Rešeni in nerešeni problemi matematike
Pregled, januar 2009

"Problemi so srce matematike"je nekoč izjavil Paul Halmos. To je res, tudi pri vsakdanjem delu matematika-raziskovalca je potrebno sproti reševati drobne in manj drobne matematične probleme, premisliti ideje, ki se porajajo, preveriti domislice itd. Seveda si bolj zapomnimo tiste probleme, ki jih je težko rešiti. Nekatere so reševali desetletja in stoletja, nekatere tisočletja, predno so jih dokončno rešili. Nekaterih seveda sploh še niso rešili. Toda, ali je v človeški dejavnosti sploh kaj dokončnega? Celo v matematiki, katere resnice so takorekoč večne in nespremenljive. Spomnimo se npr. antičnih matematikov, Talesa, Pitagora, Hipokrata, Apolonija, Diofanta, Evklida, Arhimeda. Izumili so matematični dokaz, metodo, s katero so utemeljili čudovite lastnosti števil in geometrijskih likov. Kar so odkrili, velja še danes. Toda kasnejši matematiki, srednjeveški, zlasti arabski, pa renesančni in novoveški so marsikaj dodali. Tudi marsikateri njihov problem ima svoje začetke v antiki. Lep prikaz osnovne ideje, kako so se tudi nekateri sodobni problemi rojevali v antiki, kako so se pogledi nanje razvijali skozi zgodovino, prinaša knjižica Zgodovina matematike, zgodbe o problemih, več francoskih avtorjev, ki je 1999 izšla v zbirki Sigma (glej [6]).

Marsičesa seveda matematiki ne znajo dokazati. Trije veliki problemi so ostali nerešeni v starogrški matematiki: tretjinjenje kota, podvojitev kocke in kvadratura kroga. Šele v 19. stoletju so te geometrijske probleme reducirali na algebraični problem konstruktibilnih števil. Ko je npr. Lindemann leta 1882 dokazal, da je število π transcendentno, je bil klasični problem kvadrature kroga končno rešen. Ali res? Več kot sto let kasneje, leta 1988, je M. Laczkovich, pokazal, da je krog po razkosanju enak ploščinsko enakemu kvadratu (glej [5]). To pot ni šlo za kvadraturo z uporabo evklidskega orodja, ampak za moderno verzijo z uporabo teorije množic, teorije mere in ergodijske teorije. Moderna matematika je dala svoj prispevek k slavnemu staremu problemu. V tem smislu je posodabljanje starih metod, starih, na videz že rešenih problemov, značilno za vso matematiko.

1. Rešeni slavni matematični problemi v zadnjih 30 letih

V zadnjih 20 ali trideset letih so bili rešeni nekateri znani in težki matematični problemi, zato ni čudno, da K. Devlin to dobo, ki se nadaljuje dandanes, imenuje "nova zlata doba matematike"[7]. (Prva zlata doba je sledila velikim odkritjem, Newtna, Leibnitza, Descartesa, Fermata in drugih.) Na kratko si bomo ogledali samo najpomembnejše probleme, katerih rešitev je osupnila matematični svet.

(a) Problem štirih barv

Ali je mogoče pravilno pobarvati ravninski zemljevid s samo štirimi barvami?

Pravilno barvanje seveda pomeni, da sosedniji območji nista pobarvani z isto barvo. Na ta problem je leta 1853 naletel F. Guthrie, ko je barval zemljevid angleških grofij. Povedal ga je svojemu profesorju matematike De Morganu, ta Hamiltonu in drugim. Prvi je o njem pisal Cayley. Reševali so ga mnogi znani in manj znani matematiki in še pred 30 leti je obsedel marsikaterega nadebudnega študenta matematike, da je nad njim prebedel cele noči.

Leta 1977 sta problem s pomočjo ustreznega računalniškega programa rešila Kenneth Appel in Wolfgang Haken. Po 4 letih intenzivnega dela, več kot 1200 urah računalniškega časa, potem ko sta ročno pregledala skoraj 10000 primerov in je računalnik obdelal še okrog 1500 - 2000 bolj kompliciranih situacij, je bil končno ta, danes več kot 150 let star problem, rešen [7]. Je pa res, da je rešitev, dobljena z računalnikom, vzbudila in še vzbuja med matematiki pomisleke o legitimnosti dokaza (glej npr. [9] ali [4]).

Nekaj teh pomislekov je konec leta 2004 odpravil Georges Gonthier (Microsoft) iz Cambridgea, ki je razvil novo računalniško tehnologijo, matematični asistent, za preverjanje pravilnosti računalniških programov na splošno in pri formalnem dokazovanju matematičnih trditev [8]. Toda matematiki še vedno iščejo krajšo in elegantnejšo pot do rešitve problema štirih barv.

(b) Bieberbachova domneva

Injektivno analitično funkcijo v $\{z;\ |z| < 1\}$ *z lastnostjo* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *razvijemo v potenčno vrsto* $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$. *Če je npr.* $f(z) = z/(1-z)^2$, *je* $f(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$. *Vidimo, da so koeficinti* $a_n = n$ *za* $n \geq 2$. *Vprašanje, ali za vsako funkcijo* f *z zgornjimi lastnostmi velja ocena* $|a_n| \leq n$ *za* $n \geq 2$?

To domnevo je leta 1916 postavil Ludwig Bieberbach. Sam je pokazal, da mora biti $|a_2| \leq 2$. Potem so jo dokazovali za naslednje koeficiente, za a_3, a_4, za a_6, nato za a_5 itd. Prav tako so dokazali, da vedno velja $|a_n| \leq Cn$, kjer je $C \geq 1$ neka konstanta. Vrednost te konstante so sčasoma približali 1. Toda, ali domneva v celoti drži? Leta 1984 je pozitivni odgovor našel Louis de Branges, ameriški matematik, človek, ki je že imel za sabo neuspešen poskus rešitve nekega drugega znanega problema, t.i. problema invariantnih podprostorov iz teorije operatorjev. Zaradi neuspeha je bil na slabem glasu, zato tudi 12 ameriških matematikov, ki jim je poslal svojo rešitev, v resnici sploh ni hotelo zares prebrati dokaza. K sreči je ravno takrat o svoji rešitvi predaval v St. Peterburgu (takrat Leningradu v SZ). Ruski matematiki Milin, Emeljanov, in Kuzmina, ki so problem tudi sami reševali, so ga poslušali, sprejeli njegove ideje in mu celo analizirali in skrajšali dokaz, tako da ga je sprejela tudi svetovna matematična skupnost (glej [7]).

(c) Fermatov (zadnji) izrek

Enačba $x^n + y^n = z^n$ *za naravno število* $n > 2$ *ni rešljiva v celih številih* $x, y, z \neq 0$.

To trditev je na rob Diofantove Aritmetike napisal Pierre de Fermat okrog leta 1630 hkrati z opombo, da je zanjo našel čudovit dokaz, ki pa ga zaradi pomanjkanja prostora ne more napisati. V 300 letih in več je ta Fermatova trditev postala eden najbolj slavnih in rešitve najbolj zaželjenih problemov v matematiki. Ob njegovem reševanju se je razvijala teorija števil, iznašli so vedno nove metode in cele teorije, rešiti pa ga niso mogli v celoti, čeprav so ga potrdili za presenetljivo visoka praštevila n. Spominjam se, da je leta 1973 znani zagrebški matematik Vladimir Devide v svojem predavanju na Bledu (ob 100-letnici rojstva Josipa Plemlja) omenil, da bi to utegnil biti ena tistih domnev, za katere velja, da je morda nikoli ne bomo znali dokazati, če je pravilna. Leta 1983 je zanimanje vzbudil 29-letni nemški matematik Gerd Faltings, ki je dokazal t.i. Mordellovo domnevo. Iz nje sledi, da ima enačba za $n \geq 2$ kvečjemu končno mnogo med seboj tujih si rešitev. Končno je po sedemletnem napornem raziskovalnem delu angleški matematik Andrew Wiles leta 1993 naznanil, da mu je uspelo dokazati domnevo dveh japonskih matematikov Taniyame in Shimure, iz katere sledi Fermatov izrek (v času raziskovanja Wiles ni objavil ničesar drugega). Toda v njegovem dokazu so našli vrzel. Skupaj s sodelavcem mu jo je uspelo v enem letu zapolniti, tako da sta lahko dokaz objavila 1995 in po preverjanju drugih matematikov je Fermatov izrek končno dokazan.

Wiles je z rešitvijo doživel svoje zvezdne trenutke. O njem in reševanju problema so napisali knjige (glej [1], [10]), snemali filme (Singh) in muzikale (Fermat's Last Tango, glej [2]). Leta 1998 so mu na mednarodnem matematičnem kongresu ICM, ki se dogodi vsake štiri leta podelili posebno nagrado. (Fieldsove medalje, najvišjega matematičnega priznanja, mu niso mogli podeliti, ker je že dopolnil 40 let in ne bi bilo v skladu s pravili.)

(d) Keplerjeva domneva

Najgostejše možno pakiranje krogel je tako, kot ga prakticirajo prodajalci sadja, ko pomaranče ali jabolka zlagajo v kopice. Maksimalna gostota znaša $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0.74048$.

Naj omenimo, da ima Keplerjeva domneva mnogovrstno uporabo v fiziki, kristalografiji in celo v teoretičnem računalništvu, zato je tako zelo zanimiva. Domnevo je postavil Johanes Kepler leta 1611, torej je še starejša kot Fermatov izrek. Skoraj 380 let je nihče ni znal dokazati, čeprav je naravna in pričakovana. S. Singh je napovedal, da je za Fermatovim problemom za reševanje na vrsti Keplerjeva domneva. In res je Thomas Hales leta 1999 objavil, da je po 10 letnem prizadevanju z uporabo računalniških programov dokazal, da je Keplerjeva domneva pravilna. Tudi zdaj je uporaba računalnika kontroverzna. Matematiki niso povsem prepričani, da je dokaz korekten. Razlog je v tem da ga je zelo zelo težko preveriti. Urednik revije *Annals of Mathematics*, kjer je Hales želel objaviti svoj dolgi dokaz, je po 4 letih moral priznati, da je 12 recenzentov moralo odnehati s preverjanjem dokaza, čeprav so 98% prepričani, da je pravilen.

Je pa Hales istega leta 1999 dokazal in objavil rešitev nekega drugega problema, ki izvira iz antike, problem satovja (dokazati, da je med vsemi tlakovanji ravnine s ploščinsko enakimi liki, tlakovanje s pravilnimi šestkotniki optimalno v smislu najmanjšega obsega).

O zgodovini Keplerjeve domneve in sorodnih problemih se lahko bralec več pouči iz knjig [11] in [12].

2. Najnovejša dogajanja okrog reševanja znanih problemov iz teorije števil

Nerešenih problemov se v matematiki seveda ne bo zmanjkalo. To velja tudi na področju teorije števil. V zvezi z rešenim Fermatovim problemom omenimo npr. domnevo abc (iz katere Fermatov izrek takoj sledi) in Bealovo domnevo, ki je posplošitev Fermatovega izreka (enačba $a^x + b^y = c^z$, $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}$ ni rešljiva, če je $x, y, z > 2$ in a, b, c nimajo skupnega faktorja).

Od starejših in bolj znanih problemov iz teorije števil ostajajo nerešeni Goldbachova domneva, problem praštevilskih dvojčkov, obstoj lihega popolnega števila, vprašanje, ali je popolnih števil neskončno, koliko je Fermatovih praštevil itd. Pri Golbachovi domnevi, ki pravi, da je vsako sodo število večje od 4 vsota dveh lihih praštevil, ali ekvivalentno, da je vsako liho število večje kot 7 vsota treh lihih praštevil (odštejemo 3), ni prav veliko napredka. Leta 1937 je Vinogradov dokazal, da je vsako dovolj veliko liho število res vsota treh lihih praštevil, a to ni praktičen odgovor, ker je meja lihih števil ogromna. Leta 1973 pa je Chen dokazal, da je vsako sodo število, večje od 4, vsota dveh števil, od katerih je prvo praštevilo, drugo pa produkt dveh ne nujno različnih praštevil.

So pa v zadnjem času rešili nekatere, manj slavne, a še vedno zanimive probleme. Na prvem mestu omenimo Catalanovo domnevo, da sta 3^2 in 2^3 edini zaporedni potenci (tj. $x = 3$, $y = 2$, $m = 2$ in $n = 3$ je edina celoštevilska rešitev enačbe $x^m - y^n = 1$). Domnevo je leta 2002 potrdil v Nemčiji živeči romunski matematik Preda Mihailescu. O tej domnevi je pisal tudi Obzornik za matematiko in fiziko [13].

Oglejmo si še nekaj lahko umljivih problemov iz teorije števil, pri katerih je prišlo do bistvenega napredka prav v zadnjem času (prvega in predzadnjega med njimi so celo rešili).

(a) Poljubno dolga aritmetična zaporedja praštevil

Za vsako naravno število k obstaja aritmetično zaporedje dolžine k iz samih praštevil.

Domnevo sta leta 1923 formulirala Hardy in Littlewood. V aprilu leta 2004 sta jo rešila Ben Green iz Bristola in Terence Tao (UCLA) z uporabo zahtevnih metod in sofisticiranih idej. (Pred tem je Szemerédy dokazal izrek, da vsako zaporedje števil s pozitivno gostoto vsebuje poljubno dolgo aritmetično zaporedje, toda zaporedje praštevil nima pozitivne gostote, zato so bile potrebne druge metode.) Njun dokaz ni konstruktiven. Samo za majhne k lahko eksplicitno najdeno aritmetično zaporedje praštevil dolžine k, npr. $k = 2$: 2,3, $k = 3$: 3,5,7 ali 3,7,11, $k = 5$: 5,11,17,23,29, $k = 6$: 7,37,67,97,127,157 itd. (Kje je zaporedje za $k = 4$?). Največja znana vrednost za k je 23, odkrita julija 2004, ustrezno zaporedje praštevil pa sestoji iz števil oblike $56211383760397 + 44546738095860k$, $k = 0, 1, 2, ..., 22$. Terence Tao je avgusta leta 2006 prejel na kongresu IMU v Madridu Fieldsovo medaljo za svoje raziskovalno delo (glej [3]).

(b) Problem praštevilskih dvočkov

Obstaja neskončno mnogo parov zaporednih praštevil.

Na to je ob koncu 19. stoletja opozoril Paul Stäckel. Leta 1919 je Viggo Brun ugotovil, da vrsta, sestavljena iz recipročnih vrednosti praštevil, ki nastopajo v teh praštevilskih dvojčkih, konvergira (vsota je t.i. Brunova konstanta B = 1.902160...), tako da še vedno ni bilo jasno, ali je zgornja trditev pravilna. Leta 1966 je Chen Jingrun dokazal sorodno trditev, da je neskončno mnogo dvojčkov (p, q), kjer je p praštevilo, q pa praštevilo ali produkt dveh praštevil. Rešitev je v maju 2004 napovedal R.F. Arenstorf z Vanderbildtove univerze. Pri rešitvi naj bi uporabil analitično teorijo števil v zvezi z Riemannovo funkcijo zeta. V dokazu so žal odkrili napako in še preverjajo, ali bi se dala odpraviti.

Posebno znamenit praštevilski dvojček je par 824 633 702 441 in 824 633 702 443. V zgodnjih 90. tih letih prejšnjega stoletja je ameriški matematik Thomas Nicely pri računanju natančne vrednosti Brunove konstante uporabil pet različnih računalnikov. Na štirih se je rezultat ujemal, pri petem, ki je vseboval tedaj novi Pentiumov aritmetični čip, pa ne. Ravno vrednost tistega člena vrste pri omenjenem praštevilskem dvojčku je ta računalnik izračunal napačno. Tako so odkrili napako pri izdelavi čipa, ki jo je Intel potem seveda brž popravil (glej npr. [14]).

Sorodna domneva je, da obstaja neskončno praštevil Sophie Germain, tj. praštevilskih parov oblike $(p, 2p + 1)$. Obstajajo tudi t.i. praštevila sestrične (oblike $(p, p + 4)$) in sexy praštevila (oblike$(p, p + 6)$).

(c) Problem praštevilske vrzeli

Praštevilska vrzel dolžine n je zaporedje $n - 1$ zaporednih sestavljenih števil med dvema zaporednima praštevilom. Če torej označimo razmak med k-tim in naslednjim praštevilom z $d_k = p_{k+1} - p_k$, mora biti $d_k = n$. Obstajajo poljubno dolge praštevilske vrzeli, npr. $n! + 2, ..., n! + n$, težko pa je najti najmanjšo (prvo) dolžine n. Po praštevilskem izreku je povprečna vrzel med praštevilom p in naslednjim praštevilom enaka $\ln p$. Zato definirajmo $\Delta = \lim\inf_n (p_{n+1} - p_n)/lnp_n$. Če bi bilo praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo, bi bil $\Delta = 0$ (ni pa ta pogoj zadosten). Paul Erdos je 1940 ugotovil, da je $\Delta < 1$, do leta 2003 pa so dognali, da je $\Delta \leq 0.2486$. Marca 2003 sta Dan Goldston is San Joseja in Cem Yalcin Yildirim iz Instanbula napovedala dokaz, da je vedno $\Delta = 0$. V njunem dokazu so kmalu našli napako. Leta 2005 se jima je pridružil Janos Pintz iz Budimpešte in skupaj producirali neoporečen dokaz te domneve, kar je lep dosežek, še zlasti, ker so njihove metode elementarne, saj temeljijo na t.i. Selbergovem situ (glej npr. [15] in [16]).

(d) Riemannova hipoteza

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici $Re s = 1/2$.

Riemannova funkcija zeta je holomorfna razširitev funkcije, ki je za Re $s > 1/2$ definirana z vrsto

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Znano je da ima ta razširjena funkcija t.i. trivialne ničle pri negativnih sodih celih številih in da so vse njene netrivialne ničle v pasu $0 <$ Re $s < 1$. Doslej so računsko našli pozicije na milijone netrivialnih ničel: vse ležijo na predvideni premici.

Domnevo je leta 1859 postavil veliki nemški matematik Bernhard Riemann in je do danes eden najbolj slavnih in največjih še nerešenih problemov iz teorije števil, pomeben tudi za moderno fiziko. O njej so napisane cele knjige, npr. [21]. Del slave Riemannove hipoteze izvira tudi iz tega, da jo je leta 1900 David Hilbert uvrstil na svoj znameniti seznam (takrat) nerešenih matematičnih problemov.

Leta 2004 poleti je med svetovno matematično srenjo zakrožila novica, da naj bi Louis de Branges (matematik, ki je potrdil Bieberbachovo domnevo) napovedal dokaz Riemannove hipoteze. Kolegi matematiki ostajajo precej skeptični, tako da je veljavnost njegovega dokaza vprašljiva.

Riemannova domneva je takorekoč edini še nerešeni problem s Hilbertovega seznama problemov 20. stoletja, ki si jih bomo na kratko ogledali v 4. razdelku. Predno pa se tega lotimo, pa posvetimo poseben razdelek najnovejšemu matematičnemu dosežku, ki se bo gotovo zapisal v zgodovino.

3. Poincaréjeva domneva

Posamezen dogodek, ki je v letu 2006 vzbudil največ zanimanja mednarodne matematične javnosti, celo strasti in razburjenja, je vsekakor povezan s potrditvijo naslednje znamenite domneve.

Vsaka zaprta enostavno povezana 3-mnogoterost je homeomorfna 3-sferi.

Postavil jo je Henri Poincaré leta 1904, kasneje se je ime prijelo za posplošen enak problem za n-mnogoterosti. Leta 1960 jo je Steven Smale (na osnovi rezultatov drugih) dokazal za vse $n \geq 5$. Za ta svoj dosežek je bil leta 1966 nagrajen s Fieldsovo medaljo. Friedman je leta 1981 dal pozitiven odgovor za $n = 4$, tako da je ostal nerešen le še primer $n = 3$ (za $n = 2$ in $n = 1$ je trivialno). Do danes velja za glavni nerešeni problem v topologiji.

Spomladi leta 2004 se je razširila novica, da je Poincaréjevo domnevo dokazal ruski matematik Grigorij Perelman iz Matematičnega inštituta Steklova v St. Peterburgu. 15. aprila je imel predavanje na M.I.T. v ZDA o svojem delu v letih 2002-03. Skoraj tri leta so strogo preverjali veljavnost dokaza, vendar vrhunski strokovnjaki na tem področju (Gang Tian, John Morgan) niso našli nobene resne pomanjkljivosti. Perelman je v resnici skušal dokazati splošnejšo in bolj zahtevno Thurstonovo geometrizacijsko domnevo o klasifikaciji vseh mnogoterosti dimenzije 3, iz katere takoj sledi Poincaréjeva domneva, a v dokazu le-te so našli vrzel. Eksperti sicer domnevajo, da se bo dalo pomanjkljivosti odpraviti (vsaj v Poincaréjevem primeru je Perelmanov dokaz korekten). Kot glavno sredstvo v dokazovanju je Perelman uporabil evolucijsko enačbo, znano kot Riccijev tok, ki jo je leta 1982 uvedel Richard Hamilton in se več kot dvajset let trudil, tako kot drugi, da bi ukrotil njene singularnosti. To je uspelo Perelmanu, ki je 2002 začel na spletu objavljati serijo (nerecenziranih) člankov, s katerimi je izpolnil Hamiltonov program in so vzbudili veliko zanimanja.

Za svoj prispevek k geometriji in revolucionarne vpoglede v analitično in geometrijsko strukturo Riccijevega toka (torej ne za rešitev Poincaréjeve domneve) je 22. avgusta 2006 na Mednarodnem kongresu matematikov (ICM) Grigorij Perelman prejel Fieldsovo medaljo (glej [3]). Podelil naj bi mu jo španski kralj Juan Carlos. Toda svet je obšla senzacija: kljub dvodnevnem prepričevanju predsednika Mednarodne matematične unije (IMU) Johna Balla, jo je Perelman gladko zavrnil (glej [17]), kar se je zgodilo prvič v zgodovini (rekoč, da mu nagrada nič ne pomeni v primeri z zadovoljstvom, če se bo izkazalo, da je res rešil Poincaréjevo domnevo).
Zanimivo je še to, da je za pravilno rešitev Poincarérjeve domneve Clayev matematični inštitut (CMI) iz Cambridgea v Massachussetsu v ZDA leta 2000 ponudil nagrado v višini milijona ameriških dolarjev. In Perelman je zelo resen kandidat, da jo dobi (ne glede na to, da obstaja velika verjetnost, da zavrne tudi njo). Zadnje novice iz St. Petersburga govorijo, da se je umaknil iz aktivne matematike zaradi razočaranja nad vedenjem matematične skupnosti (kitajska matematika Xi-Ping Zhu in Huai-Dong Cao, učenca znamenitega geometra Shing-Tung Yaua, znanega po Calabi-Yauovi mnogoterosti, se poteguјeta za primat glede rešitve Poincaréjeve domneve, o čemer sta v The New Yorkerju v avgustu 2006 obsežno poročala Sylvia Nasar in David Gruber, [18]). Tako se je izkazal ne samo za vrhunskega, ampak tudi za zelo nekonvencionalnega matematika.

4. Reševanje problemov v 20. stoletju

Reševanje problemov ima v preteklem stoletju močno tradicijo (nekateri ga imenujejo kar stoletje matematike). To ima svoje razloge, ki si jih bomo zdaj ogledali.

(a) Hlbertovi problemi

8. avgusta 1900 je pred kolegi matematiki, zbranimi na 2. mednarodnem kongresu matematikov (ICM) v Parizu nemški matematik David Hilbert, takrat verjetno eden največjih matematikov, prebral nekatere izmed svojih 23 nerešenih problemov, za katere je mislil, da so pomembni oziroma bodo pomembno vplivali na razvoj matematike v 20. stoletju. To se je kasneje res zgodilo: skozi reševanje Hilbertovih problemov se je razvil velik del današnje moderne matematike (primerjaj knjigo [19]). Večino problemov so matematiki 20. stoletja tudi rešili.

Oglejmo si nekaj bolj znanih problemov s Hilbertovega seznama.

H1. Hipoteza kontinuuma. *Ali obstaja neskončna podmnožica realnih števil, ki ni števna in je obenem njena moč manjša od moči vseh realnih števil?*

Paul Cohen je v začetku 60-tih let ugotovil, da je hipoteza neodvisna od Zermelo-Fraenkelovega sistema aksiomov teorije množic (za to si je leta 1966, istega leta kot Smale, prislužil Fieldsovo medaljo). Od takrat dalje velja problem za rešen; šele v zadnjih letih so spet oživele ideje o drugačnem pristopu do te hipoteze.

H3. Problem piramide. *Ali sta trikotni piramidi s skladno osnovno ploskvijo in isto višino enaki po razdelitvi?*

Na vprašanje je še istega leta negativno odgovoril Max Dehn, ki je npr. tudi pokazal, da kocka in tetraeder z isto prostornino nista enaka po razdelitvi. To je edini bolj elementaren in hkrati geometrijski Hilbertov problem.

H7. Problem transcendentnosti potenc algebraičnih števil. *Ali je število α^β, kjer sta α in β algebraični števili, $\alpha \neq 0, 1$ in $\beta \notin \mathbb{Q}$, algebraično ali transcendentno*?

Zanimivo je, da je Hilbert mislil, da je ta problem zelo težak in da bodo prej rešili npr. Riemannovo hipotezo ali dokazali Fermatov izrek. Toda leta 1934 oz. 1935 sta problem neodvisno rešila Aleksander Gelfond in Theodor Schneider. Opisana potenca je transcendentno število, zgled $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ali $e^\pi = i^{-2i}$. Kasneje je njun rezultat posplošil Alan Baker in dobil leta 1970 Fieldsovo medaljo.

H8. Riemannova hipoteza. To domnevo že poznamo, Hilbert jo je uvrstil na osmo mesto svojega seznama in je takorekoč edini danes še nerešen problem z njegovega seznama.

H10. Rešljivost diofantskih enačb. *Poiskati algoritem, ki bi v končno mnogo korakih za poljubno diofantsko enačbo odločil, ali je rešljiva.*

Problem ima bogato zgodovino (tako kot skoraj vsi drugi). Rešil pa ga je leta 1970 mladi ruski matematik Jurij Matijaševič na podlagi poprejšnjih dosežkov Julie Robinson, Martina Davisa in Hilary Putnam. Pokazal je, da takega algoritma ni. Zanimivo je, da je v svoji rešitvi uporabil znamenita Fibonaccijeva števila.

H18. Tlakovanje prostora z neregularnimi poliedri.

Problem je v zvezi s Keplerjevim problemom najgostejšega pakiranja krogel.

H21. Fuchsov sistem diferencialnih enačb. *Ali obstaja Fuchsov (regularen) sistem linearnih diferencialnih enačb s predpisanimi singularnostmi in predpisano monodromijsko grupo*?

Problem je zanimiv, ker je med njegovimi reševalci slovenski matematik Josip Plemelj, ki je podal svojo (pozitivno) rešitev leta 1908. Od tedaj je več kot 70 let veljala za neoporečno, potem pa so ugotovili, da je Plemelj rešil t.i. regularen primer, medtem ko je Fuchsov v resnici ostal nerešen. Še več, leta 1989 je ruski matematik Andrej Bolibruch (negativno) rešil tudi ta primer.

Celotno zgodbo reševanja Hilbertovih problemov je hkrati z različnimi, tudi zelo nenavadnimi, usodami njihovih reševalcev opisal Benjamin Yandell v svoji knjigi The Honor Class: Hilbert's problems and their solvers [19]. Nekaj teh problemov je našlo mesto tudi v knjigi [26].

(b) Nagrade

Velik del zgodovine reševanja matematičnih problemov je v 20. stoletju povezan s podeljevanjem prestižnih matematičnih nagrad.

(i) Fieldsova medalja

To je najpomembnejša matematična nagrada, ki jo vsake štiri leta podeljujejo na mednarodnih kongresih matematikov samo za največje dosežke. Velja za nekakšno matematično Nobelovo nagrado. Ime nosi po kanadskem matematiku in bogatašu Johnu Charlesu Fieldsu. Prvič so jo podelili leta 1936, nato (zaradi 2. svetovne vojne) šele 1950. V začetku so dali naenkrat le dve nagradi, zadnja leta po štiri. Dobili so jo številni ugledni in znani matematiki 20. stoletja.

Zanimivo je, da dobitnik ne sme biti starejši od 40 let. Tako npr. Andrew Wiles ni mogel dobiti te nagrade za dokaz Fermatovega izreka. O zgodovini Fieldsove medalje in njenih nagrajencih je zanimivo drobno knjižico napisal M. Monastyrsky [22].

(ii) Abelova nagrada

Norveška je leta 2002 sprožila pobudo za podeljevanje t.i Abelovih nagrad (v čast velikega norveškega matematika Henrika Abela). Ker se podeljujejo vsako leto, naj bi sčasoma postale tako znane kot Nobelove nagrade za druge znanosti. Prvo Abelovo nagrado je leta 2003 prejel francoski matematik Jean-Pierre Serre, ki je delal na področju topologije, algebraične geometrije in teorije števil. Drugo nagrado sta si leta 2004 delila angleški matematik Michael F. Atiyah in ameriški matematik I.M. Singer za svoj indeksni izrek, ki povezuje topologijo, geometrijo in analizo in ima uporabo v teoretični fiziki. Vsi trije so že prej bili dobitniki Fieldsovih medalj. Leta 2005 je nagrado prejel Peter D. Lax s Courantovega inštituta matematičnih znanosti za delo s parcialnimi deiferencialnimi enačbami, leta 2006 pa Lennart Carleson s Kraljevega švedskega inštituta za svoj prispevek k harmonični analizi in teoriji gladkih dinamičnih sistemov. Leta 2007 je nagrado dobil indijsko ameriški matematik S.R. Srinivasa Varadhan, ki je delal na podroju teorije verjetnosti. Leta 2008 je ta čast pripadla Amerianu Johnu Griggsu Thompsonu in Francozu Jacquesu Titsu za njun prispevek k moderni teoriji grup.

O Abelovi nagradi in njenih prvih nagrajencih je v eni od številk Obzornika za matematiko in fiziko pisal Pavle Saksida [23].

(iii) Nobelove nagrade

Nobelove nagrade se podeljujejo vsako leto oktobra in sicer za fiziko, kemijo (Kraljevska švedska akademija znanosti), fiziologijo ali medicino (Nobelov odbor Karolinškega inštituta), ekonomijo (Švedska banka), literaturo (Švedska akademija) in mir (Norveški Nobelov komite). Teh nagrad za druge vede, literaturo in mir ne bi omenjali, če ne bi bilo med nagrajenci že od vsega začetka precej matematikov, ki so dobili nagrado npr. za fiziko ali kemijo, kasneje tudi za ekonomijo (npr. John Nash). Več o Nobelovih nagradah do leta 2000 glej npr. v [24].

5. Sedem velikih problemov na prelomu tisočletja

Clayev matematični inštitut je konec 20. stoletja ustanovil milijonar Landon Clay z namenom podpirati matematične raziskave in reševanje problemov. V maju 2000 je inštitut na College de France v Parizu, v počastitev 100-letnice pariškega kongresa in objave Hilbertovih problemov, najavil ustanovitev nagradnega sklada v višini 7 milijonov ameriških dolarjev, namenjenega za rešitev 7 največjih matematičnih problemov ob prelomu tisočletja. Te probleme je zbrala skupina najbolj uglednih sodobnih matematičnih raziskovalcev (Jaffe, Atiyah, Connes, Witten in še kdo). Na spletni strani so podane podrobne predstavitve problemov, ki so jih pripravili eksperti na ustreznih področjih. Za rešitev vsakega od njih je obljubljen milijon dolarjev, seveda če prestane strogi dveletni test preverjanja po objavi v mednarodnih matematičnih časopisih.

Za konec naštejmo teh sedem problemov, ki so podrobneje opisani v knjigi Keitha Devlina, The Millenium Problems [25].

(1) Riemannova hipoteza
(2) Yang-Millsova teorija in domneva o masni vrzeli
(3) Problem P = NP
(4) Matematična rešitev Navier-Stokesove enačbe
(5) Poincaréjeva domneva

(6) Birch in Swinnerton-Dyerjeva domneva
(7) Hodgeva domneva

Literatura

[1] A. Aczel, *Fermat's Last Theorem: Unlocing the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, Delta, 1997.
[2] J.S. Lessner, J. Rosenblum, *Fermat's Last Tango*, muzikal, premiera novemer 2000, York theatre, New York
[3] *2006 Fields Medals Awarded*, Notices AMS, 53 (9) (October 2006), 1037- 1044
[4] R. Wilson, *Four Colors Suffice: How the map problem was solved*, Allen Lane, The Penguin Press, 2002.
[5] M. Laczkovich, *Paradoxical decompositions: a survey of recent results*, First european congress of mathematics, Paris, July 6-10, 1992, Vol.II, 159-184, Progress in Mathematics 119, Birkhauser, basel 1994.
[6] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, DMFAS, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999. *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih* - 2. del, DMFAS, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.
[7] K. Devlin, *Nova zlata doba matematike*, Knjižnica sigma 53, DMFAS 1993.
[8] K. Devlin, *Last doubts removed about the proof of the Four Color Theorem*, Devlin's angle, MAA Online, http://www.maa.org/devlin/devangle.html
[9] G.-C. Rota, *Inidsrete thoughts*, Birkhauser, 1997.
[10] S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London 2002.
[11] T. Aste, D. Weaire, *The Pusuit of Perfect Packing*, IoP, 2002.
[12] G.G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, John Wiley and Sons, Inc., 2003.
[13] J. Bračič, *Catalanova domneva je dokazana*, Obzornik mat. fiz. 52 (2005), 120-127.
[14] A. McBride, *Mathematics: The Greatest Subejct of the World*, The Mathematical Gazette, Nov. (2005), 354-364.
[15] *Prime Gaps*, http://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html
[16] M. Freiberger, *Elusive twins*, http://plus.maths.org/latestnews/may-aug05/twinprimes/index.html
[17] M. du Satoy, *Burden of proof*, New Scientist (26. August 2006), 41.
[18] S. Nasar, D. Gruber, *Manifold destiny*, The New Yorker 28.8.2006.
[19] B. Yandell, *The Honors Class: Hilbert's problems and Their Solvers*, A.K. Peters, 2002.
[20] M. Hladnik, *Moderna kvadratura kroga*, Knjižnica sigma 59, DMFAS, Ljubljana 1995.
[21] J. Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and tge Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington 2001.
[22] M. Monastyrsky, *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals*, Wellesley, A.K. Peters, 1997.
[23] P. Saksida, *Sir Michael F. Atiyah in Isadore M. Singer - dobitnika Abelove nagrade za leto 2004*, Obzornik mat. fiz. 51 (2004), 127-XV.
[24] A.Wallin Levinovitz, N. Ringertz, eds., *Nobel Prizes, The First 100 Years*, World Scientific, 2001.
[25] K. Devlin, *The Millenium Problems*, Basic Books, 2002.
[26] P. Odifreddi, *The Mathematical Century; The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years*, Princeton University Press, 2000.