi} = \langle x, \xi \rangle I_{\mathcal{H}_\xi} = \xi(x) I_{\mathcal{H}_\xi}$, se pravi, da je podupodobitev $\pi|_{\mathcal{H}_\xi}$ direktna vsota nerazcepnih (enorazsežnih) med seboj identičnih upodobitev ξ (karakterjev). Teh je toliko, kot je razsežnost podprostoru \mathcal{H}_ξ . V celoti pa seveda velja $\pi(x) = \sum_{P(\{\xi\}) \neq 0} \langle x, \xi \rangle P(\{\xi\})$, tako da je π v tem primeru direktna vsota (kopij) nerazcepnih upodobitev.

Če P ni diskretna spektralna mera, pomeni $\pi(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi)$ direktni integral nerazcepnih upodobitev.

Zgled 2. Naj bo zdaj π leva regularna upodobitev Abelove grupe G na prostoru $L^2(G)$, torej $\pi(x)f = L_x f$ za $f \in L^2(G)$ in $x \in G$. Če je \mathcal{F} Fourierova (Plancherelova) transformacija na \widehat{G} , uporabimo na $L_x f$ njen inverz in dobimo za vsak $\eta \in \widehat{G}$

$$\mathcal{F}^{-1}(L_x f)(\eta) = \int_G \langle y, \eta \rangle f(x^{-1}y) dy = \langle x, \eta \rangle \mathcal{F}^{-1} f(\eta).$$

Ker je po drugi strani zaradi (1) res $L_x f = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle dP(\xi) f$, velja tudi

$$\mathcal{F}^{-1}(L_x f) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mathcal{F}^{-1}(P(\xi) f).$$

Odtod vidimo, da mora biti

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mathcal{F}^{-1}(P(\xi) f) = \langle x, \cdot \rangle \mathcal{F}^{-1} f.$$

Definirajmo zdaj vektorsko mero μ z vrednostmi v $L^2(\widehat{G})$ s predpisom $\mu(E) = \chi_E \cdot (\mathcal{F}^{-1} f)$ za vsako Borelovo množico E . Hitro vidimo, da je ta vektorska mera števno aditivna in regularna. Za vsako omejeno merljivo funkcijo g na \widehat{G} , ki je limita enostavnih funkcij oblike $\sum_k c_k \chi_{E_k}$ velja $\int_{\widehat{G}} g d\mu = g \cdot (\mathcal{F}^{-1} f)$. V posebnem primeru $g(\xi) = \langle x, \xi \rangle$ je

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu(\xi) = \langle x, \cdot \rangle (\mathcal{F}^{-1} f).$$

Vidimo, da za vsak $x \in G$ in vsak $f \in L^2(G)$ velja

$$\int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mathcal{F}^{-1}(P(\xi) f) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \xi \rangle d\mu.$$

Zaradi enoličnosti spektralne mere v izreku 2 to pomeni, da za vsako Borelovo množico E velja $\mathcal{F}^{-1}(P(E) f) = \chi_E \cdot (\mathcal{F}^{-1} f)$ oziroma $P(E) f = \mathcal{F}(\chi_E \cdot \mathcal{F}^{-1} f)$. Spoznali smo, da je pri levi regularni upodobitvi na $L^2(G)$ spektralna mera iz izreka 2 dana za vsako Borelovo množico E s predpisom $P(E) = \mathcal{F} M_{\chi_E} \mathcal{F}^{-1}$, kjer je M_{χ_E} operator množenja s karakteristično funkcijo χ_E .

Zgled 3. Kadar je $G = \mathbb{R}$, izrek 2 pove, da za vsako unitarno upodobitev realne osi na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} obstaja ena sama regularna projektorska mera P na $\widehat{G} = \mathbb{R}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(3) \quad \pi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} dP(\xi).$$

Če je $A = \int_{\mathbb{R}} \xi dP(\xi)$ (v splošnem neomejen) sebi adjungiran operator, lahko pišemo

$$\pi(x) = e^{2\pi i x A},$$

tako da je $x \mapsto \pi(x)$ enoparametrična grupa z infinitezimalnim generatorjem A , (3) pa je Stoneov reprezentacijski izrek za enoparametrične grupe (glej Theorem 13.38 v [28]).

V. poglavje : ANALIZA NA KOMPAKTNIH GRUPAH

Seznani se bomo z osnovno teorijo upodobitev kompaktnih grup in Fourierovo analizo na teh grupah in spoznali osnovne primere klasičnih matričnih grup nizke dimenzije.

Odslej naj bo lokalno kompaktna grupa G kompaktna, ne pa nujno Abelova. Spomnimo se, da je Haarova mera na kompaktni grupi G hkrati levo in desno invariantna, tako da je grupa unimodularna. Vedno bomo tudi predpostavili, da je normalizirana, se pravi, da je $|G| = 1$.

1. Upodobitve kompaktnih grup

Osnovni namen tega razdelka je dokaz, da je za kompaktno grupo G vsaka nerazcepna upodobitev končno razsežna in da je vsaka unitarna upodobitev direktna vsota nerazcepnih. Ključ do tega rezultata je naslednja trditev, ki pove, da za vsako unitarno upodobitev lahko najdemo netrivialen kompakten operator, ki komutira z vsemi operatorji $\pi(x)$, $x \in G$.

Trditev 1. *Naj bo π unitarna upodobitev kompaktne grupe G in $u \in \mathcal{H}_\pi$ poljuben enotski vektor. Za vsak $v \in \mathcal{H}_\pi$ definirajmo*

$$Tv = \int_G \langle v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u dx.$$

Potem je T netrivialen pozitiven kompakten operator na prostoru \mathcal{H}_π in velja $T \in C(\pi)$.

Dokaz. Očitno je T dobro definirana linearna preslikava iz \mathcal{H}_π v \mathcal{H}_π , saj je $x \mapsto \pi(x)u$ zvezna funkcija z vrednostmi v \mathcal{H}_π . Hitro vidimo, da je linearna. V bistvu je povprečje na grupi G po vseh pravokotnih projektorjih $v \mapsto \langle v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u$ ranga 1.

Ker je

$$\langle Tv, v \rangle = \int_G \langle v, \pi(x)u \rangle \langle \pi(x)u, v \rangle dx = \int_G |\langle v, \pi(x)u \rangle|^2 dx \geq 0,$$

je T pozitiven operator in celo netrivialen, saj je $|\langle u, \pi(x)u \rangle|^2 > 0$ na dovolj majhni okolici enote $1 \in G$ in zato $\langle Tu, u \rangle > 0$. Zaradi kompaktnosti grupe G je funkcija $x \mapsto \pi(x)u$ celo enakomerno zvezna. Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka particija grupe G na končno mnogo paroma disjunktih podmnožic E_1, E_2, \dots, E_n in take točke $x_j \in E_j$, da je neenakost $\|\pi(x)u - \pi(x_j)u\| < \epsilon/2$ izpolnjena za $x \in E_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Potem imamo za $x \in E_j$

$$\|\langle v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u - \langle v, \pi(x_j)u \rangle \pi(x_j)u\| \leq$$

$$\|\langle v, (\pi(x) - \pi(x_j))u \rangle \pi(x)u\| + \|\langle v, \pi(x_j)u \rangle (\pi(x) - \pi(x_j))u\| < \epsilon \|v\|.$$

Definirajmo

$$T_\epsilon v = \sum_{j=1}^n |E_j| \langle v, \pi(x_j)u \rangle \pi(x_j)u = \sum_{j=1}^n \int_{|E_j|} \langle v, \pi(x_j)u \rangle \pi(x_j)u dx.$$

Potem je za vsak $v \in \mathcal{H}_\pi$ res tudi

$$\|Tv - T_\epsilon v\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{|E_j|} (\langle v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u - \langle v, \pi(x_j)u \rangle \pi(x_j)u) dx \right\| < \epsilon \|v\|.$$

Ker pa je zaloga vrednosti operatorja T_ϵ linearna ovojnica vektorjev $\pi(x_j)u$, $j = 1, 2, \dots, n$, je T_ϵ operator končnega ranga in zato T kompakten operator kot limita operatorjev končnega ranga. Iz

$$\begin{aligned}\pi(y)Tv &= \int \langle v, \pi(x)u \rangle \pi(yx)u dx = \int \langle v, \pi(y^{-1}x)u \rangle \pi(x)u dx = \\ &= \int \langle \pi(y)v, \pi(x)u \rangle \pi(x)u dx = T\pi(y)v,\end{aligned}$$

ki velja za vsak $y \in G$ in $v \in \mathcal{H}_\pi$, pa vidimo, da T komutira z vsemi operatorji $\pi(y)$, $y \in G$, oziroma, da je $T \in C(\pi)$.

Izrek 1. *Če je grupa G kompaktna, je vsaka nerazcepna upodobitev za G končno razsežna in vsaka unitarna upodobitev za G direktna vsota nerazcepnih upodobitev.*

Dokaz. Denimo, da je π nerazcepna upodobitev grupe G in T operator iz trditve 1. Po Schurovi lemi je $T = cI$, $c \neq 0$, zaradi nerazcepnosti upodobitve π . Odtod sledi, da je identični operator I kompakten in zato $\dim \mathcal{H}_\pi < \infty$.

Zdaj naj bo π poljubna unitarna upodobitev grupe G in T spet kot v trditvi 1. Ker je operator T kompakten, netrivialen in sebiadjungiran (pozitiven), ima od nič različno lastno vrednost. Ustrezni lastni podprostor \mathcal{M} je končno razsežen in invarianten tudi za vsak $\pi(x)$, $x \in G$, saj je $T \in C(\pi)$. Torej ima upodobitev π končno razsežno podupodobitev $\pi^\mathcal{M}$ ($\pi^\mathcal{M}(x) = \pi(x)|_\mathcal{M}$ za vsak $x \in G$). Če ni že sama nerazcepna, vsebuje vsaj eno nerazcepno podupodobitev (sicer $\pi^\mathcal{M}$ razcepimo z uporabo trditve IV.1.2 v direktno vsoto dveh podupodobitev itd.; s preprosto indukcijo takoj vidimo, da nas zaradi končne dimenzije to takoj privede do nerazcepne podupodobitve). Spoznali smo, da je vsaka končno razsežna upodobitev kompaktne grupe direktna vsota nerazcepnih upodobitev in da ima potem tudi vsaka unitarna upodobitev (končno razsežno) nerazcepno podupodobitev.

Naj bo $\{\mathcal{M}_\alpha\}$ maksimalna družina paroma pravokotnih nerazcepnih invariantnih podprostorov upodobitve π . Taka družina obstaja po Zornovi lemi. Če je \mathcal{N} ortogonalni komplement direktne vsote $\bigoplus_\alpha \mathcal{M}_\alpha$, je po trditvi IV.1.2 tudi \mathcal{N} invarianten podprostor in podupodobitev $\pi^\mathcal{N}$ ima po razmisleku v prejšnjem odstavku nerazcepno podupodobitev. To pa nasprotuje maksimalnosti družine $\{\mathcal{M}_\alpha\}$, razen v primeru ko je $\mathcal{N} = \{0\}$. Torej je $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_\alpha \mathcal{M}_\alpha$.

Včasih bomo podprostor $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_\pi$, ki je invarianten za π in na katerem je $\pi^\mathcal{M}$ nerazcepna upodobitev, na kratko imenovali kar *nerazcepen* podprostor (za π).

Definicija 1. V primeru kompaktne grupe G naj \widehat{G} pomeni množico ekvivalenčnih razredov $[\pi]$ (glede na relacijo unitarne ekvivalence) nerazcepnih unitarnih upodobitev π grupe G .

Ta definicija je v skladu z definicijo dualne grupe \widehat{G} , kadar je kompaktna grupa G Abelova, saj so tedaj nerazcepne unitarne upodobitve grupe G ravno karakterji na G .

Splošno unitarno upodobitev odslej označimo z ρ . Razcep unitarne upodobitve ρ na nerazcepne podupodobitve v splošnem ni enolično določen. Na primer, razcep identične upodobitve na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} razsežnosti več kot 1, je odvisen od izbire baze v \mathcal{H} , razcep na različne ekvivalenčne razrede pa je enoličen v naslednjem smislu.

Trditev 2. *Za vsak $[\pi] \in \widehat{G}$ naj bo \mathcal{M}_π zaprta linearna ovojnica vseh invariantnih podprostorov, na katerih je podupodobitev upodobitve ρ grupe G ekvivalentna upodobitvi π . Potem je \mathcal{M}_π invarianten podprostor za ρ in velja $\mathcal{M}_\pi \perp \mathcal{M}_{\pi'}$, če $[\pi] \neq [\pi']$. Za vsak nerazcepen podprostor $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_\pi$ je podupodobitev $\rho^\mathcal{N}$ ekvivalentna upodobitvi π .*

Dokaz. Invariantnost podprostora \mathcal{M}_π je očitna. Naj bosta \mathcal{L}_π in $\mathcal{L}_{\pi'}$ poljubna nerazcepna podprostora, tako da je $\rho^{\mathcal{L}_\pi} \sim \pi$ in $\rho^{\mathcal{L}_{\pi'}} \sim \pi'$. Potem seveda $\rho^{\mathcal{L}_\pi} \not\sim \rho^{\mathcal{L}_{\pi'}}$, saj tudi $\pi \not\sim \pi'$. Če je P pravokotni projektor na podprostor \mathcal{L}_π , hitro opazimo, da je $P|_{\mathcal{L}_{\pi'}} \in C(\rho^{\mathcal{L}_{\pi'}}, \rho^{\mathcal{L}_\pi}) = \{0\}$, torej po Schuru $P|_{\mathcal{L}_\pi} = 0$ (glej trditev IV.1.5). To pomeni, da je $\mathcal{L}_\pi \perp \mathcal{L}_{\pi'}$, od koder sledi tudi $\mathcal{M}_\pi \perp \mathcal{M}_{\pi'}$.

Če je \mathcal{N} nerazcepen podprostor v \mathcal{M}_π , mora obstajati vsaj en nerazcepen podprostor $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_\pi$ z lastnostjo $\rho^{\mathcal{L}} \sim \pi$, tako da za pravokotni projektor P na podprostor \mathcal{L} velja $P(\mathcal{N}) \neq 0$. V nasprotnem primeru bi bil namreč podprostor \mathcal{N} pravokoten na vsak tak \mathcal{L} , torej $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}_\pi$. Kot prej vidimo, da je $P|_{\mathcal{N}} \in C(\rho^{\mathcal{N}}, \rho^{\mathcal{L}})$. Ker je $P|_{\mathcal{N}} \neq 0$, sta po Schurovi lemi (trditev II.1.5) obe podupodobitvi med seboj ekvivalentni in seveda ekvivalentni upodobitvi π , torej $\rho^{\mathcal{N}} \sim \rho^{\mathcal{L}} \sim \pi$.

Po izreku 1 je $\mathcal{H}_\rho = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{L}_\alpha$, kjer so \mathcal{L}_α invariantni podprostori, na katerih je podupodobitev $\rho_\alpha = \rho^{\mathcal{L}_\alpha}$ nerazcepna. Kot prej združimo tiste podprostore \mathcal{L}_α , pri katerih je ekvivalentna dani nerazcepni upodobitvi π v podprostor \mathcal{M}_π . Potem je tudi

$$\mathcal{H}_\rho = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{M}_\pi \quad \text{in} \quad \mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\rho_\alpha \sim \pi} \mathcal{L}_\alpha,$$

Razcep $\mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\rho_\alpha \sim \pi} \mathcal{L}_\alpha$ ni enoličen, če ni že sam prostor \mathcal{M}_π nerazcepen. Pokazali bomo, da kljub temu vsak tak razcep vsebuje enako mnogo sumandov.

Definicija 2. Kardinalnost množice $\{\alpha; \rho_\alpha \sim \pi\}$ imenujemo *kratnost (multipliciteta) ekvivalenčnega razreda $[\pi]$ v upodobitvi ρ* in označimo z $\text{mult}(\pi, \rho)$.

Kratnost nerazcepne podupodobitve je lahko tudi neskončna.

Trditev 3. Za vsako nerazcepno upodobitev π unitarne upodobitve ρ velja

$$\text{mult}(\pi, \rho) = \dim C(\pi, \rho).$$

Dokaz. Če je $\mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\rho_\alpha \sim \pi} \mathcal{L}_\alpha$, naj za vsak α unitaren operator $U_\alpha : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{L}_\alpha$ posreduje unitarno ekvivalenco. Za $u \in \mathcal{H}_\pi$, $\|u\| = 1$, naj bo $v_\alpha = U_\alpha u$ za vsak α . Potem je očitno $\{v_\alpha\}$ ortonormirana množica v \mathcal{M}_π , ki razpenja zaprt podprostor \mathcal{V} . Opazimo, da je $\dim \mathcal{V} = \text{mult}(\pi, \rho)$. Poiskali bomo bijekcijo med \mathcal{V} in $C(\pi, \rho)$.

Definirajmo preslikavo $\Phi : C(\pi, \rho) \rightarrow \mathcal{V}$ s predpisom $\Phi(T) = Tu$ za $T \in C(\pi, \rho)$. Očitno je ta preslikava linearna. Pokažimo najprej, da je injektivna. Denimo, da je $\Phi(T) = 0$. Potem je tudi $T\pi(x)u = \rho(x)Tu = 0$ za vsak $x \in G$. Torej je $0 \neq \ker T$ invarianten podprostor za nerazcepno upodobitev π , torej $\ker T = \mathcal{H}_\pi$ oziroma $T = 0$.

Poleg tega je $T\mathcal{H}_\pi$ končno razsežen invarianten podprostor v \mathcal{H}_π , na katerem je upodobitev ρ ekvivalentna nerazcepni upodobitvi π . Ekvivalenca je dana z unitarnim operatorjem U iz polarnega razcepa $T = U|T|$, saj za vsak $x \in G$, $v \in \mathcal{H}_\pi$ velja

$$\rho(x)U|T|v = \rho(x)Tv = T\pi(x)v = U|T|\pi(x)v = U\pi(x)|T|v.$$

Torej je tudi $T\mathcal{H}_\pi$ nerazcepen podprostor, se pravi v $\mathcal{M}_\pi = \bigoplus_{\rho_\alpha \sim \pi} \mathcal{L}_\alpha$. to pomeni, da lahko zapišemo $Tu = \sum_{\rho_\alpha \sim \pi} u_\alpha$, kjer so $u_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. Naj bo P_α pravokotni projektor na \mathcal{L}_α . Potem se hitro vidi, da je $P_\alpha T \in C(\pi, \rho_\alpha)$, torej $P_\alpha T = c_\alpha U_\alpha$, ker je po Schurovi lemi $C(\pi, \rho_\alpha)$ enorazsežen prostor. To pomeni, da je $u_\alpha = P_\alpha Tu = c_\alpha U_\alpha u = c_\alpha v_\alpha \in \mathcal{V}$ za vsak α in zato tudi $Tu \in \mathcal{V}$. Obratno, če je $v \in \mathcal{V}$ poljuben vektor, je $v = \sum_{\alpha} c_\alpha v_\alpha$ in $\sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 < \infty$, zato konvergira vrsta $\sum_{\alpha} c_\alpha U_\alpha$ zaradi paroma pravokotnih zalag vrednosti operatorjev U_α krepko v $C(\pi, \rho_\alpha)$. Torej obstaja tak $T \in C(\pi, \rho_\alpha)$, da je $T = \sum_{\alpha} c_\alpha U_\alpha$. Zato je $v = \sum_{\alpha} c_\alpha v_\alpha = (\sum_{\alpha} c_\alpha U_\alpha)u = Tu$.

Vidimo, da je Φ ne samo injektivna, ampak tudi surjektivna preslikava iz $C(\pi, \rho)$ na \mathcal{V} , se pravi, da velja tudi $\dim C(\pi, \rho) = \dim \mathcal{V}$. Toda razsežnost prostora \mathcal{V} je ravno kratnost ekvivalenčnega razreda $[\pi]$ in dokaz je končan.

Za konec si oglejmo še trditev o poljubni končno razsežni upodobitvi kompaktne grupe.

Trditev 4. *Naj bo ρ ne nujno unitarna upodobitev kompaktne grupe G na končno razsežnem prosotru \mathcal{V} , tj. poljuben zvezen homomorfizem iz G v grupo vseh obrnljivih linearnih operatorjev na \mathcal{V} . Potem obstaja na \mathcal{V} skalaren produkt, glede na katerega je upodobitev ρ unitarna.*

Dokaz. Izberimo poljuben skalaren produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ na \mathcal{V} in definirajmo nov skalarni produkt na \mathcal{V} z integriranjem po grupi G ($u, v \in \mathcal{V}$)

$$\langle u, v \rangle = \int_G \langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle_0 dx.$$

Zaradi invariantnosti Haarove mere je za vsak $y \in G$

$$\langle \rho(y)u, \rho(y)v \rangle = \int_G \langle \rho(xy)u, \rho(xy)v \rangle_0 dx = \int_G \langle \rho(x)u, \rho(x)v \rangle_0 dx = \langle u, v \rangle.$$

Torej je vsak $\rho(y)$ surjektivna izometrija, se pravi unitarni operator na \mathcal{V} in zato ρ unitarna upodobitev grupe G na prostoru \mathcal{V} , opremljenem s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Novi skalarni produkt je v zvezi s starim preko pozitivno definitnega operatorja S , tako da velja $\langle u, v \rangle = \langle Su, v \rangle_0$ za vsak $u, v \in \mathcal{V}$. Iz $\langle \rho(y)u, \rho(y)v \rangle = \langle u, v \rangle$ sledi $S\langle \rho(y)u, \rho(y)v \rangle_0 = \langle Su, v \rangle_0$ oziroma $\rho(y^{-1})S\rho(y) = S$ za vsak $y \in G$. Če je $S = T^2$, $T \geq 0$, imamo $(T^{-1}\rho(y^{-1}T)(T\rho(y)T^{-1}) = I$, tako da je $\pi(y) = T\rho(y)T^{-1}$ unitaren operator, upodobitev ρ pa pododobna unitarni upodobitvi π . To nas ne preseneča, saj kompaktna grupa amenabilna (glej izrek IV.2.2).

2. Peter-Weylov izrek

Pri Abelovi grupi G so elementi dualne grupe \widehat{G} karakterji, torej zvezne kompleksne funkcije na G , v nekomutativnem primeru so elementi v \widehat{G} ekvivalenčni razredi nerazcepnih upodobitev, torej nikakor ne kompleksne funkcije. Do funkcij pa lahko pridemo s t.i. matričnimi elementi.

Definicija 1. Naj bo π poljubna unitarna upodobitev kompaktne grupe G . *Matrični elementi* upodobitve π so funkcije $\phi_{u,v} : G \rightarrow \mathbb{C}$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$, definirane za vsak $x \in G$ s predpisom

$$(1) \quad \phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle.$$

Te funkcije so očitno zvezne. Razlog za njihovo ime se skriva v posebni izbiri vektorjev u, v . Če zanju izberemo elementa ortonormirane baze $\{e_j\}$ v Hilbertovem prostoru \mathcal{H}_π , dobimo element matrike, ki v izbrani bazi predstavlja operator $\pi(x)$, torej za vsak i, j

$$(2) \quad \pi_{ij}(x) = \phi_{e_i, e_j}(x) = \langle \pi(x)e_j, e_i \rangle.$$

Linearno ovojnico vseh matričnih elementov dane upodobitve π označimo z \mathcal{E}_π . To je podprostor v $C(G)$, torej tudi v vseh podprostorih $L^p(G)$, $p \geq 1$.

Trditev 1. *Podprostor \mathcal{E}_π je odvisen le od ekvivalenčnega razreda $[\pi]$, je invarianten za leve in desne premike in dvostranski ideal v $L^1(G)$. Če je $\dim \mathcal{H}_\pi = n < \infty$, je $\dim \mathcal{E}_\pi \leq n^2$.*

Dokaz. Denimo, da je $\pi \sim \pi'$. Naj bo U unitaren operator, ki posreduje ekvivalenco med π in π' , tako da je $\pi'(x) = U\pi(x)U^{-1}$ za vsak $x \in G$. Potem je $\phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle = \langle \pi'(x)Uu, Uv \rangle = \phi'_{Uu, Uv}(x)$, tako da je vsaka funkcija, ki je matrični element za π tudi matrični element za π' in obratno. Poleg tega za $x, y \in G$ in $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ imamo

$$\phi_{u,v}(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, v \rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)v \rangle = \phi_{u, \pi(y)v}(x)$$

in

$$\phi_{u,v}(xy) = \langle \pi(xy)u, v \rangle = \langle \pi(x)\pi(y)u, v \rangle = \phi_{\pi(y)u,v}(x),$$

tako da je prostor \mathcal{E}_π invarianten za leve in desne premike. Je pa tudi dvostranski ideal v $L^1(G)$. Neposredno se namreč lahko prepričamo, da za vsak $f \in L^1(G)$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ velja $f * \phi_{u,v} = \phi_{u,\pi(\bar{f})v}$ in $\phi_{u,v} * f = \phi_{\pi(\check{f})u,v}$, kjer je $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ za vsak x .

Nazadnje je pri pogoju $\dim \mathcal{H}_\pi = n$ podprostor \mathcal{E}_π napet na n^2 funkcij π_{ij} iz (2). Torej je $\dim \mathcal{E}_\pi \leq n^2$.

Trditev 2. Če je $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_n$, je $\mathcal{E}_\pi = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{\pi_j}$.

Dokaz. Očitno je $\mathcal{E}_{\pi_j} \subset \mathcal{E}_\pi$, saj je $\mathcal{H}_{\pi_j} \subset \mathcal{H}_\pi$. Če pa je $u = \sum_{j=1}^n u_j$ in $v = \sum_{j=1}^n v_j$, kjer sta $u_j, v_j \in \mathcal{H}_{\pi_j}$ za vsak j , je $\langle \pi(x)u_j, v_k \rangle = 0$ za $j \neq k$. Torej je za vsak $x \in G$

$$\phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \pi(x)u_j, v_k \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \pi(x)u_j, v_j \rangle,$$

se pravi $\phi_{u,v} = \sum_{j=1}^n \phi_{u_j,v_j} \in \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{\pi_j}$.

Z matričnimi elementi bomo konstruirali ortonormirano bazo v $L^2(G)$. Odslej naj bo $d_\pi = \dim \mathcal{H}_\pi$. Naslednja trditev je znana pod imenom *Schurove ortogonalnostne relacije*.

Trditev 3. Bodita π in π' nerazcepni unitarni upodobitvi kompaktne grupe G in \mathcal{E}_π , $\mathcal{E}_{\pi'}$ ustrezna podprostora, generirana z matričnimi elementi za π in π' , kot podprostora v $L^2(G)$. Potem velja:

- (a) Za $[\pi] \neq [\pi']$ je $\mathcal{E}_\pi \perp \mathcal{E}_{\pi'}$.
- (b) Če je $\{e_j\}$ ortonormirana baza za prostor \mathcal{H}_π in so π_{ij} funkcije iz (2), je množica $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, d_\pi\}$ ortonormirana baza za \mathcal{E}_π .

Dokaz. Za vsak linearen operator $T : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_{\pi'}$ naj bo

$$\tilde{T} = \int_G \pi'(x^{-1})T\pi(x)dx.$$

Potem je za $y \in G$

$$\tilde{T}\pi(y) = \int_G \pi'(x^{-1})T\pi(xy)dx = \int_G \pi'(yx^{-1})T\pi(x)dx = \pi'(y)\tilde{T},$$

tako da je $\tilde{T} \in C(\pi, \pi')$. Izberimo poseben operator ranga ena, namreč $Tu = \langle u, v \rangle v'$, $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ in $v' \in \mathcal{H}_{\pi'}$. Potem za vsak $u \in \mathcal{H}_\pi$, $u' \in \mathcal{H}_{\pi'}$ velja

$$(3) \quad \langle \tilde{T}u, u' \rangle = \int_G \langle T\pi(x)u, \pi'(x)u' \rangle dx = \int_G \langle \pi(x)u, v \rangle \langle v', \pi'(x)u' \rangle dx = \int_G \phi_{u,v}(x) \overline{\phi_{u',v'}(x)} dx.$$

Po Schurovi lemi velja naslednje: Če $[\pi] \neq [\pi']$, je $\tilde{T} = 0$, torej je $\mathcal{E}_\pi \perp \mathcal{E}_{\pi'}$ zaradi (3) in velja točka (a). Če pa je $\pi' = \pi$, je $\tilde{T} = cI$. Izberimo v (3) vektorje $u = e_i$, $u' = e_{i'}$, $v = e_j$, $v' = e_{j'}$ in dobimo

$$\int_G \pi_{ij}(x) \overline{\pi_{i'j'}(x)} dx = c \langle e_i, e_{i'} \rangle = cd_{ii'}.$$

Po drugi strani je $cd_\pi = \text{tr } \tilde{T} = \int_G \text{tr}(\pi(x^{-1})T\pi(x))dx = \text{tr } T = \langle e_j, e_{j'} \rangle = \delta_{jj'}$, tako da je $c = \delta_{jj'}/d_\pi$. Torej dobimo

$$\int_G \pi_{ij}(x) \overline{\pi_{i'j'}(x)} dx = \frac{1}{d_\pi} \delta_{ii'} \delta_{jj'},$$

kar pomeni, da je $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, d_\pi\}$ ortonormirana množica v \mathcal{E}_π . Ker pa je $\dim \mathcal{E}_\pi \leq d_\pi^2$ po trditvi 1, je $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\}$ ortonormirana baza za \mathcal{E}_π .

Videli smo (glej trditev 1), da je podprostor $\mathcal{E}_\pi \subset L^2(G)$ invarianten za leve in desne premike, torej za levo in desno regularno upodobitev, L in R , grupe G . Če je π nerazcepna upodobitev, je \mathcal{E}_π končno razsežen, torej zaprt podprostor. Kaj so nerazcepne podupodobitve za L oziroma R na podprostoru \mathcal{E}_π ? Odgovor daje naslednji izrek, v katerem nastopa tudi kontragradienčna upodobitev $\bar{\pi}$, katere matrični elementi $\bar{\pi}_{ij}$ so konjugirani k matričnim elementom π_{ij} za upodobitev π .

Izrek 1. *Naj bo π nerazcepna upodobitev kompaktne grupe G in π_{ij} njeni matrični elementi, glede na bazo $\{e_j\}$ v \mathcal{H}_π dani z (2). Za vsak $i = 1, 2, \dots, d_\pi$ naj bo $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{E}_\pi$ podprostor, napet na $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{in}$ (i -ta vrstica matrike (π_{ij})) in $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{E}_\pi$ podprostor, napet na $\pi_{1i}, \pi_{2i}, \dots, \pi_{ni}$ (i -ti stolpec matrike (π_{ij})). Potem je podprostor \mathcal{R}_i invarianten za desno regularno upodobitev R in velja $R^{\mathcal{R}_i} \sim \pi$ (ekvivalenco posreduje unitarni operator $\sum_j c_j e_j \mapsto \sum_j c_j \pi_{ij}$). Prav tako je podprostor \mathcal{C}_i invarianten za levo regularno upodobitev L in velja $L^{\mathcal{C}_i} \sim \pi$ (ekvivalenco posreduje unitarni operator $\sum_j c_j e_j \mapsto \sum_j c_j \pi_{ji}$).*

Dokaz. Glede na dano bazo v \mathcal{H}_π se upodobitev π izraža z matričnimi elementi v obliki

$$(4) \quad \pi(x) \left(\sum_j c_j e_j \right) = \sum_{k,j} \pi_{kj}(x) c_j e_k$$

za vsak $x \in G$. Zaradi $\pi(yx) = \pi(y)\pi(x)$ je $\pi_{ij}(yx) = \sum_k \pi_{ik}(y)\pi_{kj}(x)$ za $x, y \in G$, torej $R_x \pi_{ij} = \sum_k \pi_{kj}(x) \pi_{ik}$ za $x \in G$. Torej je za $x \in G$

$$R_x \left(\sum_j c_j \pi_{ij} \right) = \sum_j c_j R_x \pi_{ij} = \sum_{j,k} \pi_{kj}(x) c_j \pi_{ik}.$$

Primerjava s (4) izda, da za desno regularno upodobitev velja zgornji izrek. Podobno dobimo za levo regularno upodobitev za vsak $x \in G$

$$L_x \left(\sum_j c_j \pi_{ji} \right) = \sum_{j,k} \pi_{kj}(x^{-1}) c_j \pi_{ik} = \sum_{j,k} \bar{\pi}_{jk}(x) c_j \pi_{ik},$$

ker je za vsak $x \in G$

$$\pi_{kj}(x^{-1}) = \langle \pi(x^{-1})e_j, e_k \rangle = \langle e_j, \pi(x)e_k \rangle = \overline{\langle \pi(x)e_k, e_j \rangle} = \overline{\pi_{jk}(x)} = \bar{\pi}_{jk}(x).$$

Torej tudi za levo regularno upodobitev velja izrek.

Definicija 2. Postavimo $\mathcal{E} = \text{span} \left(\bigcup_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{E}_\pi \right)$, prostor vseh končnih linearnih kombinacij matričnih elementov vseh nerazcepnih upodobitev kompaktne grupe G .

Prostor G lahko imamo tudi za linearno ovojnico vseh podprostorov \mathcal{E}_π , ko preteče π vse končno razsežne upodobitve grupe G , kar je analogija prostora vseh trigonometričnih polinomov v klasičnem primeru (ko je grupa $G = \mathbb{T}$).

Trditev 4. *Prostor \mathcal{E} je algebra.*

Dokaz. Zadošča pokazati, da so za poljuben par ekvivalenčnih razredov $[\pi], [\pi'] \in \widehat{G}$, z ustreznimi matričnimi elementi π_{ij}, π'_{kl} tudi funkcije $\pi_{ij}\pi'_{kl}$ matrični elementi neke končno razsežne upodobitve grupe G . Ta upodobitev je tenzorska upodobitev $\pi \otimes \pi'$, ki deluje na prostoru vseh matrik T (ki so operatorji iz \mathcal{H}_π v $\mathcal{H}_{\pi'}$ v dani bazi) s predpisom (za $x \in G$)

$$(\pi \otimes \pi')(x)T = \pi(x)T\pi'(x^{-1}).$$

Baza v prostoru matrik so elementi matrične enote e_{jk} , zato so matrični elementi za $\pi \otimes \pi'$ za vsak $x \in G$ dani z

$$\langle (\pi \otimes \pi')(x)e_{jl}, e_{ik} \rangle = \langle \pi(x)e_{jl}\pi'(x^{-1}), e_{ik} \rangle = \pi_{ij}(x)\pi'_{lk}(x^{-1}) = \pi_{ij}(x)\pi'_{kl}(x).$$

Za naslednji izrek, ki je glavna sestavina Peter-Weylovega izreka, bomo dali dva dokaza; prvi uporablja izrek Gelfanda in Raikova, drugi, ki je od njega neodvisen, pa je originalni dokaz F. Petra in H. Weyla.

Izrek 2. Algebra \mathcal{E} je gosta v $C(G)$ v supremum normi in gosta v normi $\|\cdot\|_2$ v vsakem prostoru $L^p(G)$ za $1 \leq p < \infty$.

Dokaz. (A) Zadošča dokazati, da je algebra \mathcal{E} je gosta v $C(G)$. Po izreku Gelfanda in Raikova ta algebra loči točke (ker za $x \neq y$ obstaja nerazcepna upodobitev π z lastnostjo $\pi(x) \neq \pi(y)$, vsaj en matrični element za π razlikuje med x in y). Poleg tega je simetrična, tj. zaprta za konjugiranje (ker vsaki upodobitvi pripada kontragradienčna podupodobitev) in vsebuje konstante (ker je med končno razsežnimi upodobitvami tudi trivialna upodobitev grupe G na enorazsežnem prostoru \mathbb{C}). Rezultat zdaj sledi iz Stone-Weierstrassovega izreka.

(B) Če je $\psi \in C(G)$ realna simetrična funkcija, je operator $T_\psi : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$, definiran s konvolucijo $T_\psi f = \psi * f$ za vsak $f \in L^2(G)$, sebiadjungiran, z zalogo vrednosti, vsebovano v $C(G)$ (trditev II.2.1). Ker velja $\|T_\psi f\|_\infty \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$, velja za vsak $x \in G$ tudi

$$(5) \quad \|L_x(T_\psi f) - T_\psi f\|_\infty \leq \|(L_x \psi - \psi) * f\|_\infty \leq \|f\|_2 \|L_x \psi - \psi\|_2$$

Če je torej $B \subset L(G)$ omejena množica, je $\{T_\psi f; f \in B\}$ zaradi (5) enako zvezna in enako omejena, torej po Arzela-Acsoliju relativno kompaktna, podmnožica v $C(G)$. To pomeni, da je linearna preslikava $f \mapsto T_\psi f$ iz $L^2(G)$ v $C(G)$ kompaktna, zato je kompakten tudi sebiadjungiran operator $T_\psi : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$.

Vsak lastni podprostor $L_\alpha = \{f; T_\psi f = \alpha f\}$ je zaradi enakosti $R_x(\psi * f) = \psi * R_x$ invarianten tudi za desne premike. Če je $\alpha \neq 0$, je $\dim L_\alpha < \infty$. Naj bo $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ortonormirana baza za L_α v primeru $\alpha \neq 0$ in $x \mapsto \rho_{jk}(x) = \langle R_x f_k, f_j \rangle$ matrični elementi za upodobitev R^{L_α} . Torej za vsak k in vsak $x, y \in G$ velja

$$f_k(yx) = R_x f_k(y) = \sum_{j=1}^n \rho_{jk}(x) f_j(y)$$

in zato

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n f_j(1) \rho_{jk}(x).$$

To pomeni, da je $f_k \in \mathcal{E}_R$ za vsak k oziroma $L_\alpha \subset \mathcal{E}_R \subset \mathcal{E}$ za $\alpha \neq 0$.

Znano je, da za sebiadjungiran kompakten operator T_ψ velja $L^2(G) = \bigoplus_{\alpha \in \sigma(T_\psi)} L_\alpha$. Vsak $f \in L^2(G)$ lahko zapišemo v obliki vrste $f = \sum_{\alpha} f_\alpha$, ki konvergira v $L^2(G)$ in kjer so vsi sumandi $f_\alpha \in L_\alpha$. Potem je $T_\psi f = \sum_{\alpha \neq 0} \alpha f_\alpha$. To pomeni, da je podprostor $\mathcal{E} \cap T_\psi L^2(G)$ gost v $T_\psi L^2(G)$ v supremum normi. Tu je bila ψ poljubna realna simetrična zvezna funkcija. Ker lahko za ψ izberemo elemente približne enote, sledi gostost algebre \mathcal{E} v $L^2(G)$.

Iz izreka 2, ki ga npr. dokažemo po drugi poti, takoj sledi izrek Gelfanda in Raikova. Če namreč za $x, y \in G$ za vsako nerazcepno upodobitev π velja $\pi(x) = \pi(y)$, imajo tudi vsi matrični elementi isto vrednost pri x in y . Ker lahko po izreku 2 z njimi enakomerno aproksimiramo vsako zvezno funkcijo na grupi G , mora biti $x = y$.

Posledica. $L^2(G) = \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}} \mathcal{E}_\pi$.

Dokaz. Iz vsakega ekvivalenčnega razreda $[\pi]$ izberimo en element. Zaradi trditve 3 so podprostori \mathcal{E}_π med seboj ortogonalni, njihova linearna ovojnica pa je enaka \mathcal{E} , ki je po izreku 2 gosta v $L^2(G)$.

Dosedanje ugotovitve povzemimo v en sam pomemben izrek.

Izrek 3 (Peter-Weyl). *Naj bo G kompaktna grupa. Potem je algebra \mathcal{E} gosta v supremum normi v $C(G)$ in velja $L^2(G) = \bigoplus_{[\pi] \in \widehat{G}} \mathcal{E}_\pi$. Če so matrični elementi π_{ij} definirani z (2), je $\{\sqrt{d_\pi} \pi_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, d_\pi, [\pi] \in \widehat{G}\}$ ortonormirana baza v $L^2(G)$. Vsak $[\pi] \in \widehat{G}$ se pojavi v desni in v levi regularni upodobitvi grupe G s kratnostjo d_π . Natančneje, za vsak $i = 1, 2, \dots, d_\pi$ je podprostor v \mathcal{E}_π (oziroma v $\mathcal{E}_{\bar{\pi}}$), ki ga razpenjajo elementi i -te vrstice (oziroma i -tega stolpca) matrike (π_{ij}) (oziroma $(\bar{\pi}_{ij})$) invarianten za desno (oziroma levo) regularno upodobitev, ki je na njem ekvivalentna upodobitvi π .*

Izrek 2 lahko uporabimo v naslednji karakterizaciji Liejevih grup.

Izrek 4. *Kompaktna grupa G je Liejeva natanko takrat, ko ima G zvesto končno razsežno upodobitev.*

Dokaz. Denimo, da ima G zvesto upodobitev π na prostoru \mathbb{C}^n . Potem je G izomorfna kompaktni podgrupi $\pi(G)$ Liejeve grupe $U(n)$. Toda znano je, da je vsaka zaprta podgrupa Liejeve grupe spet Liejeva grupa.

Obratno, če je G Liejeva grupa, obstaja odprta okolica U enote $1 \in G$, ki ne vsebuje nobene podgrupe razen trivialne podgrupe $\{1\}$ (to je ena od karakterizacij Liejevih grup, glej [23], str. 105). Po izreku 2 je $\bigcap_{[\pi] \in \widehat{G}} \ker \pi = \{1\}$, torej $\bigcap_{[\pi] \in \widehat{G}} (\ker \pi \setminus U) = \emptyset$. Ker je $\ker \pi \setminus U$ kompaktna množica, obstaja končen nabor nerazcepnih upodobitev $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, da je tudi $\bigcap_{j=1}^n (\ker \pi_j \setminus U) = \emptyset$, se pravi $\bigcap_{j=1}^n \ker \pi_j \subset U$. Ker je presek jeder podgrupa, po definiciji množice U velja $\bigcap_{j=1}^n \ker \pi_j = \{1\}$. To pomeni, da je $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_n$ zvesta končno razsežna upodobitev grupe G .

3. Fourierova analiza na kompaktnih grupah

Zaradi Peter-Weylovega izreka (izrek 2.3) in Schurovih ortogonalnih relacij (trditev 2.3) za vsak $f \in L^2(G)$ velja naslednji Fourierov razvoj

$$(1) \quad f = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} c_{ij}^\pi \pi_{ij}, \text{ kjer je } c_{ij}^\pi = d_\pi \int_G f(x) \overline{\pi_{ij}(x)} dx.$$

Razvoj (1) je odvisen od izbire baze in matričnih elementov π_{ij} , lahko pa se temu izognemo, če iz vsakega ekvivalenčnega razreda nerazcepnih upodobitev izberemo po enega predstavnika.

Fourierova transformacija

Definicija 1. *Fourierova transformiranka funkcija $f \in L^1(G)$ je družina operatorjev $\{\widehat{f}(\pi)\}_{[\pi] \in \widehat{G}}$, tako da je za vsak π*

$$(2) \quad \widehat{f}(\pi) = \int_G f(x) \pi(x^{-1}) dx = \int_G f(x) \pi(x)^* dx.$$

Ta definicija se v komutativnem primeru ujema z definicijo III.2.1, kjer je π karakter na Abelovi grupi G in $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}$. Opazimo tudi to, da je v resnici $\widehat{f}(\pi) = \pi(\bar{f})^*$, kjer je $\pi(f) = \int f(x) \pi(x) dx$ (upodobitev grupne algebre iz razdelka IV.3).

Če v \mathcal{H}_π izberemo bazo, glede na katero je operator $\pi(x)$ predstavljen z matriko $(\pi_{ij}(x))$, je v njej tudi operator $\widehat{f}(\pi)$ dan z matriko $(\widehat{f}(\pi)_{ij})$, pri čemer je s koeficienti c_{ij}^π iz (1)

$$(3) \quad \widehat{f}(\pi)_{ij} = \int_G f(x) (\pi(x)^*)_{ij} dx = \int_G f(x) \overline{\pi_{ji}(x)} dx = c_{ij}^\pi / d_\pi.$$

Ker pa je za vsak $x \in G$

$$\sum_{i,j} c_{ij}^{\pi} \pi_{ij}(x) = d_{\pi} \sum_{i,j} \widehat{f}(\pi)_{ji} \pi_{ij}(x) = d_{\pi} \sum_j [\widehat{f}(\pi) \pi(x)]_{jj} = d_{\pi} \operatorname{tr}[\widehat{f}(\pi) \pi(x)],$$

je Fourierov razvoj (1) enak

$$(4) \quad f = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_{\pi} \operatorname{tr}[\widehat{f}(\pi) \pi].$$

Opomba. Vrsta (4) ne konvergira nujno po točkah (skoraj povsod) na G ampak le po normi v $L^2(G)$, če je seveda $f \in L^2(G)$, saj velja isto za vrsto (1). Parsevalova enakost se tedaj glasi (v obliki (1))

$$\|f\|_2^2 = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} |c_{ij}^{\pi}|^2 / d_{\pi}$$

ali (v obliki (4))

$$\|f\|_2^2 = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_{\pi} \operatorname{tr}[\widehat{f}(\pi)^* \widehat{f}(\pi)],$$

saj je $\widehat{f}(\pi)^* \widehat{f}(\pi) = \int \int \overline{f(x)} f(y) \pi(xy^{-1}) dx dy$ in

$$\begin{aligned} d_{\pi} \operatorname{tr}[\widehat{f}(\pi)^* \widehat{f}(\pi)] &= d_{\pi} \int \int \overline{f(x)} f(y) \operatorname{tr} \pi(xy^{-1}) dx dy = d_{\pi} \int \int \overline{f(x)} f(y) \sum_{i=1}^{d_{\pi}} \pi_{ii}(xy^{-1}) dx dy = \\ d_{\pi} \int \int \overline{f(x)} f(y) \sum_{i=1}^{d_{\pi}} \sum_{j=1}^{d_{\pi}} \pi_{ij}(x) \pi_{ji}(y) (y^{-1}) dx dy &= d_{\pi} \int \int \overline{f(x)} f(y) \sum_{i=1}^{d_{\pi}} \sum_{j=1}^{d_{\pi}} \pi_{ij}(x) \overline{\pi_{ij}(y)} dx dy = \\ d_{\pi} \sum_{i=1}^{d_{\pi}} \sum_{j=1}^{d_{\pi}} \left(\int_G f(x) \overline{\pi_{ij}(x)} dx \right)^{-} \int_G f(y) \overline{\pi_{ij}(y)} dy &= \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} |c_{ij}^{\pi}|^2 / d_{\pi}. \end{aligned}$$

Čeprav je Fourierova transformiranka iz definicije 1 zdaj družina operatorjev (na prostorih \mathcal{H}_{π}), ima nekatere podobne lastnosti kot Fourierova transformiranka na Abelovih grupah. V točkah (b), (d) in (e) naslednje trditve bodimo pozorni na vrstni red!

Trditev 1. Za $f, g \in L^1(G)$, $a, b \in \mathbb{C}$ in $x \in G$ velja za vsako nerazcepno upodobitev π kompaktne grupe G :

- (a) $(af + bg)^{\wedge}(\pi) = a\widehat{f}(\pi) + b\widehat{g}(\pi)$,
- (b) $(f * g)^{\wedge}(\pi) = \widehat{g}(\pi)\widehat{f}(\pi)$,
- (c) $(f^*)^{\wedge}(\pi) = \widehat{f}(\pi)^*$,
- (d) $(L_x f)^{\wedge}(\pi) = \widehat{f}(\pi)\pi(x^{-1})$,
- (e) $(R_x f)^{\wedge}(\pi) = \pi(x)\widehat{f}(\pi)$.

Dokaz. Točka (a) je očitna. Pri točki (b) upoštevajmo definicijo konvolucije, zamenjajmo vrstni red integracije in uporabimo invariantnost integrala. Dobimo

$$\begin{aligned} (f * g)^{\wedge}(\pi) &= \int (f * g)(x) \pi(x^{-1}) dx = \int \int f(y) g(y^{-1}x) \pi(x^{-1}) dy dx = \\ &= \int f(y) \left(\int g(x) \pi(x^{-1}) dx \right) \pi(y^{-1}) dy = \widehat{g}(\pi) \widehat{f}(\pi). \end{aligned}$$

Tudi pri točki (c) ravnamo enako:

$$(f^*)^{\wedge}(\pi) = \int f^*(x) \pi(x^{-1}) dx = \int \overline{f(x^{-1})} \pi(x^{-1}) dx = \int \overline{f(x)} \pi(x) dx = \widehat{f}(\pi)^*.$$

Točki (d) in (e) dokažemo podobno z upoštevanjem definicije levega in desnega premika.

Karakterji upodobitve

Fourierovemu razvoju (1) ali (4) lahko damo še drugo obliko.

Definicija 2. Če je π končno razsežna unitarna upodobitev kompaktne grupe G , definiramo karakter χ_π upodobitve π s predpisom ($x \in G$)

$$\chi_\pi(x) = \text{tr } \pi(x).$$

Karakter upodobitve je torej zvezna funkcija na grupi G . Opazimo, da je vrednost karakterja pri vsakem $x \in G$ odvisna samo od ekvivalenčnega razreda upodobitve π .

Trditev 2. Za vsak $f \in L^1(G)$ lahko zapišemo

$$(5) \quad f = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi f * \chi_\pi.$$

Dokaz. Formulo (5) dobimo iz (4), ker je za vsak $x \in G$ in vsak $f \in L^1(G)$

$$(6) \quad \text{tr}[\widehat{f}(\pi)\pi(x)] = \int_G f(y)\text{tr}\pi(y^{-1}x)dy = \int_G f(y)\chi_\pi(y^{-1}x)dy = (f * \chi_\pi)(x).$$

Kot smo videli pri izpeljavi formule (4), je $f * \chi_\pi = \text{tr}[\widehat{f}(\pi)\pi]$ linearna kombinacija matričnih elementov za π , torej element podprostora \mathcal{E}_π . Zaradi Schurovih ortogonalnih relacij (trditev 2.3), je $f * \chi_\pi = f$, če je $f \in \mathcal{E}_\pi$, in $g * \chi_\pi = 0$, če $g \perp f$. Torej je preslikava $f \mapsto f * \chi_\pi$ pravokotni projektor iz $L^2(G)$ na \mathcal{E}_π . V posebnem primeru je za vsak par nerazcepnih upodobitev π, π'

$$(7) \quad \chi_\pi * \chi_{\pi'} = \begin{cases} \chi_\pi/d_\pi & , \quad [\pi] = [\pi'] \\ 0 & , \quad [\pi] \neq [\pi'] \end{cases}$$

Definicija 3. Funkcija f na grupi G se imenuje *centralna* ali *razredna* funkcija, če je konstantna na razredih konjugiranosti, tj. če velja $f(yxy^{-1}) = f(x)$ oziroma $f(xy) = f(yx)$ za vsak $x, y \in G$.

V primeru funkcije $f \in L^1(G)$ zahtevamo, da zgornje relacije veljajo le skoraj povsod na G . Zgled centralne funkcije je npr. vsak karakter končno razsežne upodobitve, saj je za vsak $x, y \in G$

$$\chi_\pi(xy) = \text{tr } \pi(xy) = \text{tr}(\pi(x)\pi(y)) = \text{tr}(\pi(y)\pi(x)) = \text{tr } \pi(yx) = \chi_\pi(yx).$$

Množico vseh centralnih funkcij v $C(G)$ bomo označili z $ZC(G)$, množico vseh centralnih funkcij v $L^p(G)$, $p \geq 1$, pa z $ZL^p(G)$.

Trditev 3. Prostori $L^p(G)$, $p \geq 1$, in $C(G)$ so Banachove algebre za konvolucijo, prostori $ZL^p(G)$ in $ZC(G)$ so njihovi centri.

Dokaz. Po trditvi II.2.1 in zaradi kompaktnosti grupe G in normalizirane Haarove mere na njej velja $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p$ za $f, g \in L^p(G)$ oziroma $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ za $f, g \in C(G)$. To že pove, da so Banachovi prostori $L^p(G)$ in $C(G)$ Banachove algebre.

Nadalje je za $f, g \in L^p(G)$ in $x \in G$ res $(f * g)(x) = \int f(xy^{-1})g(y)dy = \int f(xy)g(y^{-1})dy$ in $(g * f)(x) = \int g(y)f(y^{-1}x)dy = \int f(yx)g(y^{-1})dy$. Torej velja $f * g = g * f$ natanko takrat, ko je $\int [f(xy) - f(yx)]g(y^{-1})dy = 0$. Če je torej $f \in L^p(G)$, je zadnja enakost izpolnjena za vsak $g \in L^p(G)$ natanko takrat, ko je $f(xy) = f(yx)$ s.p. na G , torej, ko je $f \in ZL^p(G)$. Podobno je v $C(G)$ izpolnjena enakost $f * g = g * f$ za vsak $g \in C(G)$ natanko takrat, ko je $f \in ZC(G)$. Centri Banachovih algeber $L^p(G)$ in $C(G)$ so sestavljeni natanko iz centralnih funkcij.

Trditev 4. Če je $f \in ZL^1(G)$ in $[\pi] \in \widehat{G}$, je

$$d_\pi f * \chi_\pi = \left(\int_G f(x) \overline{\chi_\pi(x)} dx \right) \chi_\pi.$$

Dokaz. Naj bo $f \in ZL^1(G)$. Za vsak $x \in G$ in vsako nerazcepno upodobitev π imamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\pi)\pi(x) &= \int_G f(y)\pi(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy^{-1})\pi(y)dy = \\ &= \int_G f(y^{-1}x)\pi(y)dy = \int_G f(y)\pi(xy^{-1})dy = \pi(x)\widehat{f}(\pi). \end{aligned}$$

Torej je $\widehat{f}(\pi) \in C(\pi)$ in zato po Schuru $\widehat{f}(\pi) = c_\pi I$. Izračunajmo na obseh straneh sled, pa dobimo

$$d_\pi c_\pi = \text{tr } \widehat{f}(\pi) = \int_G f(x) \text{tr } \pi(x)^* dx = \int_G f(x) \overline{\text{tr } \pi(x)} dx = \int_G f(x) \overline{\chi_\pi(x)} dx.$$

To pomeni, da je zaradi (6)

$$d_\pi f * \chi_\pi = d_\pi \text{tr}(\widehat{f}(\pi)\pi) = d_\pi \text{tr}(c_\pi \pi) = d_\pi c_\pi \text{tr } \pi = \left(\int_G f(x) \overline{\chi_\pi(x)} dx \right) \chi_\pi.$$

Trditev 5. Množica $\{\chi_\pi; [\pi] \in \widehat{G}\}$ je ortonormirana baza v centru $ZL^2(G)$ algebre $L^2(G)$.

Dokaz. Vemo že, da so vsi karakterji centralne funkcije, torej v centru algebre $L^2(G)$. Zaradi Schurovih ortogonalnostnih relacij (trditev 3.3) so paroma pravokotni in normirani, saj je $\chi_\pi = \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}$. Po trditvah 2 in 4 je $f = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi$ za vsak $f \in L^2(G)$.

Sumacijska metoda

Fourierova vrsta (1) ali (4) konvergira po normi v prostoru $L^2(G)$, ne pa, kot vemo že iz klasične Fourierove analize, ko je $G = \mathbb{T}$, po normi v $L^1(G)$ ali enakomerno v $C(G)$. Tako kot v klasičnem primeru pa obstajajo ustrezne sumacijske metode, ki konvergenco Fourierove vrste izboljšajo.

Naj bo zdaj $f \in L^1(G)$ in $g \in L^2(G)$. Potem je $f * g \in L^2(G)$ in po trditvi 2 velja $f * g = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi (f * g) * \chi_\pi$ po normi v $L^2(G)$. Lahko pa pokažemo še več.

Trditev 6. Za $f \in L^1(G)$ in $g \in L^2(G)$ konvergira naslednja vrsta enakomerno na G in velja

$$f * g * g = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi (f * g * g) * \chi_\pi.$$

Dokaz. Izberimo poljubno končno podmnožico $\Phi \subset \widehat{G}$. Potem je zaradi centralnosti karakterjev in njihovih ortogonalnih relacij (7)

$$\left[\sum_{[\pi] \in \Phi} d_\pi (f * g) * \chi_\pi \right] * \left[\sum_{[\pi] \in \Phi} d_\pi g * \chi_\pi \right] = \sum_{[\pi], [\pi'] \in \Phi} d_\pi d_{\pi'} (f * g * g) * (\chi_\pi * \chi_{\pi'}) = \sum_{[\pi] \in \Phi} d_\pi (f * g * g) * \chi_\pi.$$

Prva dva faktorja sta v $L^2(G)$ in konvergirata proti $f * g$ oziroma g v normi v $L^2(G)$, njuna konvolucija pa je zvezna funkcija in zaradi ocene v trditvi II.2.2 vidimo, da v supremum normi konvergira proti $f * g * g$.

Trditev 6 je ključ do sumacijske metode. za vsako okolico U enote $1 \in G$ lahko najdemo po trditvi I.1.3 tako okolico V enote 1 , da je invariantna za konjugiranje (taki okolici rečemo centralna okolica, ker za vsak $x \in G$ velja tudi $xV = Vx$) in $V^2 \subset V^3 \subset U$. Izberimo zdaj $g = \chi_V / |V|$ in $\psi_U = g * g$. potem je ψ_U približna enota, sestavljena iz samih centralnih funkcij, saj je že χ_V centralna funkcija, ker je $xy \in V$ natanko takrat, ko je

$y \in x^{-1}V = Vx^{-1}$, se pravi natanko takrat, ko je $yx \in V$. Po trditvi 4 je $\psi_U * \chi_\pi = c_U(\pi)\chi_\pi$ za $c_U(\pi) = \int \psi_u(x)\overline{\chi_\pi(x)}dx$. Torej je

$$f * \psi_U = \left(\sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi f * \chi_\pi \right) * \psi_U = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} c_U(\pi) d_\pi f * \chi_\pi.$$

Ker je ta vrsta hkrati enaka vrsti $\sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi (f * g * g) * \chi_\pi$, konvergira po trditvi 6 enakomerno k $f * \psi_U$, zaradi lastnosti približne enote pa $f * \psi_U$ konvergira k f (enakomerno, če $f \in C(G)$, oziroma po normi v $L^p(G)$, če $f \in L^p(G)$). Konstante $c_U(\pi)$, ki sicer konvergirajo k 1, ko $U \rightarrow 1$, lahko imamo za sumacijske faktorje.

Posledica. Linearna ovojnica $\text{span} \{ \chi_\pi; [\pi] \in \widehat{G} \}$ je gosta v $ZC(G)$ in v $ZL^p(G)$ za $1 \leq p < \infty$.

Dokaz. Če je f centralna funkcija, so členi vrste $\sum c_U(\pi) d_\pi f * \chi_\pi$ linearne kombinacije karakterjev (trditev 4). Ker vrsta konvergira enakomerno in zato po normi v $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, k $f * \psi_U$ in hkrati $f * \psi_U$ konvergira k f v ustrezni normi, dobimo gostost.

V naslednjem izreku bomo določili spekter standardnih algeber centralnih funkcij. Videli bomo, da se v bistvu ujema z \widehat{G} , tj. z množico ekvivalenčnih razredov nerazcepnih upodobitev kompaktne grupe G .

Izrek 1. Naj bo \mathcal{A} katerakoli od konvolucijskih algeber $ZL^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, ali $ZC(G)$. Za $f \in \mathcal{A}$ in $[\pi] \in \widehat{G}$ definirajmo $h_\pi(f) = d_\pi \int f(x)\overline{\chi_\pi(x)}dx$. Potem je preslikava $[\pi] \mapsto h_\pi$ bijekcija iz \widehat{G} na $\sigma(\mathcal{A})$, spekter algebre \mathcal{A} , ki je homeomorfizem, če opremimo \widehat{G} z diskretno topologijo.

Dokaz. Vsak h_π je omejen linearen funkcional. Še več, po trditvi 4, relacijah (7) in centralnosti karakterjev je

$$\begin{aligned} h_\pi(f * g)\chi_\pi &= d_\pi^2 f * g * \chi_\pi = d_\pi^3 f * g * \chi_\pi * \chi_\pi = d_\pi^3 f * \chi_\pi * g * \chi_\pi = \\ &= d_\pi h_\pi(f)h_\pi(g)\chi_\pi * \chi_\pi = h_\pi(f)h_\pi(g)\chi_\pi, \end{aligned}$$

tako da je h_π multiplikativni funkcional na \mathcal{A} , torej $h_\pi \in \sigma(\mathcal{A})$. Obratno, če je $h \in \sigma(\mathcal{A})$ poljuben multiplikativen funkcional, je po trditvi 4

$$h(\chi_\pi)h(\chi_{\pi'}) = h(\chi_\pi * \chi_{\pi'}) = \begin{cases} h(\chi_\pi)/d_\pi & , \quad [\pi'] = [\pi] \\ 0 & , \quad [\pi'] \neq [\pi] \end{cases}$$

Torej je $h(\chi_\pi) = 0$ ali $h(\chi_\pi) = 1/d_\pi$; poleg tega je $h(\chi_\pi) \neq 0$ le za en π , npr. za $\pi = \pi_0$. Tedaj je $h = h_{\pi_0}$, ker je linearna ovojnica karakterjev po zadnji posledici gosta v \mathcal{A} . Ker je torej $\{h_\pi\} = \{h \in \sigma(\mathcal{A}); h(\chi_\pi) \neq 0\}$, je $\{h_\pi\}$ odprta množica za vsak π in topologija na $\sigma(\mathcal{A})$ je diskretna.

Razdelek zaključimo z naslednjo zanimivo uporabo splošne teorije upodobitev kompaktnih grup pri končnih grupah.

Trditev 7. Naj bo G končna grupa. Potem je moč množice \widehat{G} enaka številu konjugiranostnih razredov v G , vsota $\sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi^2$ pa enaka redu grupe G .

Dokaz. Ker je $\{ \chi_\pi; [\pi] \in \widehat{G} \}$ baza v prostoru centralnih funkcij (trditev 5), isto pa velja za množico vseh karakterističnih funkcij konjugiranostnih razredov (saj so centralne funkcije na njih konstantne), sta obe množici enako močni. Ker pa je $\sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi^2 = \dim L^2(G) = \dim(\text{vse funkcije na } G) = |\{ \chi_{\{x\}}; x \in G \}|$, je vsota $\sum_{[\pi] \in \widehat{G}} d_\pi^2$ enaka številu elementov v G , torej redu grupe G .

4. Nerazcepne upodobitve grup $SU(2)$, $U(2)$ in $O(3)$

Opisali bomo nerazcepne upodobitve in razcep prostora $L^2(G)$ najprej za grupo $G = SU(2)$, rezultate pa potem uporabili pri sorodnih grupah $O(3)$ in $U(2)$.

Grupa $SU(2)$

Trditev 1. Grupa $SU(2)$ vseh unitarnih kompleksnih matrik reda dve z determinanto 1 je sestavljena iz matrik oblike $U_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$ in $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Dokaz. Stolpca unitarne matrike $U \in U(2)$ morata biti ortonormirana, zato je matrika oblike $U = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, kjer velja $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$ in $a\bar{c} + b\bar{d} = 0$. Odtod dobimo $(c, d) = e^{i\theta}(-\bar{b}, \bar{a})$ za $\theta \in \mathbb{R}$. Torej je $\det U = e^{i\theta}(|a|^2 + |b|^2) = e^{i\theta}$, tako da je $U \in SU(2)$ natanko takrat, ko je $e^{i\theta} = 1$. Torej lahko pišemo

$$U = U_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

S kratkim računom ugotovimo, da je $U_{a,b}^{-1} = U_{a,b}^* = U_{\bar{a}, -b}$ in da deluje matrika (se pravi, cela grupa $SU(2)$) na \mathbb{C}^2 s predpisom $U_{a,b}(z, w) = (az - \bar{b}w, bz + \bar{a}w)$.

Korespondenca $U_{a,b} \leftrightarrow (a, b) = U_{a,b}(1, 0)$ identificira množico $SU(2)$ z enotsko sfero $S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$.

V grupi $SU(2)$ lahko najdemo tri posebne in zanimive enoparametrične podgrupe z elementi:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(\theta) &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \\ \text{(b)} \quad G(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \phi \in \mathbb{R}, \\ \text{(c)} \quad H(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & i \sin \psi \\ i \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Trditev 2. Vsak element $U \in SU(2)$ je konjugiran natanko eni matriki oblike $F(\theta)$, kjer je $0 \leq \theta \leq \pi$.

Dokaz. Vsaka unitarna matrika je normalna, se pravi diagonalizabilna, tako da obstaja unitarna matrika $V \in U(2)$ z lastnostjo $VUV^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$. Če je $U \in SU(2)$, je $\det U = 1$, torej $\beta = \bar{\alpha}$, tako da je $VUV^{-1} = F(\theta)$, kjer je $\theta \in [-\pi, \pi]$. Zamenjajmo V z $(\det V)^{-1/2}V$, pa lahko vzamemo, da je $V \in SU(2)$. Ker lahko v $SU(2)$ izračunamo $F(-\theta) = H(\pi/2)F(\theta)H(-\pi/2)$, je matrika U konjugirana matriki $F(\theta)$ za $0 \leq \theta \leq \pi$. Nazadnje vidimo, da matriki $F(\theta_1)$ in $F(\theta_2)$ nista konjugirani (niti podobni) za $0 \leq \theta_1 \neq \theta_2 \leq \pi$, saj imata tedaj različni lastni vrednosti.

Da se pokazati, da je v identifikaciji grupe $SU(2)$ z enotsko sfero $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ množica $\{F(\theta); 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ravno poldnevnik (meridian), ki povezuje severni pol $(1, 0)$ z južnim polom $(-1, 0)$, parameter θ pa meri kot do severnega pola (žemljepisno širino). Konjugiranostni razredi so po trditvi 2 ravno ploskve s konstantno širino θ .

Posledica. Za vsako zvezno centralno funkcijo f na grupi $SU(2)$ je $f \circ F$ zvezna funkcija na intervalu $[0, \pi]$, preslikava $f \mapsto f \circ F$ pa $*$ -izomorfizem algeber iz $ZC(SU(2))$ na $C([0, \pi])$.

Polinomi

Naj bo \mathcal{P} prostor vseh polinomov dveh kompleksnih spremenljivk, torej vseh polinomov oblike $P(z, w) = \sum_{j,k} c_{jk} z^j w^k$ in naj bo \mathcal{P}_m podprostor vseh homogenih polinomov stopnje m , se pravi polinomov oblike $P(z, w) = \sum_{j=0}^m c_j z^j w^{m-j}$. Če je σ normalizirana površinska mera na enotski sferi S^3 , naj bo

$$\langle P, Q \rangle = \int_{S^3} P(Z') \overline{Q(Z')} d\sigma(Z')$$

skalarni produkt na \mathcal{P} , podedovan iz $L^2(\sigma)$ (seveda \mathcal{P} ni zaprt podprostor v $L^2(G)$, pač pa so taki vsi podprostori homogenih polinomov, ker so končmorazsežni).

Pokazali bomo, da monomi $z^j w^k$ sestavljajo ortogonalno množico v \mathcal{P} . Namesto kartezijskih koordinat (z, w) bom uvedli polarne koordinate (r, Z') , tako da bomo postavili $Z = (z, w) = rZ'$, kjer je $r = |Z| = (|z|^2 + |w|^2)^{1/2}$ in $Z' \in S^3$. Lebesguovo mero na $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ označimo z d^4Z , Lebesguovo mero na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ pa z d^2z oziroma d^2w . Torej je $d^4Z = d^2z d^2w = cr^3 dr d\sigma(Z')$, kjer je $c = \sigma(S^3)$, površinska mera enotske sfere S^3 . Kot bo sledilo iz dokaza naslednje trditve, je $c = 2\pi^2$.

Trditev 3. Če funkcija $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ zadošča pogoju $f(aZ) = a^m f(Z)$ za $a > 0$, velja

$$\int_{S^3} f(Z') d\sigma(Z') = \frac{1}{\pi^2 \Gamma(\frac{1}{2}m + 2)} \int_{\mathbb{C}^2} f(Z) e^{-|Z|^2} d^4Z.$$

Dokaz. Integrirajmo z uporabo polarnih koordinat:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^2} f(Z) e^{-|Z|^2} d^4Z &= c \int_0^\infty \int_{S^3} f(rZ') e^{-r^2} r^3 d\sigma(Z') dr = \\ &= c \int_0^\infty r^{m+3} e^{-r^2} dr \int_{S^3} f(Z') d\sigma(Z') = \frac{c}{2} \Gamma(\frac{1}{2}m + 2) \int_{S^3} f(Z') d\sigma(Z'). \end{aligned}$$

Če tu izberemo konstantno funkcijo $f = 1$ in upoštevamo, da je tedaj $m = 0$, dobimo

$$\frac{c}{2} = \int_{\mathbb{C}^2} e^{-|Z|^2} d^4Z = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \right)^4 = \pi^2.$$

Ortogonalnost monomov je zdaj razmeroma hitra posledica zgornjega računa.

Trditev 4. Za nenegativna cela števila p, q, r, s velja:

$$\int_{S^3} z^p \bar{z}^q w^r \bar{w}^s d\sigma(z, w) = \begin{cases} 0 & , \quad q \neq p \text{ ali } s \neq r \\ p! r! / (p + r + 1)! & , \quad q = p \text{ in } s = r \end{cases}$$

Dokaz. Po trditvi 3 je

$$\int_{S^3} z^p \bar{z}^q w^r \bar{w}^s d\sigma(z, w) = \frac{1}{\pi^2 \Gamma(\frac{1}{2}(p + q + r + s) + 2)} \int_{\mathbb{C}} z^p \bar{z}^q e^{-|z|^2} d^2z \int_{\mathbb{C}} w^r \bar{w}^s e^{-|w|^2} d^2w.$$

Ta dva integrala izračunamo z uporabo polarnih koordinat. Dobimo

$$\int_{\mathbb{C}} z^p \bar{z}^q e^{-|z|^2} d^2z = \int_0^{-\infty} e^{i(p-q)\theta} r^{p+q+1} e^{-r^2} dr d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad q \neq p \\ \pi p! & , \quad q = p \end{cases}$$

in podobno drugi integral. Skupaj dobimo željeni rezultat.

Trditev 5. Podprostori \mathcal{P}_m v $L^2(\sigma)$ so paroma pravokotni, ortonormirana baza za \mathcal{P}_m pa je množica

$$\left\{ \sqrt{\frac{(m+1)!}{j!(m-j)!}} z^j w^{m-j}; 0 \leq j \leq m \right\}.$$

Dokaz. Je posledica prejšnje trditve.

Nerazcepne upodobitve

Grupa $SU(2)$ deluje na prostoru polinomov \mathcal{P} na naraven način preko leve regularne upodobitve, ki jo bomo zdaj označili s π , torej po predpisu

$$(1) \quad \pi(U_{a,b})P(z, w) = P(U_{a,b}^{-1}(z, w)) = P(\bar{a}z + \bar{b}w, -bz + aw).$$

Seveda so podprostor homogenih polinomov \mathcal{P}_m invariantni za π . Podupodobitev označimo s π_m . Pokažimo, da je vsaka od podupodobitev π_m nerazcepna.

Trditev 6. *Naj bo \mathcal{M} podprostor v \mathcal{P} , invarianten za π . Če je $P \in \mathcal{M}$, velja tudi $z(\partial P/\partial w) \in \mathcal{M}$ in $w(\partial P/\partial z) \in \mathcal{M}$.*

Dokaz. Naj bo $G(\phi)$ kot v točki (b) na začetku razdelka. Za vsak $\phi \neq 0$ leži polinom $(\pi(G(\phi))P - P)/\phi$ v \mathcal{M} , torej velja isto tudi za limito $(d/d\phi)\pi(G(\phi))P|_{\phi=0}$ (saj je podprostor \mathcal{M} končno razsežen in zato zaprt). Izračunajmo:

$$\frac{d}{d\phi}\pi(G(\phi))P|_{\phi=0} = \frac{d}{d\phi}P(z \cos \phi + w \sin \phi, -z \sin \phi + w \cos \phi)|_{\phi=0} = w \frac{\partial P}{\partial z} - z \frac{\partial P}{\partial w}$$

in vidimo, da je $w \frac{\partial P}{\partial z} - z \frac{\partial P}{\partial w} \in \mathcal{M}$. Podobno spoznamo da za $H(\psi)$ kot v točki (c) z začetka oddelka velja $w \frac{\partial P}{\partial z} + z \frac{\partial P}{\partial w} = -i \frac{d}{d\psi}\pi(H(\psi))P|_{\psi=0} \in \mathcal{M}$. Seštejmo in odštejmo, pa dobimo iskani rezultat.

Izrek 1. *Za vsako celo število $m \geq 0$ je π_m nerazcepna upodobitev grupe $SU(2)$ na prostoru \mathcal{P}_m .*

Dokaz. Naj bo \mathcal{M} invarianten podprostor v \mathcal{P}_m in $P(z, w) = \sum_{j=0}^m c_j z^j w^{m-j}$ netrivialen element v \mathcal{M} . Če je J največji indeks z lastnostjo $c_J \neq 0$. Potem je

$$\left(w \frac{\partial}{\partial z}\right)^J P(z, w) = c_J J! w^m.$$

Po trditvi 6 je $w^m \in \mathcal{M}$. Če na w^m uporabimo operator $z(\partial/\partial w)$ večkrat zapored, dobimo po vrsti $zw^{m-1} \in \mathcal{M}$, $z^2 w^{m-2} \in \mathcal{M}$, ..., $z^m \in \mathcal{M}$. Torej je $\mathcal{M} = \mathcal{P}_m$.

Naj bo zdaj χ_m karakter upodobitve π_m in $\chi_m^0 = \chi_m \circ F$. Hitro vidimo, da so elementi $z^j w^{m-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, ortogonalne baze v \mathcal{P}_m za vsak θ lastni vektorji operatorja $\pi_m(F(\theta))$, saj za vsak j velja

$$\pi_m(F(\theta))(z^j w^{m-j}) = e^{i(2j-m)\theta} z^j w^{m-j}.$$

Torej imamo za vsak $\theta \in [0, \pi]$

$$(2) \quad \chi_m^0(\theta) = \sum_{j=0}^m e^{i(2j-m)\theta} = \frac{e^{i(m+2)\theta} - e^{-im\theta}}{e^{2i\theta} - 1} = \frac{e^{i(m+1)\theta} - e^{-i(m+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin(m+1)\theta}{\theta}.$$

Izrek 2. $SU(2)^\wedge = \{[\pi_m]; m \geq 0\}$.

Dokaz. Najprej ugotovimo, da so upodobitve π_m vse med seboj neekvivalentne, saj imajo med seboj različno razsežnosti in zato različne karakterje. Zaradi (2) imamo za vsak $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \chi_0^0(\theta) &= 1, \quad \chi_1^0(\theta) = 2 \cos \theta, \\ \chi_m^0(\theta) - \chi_{m-2}^0(\theta) &= \frac{\sin(m+1)\theta - \sin(m-1)\theta}{\sin \theta} = 2 \cos m\theta \end{aligned}$$

za $m \geq 2$. Torej je linearna ovojnicata span $\{\chi_m^0; m \geq 0\}$ enaka linearni ovojnicata span $\{\cos m\theta; m \geq 0\}$, za katero pa vemo, da je enakomerno gosta v $C([0, \pi])$.

Upošteva je posledico trditve 2 vidimo, da je linearna ovojnica $\text{span} \{\chi_m; m \geq 0\}$ enakomerno gosta v prostoru centralnih funkcij na $SU(2)$. Torej je 0 edina funkcija, ki je pravokotna na vse karakterje χ_m . Iz trditve 3.5 tedaj vidimo, da so χ_m vsi nerazcepni karakterji.

Opomba. Iz (2) vidimo, da so karakterji, ki so tako in tako odvisni le od konjugiranostnega razreda, realne funkcije.

Matrični elementi

Izračunajmo matrične elemente upodobitve π_m glede na ortonormirano bazo $\{e_j\}$ prostora \mathcal{P}_m iz trditve 5, se pravi, glede na funkcije ($j = 0, 1, 2, \dots, m$)

$$e_j(z, w) = \sqrt{\frac{(m+1)!}{j!(m-j)!}} z^j w^{m-j}.$$

Vidimo, da je v tem primeru $d_{\pi_m} = \dim \mathcal{P}_m = m+1$. Zaradi enostavnosti označimo krajše $\pi_m(a, b) = \pi_m(U_{a,b})$. Matrični elementi glede na izbrano ortonormirano bazo so potem funkcije iz \mathbb{C}^2 v \mathbb{C} , definirane s predpisom

$$(a, b) \mapsto \pi_m^{jk}(a, b) = \langle \pi_m(a, b)e_k, e_j \rangle.$$

Spomnimo se, da je delovanje grupe $SU(2)$ na protoru \mathcal{P}_m dano z (1). Za vsak $k = 0, 1, \dots, m$ imamo torej z razvojem slike k -tega stolpca matrike $\pi_m(a, b)$ po bazi

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(m+1)!}{k!(m-k)!}} (\bar{a}z + \bar{b}w)^k (-bz + aw)^{m-k} &= [\pi_m(a, b)e_k](z, w) = \\ \sum_{j=0}^m \pi_m^{jk}(a, b) e_j(z, w) &= \sum_{j=0}^m \sqrt{\frac{(m+1)!}{j!(m-j)!}} \pi_m^{jk}(a, b) z^j w^{m-j}. \end{aligned}$$

Primerjajmo začetek in konec, pa vidimo, da za vsak $k = 0, 1, \dots, m$ in poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja

$$(3) \quad \sum_{j=0}^m \sqrt{\frac{k!(m-k)!}{j!(m-j)!}} \pi_m^{jk}(a, b) z^j w^{m-j} = (\bar{a}z + \bar{b}w)^k (-bz + aw)^{m-k}$$

Odtod lahko izračunamo $\pi_m^{jk}(a, b)$ tako, da razvijemo desno stran po potencah spremenljivk z in w ter primerjamo koeficient pri monomu $z^j w^{m-j}$.

V posebnem primeru pri $k = 0$ (začetni stolpec) dobimo z uporabo binomskega obrazca

$$\sum_{j=0}^m \sqrt{\frac{m!}{j!(m-j)!}} \pi_m^{j0}(a, b) z^j w^{m-j} = (-bz + aw)^m = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!}{j!(m-j)!} b^j a^{m-j} z^j w^{m-j}.$$

Odtod najdemo

$$\pi_m^{j0}(a, b) = (-1)^j \sqrt{\frac{m!}{j!(m-j)!}} b^j a^{m-j} = \frac{1}{\sqrt{m+1}} e_j(-b, a).$$

Definirajmo $U : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_m$ s predpisom $(UP)(z, w) = P(-w, z)$ za vsak $z, w \in \mathbb{C}$. Potem je $\pi_m^{j0} = Ue_j/\sqrt{m+1}$. Ker se lahko hitro prepričamo, da je U unitaren operator, vidimo, da funkcije π_m^{j0} , tj. elementi začetnega stolpca, razpenjajo isti prostor \mathcal{P}_m (faktor $\sqrt{m+1} = \sqrt{d_{\pi_m}}$ se pojavi, ker je norma teh funkcij enaka $1/\sqrt{d_{\pi_m}}$). Po Peter-Weylovem izreku je podupodobitev na podprostoru, napetem na elementih prvega stolpca, ekvivalentna kontragradienčni upodobitvi $\bar{\pi}_m$. Kontragradienčna upodobitev v tem primeru deluje s predpisom

$$(4) \quad (\bar{\pi}_m(U_{a,b})P)(z, w) = P(az + bw, -\bar{b}z + \bar{a}w).$$

Hitro vidimo, da je potem

$$(U^{-1}\pi_m(a, b)UP)(z, w) = (\pi_m(a, b)UP)(w, -z) = (UP)(\bar{a}z + \bar{b}w, -bz + aw) = \\ P(az + bw, -\bar{b}z + \bar{a}w) = (\bar{\pi}_m(U_{a,b})P)(z, w).$$

Torej je kontragradienčna upodobitev $\bar{\pi}_m$ ekvivalentna osnovni upodobitvi π_m .

Podobno spoznamo, da elementi zadnjega stolpca π_m^{jm} , $j = 0, 1, 2, \dots, m$ razpenjajo konjugiran prostor $\bar{\mathcal{P}}_m$, saj za vsak $a, b \in \mathbb{C}$ velja $\pi_m^{jm}(a, b) = e_j(a, b)/\sqrt{m+1}$.

Nekaj lahko povemo tudi o elementih poljubnega drugega stolpca matrike (π_m^{jk}) . Zaradi oblike enakosti (3), iz katere določimo $\pi_m^{jk}(a, b)$, vidimo, da je to polinom v spremenljivkah a, b, \bar{a}, \bar{b} in sicer homogen stopnje $m - k$ v spremenljivkah a, b ter homogen stopnje k v spremenljivkah \bar{a}, \bar{b} . Rečemo, da je bihomogen, dvostopnje $(m - k, k)$. Poleg tega je harmonična funkcija na $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Zadošča namreč Laplaceovi enačbi

$$\frac{\partial^2 \pi_m^{jk}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_m^{jk}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_m^{jk}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \pi_m^{jk}}{\partial v^2} = 0,$$

kjer je $a = x + iy$ in $b = u + iv$. To vidimo iz tega, ker je pri vskem $z, w \in \mathbb{C}$ desna stran harmonična funkcija (potem morajo biti harmonični tudi koeficienti). Slednje pa najlažje spoznamo tako, da Laplaceov operator izrazimo v kompleksnem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \bar{a}} + 4 \frac{\partial^2}{\partial b \partial \bar{b}}$$

in ga uporabimo na desni strani enakosti (3). Z neposrednim odvajanjem dobimo rezultat 0.

Povzemimo dogajanje v zvezi z upodobitvami grupe $SU(2)$. Če jo identificiramo z enotsko sfero S^3 v \mathbb{C}^2 , vidimo, da je Peter-Weylov razcep $L^2(SU(2)) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{E}_{\pi_m}$ v resnici razvoj s kvadratom integrabilne funkcije na sferi po sferičnih harmoničnih funkcijah. Nadaljnji razcep $\mathcal{E}_{\pi_m} = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}_{p,q}$, kjer je $\mathcal{H}_{p,q} = \text{span} \{ \pi_{p+q}^{jq}; 0 \leq j \leq p+q \}$, pa te harmonične funkcije grupira glede na njihovo dvostopnjo bihomogenosti.

Grupa $SO(3)$

Pokazali bomo, da je grupa $SU(2)$ skoraj identična grupi $SO(3)$ vseh vrtenj (rotacij) realnega prostora \mathbb{R}^3 . Spomnimo, se da $SU(2)$ vsebuje tri enoparametrične podgrupe $F(\theta)$, $G(\phi)$ in $H(\psi)$, kjer so $\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R}$. Potem vsebuje tudi njihove infinitezimalne generatorje

$$F'(0) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad G'(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H'(0) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Napnimo na te tri matrike realen linearen prostor vseh poševno simetričnih matrik reda 2, ki imajo sled enako nič. To je tako imenovana Liejeva algebra $su(2)$ grupe $SU(2)$. Lahko jo identificiramo z \mathbb{R}^3 s preslikavo

$$(t, u, v) \mapsto X(t, u, v) = tF'(0) + uG'(0) + vH'(0) = \begin{bmatrix} it & -u + iv \\ u + iv & -it \end{bmatrix}.$$

Konjugacija na sami grupi $SU(2)$ inducira posebno upodobitev grupe $SU(2)$ na prostoru $su(2)$, ki jo imenujemo adjungirana upodobitev in je definirana s predpisom

$$Ad(U)X = UXU^{-1}.$$

Kratek račun namreč pokaže, da je $Ad(U_{a,b})X(t, u, v) = X(t', u', v')$, kjer je

$$t' = (|a|^2 - |b|^2)t + 2(\text{Im } ab)u - 2(\text{Re } ab)v,$$

$$(5) \quad u' + iv' = 2iab\bar{t} + (\bar{a}^2 + b^2)u + i((\bar{a}^2 - b^2)v).$$

Odtod najdemo dvoje:

- (a) $\ker Ad = \{I, -I\}$, saj iz (5) vidimo, da je $Ad(U_{a,b}) = I$ natanko takrat, ko je $b = 0$ in $a^2 = 1$,
 (b) $Ad(F(\theta))X(t, u, v) = X(t, u \cos 2\theta + v \sin 2\theta, -u \sin 2\theta + v \cos 2\theta)$,
 $Ad(G(\phi))X(t, u, v) = X(t \cos 2\phi - v \sin 2\phi, u, t \sin 2\phi + v \cos 2\phi)$,
 $Ad(H(\psi))X(t, u, v) = X(t \cos 2\psi + u \sin 2\psi, -t \sin 2\psi + u \cos 2\psi, v)$.

Če torej identificiramo $su(2)$ z \mathbb{R}^3 , pomenijo $Ad(F(\theta))$, $Ad(G(\phi))$ in $Ad(H(\psi))$ vrtenja za kote $2\theta, 2\phi, 2\psi$ okrog osi t , osi u oziroma osi v (Eulerjeve rotacije).

Izrek 3. $Ad(SU(2)) = SO(3)$ in zato $SO(3) \cong SU(2)/\{I, -I\}$.

Dokaz. Da se pokazati (in to je dovolj), da je grupa $SO(3)$ generirana z vrtenji okrog koordinatnih osi. To sledi iz dejstva, da je za vsak $T \in SO(3)$ ena lastna vrednost enaka 1, drugi dve pa sta konjugirano kompleksni in po absolutni vrednosti enaki ena, kar pomeni, da je T rotacija okrog neke osi. Z rotacijo okrog dveh koordinatnih osi lahko vedno dosežemo, da se os vrtenja za T ujema z eno od teh dveh koordinatnih osi.

Posledica. Naj bodo π_m nerazcepne upodobitve grupe $SU(2)$. Potem je $SO(3)^\wedge = \{\rho_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$, kjer je $\rho_k(Ad(U)) = \pi_{2k}(U)$.

Dokaz. Po izreku 3 so upodobitve za $SO(3)$ natanko tiste upodobitve za $SU(2)$, ki so trivialne na množici $\{I, -I\}$. Ker po definiciji nerazcepnih upodobitev π_m grupe $SU(2)$ velja $\pi_m(-I) = (-1)^m I$, dobimo iskani rezultat.

Grupa $U(2)$

Znano je, da je edini operator, ki komutira z vsemi unitarnimi operatorji na nekem Hilbertovem prostoru skalarni večkratnik identitete. Torej je center grupe $U(2)$, tj. množica vseh unitarnih matrik reda 2, ki komutirajo z vsemi elementi iz $U(2)$, enak $Z = \{e^{i\theta}I; \theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{T}$. To sledi tudi iz Schurove leme, saj deluje $U(2)$ nerazcepno na prostoru \mathbb{C}^2 .

Definirajmo preslikavo iz produktne grupe $Z \times SU(2) = \{(e^{i\theta}I, U); \theta \in \mathbb{R}, U \in SU(2)\}$ v grupo $U(2)$ s predpisom $(e^{i\theta}I, U) \mapsto e^{i\theta}U$. Ta preslikava je homomorfizem grup. Poleg tega je surjektivna. Če je namreč $V \in U(2)$ poljuben element, izberimo θ tako, da je $\det V = e^{2i\theta}$. Potem za $U = e^{-i\theta}V$ velja $e^{i\theta}U = V$. Jedro preslikave pa je enako množici $\{(I, I), (-I, -I)\}$. Torej imamo po osnovnem izreku o homomorfizmih grup

$$U(2) \cong (Z \times SU(2))/\{(I, I), (-I, -I)\} \cong (\mathbb{T} \times SU(2))/\{(I, I), (-I, -I)\}.$$

Odtod lahko določimo nerazcepne upodobitve grupe $U(2)$. Naj bo ρ taka upodobitev. Komponirana s faktorsko preslikavo, je to nerazcepna upodobitev za $Z \times SU(2)$. Za vsak θ je $\rho(e^{i\theta}I) \in C(\rho)$, zato proporcionalen identičnemu operatorju I na \mathcal{H}_ρ , se pravi $\rho(e^{i\theta}I) = c(\theta)I$. Ker mora biti to unitaren operator, je $c(\theta) \in \mathbb{T}$, torej c karakter na \mathbb{T} . Zato obstaja tak $n \in \mathbb{Z}$, da je $\rho(e^{i\theta}I) = e^{in\theta}I$. Po drugi strani, če je \mathcal{M} poljuben invarianten podprostor za zožitev $\rho|_{SU(2)}$, je invarianten tudi za ρ , saj je

$$\rho(e^{i\theta}U) = \rho(e^{i\theta}I \cdot U) = \rho(e^{i\theta}I)\rho(U) = e^{in\theta}I \cdot \rho(U)$$

za vsak $U \in SU(2)$. Torej je tudi $\rho|_{SU(2)}$ nerazcepna upodobitev (za grupo $SU(2)$), zato ekvivalentna eni od nerazcepnih upodobitev π_m , $m \geq 0$, ki jih že poznamo. Tedaj je ρ ekvivalentna produktu nerazcepnih upodobitev. Do ekvivalence natančno lahko torej predpostavimo kar enakost, tj. da za vsak $U \in SU(2)$ velja

$$(6) \quad \rho(e^{i\theta}U) = e^{in\theta}\pi_m(U)$$

Ker pa je $e^{i\pi}I = -I$, imamo za vsako nerazcepno upodobitev ρ oblike (6) enakost $(-1)^n I = \pi_m(-I) = (-1)^m I$, torej morata imeti m in n isto parnost (tj. sta hkrati deljiva z 2).

Obratno tudi velja: pri pogoju iste parnosti je z (6) dobro definirana nerazcepna upodobitev ρ grupe $U(2)$. Različna m ali n dasta neekvivalentni upodobitvi, ker sta tedaj njuni zožitvi na $SU(2)$ ali na Z neekvivalentni. Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 4. *Dualni objekt grupe $U(2)$ je enak*

$$U(2)^\wedge = \{[\rho_{m,n}]; m \geq 0, n \in \mathbb{Z}, m \equiv n \pmod{2}\},$$

kjer je $\rho_{m,n}(e^{i\theta}U) = e^{in\theta}\pi_m(U)$ za $\theta \in \mathbb{R}$ in $U \in SU(2)$.

Upodobitvam $\rho_{m,n}$ lahko damo še drugo obliko. Definirajmo $\rho_{2k}(e^{i\theta}U) = \rho_{2k,0}(e^{i\theta}U) = \pi_{2k}(U)$ in $\rho_{2k+1}(e^{i\theta}U) = \rho_{2k+1,1}(e^{i\theta}U) = e^{i\theta}\pi_{2k+1}(U)$. Potem je za vsak $V \in U(2)$ in vsak $k \geq 0, j \in \mathbb{Z}$

$$\rho_{2k,2j}(V) = (\det V)^j \rho_{2k}(V) \text{ in } \rho_{2k+1,2j+1}(e^{i\theta}U) = (\det V)^j \rho_{2k+1}(V).$$

DODATEK

A. Nekaj izrekov iz teorije grup

Eden osnovnih algebraičnih izrekov o grupah govori o tem, kdaj lahko homomorfizem grup $h : G \rightarrow G'$ faktoriziramo skozi faktorsko grupo G/H .

Izrek 1. *Naj bo H podgrupa edinka v G in $q : G \rightarrow G/H$ kanonski homomorfizem. Če je h homomorfizem iz grupe G v poljubno grupo G' lastnostjo $h(x) = 1$ za vsak $x \in H$, obstaja natanko določen homomorfizem $\tilde{h} : G/H \rightarrow G'$, tako da velja $h = \tilde{h} \circ q$.*

Dokaz je preprost (glej [34], str. 52).

Včasih moramo poznati strukturo končnih Abelovih grup, o čemer pripoveduje naslednji izrek.

Izrek 2. *Naj bo G končna multiplikativna Abelova grupa. V G obstajajo elementi $a_1, a_2, \dots, \dots, a_r$, $r \geq 1$, z naslednjimi lastnostmi: Vsak element $x \in G$ lahko na en sam način zapišemo kot produkt v obliki $x = a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \dots a_r^{\nu_r}$. Če je μ_k red elementa a_k za vsak $k = 1, 2, \dots, r$, je μ_k deljiv z μ_{k+1} . V zgornjem zapisu je $0 \leq \nu_k < \mu_k$ za vsak k .*

Za dokaz glej [34], str. 218.

B. Nekaj izrekov iz topologije

Izrek Tihonova

Izrek 1. *Naj bodo X_α (neprazen) kompakten Hausdorffov topološki prostor za vsak α . Potem je topološki produkt $\prod_\alpha X_\alpha$ (neprazen) kompakten Hausdorffov topološki prostor.*

Dokaz glej npr. v [12], str. 136. Kartezični produkt je neprazen po aksiomu izbire. Opremljen s produktno topologijo, tj. najšibkejšo topologijo, v kateri so vse projekcije na posamezne komponente (koordinatne preslikave) zvezne, postane topološki prostor. Če so vse komponente Hausdorffovi prostori, je tudi topološki produkt Hausdorffov.

Arzelá-Ascolijev izrek

Družina zveznih funkcij $\mathcal{F} \subset C(X)$ na topološkem prostoru X je *enako zvezna* v točki $x \in X$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja okolica U točke x z lastnostjo $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ za vsak $y \in U$ in vsak $f \in \mathcal{F}$. Družina je *enako zvezna*, če je enako zvezna v vsaki točki iz X . Rečemo, da je družina \mathcal{F} *po točkah omejena*, če je množica $\{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ omejena v \mathbb{C} za vsak $x \in X$.

Izrek 2 (Arzelá-Ascoli). *Naj bo X kompakten Hausdorffov prostor. Če je \mathcal{F} enakozvezna in po točkah omejena podmnožica v prostoru zveznih funkcij $C(X)$, je \mathcal{F} totalno omejena, njeno zaprtje pa kompaktno v $C(X)$.*

Dokaz glej v [12], str.137.

Običajno uporabljamo Arzelá-Ascolijev izrek za funkcije na kompaktnem metričnem prostoru. Da pa se pokazati, da velja tudi za preslikave iz enega kompaktnega metričnega prostora v drug metrični prostor.

Baireov izrek za lokalno kompaktne prostore

Baireov izrek za polne metrične prostore pravi, da je presek poljubne številne družine gostih odprtih podmnožic v polnem metričnem prostoru M spet gosta odprta podmnožica v M . Zanimivo je, da popolnoma isto velja v vsakem lokalno kompaktnem Hausdorffovem topološkem prostoru.

Izrek 3 (Baire). *Presek poljubne številne družine gostih odprtih podmnožic v lokalno kompaktnem Hausdorffovem topološkem prostoru X je spet gosta odprta podmnožica v X .*

Dokaz glej v [28], str. 43.

Posledica. *Če je X lokalno kompakten Hausdorffov prostor in je $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, kjer so X_k zaprte podmnožice v X , ima vsaj ena od množic X_k neprazno notranjost.*

Urysohnov izrek za lokalno kompaktne prostore

Urysohnov izrek (oziroma Urysohnova lema) je običajno formuliran za normalne topološke prostore (za dokaz glej npr. [12], str. 122):

Za poljubni disjunktne zaprte podmnožici A, B v normalnem prostoru X obstaja nenegativna zvezna funkcija $f \in C(X, [0, 1])$, tako da je $f = 0$ na A in $f = 1$ na B .

Vsak kompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen, zato v nejm Urysohnov izrek velja. Obstaja pa tudi verzija za lokalno kompaktne prostore. Na njih namreč lahko v vsaki okolici vsake točke x najdemo kompaktno okolico te točke. Potem velja:

Izrek 4 (Uryhson). *Naj bo K kompaktna podmnožica odprte množice W v lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X . Potem obstaja taka nenegativna zvezna funkcija $f \in C(X, [0, 1])$, da je $f = 1$ na K in $\text{supp } f \subset \overline{W}$.*

Dokaz. Lahko najdemo tako odprto množico V s kompaktnim zaprtjem \overline{V} , da je $K \subset V \subset \overline{V} \subset W$. Ker je \overline{V} normalen prostor, obstaja $f \in C(\overline{V}, [0, 1])$, da je $f = 1$ na K in $f = 0$ na ∂V . Če f razširimo na ves prostor X tako, da postavimo $f = 0$ na \overline{V}^c , hitro vidimo, da je f zvezna oziroma $f \in C(X, [0, 1])$.

Odtod sledi, da je vsak lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor popolnoma regularen.

C. Nekaj izrekov iz funkcionalne analize

Banach-Alaoglujev izrek

Naj bo X Banachov prostor in X^* njegov dual. Vsak element $x \in X$ definira omejen linearen funkcional f_x na X^* s predpisom $f_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle$, $x^* \in X^*$. Najšibkejša topologija na X^* , v kateri so vsi funkcionali f_x , $x \in X$ zvezni, se imenuje šibka- $*$ topologija na X^* . V tej topologiji so zvezni ravno funkcionali oblike f_x , $x \in X$.

Izrek 1 (Banach-Alaoglu). *Zaprta enotska krogla v X^* je kompaktna v šibki- $*$ topologiji.*

Dokaz glej npr. v [3], str. 130 ali v [28], str. 68. Kadar je prostor X separabilen, je zaprta enotska krogla v X^* v šibki- $*$ topologiji metrizabilna in po zaporedjih kompaktna.

Goldstineov izrek

Označimo z X^{**} drugi dual Banachovega prostora X , preslikava $i : X \rightarrow X^{**}$, definirana s predpisom $\langle x^*, i(x) \rangle = \langle x, x^* \rangle$ za vsak $x \in X$, $f \in X^*$, pa naj bo kanonska vložitev prostora X v X^{**} . Znano je, da je i izometrija in tudi homeomorfizem iz šibke topologije na X v šibko- $*$ topologijo na X^{**} (v bazično okolico $\{x^{**} \in X^{**}; |\langle x_j^*, x^{**} \rangle| < \epsilon, j = 1, 2, \dots\}$ se preslika bazična okolica $\{x \in X; |\langle x, x_j^* \rangle| < \epsilon, j = 1, 2, \dots\}$, i je homeomorfizem na svojo sliko).

S K označimo zaprto enotsko kroglo v X , s K^* zaprto enotsko kroglo v X^* in s K^{**} zaprto enotsko kroglo v X^{**} . Kroglo K pa lahko tudi vložimo v X^{**} in dobimo $i(K) \subset K^{**}$. Naj bo $\overline{i(K)}$ zaprtje množice $i(K)$ v šibki- $*$ topologiji v X^{**} . Potem je $\overline{i(K)} = K^{**}$ kot pove naslednja trditev (glej [9], V.4.5 ali [3], Proposition 4.1).

Izrek 2 (Goldstine). *Kanonska vložitev enotske krogle K v X^{**} je šibko- $*$ gosta v enotski krogli K^{**} v X^{**} .*

Dokaz. Če obstaja $x^{**} \in K^{**}$, ki ni v $\overline{i(K)}$, obstaja po Hahn-Banachovem izreku šibko- $*$ zvezen linearen funkcional x^* na X^{**} , torej element v X^* , in realni konstanti a, b , $a < b$, tako da velja $\operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle \leq a$ za vsak $x \in K$ in $\operatorname{Re} \langle x^*, x^{**} \rangle \geq b$. Ker je tudi $\alpha x \in K$ za vsak $|\alpha| = 1$, je $|\langle x, x^* \rangle| \leq a$ za vsak $x \in K$, se pravi $\|x^*\| \leq a$. Torej je $|\langle x^*, x^{**} \rangle| \leq \|x^*\| \|x^{**}\| \leq a$, kar pa je v nasprotju z $\operatorname{Re} \langle x^*, x^{**} \rangle \geq b$.

Nadalje naj bo $T \in B(X)$ omejen linearni operator, $T^* \in B(X^*)$ njegov adjungirani operator in T^{**} drugi adjungirani operator ($\langle x, T^* x^* \rangle = \langle Tx, x^* \rangle$ za vsak $x \in X$ in $x^* \in X^*$, $\langle x^*, T^{**} x^{**} \rangle = \langle Tx^*, x^{**} \rangle$ za vsak $x \in X$, $x^* \in X^*$ in $x^{**} \in X^{**}$). Znano je, da je T^* šibko- $*$ zvezen, torej velja isto tudi za T^{**} (le da je zdaj šibko- $*$ topologija na X^{**}). V zvezi s kanonsko vložitvijo i pa velja $T^{**} i(x) = i(Tx)$ za vsak $x \in X$, torej i spleta T in T^{**} (lahko bi rekli, da je T zožitev T^{**} na $i(X) = X$).

Krein-Milmanov izrek

Ekstremna točka neprazne podmnožice K vektorskega prostora X je točka $z \in K$, ki ne leži znotraj nobene neizrojene daljice s krajiščema v K , torej iz $x, y \in K$, $0 < t < 1$ in $z = (1-t)x + ty$ sledi $x = y = z$. Množico ekstremnih točk množice K označimo z $E(K)$.

Izrek 3 (Krein-Milman). *Naj bo X linearen topološki prostor, na katerem X^* loči točke. Če je K neprazna kompaktna konveksna množica v X , je $K = \overline{\operatorname{co}} E(K)$, zaprta konveksna ogrinjača ekstremnih točk.*

Dokaz glej npr. v [28], str. 75 ali v [3], str. 142.

Stone-Weierstrassov izrek

To je posplošitev klasičnega Weierstrassovega izreka, da je vsaka zvezna funkcija na kompaktnem intervalu $[a, b]$ enakomerna limita polinomov.

Izrek 4 (Stone-Weierstrass za realne funkcije) *Naj bo X kompakten Hausdorffov topološki prostor. Če je \mathcal{A} zaprta podalgebra v $C(X, \mathbb{R})$, ki loči točke v X , potem je bodisi $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$ ali $\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}); f(x_0) = 0\}$ za neko točko $x_0 \in X$. Prva možnost nastopi natanko takrat, ko vsebuje konstantne funkcije.*

Če algebra \mathcal{A} ni zaprta v $C(X, \mathbb{R})$, vendar loči točke v X , potem je \mathcal{A} le gosta v $C(X, \mathbb{R})$ oziroma v $\{f \in C(X, \mathbb{R}); f(x_0) = 0\}$, saj lahko zgornji izrek uporabimo za $\overline{\mathcal{A}}$.

Kompleksni primer lahko odtod hitro izpeljemo.

Izrek 5 (Stone-Weierstrass za kompleksne funkcije) *Naj bo X kompakten Hausdorffov topološki prostor. Če je \mathcal{A} zaprta kompleksna podalgebra v $C(X)$, ki loči točke v X in je zaprta tudi za konjugiranje funkcij, potem je bodisi $\mathcal{A} = C(X)$ ali $\mathcal{A} = \{f \in C(X); f(x_0) = 0\}$ za neko točko $x_0 \in X$. Prva možnost nastopi natanko takrat, ko vsebuje konstantne funkcije.*

Dokaz. Množica $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ vseh realnih imaginarnih delov funkcij iz \mathcal{A} je podalgebra v $C(X, \mathbb{R})$ z lastnostmi, zahtevanimi v osnovnem izreku. Ker je $\mathcal{A} = \{f + ig; f, g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\}$, takoj dobimo željeni rezultat.

Včasih potrebujemo tudi verzijo Stone-Weierstrassovega izreka, primerno za lokalno kompakten prostor, ki ni kompakten. Spet lahko ločimo primer realnih in primer kompleksnih funkcij.

Izrek 6 (Stone-Weierstrass za realne funkcije na lokalno kompaktnem prostoru) *Naj bo X nekompakten Hausdorffov topološki prostor. Če je \mathcal{A} zaprta podalgebra v $C_0(X, \mathbb{R})$, ki loči točke v X , potem je bodisi $\mathcal{A} = C_0(X, \mathbb{R})$ ali $\mathcal{A} = \{f \in C_0(X, \mathbb{R}); f(x_0) = 0\}$ za neko točko $x_0 \in X$.*

Dokaz. Če obstaja taka točka $x_0 \in X$, da je $f(x_0) = 0$ za vse funkcije $f \in \mathcal{A}$, naj bo Y kompaktna podprostor $X \setminus \{x_0\}$ z eno točko; v nasprotnem primeru naj bo Y kompaktna podprostor X z eno točko. Za Y uporabimo osnovni Stone-Weierstrassov izrek.

Izrek 7. (Stone-Weierstrass za kompleksne funkcije na lokalno kompaktnem prostoru) *Naj bo X nekompakten Hausdorffov topološki prostor. Če je \mathcal{A} zaprta kompleksna podalgebra v $C(X)$, ki loči točke v X in je zaprta tudi za konjugiranje funkcij, potem je bodisi $\mathcal{A} = C(X)$ ali $\mathcal{A} = \{f \in C(X); f(x_0) = 0\}$ za neko točko $x_0 \in X$.*

Dokaz zgornjih izrekov najde bralec v [12], str. 139-142.

Zgled. Naj bo $\widehat{\mathcal{A}}$ algebra vseh Gelfandovih transformirank komutativne Banachove algebre \mathcal{A} brez enote. Znano je, da je v tem primeru spekter Ω algebre \mathcal{A} , tj. prostor vseh netrivialnih multiplikativnih funkcionalov na \mathcal{A} lokalno kompakten in da je $\widehat{\mathcal{A}} \subset C_0(\Omega)$. Za vsak $a \in \mathcal{A}$ ne more veljati $\widehat{a}(\omega) = 0$, saj bi to pomenilo, da je ω trivialen funkcional. Ker torej Gelfandove transformiranke ločijo točke na Ω , in ker je konjugiranje v algebri Gelfandovih transformirank notranja operacija, je po zadnjem izreku algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ gosta v $C_0(\Omega)$.

Cohenov faktorizacijski izrek

Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra in X levi Banachov \mathcal{A} -modul. Omejena (leva) približna enota za modul X je tako omejeno posplošeno zaporedje (e_α) v algebri \mathcal{A} , da velja $e_\alpha x \rightarrow x$ v X za vsak $x \in X$.

Cohenov faktorizacijski izrek pove, da se da vsak element modula X , za katerega obstaja v \mathcal{A} omejena približna enota, zapisati kot produkt nekega elementa iz \mathcal{A} in nekega elementa iz X . Natančneje:

Izrek 8 (Cohen). *Denimo, da obstaja v \mathcal{A} omejena približna enota za levi Banachov \mathcal{A} -modul X . Naj bo $z \in X$ in $\delta > 0$. Potem obstajata taka elementa $a \in \mathcal{A}$, $y \in X$, da velja $z = ay$ in je $\|z - y\| \leq \delta$.*

Dokaz najdemo npr. v [1], str. 61.

Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra z omejeno levo približno enoto (e_α) in X levi Banachov modul nad \mathcal{A} . Hitro vidimo, da je $M = \overline{\text{span}(\mathcal{A} \cdot X)} \subset X$ Banachov podmodul, ki ima (e_α) za omejeno levo približno enoto. Torej je po Cohenovem izreku $M = \mathcal{A} \cdot M \subset \mathcal{A} \cdot X \subset M$. To pomeni, da velja $M = \mathcal{A} \cdot X$.

V posebnem primeru je tudi algebra \mathcal{A} sama levi Banachov modul nad \mathcal{A} in isto velja tudi za vsak njen zaprti levi ideal.

Posledica 1. *Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra z omejeno levo približno enoto, $z \in \mathcal{A}$ in $\delta > 0$. Potem obstajata elementa $x, y \in \mathcal{A}$, tako da je $z = xy$, $\|z - y\| \leq \delta$ in poleg tega pripada y najmanjšemu zaprtemu levemu idealu v \mathcal{A} , ki vsebuje z .*

Dokaz. Označimo z X najmanjši zaprt levi ideal, ki vsebuje z . Potem je X levi Banachov modul nad \mathcal{A} in seveda je omejena približna enota v \mathcal{A} tudi približna enota za X . Zdaj lahko uporabimo Cohenov izrek.

Posledica 2. *Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra z omejeno levo približno enoto in $z_n \in \mathcal{A}$ zaporedje elementov v \mathcal{A} z lastnostjo $\lim_n z_n = 0$. Potem obstaja tak element $a \in \mathcal{A}$ in tako zaporedje elementov $y_n \in \mathcal{A}$, da za vsak n velja $z_n = ay_n$ in $\lim_n y_n = 0$.*

Dokaz. Naj bo X prostor vseh zaporedij elementov $a_n \in \mathcal{A}$ z lastnostjo $\lim_n a_n = 0$. Opremljen z normo $\|(a_n)\| = \sup_n \|a_n\|$ je X levi Banachov \mathcal{A} modul za levo množenje $a(a_n) = (aa_n)$. Naj bo (e_α) omejena leva približna enota v \mathcal{A} , omejena npr. z $M > 0$. Zaradi njene omejenosti iz $\lim_n a_n = 0$ sledi $e_\alpha(a_n) \rightarrow (a_n)$ za vsak $(a_n) \in X$. Res, pri danem $\epsilon > 0$ najprej izberemo n tako velik, da je $\|a_k\| < \epsilon/(M + 1)$ za $k \geq n$, nato pa še tak α_0 , da je tudi $\max_{1 \leq k < n} \|e_\alpha a_k - a_k\| < \epsilon$ za $\alpha > \alpha_0$. Posledica: $\|e_\alpha(a_k) - (a_k)\| < \epsilon$. Torej je (e_α) omejena leva približna enota tudi za levi Banachov modul X in lahko uporabimo Cohenov faktorizacijski izrek: obstaja tak $a \in \mathcal{A}$ in tako zaporedje $(y_n) \in X$, da je $(z_n) = a(y_n)$. Se pravi, da je $z_n = ay_n$ za vsak n in $\lim_n y_n = 0$.

Cohenov izrek lahko v nekaterih primerih nekoliko zaostrimo, tako da kontroliramo tudi normo elementa a . V [17] je na str. 287 (izrek 32.50) dokazan naslednji izrek:

Izrek 9. *Naj bo \mathcal{A} Banachova algebra z dvostransko enoto, omejeno po normi z 1, in X levi Banachov modula nad \mathcal{A} . Potem je $\mathcal{A} \cdot X$ zaprt linearen podprostor v X . Za vsak $z \in \overline{\text{span}(\mathcal{A} \cdot X)}$ in vsak $\delta > 0$ obstajata elementa $a \in \mathcal{A}$ in $y \in X$, da velja $z = a \cdot y$, $\|a\| \leq 1$, $y \in \mathcal{A} \cdot z$ in $\|y - z\| \leq \delta$.*

Izrek Markov-Kakutani

To je izrek o eksistenci negibne točke komutirajoča družine zveznih afinih preslikav.

Izrek 10 (Markov-Kakutani). *Naj bo K neprazna kompaktna konveksna množica linearnega topološkega prostora X in \mathcal{F} komutirajoča družina zveznih afinih preslikav na X , ki preslikajo množico K vase. Potem obstaja točka $p \in K$, da velja $Tp = p$ za vsak $T \in \mathcal{F}$.*

Dokaz. Potence (v smislu kompozita) afinih preslikav so spet affine preslikave, ki tudi ohranjajo K . Isto velja za aritmetične sredine teh potenc: $T_n = (I + T + T^2 + \dots + T^{n-1})/n$ in vse take sredine (za različen $T \in \mathcal{F}$ in različen n) med seboj komutirajo ter generirajo komutativno polgrupo \mathcal{F}^* . Naj bo $h = fg = gf$ za $f, g \in \mathcal{F}^*$. ker je $f(g(K)) \subset f(K)$ in $g(f(K)) \subset g(K)$, je $h(K) \subset f(K) \cap g(K)$. Odtod z indukcijo sledi, da ima družina \mathcal{F}^* lastnost končnih presekov. Ker je zaradi zveznosti preslikav $f \in \mathcal{F}^*$ vsaka množica $f(K)$ kompaktna, obstaja točka $p \in \bigcap_{f \in \mathcal{F}^*} f(K)$.

Naj bo zdaj $T \in \mathcal{F}$ poljuben in V poljubna okolica točke 0 v X . Ker je $T_n \in \mathcal{F}^*$ za vsak n , je $p \in T_n(K)$ za vsak n . Torej obstajajo točke $x_n \in K$, da je $p = (x_n + Tx_n + \dots + T^{n-1}x_n)/n$ za vsak n . Potem pa je $p - Tp = (x_n - T^n x_n)/n \in (K - K)/n \subset V$ (inkluzija velja, ker je $K - K$ kompaktna in zato omejena množica) za vsako okolico V in zato $p - Tp = 0$.

Krepka in šibka operatorska topologija

Naj bo X Banachov prostor in $B(X)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na X . Poleg normne topologije na $B(X)$, imamo na $B(X)$ tudi *krepko operatorsko topologijo*, dano s seminormami

$$T \mapsto \|Tx\|, \quad x \in X,$$

in *šibko operatorsko topologijo*, dano s seminormami

$$T \mapsto |\langle Tx, \phi \rangle|, \quad x \in X, \phi \in X^*!$$

Krepka operatorska konvergenca $T_\alpha \rightarrow T$ torej pomeni $T_\alpha x \rightarrow Tx$ za vsak $x \in X$, šibka operatorska konvergenca $T_\alpha \rightarrow T$ pa $\langle T_\alpha x, \phi \rangle \rightarrow \langle Tx, \phi \rangle$ za vsak $x \in X$ in $\phi \in X^*$. Iz krepke operatorske konvergence seveda sledi šibka operatorska konvergenca.

Naj bo K konveksna podmnožica v $B(X)$. Njeno šibko operatorsko zaprtje je kvečjemu večje od krepkega operatorskega zaprtja. Obratno, naj bo T v šibkem operatorskem zaprtju, se pravi T šibka operatorska limita zaporedja $T_\alpha \in K$. Fiksirajmo $x \in X$. Potem za vsak $\phi \in X^*$ velja $\langle T_\alpha x, \phi \rangle \rightarrow \langle Tx, \phi \rangle$, se pravi, da je Tx v šibkem zaprtju konveksne množice $Kx = \{Sx; S \in K\}$. Toda po Hahn-Banachovem izreku se šibko in normno zaprtje konveksne množice Kx ujemata. Torej je Tx tudi v normnem zaprtju \overline{Kx} oziroma T v krepkem operatorskem zaprtju množice K . Vidimo, da se za konveksno množico K njeno šibko in krepko operatorsko zaprtje ujemata.

D. Nekaj izrekov iz teorije mere

Rieszov reprezentacijski izrek

Izrek 1. Za vsak pozitiven linearen funkcional I na $C_c(G)$ obstaja pozitivna Borelova mera λ z lastnostjo $I(f) = \int_G f(x)d\lambda(x)$ za vsak $f \in C_c(G)$. Če je I levo invarianten funkcional, tj. če za vsak $y \in G$ in $f \in C_c(G)$ velja $I(L_y f) = I(f)$, je tudi mera λ levo invariantna, tj. $\lambda(yE) = \lambda(E)$ za vsak $y \in G$ in vsako Borelovo množico $E \subset G$.

Dokaz glej v [29], str. 40 ali v [12], str. 212. Dobljena mera λ je končna na kompaktnih množicah, zunanje regularna na vseh Borelovih množicah in notranje regularna na vseh odprtih množicah (in na vseh Borelovih množicah s končno mero), torej Radonova.

Če je lokalno kompakten prostor G tudi σ -kompakten, je λ na njem σ -končna mera, zato je ta mera tudi v celoti regularna (glej npr. [29], str. 48).

Fubinijev izrek.

Izrek 2. Naj bosta (X, \mathcal{S}, μ) in (Y, \mathcal{T}, ν) σ -končna prostora z mero in f $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -merljiva funkcija na $X \times Y$.

(a) (Tonelli) Če je $0 \leq f \leq \infty$, sta funkciji g, h , definirani za vsak $x \in X, y \in Y$ s predpisom $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ in $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$, \mathfrak{S} oziroma \mathfrak{T} - merljivi in velja

$$(1) \quad \int_X g(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y h(y) d\nu(y).$$

(b) Če je f kompleksna funkcija in $\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$, je $f \in L^1(X \times Y)$.

(c) (Fubini) Če je $f \in L^1(X \times Y)$, je $y \mapsto f(x, y)$ v $L^1(\nu)$ s.p. $x \in X$, $x \mapsto f(x, y)$ v $L^1(\mu)$ s.p. $y \in Y$, funkciji g in h , definirani s.p. kot v točki (a), sta v $L^1(\mu)$ oziroma $L^1(\nu)$ in velja (1).

Dokaz glej v [29], str. 165 ali v [12], str. 67.

Radon-Nikodymov izrek

Izrek 3. Naj bo μ pozitivna σ -končna mera in ν kompleksna mera na (X, \mathcal{M}) .

(a) (Lebesgue) Obstaja enolična dekompozicija $\nu = \nu_a + \nu_s$ mere ν v vsoto dveh kompleksnih mer, pri čemer je $\nu_a \ll \mu$ in $\nu_s \perp \mu$. Če je ν pozitivna končna mera, sta taki tudi ν_a in ν_s .

(b) (Radon-Nikodym) Obstaja enolično določena funkcija $h \in L^1(\mu)$, tako da je za vsak $E \in \mathcal{M}$

$$\nu_a(E) = \int_E h d\mu.$$

Pri tem je $\|\nu_a\| = \|h\|_1 (= \int_X |h| d\mu)$. Dokaz glej v [29], str. 122 ali v [12], str. 90-93.

Lebesgue-Bochnerjev integral.

Naj bo X Banachov prostor in $f : \Omega \rightarrow X$ funkcija na prostoru Ω s pozitivno kompletno mero μ . Rečemo, da je f merljiva enostavna funkcija, če je njena zaloga vrednosti končna, se pravi, če obstaja particija množice Ω na končno mnogo paroma disjunktnih merljivih podmnožic E_1, E_2, \dots, E_n , in različni neničelni vektorji $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, tako da je $f(\omega) = x_i$ za $\omega \in E_i$. Lahko zapišemo $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} x_i$. Funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ je μ -merljiva, če obstaja zaporedje merljivih enostavnih funkcij f_n , ki konvergira s.p. k funkciji f v prostoru X . Tedaj je tudi $\|f\|$ μ -merljiva kot limita merljivih funkcij $\|f_n\|$.

Funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ je šibko μ -merljiva, če je ϕf μ -merljiva za vsak $\phi \in X^*$. Funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ je Borelovo μ -merljiva, če je $f^{-1}(U)$ merljiva množica za vsako odprto podmnožico $U \subset X$. Funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ ima bistveno separabilno zalogo vrednosti, če obstaja merljiva podmnožica $E \subset \Omega$ z lastnostjo $\mu(E^c) = 0$, tako da je $f(E) \subset Y$, kjer je Y separabilen podprostor v X . Da se pokazati naslednje:

Trditev 1. Naj bo (Ω, Σ, μ) σ -končen prostor z mero in $f : \Omega \rightarrow X$ funkcija z vrednostmi v Banachovem prostoru X . Tedaj je ekvivalentno:

- (i) f je μ -merljiva,
- (ii) $\chi_E f$ je μ -merljiva za vsako merljivo množico E z lastnostjo $\mu(E) < \infty$,
- (iii) f je šibko μ -merljiva z bistveno separabilno zalogo vrednosti,
- (iv) f je Borelovo μ -merljiva z bistveno separabilno zalogo vrednosti.

Dokaz glej npr. v [31], str. 26. Številne lastnosti skalarnih merljivih funkcij veljajo tudi za vektorske merljive funkcije na σ končnih prostorih, npr. limite skoraj povsod konvergentnih merljivih funkcij so merljive, velja izrek Jegorova, ipd.

Lebesgue-Bochnerjev integral definirajmo najprej za enostavne merljive funkcije: če je $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} x_i$, naj bo za vsako merljivo podmnožico $E \subset \Omega$

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E \cap E_i) x_i.$$

Definicija. Merljiva funkcija $f : \omega \rightarrow X$ je *Bochnerjevo integrabilna*, če obstaja zaporedje merljivih enostavnih funkcij f_n , ki skoraj povsod konvergira k funkciji f in zanje velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

Bochnerjev integral funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ po množici E je potem definiran s predpisom

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Ta limita obstaja in je neodvisna od izbire zaporedja (f_n) . Lažje kot po definiciji preskusimo Bochnerjevo integrabilnost z naslednjim testom.

Trditev 2 (Bochner). *Merljiva funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ je Bochnerjevo integrabilna, če in samo če je skalarna funkcija $\|f\|$ integrabilna v običajnem Lebesguovem smislu.*

Dokaz. Naj bo f Bochnerjevo integrabilna in (f_n) zaporedje enostavnih merljivih funkcij, ki konvergira proti f s.p. Potem je $\int_{\Omega} \|f\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu + \int_{\Omega} \|f_n\| d\mu$ za vsak n in integral norme je končen.

Obratno, predpostavimo, da je $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$ in naj bo (f_n) zaporedje enostavnih merljivih funkcij, ki konvergira proti f s.p. Za vsak $\delta > 0$ in vsak n definirajmo $g_n(\omega) = f_n(\omega)$, če je $\|f_n(\omega)\| \leq (1+\delta)\|f(\omega)\|$ in 0 sicer. Potem tudi $g_n \rightarrow f$ s.p., zaporedje skalarnih funkcij $\|f - f_n\|$ pa je omejeno z integrabilno funkcijo $(2+\delta)\|f\|$. Po Lebesguovem izreku o dominantni konvergenci tedaj velja $\int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$.

Izrek o dominantni konvergenci velja tudi za Bochnerjevo integrabilne funkcije. Dokaz je preprosta uporaba trditve 2.

Posledica. *Če je funkcija $f : \Omega \rightarrow X$ Bochnerjevo integrabilna, velja*

$$\left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$$

Dokaz. $\left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\| = \lim_n \left\| \int_{\Omega} f_n d\mu \right\| \leq \lim_n \int_{\Omega} \|f_n\| d\mu = \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$

Lebesgue-Bochnerjev integral se lepo obnaša tudi v primeru, ko na Bochnerjevo integrabilno funkcijo delujemo z omejenim linearnim operatorjem.

Trditev 3. *Naj bo $f : \Omega \rightarrow X$ Bochnerjevo integrabilna funkcija. Za vsak $T \in B(X, Y)$ je tudi $Tf : \Omega \rightarrow Y$ Bochnerjevo integrabilna funkcija in velja*

$$\int_{\Omega} Tf d\mu = T\left(\int_{\Omega} f d\mu\right).$$

Dokaz. Naj bo (f_n) zaporedje enostavnih merljivih funkcij, ki konvergira proti f s.p. in zato tudi $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$. Potem je tudi (Tf_n) zaporedje enostavnih merljivih funkcij, ki pa konvergira proti Tf s.p. Pri tem velja $T(\int_{\Omega} f_n d\mu) = \int_{\Omega} Tf_n d\mu$ in $\int_{\Omega} \|Tf - Tf_n\| d\mu \leq \|T\| \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu$. Torej je

$$\int_{\Omega} Tf d\mu = \lim_n \int_{\Omega} Tf_n d\mu = \lim_n T\left(\int_{\Omega} f_n d\mu\right) = T\left(\lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu\right) = T\left(\int_{\Omega} f d\mu\right).$$

Direktni integral Hilbertovih prostorov

Naj bo (A, \mathcal{M}) merljiv prostor. Družino $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ Hilbertovih prostorov, indeksiranih z množico A , imenujemo *polje Hilbertovih prostorov* nad A , elemente $f \in \prod_{\alpha \in A} \mathcal{H}_\alpha$ pa *vektorsko polje* nad A . Tu je seveda $f(\alpha) \in \mathcal{H}_\alpha$ za vsak $\alpha \in A$. Polje Hilbertovih prostorov $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je *merljivo*, če obstaja števna množica $\{e_j\}$ vektorskih polj z lastnostjo, da je:

- (i) za vsak par j, k je funkcija $\alpha \mapsto \langle e_j(\alpha), e_k(\alpha) \rangle$ merljiva,
- (ii) za vsak α linearna ovojnica $\text{span}\{e_j(\alpha)\}$ gosta v \mathcal{H}_α .

Zgledi. (a) Primer merljivih polj je konstantno polje $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}$ in $e_j(\alpha) = e_j$ za vsak α , kjer je \mathcal{H} separabilen Hilbertov prostor z ortonormirano bazo $\{e_j\}$.

(b) Drug zgled imamo, kadar je σ -algebra \mathcal{M} diskretn (potenčna množica) in $\{\mathcal{H}_\alpha\}$ poljubna družina separabilnih Hilbertovih prostorov (če je kakšen končno razsežen z dimenzijo $d(\alpha)$, postavimo $e_j(\alpha) = 0$ za $j > \alpha$).

(c) Tretji primer pa je vektorski sveženj nad mnogoterostjo A , ki zadošča drugemu aksiomu števnosti, z vlakni \mathcal{H}_α , ki so Hilbertovi prostori. Tedaj obstaja števna družina zveznih prereзов svežnja $\{e_j\}$, katerih linearna ovojnica je gosta v vsakem vlaknu. Tu je \mathcal{M} Borelova σ -algebra.

Strukturo merljivih polj Hilbertovih prostorov opisuje naslednja trditev.

Trditev 4. Naj bo $(\{\mathcal{H}_\alpha\}, \{e_j\})$ merljivo polje Hilbertovih prostorov nad A in $\dim \mathcal{H}_\alpha = d(\alpha) \in [1, \infty]$ dimenzijska funkcija. Potem je $\{\alpha \in A; d(\alpha) = m\}$ merljiva množica za vsak $m = 1, 2, \dots, \infty$. Poleg tega obstaja zaporedje $\{u_k\}$ vektorskih polj z lastnostjo:

- (i) za vsak α je $\{u_k(\alpha)\}_1^{d(\alpha)}$ ortonormirana baza za \mathcal{H}_α in $u_k(\alpha) = 0$ za $k < d(\alpha)$ (če je $d(\alpha) < \infty$);
- (ii) za vsak k obstaja merljivo razbitje $A = \cup_{l=1}^{\infty} A_l^k$ množice A , tako da je na vsakem delu A_l^k vektor $u_k(\alpha)$ končna linearna kombinacija vektorjev $e_j(\alpha)$ s koeficienti, ki so merljive funkcije spremenljivke α .

Dokaz glej v [11], Prop. 7.27, na str. 221.

Ko imamo enkrat merljivo polje Hilbertovih prostorov $(\{\mathcal{H}_\alpha\}, \{e_j\})$, rečemo, da je vektorsko polje f na A *merljivo*, če je $\alpha \mapsto \langle f(\alpha), e_j(\alpha) \rangle$ merljiva funkcija na A za vsak j . Ekvivalentno je, da je za vsak k merljiva funkcija $\alpha \mapsto \langle f(\alpha), u_k(\alpha) \rangle$, kjer je u_k iz prejšnje trditve. Za merljivi polji f, g je tudi $\alpha \mapsto \langle f(\alpha), g(\alpha) \rangle$ merljiva funkcija (glej [11], str. 222).

Zdaj lahko definiramo direktni integral Hilbertovih prostorov.

Naj bo $(\{\mathcal{H}_\alpha\}, \{e_j\})$ merljivo polje Hilbertovih prostorov nad A in μ mera na A . Potem je *direktni integral* Hilbertovih prostorov glede na mero μ prostor takih merljivih vektorskih polj f na A , da velja

$$\|f\|^2 = \int \|f(\alpha)\|^2 d\mu(\alpha) < \infty.$$

Direktni integral Hilbertovih prostorov označimo z $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$ in je spet Hilbertov prostor s skalarnim produktom $\langle f, g \rangle = \int \langle f(\alpha), g(\alpha) \rangle d\mu(\alpha)$.

Zgledi. V primeru konstantnega polja $e\mathcal{H}_\alpha = H$ za vsak α je $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$ preprosto prostor merljivih funkcij iz A v \mathcal{H} , ki so s kvadratom integrabilne po meri μ , torej $L^2(A, \mu, \mathcal{H})$. V primeru, ko je A diskretna množica in μ mera, ki šteje točke na A , je $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{H}_\alpha$ (direktna vsota). V primeru vektorskega svežnja, je $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$ enak prostoru s kvadratom integrabilnih prereзов svežnja.

Z razbitjem množice A na disjunktne podmnožice $A_m = \{\alpha \in A; \dim \mathcal{H}_\alpha = m\}$, $m = 1, 2, \dots, \infty$, z vektorskimi polji u_k iz zadnje trditve, je podan unitarni izomorfizem

$$\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha) \cong L^2(A_\infty, \mu, l^2) \oplus \bigoplus_{m=1}^{\infty} L^2(A_m, \mu, \mathbb{C}^m).$$

Od tod sledi, da je direktni integral Hilbertovih prostorov neodvisen od izbire vektorskih polj e_j (glej [11], str. 223-224).

Naslednji korak je definicija *polja operatorjev* kot element $T \in \prod_{\alpha \in A} B(\mathcal{H}_\alpha)$. Polje operatorjev T je *merljivo*, če je $\alpha \mapsto T(\alpha)f(\alpha)$ merljivo vektorsko polje za vsako merljivo vektorsko polje f . Potreben in zadosten pogoj za merljivost operatorskega polja je merljivost vseh koordinatnih funkcij $\alpha \mapsto \langle T(\alpha)e_j(\alpha), e_k(\alpha) \rangle$ (glej [11], str. 224).

Rečemo, da je polje operatorjev T nad A bistveno omejeno, če je

$$\|T\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\alpha \in A} \|T(\alpha)\| < \infty.$$

Potem je $\|T(\alpha)f(\alpha)\|_\alpha \leq \|T\|_\infty \|f(\alpha)\|_\alpha$ skoraj za vsak α , tako da definira T omejen linearen operator na direktnem produktu Hilbertovih prostorov s predpisom $\alpha \mapsto T(\alpha)f(\alpha)$. Dobljeni operator imenujemo *direktni integral polja operatorjev* T in zapišemo

$$\int^\oplus T = \int^\oplus T(\alpha) d\mu(\alpha).$$

Ima običajne algebraične lastnosti: $\int^\oplus S + \int^\oplus T = \int^\oplus (S + T)$, $\int^\oplus S \int^\oplus T = \int^\oplus ST$, $(\int^\oplus T)^* = \int^\oplus T^*$. Poleg tega velja $\|\int^\oplus T\| = \|T\|_\infty$ ([11], str. 225). Poseben primer direktnega integrala operatorjev dobimo, ko je $T(\alpha) = \phi(\alpha)I$ in $\phi \in L^\infty(\mu)$. Tedaj je $(\int^\oplus T)f = \phi f$ (diagonalni operator na $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$).

Nazadnje lahko definiramo direktni integral tudi za upodobitve grup. Naj bo G lokalno kompaktna grupa in π_α unitarna upodobitev grupe G na prostoru H_α za vsak $\alpha \in A$, tako da je $\alpha \mapsto \pi_\alpha(x)$ merljivo polje operatorjev za vsak $x \in G$. Tedaj rečemo, da je $\{\pi_\alpha\}$ merljivo polje upodobitev grupe G . Ker je $\|\pi_\alpha(x)\| = 1$ za vsak $x \in G$ in vsak $\alpha \in A$, lahko definiramo direktni integral

$$\pi(x) = \int^\oplus \pi_\alpha(x) d\mu(\alpha).$$

Lahko se prepričamo, da je π unitarna upodobitev grupe G na prostoru $\int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$. Da je $\pi(x)$ unitaren operator in da velja $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ za vsak $x, y \in G$ se hitro vidi. Kreпка zveznost π pa sledi iz krepke zveznosti π_α in izreka o dominantni konvergenci. Upodobitev π imenujemo *direktni integral upodobitev* π_α .

Smisel zgornje definicije je v tem da lahko vsako unitarno upodobitev izrazimo kot direktni integral nerazcepnih upodobitev. Glavna izreka, ki to zagotavljata, sta naslednja.

Izrek 4. *Naj bo G lokalno kompaktna Abelova grupa in π njena unitarna upodobitev na Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Potem je upodobitev π ekvivalentna direktnemu integralu nerazcepnih upodobitev.*

Dokaz glej v [11], str. 226.

Izrek 5. *Naj bo G lokalno kompaktna grupa, ki zadošča drugemu aksiomu števности, in π njena unitarna upodobitev na separabilnem Hilbertovem prostoru \mathcal{H} . Poleg tega naj bo \mathcal{B} šibko zaprta komutativna C^* -podalgebra v $C(\pi)$. Potem obstaja prostor z mero (A, \mathcal{M}, μ) , merljivo polje $\{\mathcal{H}_\alpha\}$ Hilbertovih prostorov na A , merljivo polje unitarnih upodobitev grupe G $\{\pi_\alpha\}$ in unitarna preslikava $U : \mathcal{H} \rightarrow \int^\oplus \mathcal{H}_\alpha d\mu(\alpha)$, tako da je*

(1) $U\pi(x)U^1 = \int^\oplus \pi_\alpha(x) d\mu(\alpha)$ za vsak $x \in G$;

- (2) $U\pi(f)U^{-1} = \int^{\oplus} \pi_{\alpha}(f)d\mu(\alpha)$ za vsak $f \in L(G)$;
- (3) UBU^{-1} je algebra diagonalnih operatorjev na prostoru $\int^{\oplus} \mathcal{H}_{\alpha}d\mu(\alpha)$.

Dokaz glej v [11], str. 227.

LITERATURA

- [1] F.F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer 1973.
- [2] K. Chandrasekharan, *A Course on Topological Groups*, Hindustan Book Agency 1996.
- [3] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer 1990.
- [4] H.G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Math. Soc. Monographs, New Series 14, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 2000.
- [5] H.G. Dales, *Banach Algebras*, in H.G. Dales et al (eds.), *Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis*, London Math. Soc. Students Texts 57, Cambridge University Press 2003.
- [6] M.M. Day, *Normed linear spaces*, Ergebnisse der mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin 1958.
- [7] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, Universitext, Springer 2005.
- [8] J. Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [9] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, part I: General Theory*, Interscience, New York - London 1958.
- [10] H. Dym, H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press 1972.
- [11] G. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- [12] G. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, JohnWiley and Sons, Inc., 1999.
- [13] C.C. Graham, *Harmonic analysis and LCA groups*, in J.M. Ash (ed.), *Studies in Harmonic Analysis*, p. 161, MAA Studies in Mathematics, Vol. 13, MAA 1976.
- [14] F.P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, New York 1969.
- [15] V.P. Gurarii, *Group methods in commutative harmonic analysis*, in V.P. Havin, N.K. Nikolski (eds.), *Commutative Harmonic Analysis II*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 25, Springer 1998.
- [16] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 115, Springer-Verlag 1963.
- [17] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis II*, Grundlehren Math. Wiss. 152, Springer-Verlag 1970.
- [18] M. Hladnik, *Povabilo v harmonično analizo*, DMFAS 1992.
- [19] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publ, New York 1976.
- [20] V.P. Khavin, *Methods and structure of commutative harmonic analysis*, in V.P. Khavin, N.K. Nikolskij (eds.), *Commutative Harmonic Analysis I*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 15, Springer-Verlag 1991.
- [21] S. Lang, *Undergraduate Algebra*, UTM, Springer-Verlag 1987.
- [22] L.H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, New York, 1953.
- [23] S. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 29, Cambridge University Press 1977.
- [24] A.Ju. Olshanski, *On the question of the existence of an invariant mean on a group (rusko)*, Uspehi Mat. Nauk 35 (1980), 199-200.
- [25] G. Pisier, *Similarity Problems and Completely Bounded Maps*, Lectures Notes in Mathematics 1618, Springer 1996.
- [26] H. Reiter, J.D. Stegeman, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, London Math. Soc. Monographs 22, Clarendon Press, Oxford 2000.
- [27] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publ. 1962.
- [28] W. Rudin, *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., 1973.
- [29] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, Inc., 1987.
- [30] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics 1774, Springer-Verlag 2002.
- [31] R.A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer 2002.
- [32] Seung-Hyeok Kye, *Notes on Abstract Harmonic Analysis*, Lecture Notes Series 20, Seoul National University, Seoul 1994.
- [33] K. Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, AMS, 2005.
- [34] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.
- [35] G.L. Weiss, *Harmonic analysis on compact groups*, in J.M. Ash (ed.), *Studies in Harmonic Analysis*, p. 198, MAA Studies in Mathematics, Vol. 13, MAA 1976.
- [36] G.A. Willis, *Harmonic analysis and amenability*, in H.G. Dales et al (eds.), *Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis*, London Math. Soc. Students Texts 57, Cambridge University Press 2003.