Rešeni in nerešeni problemi matematike

Pregled 2008

Milan Hladnik

Podiplomski seminar na izobraževalni smeri
19. december 2008

Namesto uvoda

Problemi so srce matematike
(Paul Halmos)

Drobni vsakdanji problemi, večne nespremenljive resnice, kasnejše dodajanje, veliki problemi iz antike, primer kvadrature kroga (Hipokrat, F. Lindemann, M. Laczkovich).

Kazalo

Rešeni slavni problemi v zadnjih 30 letih

Nova zlata doba matematike
(Keith Devlin)

Nekaj slavnih rešitev:

- Problem štirih barv
- Bieberbachova domneva
- Fermatov (zadnji) izrek
- Keplerjeva domneva

Problem štirih barv

Problem

Ali je mogoče pravilno pobarvati ravninski zemljevid samo s štirimi barvami?

Zgodovina:
1835 F. Guthrie barval zemljevid angleških grofij, A. De Morgan, W. Hamilton, A. Cayley, znani in neznani matematiki
1977 Kenneth Appel in Wolfgang Haken, uporaba računalnika (4 leta dela, 1200 računalniških ur, ročno skoraj 1000 posebnih primerov, računalnik še 1500 do 2000 primerov), pomisleki glede računalniške rešitve.
2004 George Gonthier (Microsoft), program za preverjanje pravilnosti računalniških programov in formalno dokazovanje.

Bieberbachova domneva

Problem

Injektivno analitično funkcijo f v enotskem krogu $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ z lastnostjo $f(0) = 0$ in $f'(0) = 1$ razvijemo v potenčno vrsto $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ Če je npr. $f(z) = z/(1-z)^2$, je $f(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$ Vidimo, da so koeficienti $a_n = n$ za $n \geq 1$. Vprašanje: Ali za vsako funkcijo f z navedenimi lastnostmi velja ocena $|a_n| \leq n$ za $n \neq 1$?

Zgodovina:
1916 Ludwig Bieberbach, $|a_2| \leq 2$, naslednji koeficienti, $|a_n| \leq Cn$, $C \approx 1$
1984 Luis de Branges (neuspešni reševalec problema inv. prostorov), ruski matematiki Milin, Emeljanov, Kuzmina

Fermatov (zadnji) izrek

Problem

Enačba $x^n + y^n = z^n$ za naravno število $n > 2$ ni rešljiva v celih številih $x, y, z \neq 0$.

Zgodovina:
1630 Pierre de Fermat na rob Diofantove Aritmetike (čudovit dokaz, a ni dovolj prostora)
Reševali 300 let neuspešno, za različne tipe praštevil n, razvoj teorije števil
1973 Vladimir Devide na Bledu: morda nerešljiv
1983 Gerd Faltings reši Mordellovo domnevo (posledica: za $n \geq 2$ je kvečjemu končno mnogo med seboj paroma tujih si rešitev)

Fermatov izrek in Andrew Wiles

1993 Andrew Wiles naznani (po sedemletni izolaciji) dokaz domneve Taniyama in Shimura (iz katere sledi Fermatov izrek)
Opazili vrzel, eno leto, da so jo premostili
1995 Objavljen dokaz (skupaj s sodelavcem) 1998 na ICM v Berlinu srebrna plaketa (namesto Fieldsove medalje)

- A. Aczel, *Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, Delta, 1997.
- J.S. Lessner, J. Rosenblum, *Fermat's Last Tango*, muzikal, premiera novemer 2000, York Theatre, New York
- S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London 2002.

Keplerjeva domneva

Problem

Najgostejše možno pakiranje krogel je tako, kot ga poznajo prodajalci sadja, ko pomaranče ali jabolka zlagajo v kopice. Maksimalna gostota znaša $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0.74048$.

Zgodovina:
1611 Johannes Kepler (skoraj 400 let, starejša od Fermatove)
1999 Thomas Hales napovedal, da je po 10 letih našel dokaz, pomisleki (12 recenzentov pri Ann. of Math. po 4 letih odnehalo)
1999 Thomas Hales rešil problem satovja (med vsemi tlakovanji ravnine s ploščinsko enakimi liki je tlakovanje s pravilnimi šestkotniki optimalno - z najmanjšim obsegom)

Najnovejša dogajanja okrog reševanja znanih problemov iz teorije števil

Teorija števil je bila in ostaja kraljica matematike. Nekaj splošnih problemov iz teorije števil:

Domneva abc (tehnično zahtevnejša, iz nje sledi Fermat)
Bealova domneva (enačba $a^x + b^y = c^z$, $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}$ ni rešljiva, če je $x, y, z > 2$ in a, b, c nimajo skupnega faktorja)
Problem Fermatovih števil (ali jih je samo 5)
Problem popolnih števil (ali jih je neskončno)
Goldbachova domneva (vsako sodo število večje od 4 je vsota dveh lihih praštevil)
itd.

Nekaj znanih problemov iz teorije števil, ki so aktualni zadnje čase

- Poljubno dolga aritmetična zaporedja praštevil
- Problem praštevilskih dvojčkov
- Problem praštevilskih vrzeli
- Riemannova hipoteza

Poljubno dolga aritmetična zaporedja praštevil

Problem

Za vsako naravno število k obstaja aritmetično zaporedje dolžine k iz samih praštevil.

$k = 2:$ 2,3, $k = 3$: 3,5,7 ali 3,7,11, $k = 5$: 5,11,17,23,29, $k = 6$: 7,37,67,97,127,157 itd.

2004 Odkrita največja znana vrednost $k = 23$, ustrezno zaporedje praštevil:
$56211383760397 + 44546738095860k,\ k = 0, 1, 2, ..., 22.$

Rešitev problema praštevilskih dvojčkov

Zgodovina:
1923 G.H. Hardy in J.E. Littlewood
Szemeredy: vsako zaporedje naravnih števil s pozitivno gostoto vsebuje poljubno dolgo aritmetično zaporedje. (Zaporedje praštevil nima pozitivne gostote.)
2004 Ben Green (Bristol) in Terence Tao (UCLA), kompliciran nekonstruktiven dokaz
2006 Terence Tao prejel na kongresu IMU v Madridu Fieldsovo medaljo za svoje raziskovalno delo.

Problem praštevilskih dvojčkov

Problem

Obstaja neskončno mnogo parov $(p, p+2)$ *zaporednih praštevil.*

Zgodovina:
Konec 19. stoletja Paul Stäckel
1919 Viggo Brun: vrsta iz reciproičnih praštevilskih parov konvergira (vsota je Brunova konstanta B = 1.902160...)
1966 Chen Jigrun: obstaja neskončno mnogo dvojčkov (p, q), kjer je p praštevilo in q praštevilo ali produkt dveh praštevil
2004 R.F. Arenstorf napovedal rešitev (odkrili napako)

Znameniti praštevilski dvojček

824 633 702 441, 824633 702 443

Zgodnja ’90- ta leta: Thomas Nicely pri računanjo Brunove konstante uporabil novi pentium in odkril napačen čip.

Sorodni problemi: Praštevilski pari oblike $(p, 2p+1)$ (praštevila Sophie Germaine), oblike $(p, p+4)$ (praštevila sestrične) oblike $(p, p+6)$(seksi praštevila)

Problem praštevilskih vrzeli

Praštevilska vrzel dolžine n je zaporedje $n-1$ zaporednih sestavljenih števil med dvema zaporednima praštevilma. Če torej označimo razmak med k-tim in naslednjim praštevilom z $d_k = p_{k+1} - p_k$, mora biti $d_k = n$. Obstajajo poljubno dolge praštevilske vrzeli, npr. $n!+2, ..., n!+n$, težko pa je najti najmanjšo (prvo) dolžine n. Po praštevilskem izreku je povprečna vrzel med praštevilom p in naslednjim praštevilom enaka $\ln p$. Definirajmo $\Delta = \liminf_n (p_{n+1} - p_n)/\ln p_n$.

Problem

Ali je $\Delta = 0$ *?*

Reševanje problema praštevilskih vrzeli

Če bi bilo praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo, bi bil $\Delta = 0$ (ni pa ta pogoj zadosten).
1940 Paul Erdos ugotovil, da je $\Delta < 1$
Do leta 2003 dognali, da je $\Delta \leq 0.2486$.
Marca 2003 Dan Goldston iz San Joseja in Cem Yalcin Yildirim iz Instanbula napovedala dokaz, da je vedno $\Delta = 0$ (žal našli napako)
2005 Onadva in Janos Pintz iz Budimpešte, skupaj dali neoporečen dokaz te domneve, metode elementarne (temeljijo na t.i. Selbergovem situ).

Riemannova hipoteza

Problem

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici Re $s = 1/2$.

Riemannova funkcija zeta je holomorfna razširitev na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ funkcije, ki je za Re $s > 1/2$ definirana z vrsto

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ena najbolj slavnih še nerešenih domnev

Reševanje Riemannove hipoteze

Zgodovina:
1959 Bernhard Riemann
1900 David Hilbert uvrstil na svoj znameniti seznam 23 (takrat še) nerešenih problemov. Zdaj je takorekoč edini še nerešen problem s tega seznama.
2004 Louis de Branges na povedal dokaz (ni verjetno)

J. Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and tge Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington 2001.

Kdor bo rešil Riemannovo hipotezo, bo slaven.
(Anekdota z G.H. Hardyjevim potovanjem z ladjo z Danske)

Poincaréjeva domneva

Problem

Vsaka zaprta enostavno povezana 3-mnogoterost je homeomorfna 3-sferi.

Zgodovina:
1904 Henri Poincare, kasneje splošno za n-mnogoterosti
1960 Steven Smale dokazal za $n \geq 5$ (1966 Fieldsov medalj)
1981 Michael Freedman dokazal za $n = 4$ (za $n = 1,2$ trivialno)
2002 Grigorij Perelman na spletu objavil serijo nerecenziranih člankov o Riccijevem toku (program Richarda Hamiltona), tri leta strogo preverjali
2004 predaval na M.I.T v ZDA o svojem delu
2006 na ICM v Madridu zavrnil Fieldsovo medaljo

Hilbertovi problemi

8. avgusta 1900 na 2. ICM v Parizu David Hilbert objavil 23 nerešenih problemov, za katere je mislil, da so pomembni oziroma bodo pomembno vplivali na razvoj matematike v 20. stoletju. To se je kasneje res zgodilo: skozi reševanje Hilbertovih problemov se je razvil velik del današnje moderne matematike. Večino problemov so matematiki 20. stoletja tudi rešili.

B. Yandell, *The Honors Class: Hilbert's problems and Their Solvers*, A.K. Peters, 2002.

H1 Hipoteza kontinuuma

Problem

Ali obstaja neskončna podmnožica realnih števil, ki ni števna in je obenem njena moč manjša od moči vseh realnih števil?

Zgodovina:
začetek 60-tih: Paul Cohen, neodvisnost od Zermelo-Fraenkelovega sistema aksiomov

H3 Problem piramide

Problem

Ali sta trikotni piramidi s skladno osnovno ploskvijo in isto višino enaki po razdelitvi?

Edini bolj elementaren problem

Zgodovina:
1900 Max Dehn, negativni odgovor, tudi: kocka in tetraeder z isto prostornino nista enaka po razdelitvi

H7 Transcendentnost potenc algebraičnih števil

Problem

Ali je število α^β, kjer sta α in β algebraični števili, $\alpha \neq 0, 1$ in $\beta \notin \mathbb{Q}$, algebraično ali transcendentno?

Zgodovina:
Hilbert je mislil, da je ta problem zelo težak in da bodo prej rešili npr. Riemannovo hipotezo ali dokazali Fermatov izrek.
1934 oz. 1935 sta problem neodvisno rešila Aleksander Gelfond in Theodor Schneider. Opisana potenca je transcendentno število, zgled $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ali $e^\pi = i^{-2i}$.
Kasneje je njun rezultat posplošil Alan Baker in dobil leta 1970 Fieldsovo medaljo.

H8 Riemannova hipoteza

To domnevo že poznamo. Hilbert jo je uvrstil na osmo mesto svojega seznama in je takorekoč edini danes še nerešen problem z njegovega seznama.

H10 Rešljivost diofantskih enačb

Problem

Poiskati algoritem, ki bi v končno mnogih korakih za poljubno diofantsko enačbo odločil, ali je rešljiva.

Zgodovina: je bogata.
1970 ga je dokončno rešil mladi ruski matematik Jurij Matijašević na podlagi poprejšnjih dosežkov Julie Robinson, Martina Davisa in Hilary Putnam. Pokazal je, da takega algoritma ni. Zanimivo je, da je v svoji rešitvi uporabil znamenita Fibonaccijeva števila.

H18 Tlakovanje prostora z neregularnimi poliedri

Problem je v zvezi s Keplerjevim problemom najgostejšega pakiranja krogel.

H21 Fuchsov sistem diferencialnih enačb

Problem

Ali obstaja Fuchsov (regularen) sistem linearnih deiferencialnih enačb s predpisanimi singularnostmi in predpisano monodromijsko grupo?

Zgodovina:
Problem je zanimiv, ker je med njegovimi reševalci slovenski matematik Josip Plemelj, ki je podal svojo (pozitivno) rešitev pred točno sto leti, leta 1908. Od tedaj je več kot 70 let veljala za neoporečno, potem pa so ugotovili, da je Plemelj rešil t.i. regularen primer, medtem ko je Fuchsov v resnici ostal nerešen. Še več, leta 1989 je ruski matematik Andrej Bolibruch (negativno) rešil tudi ta primer.

Fieldsove medalje

Najpomembnejša matematična nagrada - enakovredna Nobelovi. Ime nosi po kanadskem matematiku in bogatašu Johnu Charlesu Fieldsu. Prvič so jo podelili leta 1936, nato (zaradi 2. svetovne vojne) šele 1950. V začetku so dali naenkrat le dve nagradi, zadnja leta po štiri. Dobili so jo številni ugledni in znani matematiki 20. stoletja. Dobitnik ne sme biti starejši od 40 let (Andrew Wiles je ni več mogel dobiti).

M. Monastyrsky, *Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals*, Wellesley, A.K. Peters, 1997.

Abelove nagrade

Norveška podeljuje Abelove nagrade v čast velikega norveškega matematika Henrika Abela. Prvo je leta 2003 prejel francoski matematik Jean-Pierre Serre, ki je delal na področju topologije, algebraične geometrije in teorije števil. Drugo nagrado sta si leta 2004 delila angleški matematik Michael F. Atiyah in ameriški matematik I.M. Singer za svoj indeksni izrek, ki povezuje topologijo, geometrijo in analizo in ima uporabo v teoretični fiziki. Vsi trije so že prej bili dobitniki Fieldsovih medalj.

Abelove nagrade

Leta 2005 je nagrado prejel Peter D. Lax s Courantovega inštituta matematičnih znanosti za delo s parcialnimi diferencialnimi enačbami, leta 2006 pa Lennart Carleson s Kraljevega švedskega inštituta za svoj prispevek k harmonični analizi in teoriji gladkih dinamičnih sistemov. Leta 2007 je nagrado dobil indijsko ameriški matematik S.R. Srinivasa Varadhan, ki je delal na področju teorije verjetnosti. Leta 2008 je ta čast pripadla Američanu Johnu Griggsu Thompsonu in Francozu Jacquesu Titsu za njun prispevek k moderni teoriji grup.

Nobelove nagrade

Nobelove nagrade se podeljujejo vsako leto oktobra in sicer za fiziko, kemijo (Kraljevska švedska akademija znanosti), fiziologijo ali medicino (Nobelov odbor Karolinškega inštituta), ekonomijo (Švedska banka), literaturo (Švedska akademija) in mir (Norveški Nobelov komite). Med nagrajenci za fiziko, medicino in ekonomijo precej matematikov (npr. John Nash).

A.Wallin Levinovitz, N. Ringertz, eds., *Nobel Prizes, The First 100 Years*, World Scientific, 2001.

Milenijski problemi

Clayev matematični inštitut (CMI) je konec 20. stoletja ustanovil milijonar Landon Clay z namenom podpirati matematične raziskave in reševanje problemov.
V maju 2000 je ta inštitut na College de France v Parizu, v počastitev 100-letnice pariškega kongresa in objave Hilbertovih problemov, najavil ustanovitev nagradnega sklada v višini 7 milijonov ameriških dolarjev, namenjenega za rešitev 7 največjih matematičnih problemov ob prelomu tisočletja (en milijon dolarjev za vsakega). Probleme je zbrala skupina najbolj uglednih sodobnih matematičnih raziskovalcev (Jaffe, Michael Atiyah, Alain Connes, Edward Witten itd.). Na spletni strani so podane podrobne predstavitve problemov, ki so jih pripravili eksperti na ustreznih področjih.

Problemi za milijon dolarjev

Sedem največjih še nerešenih problemov iz matematike ob prelomu tisočletja:

1. Riemannova hipoteza
2. Yang-Millsova teorija in domneva o masni vrzeli
3. Problem P = NP
4. Matematična rešitev Navier-Stokesove enačbe
5. Poncaréjeva domneva
6. Birch in Swinnerton-Dyerjeva domneva
7. Hodgeva domneva

K. Devlin, *The Millenium Problems*, Basic Books, 2002.