

REALNA ANALIZA
Zapiski predavanj

MILAN HLADNIK

Ljubljana, 2006

KAZALO

I. REALNE FUNKCIJE	3
1. Lebesguov in Riemannov integral (ponovitev)	3
2. Absolutno zvezne in singularne funkcije	11
3. Funkcije z omejeno variacijo in Riemann-Stieltjesov integral	15
4. Odvajanje funkcij	21
5. Osnovni izrek integralskega računa	27
6. Simetrični odvodi	31
II. FOURIEROVE VRSTE	37
1. Definicija in osnovne lastnosti Fourierovih koeficientov	37
2. Konvolucija in sumacijska jedra	41
3. Konvergenca Fourierovih vrst po normi	46
4. Kvadratična konvergenca	50
5. Sumabilnost Fourierovih vrst	52
6. Lakunarne Fourierove vrste	58
7. Večkratne Fourierove vrste	62
8. Konvergenca Fourierovih vrst po točkah	67
9. Sinusna in kosinusna vrsta	73
III. TRIGONOMETRIČNE VRSTE	80
1. Riemannova teorija trigonometričnih vrst	80
2. Množice enoličnosti in ordinalna števila	85
3. Rajchmanova teorija trigonometričnih vrst	87
4. Množice razreda $H^{(n)}$	94
5. Pisotova števila	98
6. Salem-Zygmundov izrek	104
DODATEK	111
A. Baireov izrek in posledice	111
B. Linearne sumabilne metode	115
C. Monotona in konveksna zaporedja	120
D. Ordinalna števila in transfinitna indukcija	124
E. Neskončnokrat odvedljive funkcije	128
F. Algebraična števila	130
G. Potenčne vrste racionalnih funkcij	133
Literatura	137

I. poglavje : REALNE FUNKCIJE

1. Lebesguov in Riemannov integral (ponovitev)

Merljive množice in merljive funkcije

Družino vseh Lebesguovo merljivih množic na realni osi \mathbb{R} označimo z \mathcal{M} . To je σ -algebra podmnožic v \mathbb{R} (zaprta za komplementiranje, številne preseke in številne unije). *Lebesguova mera* je preslikava $m: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ z lastnostmi:

- (i) $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$, če je $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ in $E_j \cap E_k = \emptyset$ za $j \neq k$ (številna aditivnost),
- (ii) $m(E + x) = m(E)$ za vsak $E \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}$ (translacijska invariantnost),
- (iii) $m(I) = b - a$, če je $I = [a, b]$ (posplošitev dolžine intervala).

S temi lastnostmi je Lebesguova mera na \mathcal{M} natanko določena, v njeno konstrukcijo pa se tu ne bomo spuščali (glej npr. [21] ali [11]). Iz številne aditivnosti sledi zveznost mere za monotona zaporedja merljivih množic: $m(E) = \lim_n m(E_n)$, če $E_n \nearrow E$ ali če $E_n \searrow E$ in $m(E_1) < \infty$. Zaradi (iii) velja $m(\{a\}) = 0$ za poljubno točko a .

Uporabljali bomo še naslednje znane lastnosti Lebesguove mere:

- (a) (Kompletnost): $E \in \mathcal{M}$, $m(E) = 0$ in $A \subset E \implies A \in \mathcal{M}$ in $m(A) = 0$. Kadar neka lastnost velja povsod na merljivi množici E razen na podmnožici z mero 0, rečemo, da velja *skoraj povsod* na E in zapišemo s.p. na E .
- (b) (Borelova mera): Če z \mathcal{B} označimo Borelovo σ -algebro in z $\mathcal{P}\mathbb{R}$ družino vseh podmnožic v \mathbb{R} , velja $\mathcal{B} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{P}\mathbb{R}$. Da se pokazati, da so inkluzije povsod stroge.
- (c) (Regularnost): Za vsak $E \in \mathcal{M}$ in vsak $\epsilon > 0$ obstajata zaprta množica $F \subset E$ in odprta množica $G \supset E$, da je $m(G \setminus F) < \epsilon$. Če imamo številno zaporedje ϵ_n z lastnostjo $\epsilon_n \rightarrow 0$ in za vsak n zaprto množico F_n in odprto množico G_n z zgornjo lastnostjo. Potem je $F = \cup_n F_n$ t.i. F_σ množica (številna unija zaprtih množic) in $G = \cap_n G_n$ t.i. G_δ množica (številni presek odprtih množic) in velja $m(G \setminus F) = 0$. Obe množici, F in G , sta seveda Borelovi.

Funkcija $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ je *merljiva*, če za vsako odprto množico $G \subset \mathbb{R}$ velja $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$. Posebno preproste so *enostavne funkcije*, tj. funkcije oblike $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, kjer je $E = \cup_{i=1}^n E_i$ in so E_i paroma disjunktni množice. Hitro se vidi, da je enostavna funkcija merljiva natanko takrat, ko so vse množice E_i merljive.

Monotono konvergenco množic in mer, skoraj gotovo konvergenco merljivih funkcij ter regularnost Lebesguove mere pogosto in s pridom uporabljamo. Oglejmo si to pri dokazu dveh pomembnih klasičnih izrekov.

Izrek 1 (Jegorov). *Naj bo E merljiva podmnožica v \mathbb{R} s končno mero $m(E) < \infty$, $f_n \rightarrow f$ s.p. na E in $\epsilon > 0$. Tedaj obstaja taka zaprta podmnožica $F \subset E$, da je $m(E \setminus F) < \epsilon$ in velja $f_n \rightarrow f$ enakomerno na F .*

Dokaz. Izberimo naravno število n in definirajmo naraščajoče zaporedje merljivih množic

$$E_{n,k} = \cap_{j \geq k} \{x \in E; |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n}\}$$

Njihova unija $E_n = \cup_k E_{n,k}$ vsebuje množico $\{x \in E; f_j(x) \rightarrow f(x)\}$, katere komplement ima po predpostavki mero 0. Torej je $m(E_n) = m(E)$. Zaradi $E_{n,k} \nearrow E_n$ ($k \rightarrow \infty$), velja $m(E_{n,k}) \rightarrow m(E)$ ($k \rightarrow \infty$), kar pomeni, da $m(E \setminus E_{n,k}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Torej za dani $\epsilon > 0$ obstaja $k_\epsilon(n) \geq n$, da velja $m(E \setminus E_{n,k_\epsilon(n)}) < \epsilon/2^n$.

Zaradi regularnosti mere m obstaja za vsak n taka zaprta podmnožica $F_n \subset E_{n,k_\epsilon(n)}$, da je $m(E_{n,k_\epsilon(n)} \setminus F_n) < \epsilon/2^n - m(E \setminus E_{n,k_\epsilon(n)})$. Tedaj je

$$m(E \setminus F_n) = m(E \setminus E_{n,k_\epsilon(n)}) + m(E_{n,k_\epsilon(n)} \setminus F_n) < \epsilon/2^n.$$

Nadalje naj bo $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Potem je $E \setminus F = \cup_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n)$ in zato $m(E \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon$. Poleg tega za vsak n obstaja $k_\epsilon(n)$, tako da za vsak $j \geq k_\epsilon(n)$ velja $|f_j(x) - f(x)| < 1/n$ za vsak $x \in F$ (saj je vsak tak $x \in F_n \subset E_{n,k_\epsilon(n)}$ za vsak n). Torej imamo na množici F enakomerno konvergenco $f_j \rightarrow f$.

Opombe. 1. Če obstaja taka zaprta podmnožica $F \subset E$, da je $m(E \setminus F) < \epsilon$ in velja $f_n \rightarrow f$ enakomerno na F , rečemo, da f_n na E *skoraj enakomerno konvergira* proti f . Za množice s končno mero izrek Jegorova torej pove, da iz konvergence skoraj povsod sledi skoraj enakomerna konvergenca (obratno je skoraj trivialno).

2. Če je $m(E) = \infty$, sklep izreka Jegorova ne velja, kot kaže protiprimer funkcij $\chi_{[-n,n]}$ na \mathbb{R} , ki na podmnožicah z neskončno mero ne konvergirajo enakomerno proti 1.

3. V dokazu izreka smo videli, da za vsak $\epsilon > 0$ in vsak n obstaja tak $k_\epsilon(n)$, da za vsak $j \geq k_\epsilon(n)$ velja $m(\{x \in E; |f_j(x) - f(x)| \geq 1/n\}) \leq m(E \setminus F) < \epsilon$ (tu je bil F odvisen od ϵ). Torej v resnici velja $m(\{x \in E; |f_j(x) - f(x)| \geq 1/n\}) (j \rightarrow \infty)$, se pravi, da imamo pri pogojih izreka *konvergenca po meri* $f_j \rightarrow f$.

4. Iz enakomerne konvergence na E očitno sledi skoraj enakomerna konvergenca, iz te konvergence skoraj povsod, iz te pa po točki 3 konvergenca po meri. Iz nje lahko izpeljemo konvergenco (vsaj enega) podzaporedja. Obratno na sploh ne velja. Iz enakomerne konvergence sledi tudi konvergenca po normi prostora $L^1(E)$, iz te pa konvergenca po meri. (Za navedene trditve glej npr. [9].)

Uporabimo izrek Jegorova za dokaz naslednjega rezultata in njegove posledice. Rekli bomo, da je f zvezna relativno glede na množico F , če iz $x_k, x \in F$ in $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) sledi $f(x_k) \rightarrow f(x)$.

Izrek 2 (Luzin). *Naj bo E merljiva množica, $m(E) < \infty$ in f merljiva funkcija na E . Tedaj za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka zaprta podmnožica $F \subset E$, da je $m(E \setminus F) < \epsilon$ in je f zvezna (relativno glede) na F .*

Dokaz. Najprej dokažimo izrek za enostavno merljivo funkcijo $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, kjer je $E = \cup_i E_i$ in so množice E_i paroma disjunktne in merljive. Zaradi regularnosti mere za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $F_i \subset E_i$, $m(E_i \setminus F_i) < \epsilon/n$. Potem je $F = \cup_{i=1}^n F_i$ zaprta množica in zaradi $E \setminus F = \cup_{i=1}^n E_i \setminus \cup_{i=1}^n F_i = \cup_{i=1}^n (E_i \setminus F_i)$ velja $m(E \setminus F) = \sum_{i=1}^n m(E_i \setminus F_i) < \sum_{i=1}^n \epsilon/n = \epsilon$. Ker so F_i zaprte, paroma disjunktne množice in je $s(x) = c_i$ za $x \in F_i$, je enostavna funkcija s zvezna relativno glede na F .

Za poljubno merljivo funkcijo f obstaja zaporedje enostavnih merljivih funkcij s_k , ki konvergirajo po točkah proti f . Za vsak k obstaja po prvem delu dokaza taka zaprta podmnožica $F_k \subset E$, da je $m(E \setminus F_k) < \epsilon/2^{k+1}$ in je s_k zvezna relativno glede na F_k . Po izreku Jegorova (IE) (ki ga lahko uporabimo, saj je $m(E) < \infty$) pa obstaja taka zaprta podmnožica $F_0 \subset E$, da je $m(E \setminus F_0) < \epsilon/2$ in je na F_0 konvergenca $s_k \rightarrow f$ enakomerna. Definirajmo $F = \cap_{k=0}^{\infty} F_k$. Tedaj je F zaprta množica, vsaka funkcija s_k je zvezna relativno glede na F (ker je zvezna na F_k) in velja $s_k \rightarrow f$ enakomerno na F (ker velja to na F_0). Od tod sledi, da je tudi f zvezna relativno glede na F (dokaz je enak klasičnemu). Poleg tega velja $m(E \setminus F) = m(\cup_{k=0}^{\infty} (E \setminus F_k)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon/2^{k+1} = \epsilon$.

Posledica. Naj bo E merljiva množica, $m(E) < \infty$ in f merljiva funkcija na E . Tedaj za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka zvezna funkcija g na E , da je $\sup |g| \leq \sup |f|$ in $m(\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$.

Dokaz. Po Luzinovem izreku obstaja za vsak $\epsilon > 0$ zaprta podmnožica $F \subset E$ z lastnostjo $m(E \setminus F) < \epsilon$, tako da je f zvezna (relativno glede) na F . Komplement F^c na \mathbb{R} je sestavljen iz števno mnogo odprtih disjunktnih intervalov, zato lahko $f|_F$ razširimo (npr. linearno) do zvezne funkcije \tilde{f} na $[a, b]$. Naj bo $g = \tilde{f}|_E$. Zaradi posebne definicije funkcije g , je $\sup |g|$ dosežen na množici F , tam je enak $\sup |f|_F \leq \sup |f|$. Ker pa je $g(x) = f(x)$ za $x \in F$, je $\{x \in E; f(x) \neq g(x)\} \subset E \setminus F$ in zato $m(\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}) \leq m(E \setminus F) < \epsilon$.

Lebesguov integral

Lebesguov integral po merljivi množici $E \in \mathcal{M}$ definiramo najprej za enostavne funkcije s predpisom $\int_E s dm = \sum_{i=1}^n c_i m(E_i)$ in nato za nenegativne merljive funkcije $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, s predpisom :

$$\int_E f dm = \sup_s \int_E s dm,$$

kjer preteče supremum vse enostavne merljive funkcije s z lastnostjo $0 \leq s \leq f$. Lahko je seveda $\int_E f dm = \infty$.

Če je $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna realna merljiva funkcija, jo zapišemo $f = f^+ - f^-$, kjer sta $f^+ = \max\{f, 0\}$ in $f^- = -\min\{f, 0\}$ (pozitivni in negativni del) tudi merljivi funkciji. V primeru, da je vsaj eden od integralov $\int_E f^+ dm$ in $\int_E f^- dm$ končen, definiramo

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm.$$

Lahko je seveda $\int_E f dm = \pm\infty$. Če pa je to končno število, rečemo, da je f *integrabilna funkcija*. Ker vedno velja $|\int_E f dm| = |\int_E f^+ dm - \int_E f^- dm| \leq \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm = \int_E (f^+ + f^-) dm = \int_E |f| dm$, se takoj vidi, da je f integrabilna funkcija natanko takrat, ko je $\int_E |f| dm < \infty$. (Torej je f integrabilna natanko takrat, ko je integrabilna $|f|$.)

Za poljubno kompleksno merljivo funkcijo $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ pišemo $f = f_1 + if_2$, kjer sta f_1 realni in f_2 imaginarni del funkcije f . V tem primeru definiramo

$$\int_E f dm = \int_E f_1 dm + i \int_E f_2 dm.$$

in rečemo, da je kompleksna funkcija f *integrabilna* natanko takrat, ko sta $\int_E f_1 dm$ in $\int_E f_2 dm$ končni realni števili. Iz $|f_1|, |f_2| \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|$ sledi, da je to res natanko takrat, ko je $\int_E |f| dm < \infty$. Zaradi te lastnosti rečemo, da je Lebesguov integral absolutni. Poleg tega velja ocena $|\int_E f dm| \leq \int_E |f| dm$.

Integrabilne funkcije sestavljajo vektorski prostor:

$$\mathcal{L}^1(E) = \{f; f: E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ merljiva, } \int_E |f| dm < \infty\}$$

Definicija. $f = g$ s.p. na E (skoraj povsod na E) natanko takrat, ko je $m(\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

To je ekvivalenčna relacija na funkcijskem prostoru $\mathcal{L}^1(E)$, dostikrat označena z \sim . Integrala dveh skoraj povsod enakih funkcij sta enaka. Če označimo z N množico točk, v

katerih se funkciji f in g razlikujeta, torej $N = \{x \in E; f(x) \neq g(x)\}$, namreč velja:

$$\int_E f dm = \int_{E \setminus N} f dm + \int_N f dm = \int_{E \setminus N} f dm = \int_{E \setminus N} g dm = \int_{E \setminus N} g dm + \int_N g dm = \int_E g dm.$$

Trditev 1. *Iz $f = 0$ s.p. na E sledi $\int_E f dm = 0$. Obratno velja za pozitivne funkcije.*

Dokaz. Prvi del je očiteno. Naj bo $\int_E f dm = 0$ in $N = \{x \in E; f(x) > 0\}$, $N_k = \{x \in E; f(x) \geq 1/k\}$ za $k = 1, 2, \dots$. Tedaj je $\int_{N_k} f dm \leq \int_N f dm = \int_E f dm = 0$ in zato $\frac{1}{k}m(N_k) = 0$ za vsak k . Torej je zaradi $N_k \nearrow N$ tudi $m(N) = \lim_k m(N_k) = 0$, se pravi $f = 0$ s.p. na E .

$L^1(E)$ definiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov $[f]$ med seboj skoraj povsod enakih integrabilnih funkcij, torej $L^1(E) = \mathcal{L}^1(E)/\sim$. Kljub temu na elemente prostora $L^1(E)$ največkrat gledamo kot na funkcije.

Izrek. $L^1(E)$ je Banachov prostor za normo $\|f\|_1 = \int_E |f| dm$.

Dokaz glej v [21] ali [11]. Podobno definiramo za $1 \leq p < \infty$ tudi Banachove prostore:

$$L^p(E) = \{[f]; f : E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ merljiva na } E, \int_E |f|^p dm < \infty\}$$

za normo $\|f\|_p = (\int_E |f|^p dm)^{1/p}$ in

$$L^\infty(E) = \{[f]; f : E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ merljiva na } E, \text{ess sup}_E |f| < \infty\}$$

za normo $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f| = \inf\{c \geq 0; m(\{x \in E; |f(x)| > c\}) = 0\}$ (bistveni supremum). Vedno velja $|f| \leq \|f\|_\infty$ s.p. na E .

V posebnem primeru je $L^2(E)$ Hilbertov prostor za normo $\|f\|_2 = (\int_E |f|^2 dm)^{1/2}$, ki je porojena iz skalarnega produkta $\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} dm$.

V splošnem velja Hölderjeva neenakost za konjugirana indeksa (tj. $1/p + 1/q = 1$):

$$\int_E |fg| dm \leq (\int_E |f|^p dm)^{1/p} (\int_E |g|^q dm)^{1/q}.$$

Desna stran je lahko neskončna; če pa je $f \in L^p(E)$ in $g \in L^q(E)$, ta neenakost pove, da je $fg \in L^1(E)$ in $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. V primeru $p = 2$ je Hölderjeva neenakost enaka Cauchy-Schwarzovi. Kadar je $m(E) < \infty$, lahko izberemo konstantno funkcijo $g = 1$ in dobimo neenakosti $\|f\|_1 \leq m(E)^{1/q} \|f\|_p$, $\|f\|_p \leq m(E)^{1/p} \|f\|_\infty$ ozroma inkluziji $L^\infty(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E)$. V posebnem primeru je $L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E)$. Pri pogoju $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ lahko vpišemo $p = p_2/p_1$ (tedaj je konjugirani indeks $q = p_2/(p_2 - p_1)$), $g = 1$ in $|f|^{p_1}$ namesto f , pa dobimo $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$ zaradi ocene $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} m(E)^{1/p_1 - 1/p_2}$. Nazadnje še povejmo, da iz Hölderjeve neenakosti sledi za $1 \leq p \leq \infty$ neenakost Minkowskega: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Samo omenimo, da se da Lebesguovo mero in Lebesguov integral definirati tudi v ravnini \mathbb{R}^2 ali v več razsežnih prostorih \mathbb{R}^n , $n > 2$. To bomo sicer potrebovali bolj redko in se pri tem sklicevali na Fubinijev izrek o zamenjavi vrstnega reda integriranja (glej npr. [21] ali [11]).

Večkrat, tako rekoč neprestano, pa bomo uporabljali nekatere znane konvergenčne izreke:

(a) *Fatoujeva lema (FL)*:

$$f_n \geq 0, \text{ merljive} \implies \int_E (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm$$

(b) *Lebesguov izrek o monotoni konvergenci (LIMK)*:

$$f_n \geq 0, \text{ merljive, } f_n \nearrow f \text{ s.p. na } E \implies f \text{ merljiva in } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$$

(c) *Lebesguov izrek o dominantni konvergenci (LIDK)*:

f_n kompleksne, merljive, $|f_n| \leq g$ za $g \in L^1(E)$, $f_n \rightarrow f$ s.p. na $E \implies f \in L^1(E)$ in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$$

Teh izrekov ne bomo dokazovali. Za zgled, kako jih uporabljamo, si bomo oglejmo zvezno odvisnost Lebesguovega integrala od integracijske množice. Za omejene funkcije funkcije je ta rezultat trivialen, za neomejene pa si pomagamo z naslednjo konstrukcijo :

"Rezanje" funkcije. Za (neomejeno) funkcijo $f \in L^1(E)$ naj bo

$$f_n = \begin{cases} f & , \quad |f| \leq n \\ n & , \quad |f| > n \end{cases} .$$

Potem so funkcije f_n omejene, saj velja $|f_n| \leq n$, so iz $L^1(E)$, saj je $|f_n| \leq |f|$ za vsak n in zato $\int_E |f_n| dm \leq \int_E |f| dm$, in zaporedje f_n konvergira k f povsod na E (za vsak $x \in E$ je $f_n(x) = f(x)$ pri dovolj velikem n). Še več, za vsako merljivo podmnožico $A \subset E$ lahko ocenimo $|f - f_n| \leq 2|f|$, zato (LIDK) velja

$$\left| \int_A (f - f_n) dm \right| \leq \int_A |f - f_n| dm \leq \int_E |f - f_n| dm \rightarrow 0.$$

V posebnem primeru je $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), zato konvergira zaporedje f_n proti f tudi v prostoru $L^1(E)$.

Trditev 2. Če je $f \in L^1(E)$, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako merljivo množico $A \subset E$ velja: $m(A) < \delta \implies \left| \int_A f dm \right| < \epsilon$.

Dokaz. Najprej naj bo f omejena funkcija na E , se pravi $|f| \leq M$. Izberimo $\delta = \epsilon/M$, pa je za vsako merljivo podmnožico $A \subset E$ z lastnostjo $m(A) < \delta$ res

$$\left| \int_A f dm \right| \leq \int_A |f| dm \leq Mm(A) < M\delta = \epsilon.$$

Če f ni omejena, jo tako kot zgoraj aproksimiramo z "odrezano" funkcijo f_n . Izberimo n tako velik, da je $\left| \int_A (f - f_n) dm \right| < \epsilon/2$ za vsak $A \subset E$. Potem je (za vsako merljivo podmnožico $A \subset E$)

$$\left| \int_A f dm \right| \leq \left| \int_A (f - f_n) dm \right| + \left| \int_A f_n dm \right| < \epsilon/2 + \left| \int_A f_n dm \right| + \epsilon/2.$$

Izberimo še A (odvisen od n) tako, da bo $\left| \int_A f_n dm \right| < \epsilon/2$. To lahko dosežemo po prvem delu dokaza, če je le $m(A) < \delta$ (ta δ je odvisen od ϵ in n), saj je f_n omejena funkcija. Torej je $\left| \int_A f dm \right| < \epsilon$ za $m(A) < \delta$.

Kasneje se bomo večkrat sklicali tudi na naslednji rezultat.

Trditev 3. Če je $f \in L^1([a, b])$ in $\int_{[a, x]} f dm = 0$ za vsak $x \in [a, b]$, je $f = 0$ s.p. na $[a, b]$.

Dokaz. Označimo $I = [a, b]$. Integral $\int_{[a,x]} f dm = \int_I \chi_{[a,x]} f dm$ obstaja, ker je $\chi_{[a,x]} f \in L^1([a, b])$. Za vsak zaprt podinterval $[\alpha, \beta] \subset I$ je tudi $\int_{[\alpha, \beta]} f dm = \int_{[\alpha, \beta]} f dm - \int_{[\alpha, \alpha]} f dm = 0$. Isto velja za odprte podintervale in za vsako (relativno) odprto podmnožico U v $[a, b]$, saj je enaka števeni uniji disjunktnih (relativno) odprtih podintervalov I_k in zato $\int_U f dm = \sum_k \int_{I_k} f dm = 0$ (po LIDK). Torej velja tudi za vsako zaprto podmnožico $F \subset I$, saj je $\int_F f dm + \int_{I \setminus F} f dm = \int_I f dm = 0$.

Po trditvi 2 za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako merljivo podmnožico A iz $m(A) < \delta$ sledi $|\int_A f dm| < \epsilon$. Naj bo sedaj E poljubna merljiva podmnožica v I . Zaradi regularnosti Lebesguove mere m lahko najdemo tako zaprto podmnožico $F \subset E$, da je $m(E \setminus F) < \delta$ in zato $|\int_{E \setminus F} f dm| < \epsilon$ (trditev 2), se pravi, tudi $|\int_E f dm| < \epsilon$, saj je $\int_F f dm = 0$. Ker je bil $\epsilon > 0$ poljuben, imamo $\int_E f dm = 0$.

Pišimo $f = f_1 + if_2$, kjer sta f_1, f_2 realni in imaginarni del, ter $f_1 = f_1^+ - f_1^-$. Iz $\int_E f dm = 0$ takoj sledi $\int_E f_1 dm = 0$ in $\int_E f_2 dm = 0$ za vsako merljivo množico E . Označimo $E_1 = \{x \in I; f_1(x) \geq 0\}$. Potem $\int_{E_1} f_1^+ dm = \int_{E_1} f_1 dm = 0$. Ker je $f_1^+ \geq 0$, sledi $f_1^+ = 0$ s.p. na E_1 po trditvi 1, torej v resnici s.p. na I (ker je drugje f_1^+ enak 0). Podobno dobimo $f_1^- = 0$ s.p. na I , torej $f_1 = 0$ s.p. na I . Enako sklepamo, da je $f_2 = 0$ s.p. na I , se pravi, tudi $f = 0$ s.p. na I .

Odrpte množice na realni osi imajo pozitivno Lebesguovo mero, zato za zvezno funkcijo iz $f = 0$ s.p. na $[a, b]$ sledi $f \equiv 0$ na $[a, b]$. Torej je $f \mapsto [f]$ injektivna vložitev množice zveznih funkcij $C([a, b])$ v $L^\infty(E)$.

Izrek 3. Množica $C([a, b])$ vseh zveznih funkcij je gosta v prostoru $L^1([a, b])$.

Dokaz. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Vsaka zvezna funkcija f na $[a, b]$ je v $L^\infty([a, b]) \subset L^1([a, b])$. Naj bo $f \in L^1([a, b])$ poljubna in f_n "odrezana" funkcija (glej tekst pred trditvijo 2) z lastnostjo $|f_n| \leq n$ in $\|f - f_n\|_1 = \int_a^b |f - f_n| dm < \epsilon/2$. Za funkcijo f_n pa obstaja po posledici izreka 2 taka zvezna funkcija g_n , da je $\|g_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \leq n$ in $m(N_n) = m(\{x \in [a, b]; f_n(x) \neq g_n(x)\}) < \epsilon/(4n)$. Potem je tudi $\|f_n - g_n\|_1 = \int_a^b |f_n - g_n| dm = \int_{N_n} |f_n - g_n| dm \leq 2nm(N_n) < \epsilon/2$ in zato tudi $\|f - g_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - g_n\|_1 < \epsilon$.

Opomba. Praktično na enak način dokažemo, da je množica zveznih funkcij gosta tudi v vsakem od Banachovih prostorov $L^p([a, b])$, kjer je $1 < p < \infty$.

Riemannov integral

Zvezne funkcije na zaprtem intervalu $[a, b]$ so tudi Riemannovo integrabilne, se pravi $C([a, b]) \subset R([a, b])$, če slednje označimo z $R([a, b])$.

Trditev 4. Naj bo f omejena funkcija, ki je Riemannovo integrabilna na $[a, b]$. Tedaj je $f \in L^1([a, b])$ in velja

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx.$$

Dokaz. Naj bo f realna funkcija (sicer dokažemo trditev posebej za realni in imaginarni del) in $\Delta_k = \{a = x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)} = b\}$, $x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{n_k}^{(k)}$, zaporedje vedno finejših delitev intervala $[a, b]$ z lastnostjo $|\Delta_k| = \max_{1 \leq i \leq n_k} (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Definirajmo $s_k(x) = \inf_{x_{i-1}^{(k)} \leq x < x_i^{(k)}} f(x)$ in $S_k(x) = \sup_{x_{i-1}^{(k)} \leq x < x_i^{(k)}} f(x)$, če je $x_{i-1}^{(k)} \leq x < x_i^{(k)}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n_k$. Za vsak x in vsak k torej velja $s_k(x) \leq f(x) \leq S_k(x)$. Finejša

delitev intervala (kasnejši k) kvečjemu poveča s_k in kvečjemu zmanjša S_k . Od tod sledi, da pri vsakem x obstajata $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$ in $S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x)$. Funkciji s in S sta merljivi in zanju velja $s(x) \leq f(x) \leq S(x)$ za vsak x . Če označimo z $d_k = \int_{[a,b]} s_k dm$ spodnjo in z $D_k = \int_{[a,b]} S_k dm$ zgornjo Darbouxovo vsoto, vidimo, da po (LIDK) (zakaj ga smemo uporabiti?) velja $d_k \rightarrow \int_{[a,b]} s dm$ in $D_k \rightarrow \int_{[a,b]} S dm$.

Ker je funkcija f Riemannovo integrabilna, spodnja in zgornja Darbouxova vsota konvergirata proti istemu številu $\int_a^b f(x) dx$, je $\int_{[a,b]} (S - s) dm = 0$. Toda $S - s \geq 0$ povsod na $[a, b]$, zato je $S = s$ s.p. na $[a, b]$ oziroma celo $f = S (= s)$ s.p. na $[a, b]$ (trditev 1). Funkcija, ki je skoraj povsod enaka merljivi funkciji S , pa je tudi sama merljiva in zanju velja $\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} S dm = \int_a^b f(x) dx$.

Izrek 4. *Omejena funkcija je Riemannovo integrabilna na $[a, b]$ natanko takrat, ko je skoraj povsod na $[a, b]$ zvezna.*

Dokaz. Spet je dovolj izrek dokazati samo za realne funkcije. Naj bo funkcija f realna, omejena in Riemannovo integrabilna na $[a, b]$, Δ_k , s_k , S_k , d_k , D_k kot v dokazu prejšnje trditve. Naj bo $E = \{x \in [a, b]; s(x) = f(x) = S(x)\}$, torej $m([a, b] \setminus E) = 0$. Če $x \notin \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ in $x \in E$ (torej x v množici $E \setminus \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, katere komplement ima tudi mero enako 0), potem je funkcija f zvezna v točki x . Če namreč to ne bi držalo, bi obstajal tak $\epsilon > 0$ (odvisen od x), da bi veljalo $S_k(x) - s_k(x) \geq \epsilon$ za vsak dovolj velik k . Sledilo bi $S(x) - s(x) \geq \epsilon$, kar pa ni res, ker je $x \in E$.

Obratno, naj bo omejena funkcija f zvezna s.p. na $[a, b]$. Naj bo (Δ_k) poljubno zaporedje delitev z lastnostjo $|\Delta_k| = \max_{1 \leq i \leq n_k} (x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) in naj bodo s_k, S_k, d_k, D_k definirani kot prej (le da s_k, S_k ne konvergirata nujno monotono, ker Δ_{k+1} ni nujno finejša delitev od Δ_k). V vsaki točki x , kjer je f zvezna funkcija, zaporedji $s_k(x)$ in $S_k(x)$ seveda konvergirata proti $f(x)$, torej velja to s.p. na $[a, b]$. Po (LIDK) zaporedji d_k in D_k potemtakem konvergirata proti $\int_{[a,b]} f dm$. Torej spodnja in zgornja Darbouxova vsota konvergirata proti istemu številu. Funkcija f je zato Riemannovo integrabilna in velja $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f dm$.

V posebnem primeru je vsaka zvezna funkcija Riemannovo integrabilna. Imamo torej relacijo $C([a, b]) \subset R([a, b]) \subset L^1([a, b])$.

Posledica. *Prostor stopničastih funkcij je gost v vsakem prostoru $L^p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$.*

Dokaz. Dokažimo primer $p = 1$, sicer poteka dokaz podobno. Naj bo $f \in L^1([a, b])$. Po izreku 3 obstaja za vsak $\epsilon > 0$ zvezna funkcija g , tako da je $\|f - g\|_1 < \epsilon/2$. Vsaka zvezna funkcija je Riemannovo integrabilna, zato obstaja stopničasta funkcija s z lastnostjo $\|g - s\|_1 < \epsilon/2$. Torej je tudi $\|f - s\|_1 < \epsilon$.

Kako pa je z izlimitiranim (posplošenim) Riemannovim integralom na $[a, b]$. Označimo pozitivne funkcije, za katere obstaja slednji, z $IR([a, b])^+$.

Trditev 5. $IR([a, b])^+ \subset L^1([a, b])$.

Dokaz. Naj bo npr. funkcija f neomejena v bližini točke a in naj obstaja limita $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$. Tedaj je po (LIMK)

$$\int_{[a,b]} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \chi_{[a+1/n, b]} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a+1/n, b]} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+1/n}^b f(x) dx.$$

Za poljubne realne ali kompleksne funkcije trditev ne velja.

Zgled. Na intervalu $[0, 1/\pi]$ si izberimo funkcijo $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ (ni pomembno, če v točki 0 ni definirana). Njen integral

$$\int_0^{1/\pi} f(x) dx = \int_0^{1/\pi} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

obstaja v izlimitiranem smislu. To vidimo takole. Označimo

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt,$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$. Torej je

$$a_k = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + k\pi} dt, \quad \frac{2}{(k+1)\pi} \leq |a_k| \leq \frac{2}{k\pi}.$$

Potem pa imamo z

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^\infty a_k = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k |a_k|$$

alternirajočo vrsto s koeficienti $|a_k| \searrow 0$, ki kot vemo konvergira (proti $\pi/2$). Integral absolutne vrednosti funkcije f pa ni končen, saj je

$$\int_0^{1/\pi} \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx = \int_\pi^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt = \int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt - \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{t} dt$$

in

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^\infty |a_k| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty,$$

ker je na desni harmonična vrsta.

Natančneje velja

$$\frac{2}{\pi} H_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq a_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = a_0 + \frac{2}{\pi} H_{n-1}.$$

Ker se da pokazati, da je $C + \ln(n-1) \leq H_{n-1} \leq C + \ln n$, kjer je $C = 0.5772\dots$ ti. Eulerjeva konstanta (glej spodnjo opombo), lahko ocenimo

$$\frac{2}{\pi} C + \frac{2}{\pi} \ln n \leq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq a_0 + \frac{2}{\pi} C + \frac{2}{\pi} \ln n$$

oziroma asimptotično

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \quad (n \rightarrow \infty) \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Opomba. Če definiramo

$$A_n = H_{n-1} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$$

in

$$B_n = H_{n-1} - \ln(n-1) = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right),$$

vidimo, da je zaporedje A_n naraščajoče, zaporedje B_n pa padajoče. Zaradi $A_n - B_n = \ln(1 - 1/n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) obe konvergirata k isti limiti, ki jo označimo s C . To je Eulerjeva konstanta.

Odslej bomo tudi za Lebesguov integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ uporabljali kar običajno oznako $\int_a^b f(x)dx$.

2. Absolutno zvezne in singularne funkcije

Najprej bomo spoznali lastnosti absolutno zveznih funkcij, ki bodo kasneje pri Fourierovih vrstah imele pomembno vlogo. Nato si bomo ogledali še ti. singularne funkcije nad posebnimi simetričnimi perfektnimi množicami.

Absolutno zvezne in Lipschitzove funkcije

Definicija. Funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je *absolutno zvezna*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno končno družino paroma disjunktih odprtih intervalov (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, r$ v $[a, b]$ iz $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) < \delta$ sledi $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$.

Oznaka: $AC([a, b])$ ("AC - absolute continuity")

Opombe. 1. Absolutna zveznost pomeni poostritev pojma enakomerne zveznosti (v zgornji definiciji izberimo $r = 1$), torej je $AC([a, b]) \subset C([a, b])$. Kasneje bomo videli, da tu enačaj ne velja.

2. V definiciji AC funkcij je vseeno, če namesto končne vzamemo poljubno (števno) neskončno družino disjunktih intervalov. Res, če je $F \in AC([a, b])$, iz $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$ sledi $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$ za vsak r , torej tudi $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$. Obratno, če je $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) < \delta$, lahko dodamo neskončno mnogo disjunktih intervalov (c_k, d_k) , da je še vedno $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k) < \delta$. Tedaj je $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} |F(d_k) - F(c_k)| < \epsilon$.

3. Zelo preprosto lahko direktno iz definicije spoznamo, da so hkrati z F, G absolutno zvezne funkcije tudi $F + G, \lambda F, FG, \operatorname{Re}F, \operatorname{Im}F, F^+, F^-$ (če je F realna) in $|F|$.

Definicija. Funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je *Lipschitzova*, če obstaja taka konstanta $M > 0$, da velja $|F(x_2) - F(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ za poljubni točki $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Oznaka: $Lip([a, b])$ ("Lip - Lipschitzova")

Opombe. 1. Iz definicije takoj sledi $Lip([a, b]) \subset AC([a, b])$. Videli bomo (glej trditev 1 in zgled za njo), da obratno nasploh ni res.

2. Naj bo funkcija F zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) . Tedaj je $F \in Lip([a, b])$ natanko takrat, ko je odvod F' omejena funkcija na (a, b) . Dokaz je v eno smer direkten, v drugo pa uporabimo Lagrangev izrek. Posledica: $C^1([a, b])$ (zvezno odvedljive funkcije) $\subset Lip([a, b])$.

3. Funkcija F je Lipschitzova natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno končno družino (ne nujno disjunktih) odprtih intervalov (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots, r$ v $[a, b]$ iz $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) < \delta$ sledi $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$. Res. Če je $F \in Lip([a, b])$, je sklep trivialen. Obratno, izberimo $x_1 \neq x_2 \in [a, b]$. Obstaja tako naravno število r , da je $\delta/(r+1) \leq |x_2 - x_1| < \delta/r$. Potem je $r|x_2 - x_1| < \delta$, zato po predpostavki sledi $r|F(x_2) - F(x_1)| < \epsilon$. Torej velja $|F(x_2) - F(x_1)| < \epsilon/r = \frac{(r+1)\epsilon}{r\delta} \delta/(r+1) \leq \frac{(r+1)\epsilon}{r\delta} |x_2 - x_1| < (2\epsilon/\delta)|x_2 - x_1|$. Podobna trditev velja za neskončno mnogo intervalov.

4. Spet lahko direktno iz definicije spoznamo, da so hkrati z F, G Lipschitzove funkcije tudi $F + G, \lambda F, FG, \operatorname{Re}F, \operatorname{Im}F, F^+, F^-$ (če je F realna) in $|F|$.

Trditev 1. Naj bo $f \in L^1([a, b])$ in $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je F absolutno zvezna funkcija. Če je $f \in L^\infty([a, b])$, je funkcija F Lipschitzova.

Dokaz. Ocenimo

$$\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^r \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^r \int_{a_k}^{b_k} |f(t)| dt = \int_{\cup_k I_k} |f(t)| dt.$$

Če je $\epsilon > 0$, po trditvi 1.2 obstaja tak $\delta > 0$, da iz $m(\cup_k I_k) = \sum_k m(I_k) = \sum_k (b_k - a_k) < \delta$ sledi $\int_{\cup_k I_k} |f(t)| dt < \epsilon$, od koder po zgornji oceni dobimo, da je F absolutno zvezna.

Če je $f \in L^\infty([a, b])$, je $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ s.p. $t \in [a, b]$, zato za vsak $x_1 < x_2$ iz $[a, b]$ velja

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty (x_2 - x_1).$$

Kasneje bomo videli, da veljata tudi obratni trditvi.

Zgled. Naj bo $F(x) = \sqrt{x}$ za vsak $x \in [0, 1]$. Ker je $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ in $1/\sqrt{t} \geq 0$, je $1/\sqrt{t} \in IR([0, 1])^+ \subset L^1([0, 1])$ po trditvi 1.5. Potem je po zgornji trditvi kvadratni koren absolutno zvezna funkcija, torej $F \in AC([0, 1])$. Seveda pa $F \notin Lip([0, 1])$, sicer bi bil njen odvod $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, 1]$ omejen, kar ni res.

Trditev 2. *Absolutno zvezna realna funkcija preslika merljivo množico v merljivo, množico z mero 0 pa v množico z mero 0.*

Dokaz. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutno zvezna funkcija. Najprej pokažimo, da preslika množico E z mero 0 v množico $F(E)$, ki ima tudi mero 0. Za vsak $\epsilon > 0$, naj bo $\delta > 0$ tak, da je zadoščeno definiciji absolutne zveznosti funkcije F . Ker je $m(E) = 0$, obstaja tako števno pokritje množice E z zaprtimi intervali z disjunktne notranjostmi: $E \subset \cup_{k=1}^\infty I_k = \cup_{k=1}^\infty [a_k, b_k]$, (a_k, b_k) disjunktne, da je $\sum_{k=1}^\infty m(I_k) = \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) < \delta$. Tedaj je $F(E) \subset F(\cup_{k=1}^\infty I_k) = \cup_{k=1}^\infty F(I_k)$. Funkcija F je omejena na vsakem kompaktnem intervalu I_k ; označimo $m_k = \min_{x \in I_k} F(x)$ in $M_k = \max_{x \in I_k} F(x)$. Potem je $F(I_k) = [m_k, M_k]$. Za vsak k obstajata točki $\alpha_k, \beta_k \in I_k$, da je $m_k = F(\alpha_k)$ in $M_k = F(\beta_k)$. Intervali (α_k, β_k) (ali (β_k, α_k)) so tudi disjunktne in tudi zanje velja $\sum_{k=1}^\infty |\beta_k - \alpha_k| \leq \sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) < \delta$, torej imamo oceno $\sum_{k=1}^\infty (M_k - m_k) = \sum_{k=1}^\infty |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \epsilon$. Množico $F(E)$ smo pokrili z intervali poljubne majhne skupne dolžine, zato je njena mera $m(F(E)) = 0$.

Naj bo sedaj E poljubna merljiva podmnožica v $[a, b]$. Za vsak n obstaja zaprta podmnožica $F_n \subset E$ z lastnostjo $m(E \setminus F_n) < 1/n$. Lahko predpostavimo, da je zaporedje množic F_n naraščajoče. Naj bo $F_0 = \cup_{n=1}^\infty F_n$, ki je F_σ podmnožica v E . Očitno je $m(E \setminus F_0) = 0$. Če zapišemo $E_0 = E \setminus F_0$, je $E = E_0 \cup F_0 = E_0 \cup (\cup_{n=1}^\infty F_n)$, zato tudi $F(E) = F(E_0) \cup (\cup_{n=1}^\infty F(F_n))$. Množica E_0 ima mero 0, zato ima tudi $F(E_0)$ mero 0 po prvem delu dokaza, torej je $F(E_0)$ merljiva množica. Poleg tega so F_n zaprte podmnožice v $[a, b]$, se pravi kompaktne. Njihove slike $F(F_n)$ so tudi kompaktne in kot take merljive. Števena unija merljivih množic je merljiva, zato je tudi $F(E)$ merljiva množica.

Opomba. Brez posebnih problemov lahko ugotovimo, da preslika zvezna realna funkcija F merljive množice v merljive množice natanko takrat, ko preslika množice z mero nič v množice z mero nič. V eno smer je dokaz isti kot v zgornji trditvi. Če pa F preslika neko množico A z mero nič v množico B s pozitivno mero, lahko v B vedno najdemo Lebesguovo nemerljivo podmnožico C (glej npr. [21], str. 53, ali [19], str. 91). Njena praslika $F^{-1}(C)$ je podmnožica množice A z mero nič, torej merljiva množica.

Pri dodatnih pogojih, da ima zvezna realna funkcija F omejeno variacijo (glej naslednji razdelek), lahko zgornjo trditev tudi obrnemo: če preslika množice z mero nič v množice z mero nič, je F absolutno zvezna funkcija. Dokaz je bolj zapleten, glej [19], str. 269. Kot posledico lahko dokažemo, da je kompozitum absolutno zveznih funkcij absolutno zvezna funkcija natanko takrat, ko ima omejeno variacijo.

Simetrične perfektne množice

Definirajmo zdaj posebne simetrične perfektne podmnožice intervala $[0,1]$. Naj bo ξ realno število z lastnostjo $0 < \xi < 1/2$. Definirajmo zaporedje množic:

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 1], \\ E_1 &= [0, \xi] \cup [1 - \xi, 1], \\ E_2 &= [0, \xi^2] \cup [\xi - \xi^2, \xi] \cup [1 - \xi, 1 - \xi + \xi^2] \cup [1 - \xi^2, 1], \end{aligned}$$

...

Množica E_n je sestavljena iz 2^n podintervalov dolžine ξ^n .

Definirajmo še $E_\xi = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$.

Hitro se lahko prepričamo, da je E_ξ simetrična, perfektna (zaprta in brez izoliranih točk) in z Lebesguovo mero 0. Iz $2\xi < 1$ namreč sledi

$$m(E_\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\xi)^n = 0.$$

Videli bomo, da ima moč kontinuuma. Poseben primer takih množic je klasična Cantorjeva tretjinska množica $E_{1/3}$.

Posplošitev: Vzemimo zaporedje realnih števil ξ_i , $0 < \xi_i < 1/2$ za $i = 1, 2, \dots$ in definirajmo podobno kot prej:

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 1], \\ E_1 &= [0, \xi_1] \cup [1 - \xi_1, 1], \\ E_2 &= [0, \xi_1 \xi_2] \cup [\xi_1 - \xi_1 \xi_2, \xi_1] \cup [1 - \xi_1, 1 - \xi_1 + \xi_1 \xi_2] \cup [1 - \xi_1 \xi_2, 1], \end{aligned}$$

...

in še množico $E_{(\xi_i)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$.

Kot prej je množica E_n sestavljena iz 2^n podintervalov, zdaj dolžine $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, množica $E_{(\xi_i)}$ pa je spet simetrična, perfektna in, kot bomo videli, z močjo kontinuuma. Njena Lebesguova mera je enaka:

$$m(E_{(\xi_i)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (2\xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - (1 - 2\xi_k)).$$

Če izberemo ξ_1, ξ_2, \dots tako, da je $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2\xi_k) < \infty$, je tudi $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n > 0$. To sledi iz znanega izreka, da $P_n = \prod_{k=1}^n (1 - \eta_k) \rightarrow P \neq 0$ natanko takrat, ko $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$ (glej npr. [24], str. 384).

V posebnem primeru $\xi_k = \xi$ za vsak $k = 1, 2, \dots$, $0 < \xi < 1/2$, dobimo spet množico E_ξ , ki pa ima mero $m(E_\xi) = 0$, saj sedaj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2\xi)$ divergira.

Oglejmo si še analitični zapis simetričnih perfektnih množic (produkt $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1}$ naj ima v primeru $k = 1$ vrednost 1):

$$E_{(\xi_i)} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k); \epsilon_k \in \{0, 1\} \text{ za vsak } k \right\}$$

Vrsta v tem izrazu absolutno konvergira, ne glede na izbiro ϵ_k , saj je njena majoranta vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k) = 1$. Množica vseh n -tih delnih vsot $\sum_{k=1}^n \epsilon_k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k)$ je enaka ravno množici vseh levih krajišč podintervalov iz množice E_n .

Trditev 3. Preslikava $(\epsilon_k) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k)$ je bijekcija iz množice vseh zaporedij z vrednostmi v $\{0, 1\}$ na množico $E_{(\xi_i)}$.

Dokaz. Preslikava dobro definirana, saj vrsta konvergira, njena vrednost pa leži kvečjemu za $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ desno od nekega levega krajišča pri poljubnem n , torej v preseku vseh množic E_n . Ker tudi obratno vsaka točka $x \in E_{(\xi_i)}$ pripada preseku nekega zaporedja zaprtih vložnih podintervalov, katerih leva krajišča so določena z zaporedjem (ϵ_k) , je preslikava surjektivna. Različnim zaporedjem pripadajo različne točke, ker so podintervali od nekega koraka dalje disjunktni. Tako imamo tudi injektivnost. Torej je preslikava bijekcija.

Vseh zaporedij z vrednostmi v $\{0, 1\}$ je $2^{\aleph_0} = c$, zato je tudi vseh točk v $E_{(\xi_i)}$ kontinuum mnogo.

Zgled. V posebnem primeru imamo

$$E_\xi = \left\{ (1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi^{k-1}; \epsilon_k \in \{0, 1\} \text{ za vsak } k \right\}.$$

Za $\xi = 1/3$ lahko Cantorjevo množico analitično opišemo z

$$\begin{aligned} E_{1/3} &= \left\{ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k (1/3)^{k-1}; \epsilon_k \in \{0, 1\} \text{ za vsak } k \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (2\epsilon_k)/3^k; \epsilon_k \in \{0, 1\} \text{ za vsak } k \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k/3^k; \delta_k \in \{0, 2\} \text{ za vsak } k \right\}. \end{aligned}$$

Torej so v $E_{1/3}$ natanko tista realna števila med 0 in 1, ki imajo v trojiškem zapisu samo cifre 0 in 2 (ne pa 1).

Na osnovi simetričnih perfektnih množic lahko definiramo posebne zvezne naraščajoče funkcije, ki bodo igrale kasneje pomembno vlogo.

Definicija (Lebesguova funkcija).

$$L_{(\xi_i)}(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k/2^k & , \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k) \\ \text{linearna, zvezna} & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Trditev 4. Funkcija $L_{(\xi_i)}$ je zvezna in naraščajoča, $L_{(\xi_i)}(0) = 0$, $L_{(\xi_i)}(1) = 1$, na vsaki povezani komponenti komplementa množice $E_{(\xi_i)}$ konstantna in surjektivna kot funkcija iz $E_{(\xi_i)}$ na $[0, 1]$.

Dokaz. Bodita $x', x'' \in E_{(\xi_i)}$ različni točki, npr. $x' < x''$. Potem sta določeni z različnima zaporedjema (ϵ_k) :

$$\begin{aligned} x' &\sim \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, 0, \epsilon'_{n+1}, \dots, \\ x'' &\sim \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, 1, \epsilon''_{n+1}, \dots \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} L_{(\xi_i)}(x') &= \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k/2^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon'_k/2^k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k/2^k + 1/2^n, \\ L_{(\xi_i)}(x'') &= \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k/2^k + 1/2^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon''_k/2^k \geq \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k/2^k + 1/2^n \end{aligned}$$

in funkcija $L_{(\xi_i)}$ narašča. V posebnem primeru, ko je (x', x'') odprti interval, iz katerih je sestavljen komplement množice $E_{(\xi_i)}$, je

$$\begin{aligned} x' &\sim \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, 0, 1, 1, \dots, \\ x'' &\sim \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, 1, 0, 0, \dots, \end{aligned}$$

zato imamo $L_{(\xi_i)}(x') = \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k/2^k + 1/2^n = L_{(\xi_i)}(x'')$ in $L_{(\xi_i)}$ je konstantna na tem intervalu. Ker je v dvojiškem zapisu vsak $y \in [0, 1]$ oblike $y = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k/2^k$, $\epsilon_k \in \{0, 1\}$, je funkcija $L_{(\xi_i)}$ tudi surjektivna (tudi če jo opazujemo samo na množici $E_{(\xi_i)}$). Surjektivna in naraščajoča funkcija iz $[0, 1]$ na $[0, 1]$ pa je zvezna.

V posebnem primeru $\xi_i = \xi$ za vsak i dobimo t.i. **Lebesguovo singularno funkcijo**

$$L_{\xi}(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k/2^k & , \quad x = (1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi^{k-1} \\ \text{linearna, zvezna} & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Funkcija L_{ξ} je konstantna na komponentah komplementa množice E_{ξ} , zato je tam njen odvod enak 0. Ker je $m(E_{\xi}) = 0$, je odvod enak 0 s.p. na $[0, 1]$. Od tod ime Lebesguova *singularna* funkcija (včasih, zlasti pri $\xi = 1/3$, ji rečemo tudi *Cantorjeva funkcija*). Poleg tega je $L_{\xi}(E_{\xi}) = [0, 1]$. Torej preslika množico E_{ξ} z mero 0 na množico $[0, 1]$ s pozitivno mero, kar pomeni, da L_{ξ} ni absolutno zvezna funkcija (glej trditev 2), čeprav je zvezna. Kasneje bomo to spoznali še na drugačen način.

Opomba. Izberimo si tako zaporedje ξ_1, ξ_2, \dots , da je $m(E_{(\xi_i)}) > 0$ in še $\xi < 1/2$, tako da je $m(E_{\xi}) = 0$. Definirajmo funkcijo

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k) & , \quad x = (1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi^{k-1} \\ \text{linearna, zvezna} & , \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

Na podoben način kot prej se lahko prepričamo, da je F zvezna in celo strogo naraščajoča (torej bijektivna) preslikava iz $[0, 1]$ na $[0, 1]$. Tudi ta funkcija ni absolutno zvezna.

3. Funkcije z omejeno variacijo in Riemann-Stieltjesov integral

Funkcije z omejeno variacijo

Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ poljubna funkcija in $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Nadalje naj bo $V_{[a,b]}(F, D) = \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \geq 0$ in

$$V_{[a,b]}(F) = \sup_D V_{[a,b]}(F, D) = \sup_D \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})|.$$

Ta količina je lahko tudi neskončna in se imenuje *totalna variacija* (ali *totalni razmah*) funkcije F na intervalu $[a, b]$.

Definicija. Če je $V_{[a,b]}(F) < \infty$, rečemo, da je F funkcija z omejeno variacijo.

Oznaka: $BV([a, b])$ ("BV - bounded variation")

Opombe. 1. Vsaka funkcija $F \in BV([a, b])$ je omejena: za vsak $x \in [a, b]$ namreč velja $|F(x)| \leq |F(x) - F(a)| + |F(a)| \leq |F(a)| + V_{[a,b]}(F)$.

2. Hkrati z F, G so funkcije z omejeno variacijo tudi $F + G$, λF , FG , $\text{Re}F$, $\text{Im}F$, F^+ , F^- (če je F realna) in $|F|$.

3. Če je $[c, d] \subset [a, b]$ in $F \in BV([a, b])$, je $F|_{[c,d]} \in BV([c, d])$ (pisali bomo kar $F|_{[c,d]} = F$). To sledi iz $V_{[c,d]}(F) \leq V_{[a,b]}(F)$. Poleg tega je $V_{[a,b]}(F) = V_{[a,c]}(F) + V_{[c,b]}(F)$, če je $a < c < b$. To pa sledi iz ocen $V_{[a,b]}(F) - \epsilon \leq \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq V_{[a,c]}(F) + V_{[c,b]}(F)$ in $V_{[a,c]}(F) - \epsilon + V_{[c,b]}(F) - \epsilon < \sum_k' |F(x'_k) - F(x'_{k-1})| + \sum_k'' |F(x''_k) - F(x''_{k-1})| \leq V_{[a,b]}(F)$ za poljuben $\epsilon > 0$ in za ustrezne delitve (pod)intervalov.

4. Vsaka naraščajoča (ali padajoča) funkcija je očitno v $BV([a, b])$. Vsaka realna funkcija iz $BV([a, b])$ je razlika dveh naraščajočih funkcij. To vidimo takole. Definirajmo $G(x) = V_{[a, x]}(F)$ za vsak $x \in [a, b]$. To je naraščajoča pozitivna funkcija, saj za $a \leq x < y \leq b$ velja $G(y) = V_{[a, y]}(F) = V_{[a, x]}(F) + V_{[x, y]}(F) = G(x) + V_{[x, y]}(F) \geq G(x)$. Poleg tega je $G(y) - G(x) = V_{[x, y]}(F) \geq |F(y) - F(x)| \geq F(y) - F(x)$. Torej imamo $G(y) - F(y) \geq G(x) - F(x)$, zato je tudi funkcija $H(x) = G(x) - F(x)$ naraščajoča. Ker je $F(x) = G(x) - H(x)$, je dokaz končan. Ta zapis imenujemo *Jordanova dekompozicija*. Če je F zvezna realna funkcija z omejeno variacijo, sta tudi funkciji G in H zvezni (glej trditev 1). (V splošnem razcep $F = F_1 - F_2$ na dve naraščajoči funkciji ni en sam in tudi funkciji F_1, F_2 nista nujno zvezni.)

Trditev 1. Naj bo $F \in BV([a, b])$ in $G(x) = V_{[a, x]}(F)$ za vsak $x \in [a, b]$. Tedaj je funkcija F (a) zvezna, (b) absolutno zvezna in (c) Lipschitzova natanko takrat, ko je taka funkcija G .

Proof. Zaradi ocene $|F(y) - F(x)| \leq G(y) - G(x)$ iz lastnosti funkcije G v vseh treh primerih (a),(b),(c) takoj sklepamo, da ima isto lastnost tudi funkcija F . Obratno je nekoliko težje. Najprej dokažimo pomožno trditev:

Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka dovolj drobna delitev D intervala $[a, b]$, da velja $V_{[p, q]}(F) < |F(q) - F(p)| + \epsilon$, če sta p in q zaporedni delilni točki v D .

Res, za vsak $\epsilon > 0$ poiščimo dovolj drobno delitev D in iz ustrezne vsote izločimo člen z zaporednima točkama p in q , tako da velja

$$V[a, b](F) < \sum' |F(x_k) - F(x_{k-1})| + |F(q) - F(p)| + \sum'' |F(x_k) - F(x_{k-1})| + \epsilon \leq V_{[a, p]}(F) + V_{[q, b]}(F) + |F(q) - F(p)| + \epsilon$$

in upoštevajmo, da je $V_{[a, b]}(F) = V_{[a, p]}(F) + V_{[p, q]}(F) + V_{[q, b]}(F)$.

(a) Če je F zvezna, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|F(q) - F(p)| < \epsilon$, kakor hitro je $|q - p| < \delta$. Pa izberimo tako drobno delitev, da zadnji pogoj velja za poljubni zaporedni delilni točki. Poleg tega naj bo delitev tudi taka kot v zgornji pomožni trditvi (po potrebi jo še naprej zdrobimo). Potem je $V_{[p, q]}(F) < 2\epsilon$, čim sta p in q zaporedni delilni točki v D . Torej je tudi $|G(q) - G(p)| < 2\epsilon$, od koder sledi, da je G (enakomerno) zvezna na $[a, b]$. (b) Zaradi absolutne zveznosti funkcije F za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) < \delta$ sledi $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon/2$. za vsak podinterval $[a_k, b_k]$ pa obstaja taka delitev $\{a_k = x_{k,0}, x_{k,1}, \dots, x_{k,n_k} = b_k\}$, da je $V_{[a_k, b_k]}(F) - \epsilon/(2r) < \sum_{j=1}^{n_k} |F(x_{k,j}) - F(x_{k,j-1})|$ in zato tudi

$$\sum_{k=1}^r (V_{[a_k, b_k]}(F) - \epsilon/(2r)) < \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} |F(x_{k,j}) - F(x_{k,j-1})| < \epsilon/2,$$

saj je $\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) < \delta$. Torej je $\sum_{k=1}^r |G(b_k) - G(a_k)| = \sum_{k=1}^r V_{[a_k, b_k]}(F) < \epsilon$. Točka (c) je lažja in jo dokažemo podobno.

Funkcija z omejeno variacijo ni nujno zvezna (npr. stopničasta funkcija), je pa merljiva. Realni in imaginarni del namreč lahko zapišemo kot razliko dveh naraščajočih funkcij, take pa so vedno merljive, saj so praslike poltrakov spet poltraki. Vsaka funkcija z omejeno variacijo ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti (spet si pogledamo realni in imaginarni del kot razliko dveh naraščajočih funkcij), torej je celo Riemannovo in s tem tudi Lebesguovo integrabilna. Poleg tega v vsaki točki obstajata leva in desna limita (funkcija je *umirjena*).

Tudi obratno ni vsaka zvezna funkcija tudi funkcija z omejeno variacijo.

Zgled. Naj bo $F(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$ in $G(x) = F(x^2)$. Potem funkcija F nima omejene variacije na intervalu $[0, \frac{1}{\pi}]$, čeprav je tam zvezna. Če namreč za delilne točke izberemo $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ in $x_n = 0$, je

$$\sum_{k=1}^{n-1} |F(x_k) - F(x_{k+1})| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{\pi} (H_{n-1} + H_n - 1) \geq \frac{1}{\pi} (\ln n(n-1) + 2C - 1) \rightarrow \infty$$

($n \rightarrow \infty$) (glej zgled ob koncu razdelka 1). Tudi funkcija G nima omejene variacije (zda) izberemo točke $x_k = 1/\sqrt{k\pi}$, poleg tega pa je celo povsod odvedljiva.

Trditev 2. Vsaka absolutno zvezna funkcija ima na končnem intervalu omejeno variacijo, se pravi $AC([a, b]) \subset BV([a, b])$. Obratno ne velja niti za zvezne funkcije.

Dokaz. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\sum_{k=1}^r (b_k - a_k) < \delta$ sledi neenakost $\sum_{k=1}^r |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$. Razdelimo interval $[a, b]$ na n zaprtih podintervalov I_j , tako da je $m(I_j) < \delta$ za vsak $j = 1, 2, \dots, n$. Tedaj ima F omejeno variacijo na vsakem podintervalu I_j in sicer je $V_{I_j}(F) < \epsilon$, ker je skupna dolžina podintervalov v katerikoli delitvi intervala I_j manjša od δ . Potem pa je $V_{[a,b]}(F) = \sum_{k=1}^n V_{I_j}(F) < n\epsilon$. Da obratno ne drži niti za zvezne funkcije, pokaže primer Lebesguove singularne funkcije L_ξ , $0 < \xi < 1/2$, za katero vemo, da je zvezna in naraščajoča (torej z omejeno variacijo), ni pa absolutno zvezna.

Posledica. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, kjer je $x \in [a, b]$ in $f \in L^1([a, b])$. Potem je F funkcija z omejeno variacijo in velja $V_{[a,b]}(F) = \int_a^b |f(t)|dt$.

Dokaz. Da ima nedoločeni itegral omejeno variacijo, sledi iz trditvev 2.1 in zgornje trditve, lahko pa to ugotovimo tudi neposredno, če zapišemo $f = f_1 + if_2$ in $f_1 = f_1^+ - f_1^-$, $f_2 = f_2^+ - f_2^-$. Potem sta $F_1(x) = \int_a^x f_1(t)dt$ in $F_2(x) = \int_a^x f_2(t)dt$ razliki dveh naraščajočih funkcij, npr. $F_1(x) = \int_a^x f_1^+(t)dt - \int_a^x f_1^-(t)dt$.

Izračunajmo totalno variacijo funkcije F . Po eni strani je očitno $\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt| = \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|dt$, torej $V_{[a,b]}(F) \leq \int_a^b |f(t)|dt$. Po drugi strani pa je po posledici izreka 1.4 prostor vseh stopničastih funkcij oblike $s = \sum_{k=1}^m c_k \xi_{[x_{k-1}, x_k]}$ gost v $L^1([a, b])$, zato za funkcijo $g = \bar{f}/f$ (z vrednostjo 0, kjer je $f = 0$) obstaja zaporedje stopničastih funkcij s_n zgornje oblike, ki po normi konvergira k funkciji g . (Ker je vrednost $|g|$ enaka 0 ali 1, lahko celo predpostavimo, da je $|s_n| \leq 1$ za vsak n .) Znano je, da lahko potem poiščemo v (s_n) podzaporedje (zaradi enostavnosti ga spet označimo kar z (s_n)), ki konvergira proti g s.p. na $[a, b]$ (primerjajte opombe za izrekom Jegorova v razdelku 1). Potem lahko uporabimo LIDK in dobimo $\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)s_n(t)dt$. Ker je

$$\left| \int_a^b f(t)s_n(t)dt \right| = \left| \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n \xi_{[x_{k-1}^n, x_k^n]}(t)dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n \int_{x_{k-1}^n}^{x_k^n} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^{m_n} |c_k^n| |F(x_k^n) - F(x_{k-1}^n)| \leq \sum_{k=1}^{m_n} |F(x_k^n) - F(x_{k-1}^n)| \leq V_{[a,b]}(F),$$

velja zaradi zgornje limite tudi $\int_a^b |f(t)|dt \leq V_{[a,b]}(F)$.

V zvezi s funkcijami z omejeno variacijo lahko definiramo tudi Riemann-Stieltjesov integral.

Riemann-Stieltjesov integral

Bodita funkciji F in g definirani na intervalu $[a, b]$ in $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, delitev intervala $[a, b]$. Označimo $|D| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$. Na vsakem podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ izberimo poljubno točko ξ_k in definirajmo ti. Riemann-Stieltjesovo vsoto

$$\sigma_D = \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

Definicija. Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b g dF$ je tako kompleksno število I , da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako delitev D intervala $[a, b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ in za vsako izbiro točk ξ_k velja $|\sigma_D - I| < \epsilon$. Torej je $I = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sigma_D$.

Trditev 3. Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b g dF$ obstaja, če je g zvezna funkcija in F funkcija z omejeno variacijo.

Dokaz. Dovolj je trditev dokazati za realno zvezno funkcijo g in za naraščajočo funkcijo F (zakaj?). Zvezna funkcija g je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna: za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x' - x| < \delta$ sledi $|g(x') - g(x)| < \epsilon$. Izberimo tako delitev D , da je $|D| < \delta$. Če je torej $M_k = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) = g(x_{M_k})$ in $m_k = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) = g(x_{m_k})$, je $M_k - m_k = |g(x_{M_k}) - g(x_{m_k})| < \epsilon$ za vsak k .

Definirajmo zgornjo in spodnjo Stieltjesovo vsoto: $S_D = \sum_{k=1}^n M_k(F(x_k) - F(x_{k-1}))$, $s_D = \sum_{k=1}^n m_k(F(x_k) - F(x_{k-1}))$. Z drobljenjem delitve spodnje vsote naraščajo, zgornje padajo, vedno pa velja $s_D \leq \sigma_D \leq S_D$, ker je $m_k \leq g(\xi_k) \leq M_k$. Poleg tega je za $I = \sup_D s_D$ tudi res $s_D \leq I \leq S_D$ za vsak D . Torej je $|\sigma_D - I| \leq S_D - s_D = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})) < \epsilon(F(b) - F(a))$, če je le delitev D dovolj drobna. To pomeni, da je število I Riemann-Stieltjesov integral.

Trditev 4. Če Riemann Stieltjesov integral $\int_a^b g dF$ obstaja in če je $|g(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$, velja $|\int_a^b g dF| \leq MV_{[a,b]}(F)$.

Dokaz. Naj bo σ_D tak, da je $|\int_a^b g dF - \sigma_D| < \epsilon$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g dF \right| &\leq \left| \int_a^b g dF - \sigma_D \right| + |\sigma_D| < \epsilon + \left| \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})) \right| \leq \\ &\epsilon + \sum_{k=1}^n |g(\xi_k)| |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \epsilon + M \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \epsilon + MV_{[a,b]}(F). \end{aligned}$$

Ker to velja za vsak $\epsilon > 0$, je dokaz končan.

Trditev 5. Če obstaja Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b g dF$, obstaja tudi Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b F dg$ in velja formula za integracijo po delih:

$$\int_a^b F dg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b g dF.$$

Dokaz. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|\sigma_D - \int_a^b g dF| < \epsilon$, če je $|D| < \delta$. Pa izberimo še bolj drobno delitev D , tako z lastnostjo $|D| < \delta/2$. Na vsakem od n podintervalov, ki pripadajo delitvi D , smo izbrali eno točko, tako da je $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ za $k = 1, 2, \dots, n$.

Definirajmo še $\xi_0 = a$ in $\xi_{n+1} = b$ in preoblikujmo integralsko vsoto σ'_D za Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b F dg$.

$$\begin{aligned}\sigma'_D &= \sum_{k=1}^n F(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=0}^n [F(\xi_k) - F(\xi_{k+1})]g(x_k) + F(\xi_{n+1})g(x_n) - F(\xi_0)g(x_0) = \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \sum_{k=0}^n g(x_k)[F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)].\end{aligned}$$

Sedaj je $\xi_k \leq x_k \leq \xi_{k+1}$ in zaradi $|\xi_{k+1} - \xi_k| \leq |x_{k+1} - x_{k-1}| \leq |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| \leq 2|D| < \delta$ velja

$$\left| \sum_{k=0}^n g(x_k)[F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)] - \int_a^b g dF \right| < \epsilon.$$

Potem pa imamo tudi $|\sigma'_D - F(b)g(b) + F(a)g(a) + \int_a^b g dF| < \epsilon$. Torej je res $\int_a^b F dg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b g dF$.

Trditev 6. Naj bo $f \in L^1([a, b])$ in $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Če je $g \in C([a, b])$ ali $g \in BV([a, b])$, velja

$$\int_a^b g dF = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Dokaz. V obeh primerih Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b g dF$ obstaja, ker je F zvezna (celo absolutno zvezna) funkcija z omejeno variacijo (glej tudi trditev 5). Prav tako obstaja Lebesguov integral $\int_a^b f(t)g(t) dt$, saj je $fg \in L^1([a, b])$, ker je g v vsakem primeru omejena. Trditev zadošča dokazati za realni funkciji f in g .

Naj bodo x_k, ξ_k, M_k, m_k kot v trditvi 3. Za vsako delitev je

$$\sigma_D = \sum_{k=1}^n g(\xi_k)[F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt$$

in zato

$$\left| \sigma_D - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)[g(\xi_k) - g(t)] dt \right| \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt.$$

Če je g zvezna, je pri dovolj drobnih delitvah $M_k - m_k < \epsilon$, zato lahko naprej ocenimo

$$\left| \sigma_D - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| < \epsilon \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt = \epsilon \int_a^b |f(t)| dt = \epsilon \|f\|_1.$$

Če pa je $g \in BV([a, b])$, lahko predpostavimo, da je naraščajoča (sicer bi jo zapisali kot razliko naraščajočih). Tedaj je $m_k = g(x_{k-1})$ in $M_k = g(x_k)$. Za dovolj drobno delitev je tudi $\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt < \epsilon$, zato v tem primeru dobimo

$$\begin{aligned}\left| \sigma_D - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1})) \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)| dt = \\ &= \epsilon \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \epsilon (g(b) - g(a)).\end{aligned}$$

Opomba. Kasneje bomo videli, da je pri pogoju $f \in L^1([a, b])$ funkcija $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ odvedljiva skoraj v vsaki točki in je njen odvod skoraj povsod enak f , se pravi $F' = f$ pp. na $[a, b]$. Torej v primeru, da je g zvezna ali z omejeno variacijo, velja $\int_a^b g dF = \int_a^b g(t)F'(t) dt$.

Izrek (Drugi izrek o povprečni vrednosti). Če sta f, g realni funkciji na $[a, b]$, $f \in L^1([a, b])$ in g naraščajoča ali padajoča, obstaja taka točka $z \in [a, b]$, da velja

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^z f(t)dt + g(b) \int_z^b f(t)dt.$$

Dokaz. Obravnavajmo primer, ko je g naraščajoča funkcija. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$, torej zvezna (celo absolutno zvezna) funkcija, in $m = \min_{a \leq x \leq b} F(x)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} F(x)$. Po trditvah 5 in 6 je

$$\int_a^b Fdg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b g dF = F(b)g(b) - \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

torej je $\int_a^b f(t)g(t)dt = F(b)g(b) - \int_a^b Fdg$.

Če je $g(b) = g(a)$, je g konstantna na $[a, b]$. Tedaj je $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^b f(t)dt$ in izrek velja pri poljubnem $z \in [a, b]$.

Če pa je $g(b) > g(a)$, dobimo iz ocene $m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b Fdg \leq M(g(b) - g(a))$ neenakost $m \leq \frac{1}{g(b) - g(a)} \int_a^b Fdg \leq M$ in zaradi zveznosti funkcije F obstaja tak $z \in [a, b]$, da je $\frac{1}{g(b) - g(a)} \int_a^b Fdg = F(z)$. Torej je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)g(t)dt &= F(b)g(b) - (g(b) - g(a))F(z) = \\ &= g(a)F(z) + g(b)(F(b) - F(z)) \end{aligned}$$

oziroma

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^z f(t)dt + g(b) \int_z^b f(t)dt.$$

Isto dobimo, če je g padajoča funkcija, saj lahko v tem primeru vzamemo $-g$.

Opombe. 1. Vrednost funkcije g lahko v levem ali desnem krajišču poljubno spremenimo, pa se leva stran ne spremeni. Če ostane nova funkcija g^* še vedno naraščajoča oziroma padajoča, drugi izrek o povprečni vrednosti velja tudi zanjo (z novim z^*):

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g^*(a) \int_a^{z^*} f(t)dt + g^*(b) \int_{z^*}^b f(t)dt. \quad (*)$$

V posebnem primeru pri $g^*(a) = g(a+)$ in $g^*(b) = g(b-)$ npr. dobimo

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a+) \int_a^{z^*} f(t)dt + g(b-) \int_{z^*}^b f(t)dt.$$

2. Če je g padajoča in $g \geq 0$ na $[a, b]$, obstaja tak $z^* \in [a, b]$, da velja

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^{z^*} f(t)dt.$$

To dobimo iz (*), če izberemo $g^*(a) = g(a)$ in $g^*(b) = 0$. Če pa je g naraščajoča in $g \geq 0$ na $[a, b]$, obstaja $z^* \in [a, b]$ z lastnostjo

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(b) \int_{z^*}^b f(t)dt,$$

kar dobimo iz (*), če izberemo $g^*(a) = 0$ in $g^*(b) = g(b)$.

4. Odvajanje funkcij

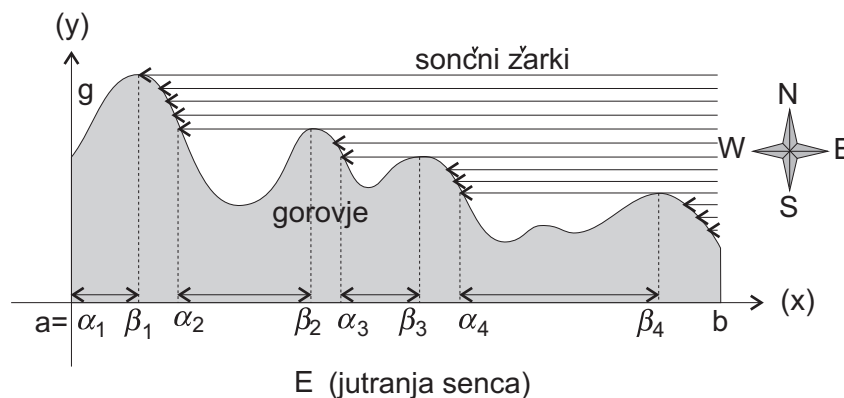
Naslednji rezultat o zveznih realnih funkcijah bomo v tem razdelku večkrat uporabljali.

Lema o vzhajajočem soncu (LVS). Naj bo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna realna funkcija in $E = \{x \in (a, b); \text{obstaja tak } y > x, \text{ da je } g(y) > g(x)\}$. Tedaj je

(i) E odprta podmnožica v (a, b) , torej $E = \cup_k (\alpha_k, \beta_k)$, števna unija paroma disjunktne odprtih intervalov, in

(ii) $g(\alpha_k) \leq g(\beta_k)$ za vsak k (celo $g(\alpha_k) = g(\beta_k)$, če $\alpha_k \neq a$).

Graf funkcije g predstavlja "gorovje", množica E "jutranjo senco", ko žarki sijejo na gorovje z desne (z vzhoda) vzporedno z abscisno osjo (glej skico).



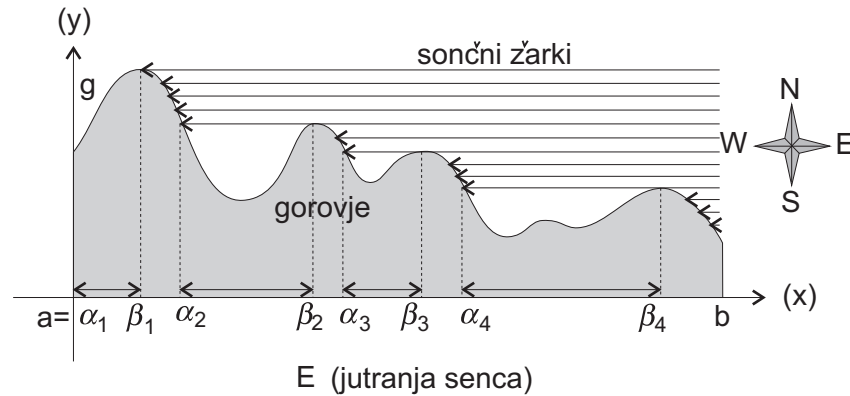
Dokaz. (i) Naj bo $x_0 \in E$. Torej obstaja $y \in [a, b]$, $y > x_0$, da je $g(y) > g(x_0)$. Zaradi zveznosti funkcije g velja $g(y) > g(x)$, $y > x$, za vsak x , ki je dovolj blizu točki x_0 , se pravi, da je tudi $x \in E$. To pomeni, da je množica E odprta in zato števna unija paroma disjunktne odprtih intervalov: $E = \cup_k (\alpha_k, \beta_k)$.

(ii) Naj bo (α, β) ena od komponent v E . Pokazati moramo, da je $g(\alpha) \leq g(\beta)$. Pa denimo da je $g(\alpha) > g(\beta)$. Zaradi zveznosti funkcije g obstaja tak $x_1 \in (\alpha, \beta)$, da je $g(\beta) < g(x_1)$ in naj bo $x_2 = \sup\{x \in [x_1, \beta]; g(x) \geq g(x_1)\}$. Za x_2 velja enakost $g(x_2) = g(x_1)$, zato je $x_2 < \beta$. Torej je $x_2 \in (\alpha, \beta) \subset E$ in obstaja tak $y > x_2$, da je $g(y) > g(x_2)$, se pravi tudi $g(y) > g(x_1) > g(\beta)$. Relacija $y > \beta$ ne more veljati, sicer bi bil $\beta \in E$, kar pa ni res. Prav tako ne more veljati $y \leq \beta$, saj je $y > x_2 \geq x_1$ in je x_2 največje število $x \in [x_1, \beta]$ z lastnostjo $g(x) \geq g(x_1)$. Protislovje dokazuje, da je $g(\alpha) \leq g(\beta)$. Če poleg tega vemo, da $\alpha \neq a$, je $\alpha \in (a, b)$, ki ni v E , zato za vsak $y > \alpha$ velja $g(y) \leq g(\alpha)$ in torej tudi $g(\beta) \leq g(\alpha)$. V tem primeru torej velja enakost $g(\alpha) = g(\beta)$.

Opombe. 1. Lema o vzhajajočem soncu velja tudi, če realna funkcija g ni zvezna, da le ima levo in desno limito v vsaki točki. Skoraj enako kot prej se da pokazati, da je (modificirana) jutranja senca

$$E = \{x \in (a, b); \text{obstaja } y > x, \text{ da je } g(y) > \max\{g(x-), g(x), g(x+)\}\}$$

odprta množica, $E = \cup_k (\alpha_k, \beta_k)$ in da za vsak k velja $g(\alpha_k+) \leq \max\{g(\beta_k-), g(\beta_k), g(\beta_k+)\}$, razen če je $\alpha_k = a$, ko velja celo enačaj (glej skico s prepadnimi stenami).



2. Obstaja dualna lema o zahajajočem soncu (LZS), kjer je senca večerna:

$$E = \{x \in (a, b); \text{ obstaja } y < x, \text{ da je } g(y) > g(x)\}$$

(sonce sije z leve strani). Tedaj velja $g(\alpha_k) \geq g(\beta_k)$ za vsak k . Če $\beta_k \neq b$, velja celo enakost $g(\alpha_k) = g(\beta_k)$.

Odvod realne funkcije. Naj bo $\delta > 0$ in $g : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna realna funkcija. Spomnimo se, kaj pomenita spodnja in zgornja limita funkcije g v točki 0:

$$\liminf_{h \searrow 0} g(h) = \sup\{\inf\{g(h); 0 < h < t\}; 0 < t < \delta\},$$

$$\limsup_{h \searrow 0} g(h) = \inf\{\sup\{g(h); 0 < h < t\}; 0 < t < \delta\},$$

Če sta obe števili enaki (končni ali neskončni), rečemo, da ima g (posplošeno) desno limito v točki 0: $g(0+) = \lim_{h \searrow 0} g(h)$, ki je enaka kateremu koli od teh števil.

Za poljubno realno funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in [a, b]$ definirajmo še ti. *Dinijeve odvodne števila* oz *Dinijeve odvode* v točki x :

$$D_-f(x) = \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad D^-f(x) = \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

$$D_+f(x) = \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D^+f(x) = \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

V levem krajišču lahko seveda izračunamo le $D_+f(a)$ in $D^+f(a)$, v desnem krajišču le $D_-f(b)$ in $D^-f(b)$. Vedno je $D_-f \leq D^-f$ in $D_+f \leq D^+f$. Za naraščajočo funkcijo f so vsi Dinijevi odvodi nenegativni.

Definicija. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je v točki $x \in [a, b]$ (v krajiščih enostransko)

(i) *odvedljiva z leve*, če je $D_-f(x) = D^-f(x)$,

(ii) *odvedljiva z desne*, če je $D_+f(x) = D^+f(x)$,

(iii) *odvedljiva*, če je

$$-\infty < D_-f(x) = D^-f(x) = D_+f(x) = D^+(x) < \infty.$$

V tem primeru pišemo $f'(x) = D_-f(x)$.

Opomba. Če odvod f' obstaja s.p. na $[a, b]$, je kot limita diferenčnega kvocienta, ki je merljiv, tudi sam merljiva funkcija:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}.$$

Tudi funkcije D_-f, D^-f, D_+f, D^+f so merljive, vendar je to veliko težje dokazati (glej [7], str. 65).

Trditev 1. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna naraščajoča funkcija. Tedaj je:

- (i) $D^+f < \infty$ s.p. na $[a, b]$,
- (ii) $D_-f \geq D^+f$ s.p. na $[a, b]$,
- (iii) $D^-f \leq D_+f$ s.p. na $[a, b]$.

Dokaz. (i) Označimo $E_\infty = \{x \in (a, b); D^+f(x) = \infty\}$ in za vsak $R > 0$ še $E_R = \{x \in (a, b); D^+f(x) > R\}$. Torej je $E_\infty \subset E_R$.

Če je $x \in E_R$, obstaja tak $y > x$, da je $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > R$ oziroma $f(y) - Ry > f(x) - Rx$. Pišimo $g(x) = f(x) - Rx$, pa vidimo, da leži točka x v jutranji senci funkcije g .

Po (LVS) je senca odprta množica, sestavljena iz paroma disjunktnih intervalov (α_k, β_k) z lastnostjo $g(\alpha_k) \leq g(\beta_k)$. To pomeni, da je $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \geq R(\beta_k - \alpha_k)$ oziroma $\beta_k - \alpha_k \leq \frac{f(\beta_k)-f(\alpha_k)}{R}$. Ta neenakost velja za vsak k ; če jo seštejemo, dobimo

$$\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_k \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{R} \leq \frac{f(b) - f(a)}{R}.$$

Ker je $E_\infty \subset E_R \subset \cup_k (\alpha_k, \beta_k)$ za vsak R in je $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \frac{f(b)-f(a)}{R} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$), je $m(E_\infty) = 0$.

(ii) Naj bo $E_1 = \{x \in (a, b); D_-f(x) < D^+f(x)\}$. Pokazali bomo, da je mera te množice enaka nič.

Izberimo $0 < r < R$ in definirajmo $E_{r,R} = \{x \in (a, b); D_-f(x) < r < R < D^+f(x)\}$. Če je $x \in E_{r,R}$, je $D_-f(x) < r$ in obstaja tak $y < x$, da je $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < r$ oziroma $f(x) - rx < f(y) - ry$, se pravi $g(y) > g(x)$, če $g(x) = f(x) - rx$. Torej je $E_{r,R}$ vsebovana v večerni senci funkcije g , ki je odprta množica in števna unija paroma disjunktnih intervalov (α_k, β_k) z lastnostjo $g(\alpha_k) \geq g(\beta_k)$ (LZS). Od tod dobimo za vsak k relacijo $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq r(\beta_k - \alpha_k)$.

Vsako od množic $E_{r,R} \cap (\alpha_k, \beta_k) = \{x \in (\alpha_k, \beta_k); D_-f(x) < r < R < D^+f(x)\}$ pokrijemo (kot v točki (i)) s sistemom paroma disjunktnih odprtih intervalov $(\alpha_{ki}, \beta_{ki})$, tako da je $\sum_i (\beta_{ki} - \alpha_{ki}) \leq \frac{f(\beta_k)-f(\alpha_k)}{R}$. Potem je $E_{r,R} \subset \cup_k \cup_i (\alpha_{ki}, \beta_{ki})$, pri čemer je

$$\sum_k \sum_i (\beta_{ki} - \alpha_{ki}) \leq \sum_k \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{R} \leq \frac{r}{R} \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \frac{r}{R} (b - a).$$

Kar smo napravili z $E_{r,R}$, naredimo zdaj z množico $E_{r,R} \cap (\alpha_{ki}, \beta_{ki})$ za vsak k in i . To množico lahko pokrijemo s sistemom paroma disjunktnih intervalov s skupno dolžino kvečjemu $\frac{r}{R}(\beta_{ki} - \alpha_{ki})$, se pravi, da lahko potem množico $E_{r,R}$ pokrijemo z intervali s skupno dolžino kvečjemu $\frac{r}{R} \sum_k \sum_i (\beta_{ki} - \alpha_{ki}) \leq \left(\frac{r}{R}\right)^2 (b - a)$. Postopek ponavljamo. Na n -tem koraku pokrijemo $E_{r,R}$ s sistemom paroma disjunktnih odprtih intervalov s skupno dolžino kvečjemu $\left(\frac{r}{R}\right)^n (b - a)$. Ker ta količina konvergira k 0 pri pogoju $n \rightarrow \infty$, dobimo $m(E_{r,R}) = 0$. To velja za vsak r, R , če je le $0 < r < R$.

Očitno je $E_1 \subset \cup_{r,R \in \mathbb{Q}, 0 < r < R} E_{r,R}$ in zato $m(E_1) \leq \sum_{r,R \in \mathbb{Q}, 0 < r < R} m(E_{r,R}) = 0$. To pomeni, da velja $D_-f \geq D^+f$ s.p. na $[a, b]$.

(iii) Čisto podobno kot v točki (ii) dokažemo neenakost $D^-f \leq D_+f$ s.p. na $[a, b]$. To pot definiramo $E_2 = \{x \in (a, b); D^-f(x) > D_+f(x)\}$ in z uporabo (LVS) dokažemo $m(E_2) = 0$.

Izrek 1. Naj bo f zvezna funkcija z omejeno variacijo na $[a, b]$. Tedaj je:

- (i) funkcija f odvedljiva skoraj povsod na $[a, b]$,
- (ii) $f' \in L^1([a, b])$,
- (iii) $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$, če je f naraščajoča na $[a, b]$.

Dokaz. Izrek zadošča dokazati za naraščajočo zvezno funkcijo f na intervalu $[a, b]$ (sicer $f = f_1 + if_2$, $f_1 = g_1 - h_1$, $f_2 = g_2 - h_2$, g_i, h_i naraščajoče).

(i) Naj bodo E_∞ , E_1 in E_2 kot v trditvi 1, torej z mero 0. Če $x \notin E_1 \cup E_2 \cup E_\infty$, so vsi Dinijevi odvodi med seboj enaki zaradi

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty.$$

Torej je funkcija f odvedljiva v točki x in velja $f'(x) < \infty$. Ker je $m(E_1 \cup E_2 \cup E_\infty) = 0$, velja zgornje skoraj povsod na intervalu $[a, b]$.

(ii) Pokažimo, da so v Jordanovi dekompoziciji $f = f_1 + if_2$, $f_1 = g_1 - h_1$, $f_2 = g_2 - h_2$ z $f' = f'_1 + if'_2$, $f'_1 = g'_1 - h'_1$, $f'_2 = g'_2 - h'_2$, vsi odvodi naraščajočih funkcij g_1, h_1, g_2, h_2 v $L^1([a, b])$. V ta namen zadošča za naraščajočo funkcijo f pokazati neenakost $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$, s čimer bo dokazana tudi točka (iii).

Funkcijo f z ustreznima konstantama razširimo zvezno z intervala $[a, b]$ na vso realno os. Po točki (i) skoraj za vsak x velja $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + 1/n) - f(x)] = D^+ f(x) = f'(x)$. Ker je funkcija f zvezna, je merljiva, zato je merljiva funkcija tudi njen odvod f' . Pišimo $h = 1/n$ in

$$g_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)] = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n(x)dx &= \frac{1}{h} \int_a^b [f(x + h) - f(x)]dx = \frac{1}{h} \int_{a+h}^{b+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_a^b f(t)dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt = f(b) - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Po Fatoujevi lemmi (FL) imamo

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Opombe. 1. Ker bi lahko (LVS), (LZS) in izrek 1 dokazali tudi, če funkcija f ne bi bila zvezna, ampak le v $BV([a, b])$, velja tudi izrek 2 splošneje za vsako funkcijo f z omejeno variacijo.

2. Enačaj v oceni $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$ na sploh ne velja. Za zgled lahko vzamemo Lebesguovo singularno funkcijo L_ξ , kjer je $0 < \xi < 1/2$. V tem primeru je $L'_\xi = 0$ s.p. na $[0, 1]$ in zato

$$\int_0^1 L'_\xi(x)dx = 0 < 1 = L_\xi(1) - L_\xi(0).$$

3. Enakost pa velja npr. za Lipschitzove funkcije. V dokazu točke (ii) oziroma (iii) izreka 1 lahko namesto (FL) uporabimo (LIDK) in imamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx = \\ &= f(b) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

zaradi zveznosti funkcije f v točki a . (LIDK) smo lahko uporabili, ker zaradi Lipschitzove lastnosti funkcije f obstaja konstanta $M > 0$, da je $|g_n(x)| = n|f(x + 1/n) - f(x)| \leq M$.

4. Za naraščajočo funkcijo f obstaja po zgornjem izreku, točka (i), končen odvod f' s.p. na $[a, b]$. Več ni mogoče pričakovati, kot pove naslednja lema, ki jo bomo potrebovali tudi kasneje.

Lema 1. Če je $m(E) = 0$, obstaja na intervalu $[a, b]$ absolutno zvezna naraščajoča funkcija g z lastnostjo $g'(x) = +\infty$ za vsak $x \in E$.

Dokaz. Ker ima množica E mero 0, jo lahko pokrijemo z odprtimi množicami V_n s poljubno majhno mero, npr. $m(V_n) < 1/2^n$ za vsak n . Definirajmo $\chi_n = \chi_{V_n}$ in $g_n(x) = \int_0^x \chi_n(t) dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je za vsak n funkcija g_n naraščajoča in velja $0 \leq g_n \leq 1/2^n$. Definirajmo še funkcijo $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ (vrsta je enakomerno konvergentna na $[a, b]$, ker ima konvergentno številsko majoranto $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$), ki je naraščajoča in zvezna. Ker je $g(x) = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t) dt$ po (LIMK), je g celo absolutno zvezna.

Naj bo n poljubno naravno število in $x \in E$. Izberimo tak $\epsilon > 0$, da je $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$. Tedaj za $0 < |h| < \epsilon$ velja

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} \geq \sum_{k=1}^n \frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \chi_k(t) dt = n. \end{aligned}$$

Torej je $g'(x) = +\infty$, če je $x \in E$.

Lemo 1 bomo uporabili pri naslednjem pomožnem rezultatu, ki pa je zanimiv tudi sam po sebi. Obe lemi, tako lemo 1 kot lemo 2 bomo kasneje še potrebovali.

Lema 2. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ realna zvezna funkcija z lastnostjo $D_+f \geq 0$ s.p. na $[a, b]$. Če je

- (i) funkcija f absolutno zvezna, ali
 - (ii) množica točk x , v katerih je $D_+f(x) = -\infty$, števna,
- je funkcija f naraščajoča na $[a, b]$.

Dokaz. Množica $E = \{x \in [a, b]; D_+f(x) < 0\}$ ima po predpostavki mero nič. Po lemi 1 obstaja taka naraščajoča zvezna funkcija g , da je $g'(x) = +\infty$ za vsak $x \in E$. Naj bo $\epsilon > 0$ in $f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon(x + g(x))$ za vsak x . Tedaj je

$$D^+f_\epsilon(x) \geq D^+f(x) + \epsilon(1 + D_+g(x)) \geq D_+f(x) + \epsilon(1 + D_+g(x)).$$

Upoštevali smo, da je $D_+(x + g(x)) = 1 + D_+g(x)$. Ker je g naraščajoča funkcija, je $D_+g(x) \geq 0$ za vsak x . Če $x \notin E$, pa je tudi $D^+f(x) \geq D_+f(x) \geq 0$, zato za $x \notin E$ velja $D^+f_\epsilon(x) > 0$. Torej je množica $E_\epsilon = \{x \in [a, b]; D^+f_\epsilon(x) \leq 0\}$ vsebovana v E in ima zato tudi mero nič, $m(E_\epsilon) = 0$. Pravzaprav velja celo $E_\epsilon \subset E_{-\infty} = \{x \in [a, b]; D_+f(x) = -\infty\}$, saj je $D^+f_\epsilon(x) \geq D_+f(x) + \epsilon(1 + D_+g(x)) = +\infty$ za $x \in E \setminus E_{-\infty}$.

Pokažimo, da je funkcija f_ϵ naraščajoča na intervalu $[a, b]$. Pa denimo, da za $a \leq c < d \leq b$ velja $f_\epsilon(c) > f_\epsilon(d)$ in izberimo poljuben $y_0 \in (f_\epsilon(d), f_\epsilon(c))$. Če je

$$x_0 = \sup\{x \in [c, d]; f_\epsilon(x) > y_0\}$$

(množica ni prazna, saj je v njej c), je $f_\epsilon(x_0) = y_0$ (se pravi $x_0 < d$) in $f_\epsilon(x) < y_0$ za $x > x_0$. Torej velja tudi $D^+f_\epsilon(x_0) \leq 0$, tako da je $x_0 \in E_\epsilon$ in $y_0 \in f_\epsilon(E_\epsilon)$.

Izpeljali smo inkluzijo $(f_\epsilon(d), f_\epsilon(c)) \subset f_\epsilon(E_\epsilon)$, ki pa pri predpostavkah izreka ne more veljati. Če velja (i), se pravi, da je funkcija f absolutno zvezna, je taka tudi funkcija f_ϵ , torej preslika f_ϵ po trditvi 2.2 množice z mero nič v množice z mero nič. Torej je tudi $m(f_\epsilon(E_\epsilon)) = 0$. Če pa velja (ii), se pravi, da je množica $E_{-\infty}$ števna, sta števnici tudi množici E_ϵ in $f_\epsilon(E_\epsilon)$. V obeh primerih protislovje dokazuje, da je funkcija f_ϵ na intervalu $[a, b]$ naraščajoča. Potem pa je naraščajoča tudi funkcija f , saj je $f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon$.

V posebnem primeru je npr. realna zvezna funkcija z lastnostjo $D_+f \geq 0$ s.p. na $[a, b]$ naraščajoča, če je D_+f povsod navzdol omejena, npr. če je $D_+f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$.

Posledica. Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolutno zvezna funkcija z lastnostjo $f' = 0$ s.p. na $[a, b]$, je funkcija na $[a, b]$ konstantna.

Dokaz. Dovolj je, če to dokažemo posebej za realni in posebej za imaginarni del. Če pa je f realna funkcija, lahko uporabimo lemo 2(i), enkrat za f in drugič za $-f$.

Zgled. Lema 2 omogoča dokazati, da je za Lebesguovo singularno funkcijo $D^+L_\xi = +\infty$ na neštveni množici. To vidimo takole: Funkcija $f = -L_\xi$, je padajoča in zanjo velja $D_+f = f' = 0$ s.p. na $[0, 1]$ (povsod na E_ξ^c). Seveda ni absolutno zvezna. Če bi bila množica $E_{-\infty} = \{x \in [0, 1]; D_+f(x) = -\infty\}$ števna, bi bila po lemi 2(ii) funkcija f naraščajoča, kar ni res. Torej je $D_+f = -\infty$, in zato tudi $D^+L_\xi = +\infty$, na neštveni množici.

Razdelek zaključimo s preprostim izrekom o odvajanju funkcijskih vrst in njegovo uporabo.

Izrek 2 (Fubini). Če je (f_j) zaporedje nenegativnih naraščajočih funkcij na intervalu $[a, b]$ z lastnostjo $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) < \infty$ za vsak $x \in [a, b]$, velja $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f'_j(x)$ za skoraj vsak $x \in [a, b]$.

Dokaz. Delne vsote $s_n = \sum_{j=1}^n f_j$ so nenegativne in naraščajo, ostanki vrst $r_n = f - s_n$ pa nenegativne, padajo in konvergirajo k 0. Tudi funkcija f je nenegativna in naraščajoča. Torej so vse te funkcije skoraj povsod odvedljive; ker jih je števno mnogo, obstaja skupna podmnožica $A \subset [a, b]$, katere komplement ima mero 0 in na kateri so vse funkcije s_n, r_n in f hkrati odvedljive. Zaradi

$$(s_n(x+h) - s_n(x))/h \leq (s_n(x+h) - s_n(x))/h + (f_{n+1}(x+h) - f_{n+1}(x))/h = \\ (s_{n+1}(x+h) - s_{n+1}(x))/h \leq (f(x+h) - f(x))/h$$

za vsak n in $x, x+h \in [a, b]$ velja tudi $s'_n(x) \leq s'_{n+1}(x) \leq f'(x)$ za vsak $x \in A$. Torej obstaja $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(x)$ za $x \in A$ in zaradi monotone konvergence zadošča pokazati, da obstaja podzaporedje v (s'_n) , ki konvergira na A k funkciji f' . Izberimo tako podzaporedje indeksov, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}(b)$ konvergira. Potem pa je za vsak $x \in [a, b]$ res $0 \leq r_{n_k}(x) \leq r_{n_k}(b)$ in zato tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}(x)$ konvergira za vsak $x \in [a, b]$. Podobno kot prej za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ vidimo, da konvergira na A tudi vrsta odvodov $\sum_{k=1}^{\infty} r'_{n_k}(x)$. Torej velja $r'_{n_k} \rightarrow 0$ na A in zato $r'_{n_k} \rightarrow f$ na A .

Posledica. Naj bo L_ξ , $0 < \xi < 1/2$, Lebesguova singularna funkcija na intervalu $[0, 1]$ in naj bo $L(x) = L_\xi(x)$ za $0 \leq x \leq 1$, $L(x) = 0$ za $x < 0$ in $L(x) = 1$ za $x > 1$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in [a, b]$ definirajmo

$$f_n(x) = L\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) \quad \text{in} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/2^n.$$

Potem je f zvezna in strogo naraščajoča funkcija na $[a, b]$ z lastnostjo $f' = 0$ s.p. na $[a, b]$.

Dokaz. Ker je $0 \leq f_n \leq 1$, vrsta enakomerno konvergira in definira zvezno funkcijo f na intervalu $[a, b]$. Ker so funkcije f_n nenegativne in naraščajoče, lahko uporabimo izrek 2 in vidimo, da je $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f'_j(x)$ za skoraj vsak $x \in [a, b]$. Toda $f'_j = 0$ s.p. na $[a, b]$ za vsak j , zato isto velja tudi za odvod funkcije f .

5. Osnovni izrek integralskega računa

Naj bo $f \in L^1([a, b])$ in $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Klasični rezultat iz analize pove, da je funkcija F odvedljiva v vsaki točki x , v kateri je funkcija f zvezna, in da je tedaj $F'(x) = f(x)$. Dokaz je preprost. Zaradi zveznosti funkcije f v točki x obstaja za vsak $\epsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da iz $|t - x| < \delta$ sledi $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Potem pa je za $0 < h < \delta$ res tudi

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt < \epsilon.$$

Podobno bi veljalo za $-\delta < h < 0$. Posplošitev tega dejstva je naslednji izrek.

Izrek 1. Če je $f \in L^1([a, b])$ in $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$, obstaja odvod F' in velja $F' = f$ s.p. na $[a, b]$.

Dokaz. Ker je F funkcija z omejeno variacijo, obstaja F' skoraj v vsaki točki in je integrabilna funkcija (izrek 4.1). Če pokažemo, da je $F(x) = \int_a^x F'(t)dt$, bo iz $\int_a^x [F'(t) - f(t)]dt = 0$ po trditvi 1.3 takoj sledilo $F' = f$ s.p. na $[a, b]$.

Enakost $F(x) = \int_a^x F'(t)dt$ pa zadošča videti za nenegativno funkcijo $f \geq 0$, ko je F naraščajoča. Če je f tudi omejena, je F Lipschitzova in po opombi 3 za izrekom 4.1 velja $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) = F(x)$. Če pa f ni omejena, so funkcije f_n , definirane s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \leq n \\ n & , \quad f(x) > n \end{cases}$$

omejene z n , njihovo zaporedje pa naraščajoče in konvergira k f . Za vsak x definirajmo $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$; zanje po prejšnjem velja $F_n(x) = \int_a^x F'_n(t)dt$. Po (LIMK) ali (LIDK) imamo za vsak x

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x).$$

Pišimo $g_n(t) = f(t) - f_n(t)$ in $G_n(x) = F(x) - F_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))dt = \int_a^x g_n(t)dt$. Ker je $g_n \geq 0$, je vsaka funkcija G_n naraščajoča (absolutno) zvezna funkcija. Po izreku 4.1 je odvedljiva s.p. na $[a, b]$. Zaradi

$$\frac{G_n(x+h) - G_n(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t)dt \geq 0$$

za vsak h , velja tudi $G'_n \geq 0$ s.p. na $[a, b]$. To pomeni, da je $F'_n \leq F'$ s.p. na $[a, b]$, zato velja za vsak n in vsak x neenakost $F_n(x) = \int_a^x F'_n(t)dt \leq \int_a^x F'(t)dt \leq F(x)$. (Enečaja velja zaradi Lipschitzove lastnosti funkcije F_n , drugi neenečaja pa sledi iz izreka 4.1(iii), ker je funkcija F naraščajoča.) V limiti dobimo $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \int_a^x F'(t)dt \leq F(x)$, tako da velja splošno $F(x) = \int_a^x F'(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$.

Izrek 1 lahko razumemo tako, da za vsak $f \in L^1([a, b])$ velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$ s.p. na $[a, b]$ oziroma $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt = 0$ s.p. na $[a, b]$. V tej obliki ga lahko zaostriamo, da bo veljalo celo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt = 0$ s.p. na $[a, b]$.

Trditev 1. Naj bo $f \in L^1([a, b])$. Tedaj obstaja taka merljiva množica $E \subset [a, b]$, katere komplement v $[a, b]$ ima mero 0, da velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha|dt = |f(x) - \alpha|$$

za vsak $x \in E$ in vsak $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Izberimo števno gosto množico $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ in definirajmo $g_n(t) = |f(t) - \alpha_n|$ za $n = 1, 2, \dots$. Tedaj je $g_n \in L^1([a, b])$ in za vsak $n \geq 1$ obstaja po izreku 1 merljiva množica E_n z lastnostjo $m(E_n^c) = 0$ in $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt = g_n(x)$ za vsak $x \in E_n$. Če pišemo $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, je $m(E^c) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n^c) = 0$, torej tudi $m(E^c) = 0$. Poleg tega za vsak $x \in E$ in vsak n velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt = g_n(x)$.

Za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$ in vsak definirajmo funkcijo $g_\alpha(t) = |f(t) - \alpha|$, ($t \in [a, b]$). Pokazati moramo, da za vsak tak g_α velja $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_\alpha(t) dt \rightarrow g_\alpha(x)$ ($h \rightarrow 0$) za vsak $x \in E$. Brez škode se lahko omejimo na primer, ko bo $h > 0$ (za $h < 0$ sklepamo podobno).

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$, naravno število n pa naj bo tako, da je $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon/3$ (to je mogoče doseči, ker je množica $\{\alpha_n\}$ gosta v \mathbb{C}). Tedaj za vsak $t \in [a, b]$ velja tudi $|g_\alpha(t) - g_n(t)| = ||f(t) - \alpha| - |f(t) - \alpha_n|| \leq |\alpha - \alpha_n| < \epsilon/3$ in zato

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_\alpha(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |g_\alpha - g_n(t)| dt < \epsilon/3$$

za vsak $x \in [a, b]$ in vsak $h > 0$. Torej je za vsak $x \in E$ res tudi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_\alpha(t) dt - g_\alpha(x) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_\alpha - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt \right| + \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt - g_n(x) \right| + \\ &+ |g_n(x) - g_\alpha(x)| < \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t) dt - g_n(x) \right| + 2\epsilon/3 \end{aligned}$$

(prvi in tretji člen sta pod $\epsilon/3$, ne glede na to, kakšna sta x in $h > 0$, ker je $|\alpha - \alpha_n| < \epsilon/3$). Če pri izbranem n in $x \in E$ izberemo še $h > 0$ tako majhen, da je tudi srednji člen pod $\epsilon/3$, dobimo, da je vsota vseh treh členov pod ϵ . Za vsak $x \in E$ in $\alpha \in \mathbb{C}$ torej velja

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_\alpha(t) dt \rightarrow g_\alpha(x) \quad \text{oziroma} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - \alpha| dt = |f(x) - \alpha|.$$

Izrek 2 (Lebesgue). Za $f \in L^1([a, b])$ velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$ skoraj za vsak $x \in [a, b]$.

Dokaz. V dokazu trditve 1 izberemo pri danem $x \in E$ kompleksno število $\alpha = f(x)$.

Definicija. Točko x , za katero velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$, imenujemo *Lebesguova točka*, množico vseh Lebesguovih točk pa *Lebesguova množica* dane funkcije $f \in L^1([a, b])$. Včasih imenujemo x Lebesguova točka funkcije f , če velja nekoliko milejši pogoj

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| dt = 0.$$

Izrek 2 pove, da je za vsako funkcijo $f \in L^1([a, b])$ skoraj vsaka točka na $[a, b]$ Lebesguova. Vsaka točka zveznosti funkcije f je tudi Lebesguova, toda funkcija $f \in L^1([a, b])$ morda točk zveznosti sploh nima, medtem ko je Lebesguovih točk zelo veliko. V vsaki Lebesguovi točki x seveda velja $F'(x) = f(x)$, če je F nedoločeni integral funkcije f .

Zgled. Naj bo $E \subset [a, b]$ poljubna merljiva podmnožica in $f = \chi_E$ njena karakteristična funkcija, točka $x \in [a, b]$ pa njena Lebesguova točka. Če $x \notin E$, je $f(x) = 0$, torej $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)| dt = 0$ oziroma $\lim_{h \rightarrow 0} m(E \cap [x, x+h])/h = 0$. Če pa je $x \in E$, je $f(x) = 1$ in zato $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - 1| dt = 0$ oziroma $\lim_{h \rightarrow 0} m(E \cap [x, x+h])/h = 1$.

Točko, v kateri velja zadnja relacija, imenujemo *točka gostote* merljive množice E . Torej je skoraj vsaka točka iz E točka gostote za E .

Definicija. Če za funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, za katero obstaja s.p. na $[a, b]$ odvod $f' \in L^1([a, b])$, velja

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

za vsak $x \in [a, b]$, rečemo, da za funkcijo f velja *osnovni izrek integralskega računa* (OIIR).

Videli smo že, da velja (OIIR) za Lipschitzove funkcije (opomba 3 za izrekom 4.1) in za nedoločene integrale funkcij iz $L^1([a, b])$ (izrek 1 za $F - F(a)$). Ne velja pa npr. za vse zvezne funkcije z omejeno variacijo, čeprav imajo le-te odvod skoraj v vsaki točki in je poleg tega v $L^1([a, b])$. Zgled je Lebesguova singularna funkcija. Spoznali pa bomo, da velja (OIIR) za vse absolutno zvezne funkcije in da je to zanje celo značilno. Za to potrebujemo trditev, ki jo že poznamo (posledica leme 4.2). Tu pa jo bomo še enkrat dokazali, neodvisno od leme 4.2 (v dokazu bomo spet uporabili (LZS)).

Trditev 2. Naj bo $f \in AC([a, b])$ in naj za odvod velja $f' = 0$ s.p. na $[a, b]$. Tedaj je funkcija f konstantna na $[a, b]$.

Dokaz. Pokazali bomo, da pri zgornjih pogojih velja $f(b) = f(a)$. Ker lahko to uporabimo na vsakem podintervalu $[a, x] \subset [a, b]$, je funkcija konstantna na $[a, b]$. Dovolj je dokazati trditev za realno funkcijo f .

Izberimo $\epsilon > 0$ in tak $x \in (a, b)$, da je $f'(x) = 0$. Potem obstaja $y < x$, da je $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \epsilon$ oziroma $f(y) - \epsilon y > f(x) - \epsilon x$. Torej leži x v večerni senci funkcije $g(x) = f(x) - \epsilon x$. Ker je $\{x \in (a, b); f' \text{ obstaja in } f'(x) = 0\} \subset \{x \in (a, b); \text{ obstaja } y < x, g(y) > g(x)\} = \cup_k(\alpha_k, \beta_k)$ po (LZS) in ker je mera prve množice enaka $b - a$, velja isto za unijo; torej $\sum_k(\beta_k - \alpha_k) = b - a$. poleg tega je po (LZS) $g(\beta_k) \leq g(\alpha_k)$ za vsak k oziroma $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq \epsilon(\beta_k - \alpha_k)$ za vsak k .

Ker je $f \in AC([a, b])$, obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak končen nabor paroma disjunktnih intervalov (γ_i, δ_i) z lastnostjo $\sum_i(\delta_i - \gamma_i) < \delta$ velja $\sum_i |f(\delta_i) - f(\gamma_i)| < \epsilon$. Izberimo tako velik r , da je $\sum_{k=1}^r(\beta_k - \alpha_k) > b - a - \delta$. Nepokrita ostane podmnožica v E z mero kvečjemu δ , ki tudi sestoji iz kvečjemu $r + 1$ disjunktnih intervalov $[\gamma_i, \delta_i]$. Torej je $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^r(f(\beta_k) - f(\alpha_k)) + \sum_i(f(\delta_i) - f(\gamma_i)) \leq \epsilon \sum_k(\beta_k - \alpha_k) + \epsilon \leq (b - a + 1)\epsilon$. ker to velja za vsaka $\epsilon > 0$, dobimo $f(b) - f(a) \leq 0$ oziroma $f(b) \leq f(a)$.

Če bi namesto funkcije f ves čas delali s funkcijo $-f$, bi dobili $-f(b) \leq -f(a)$ oziroma $f(a) \leq f(b)$. Torej velja enakost: $f(b) = f(a)$.

Izrek 3. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je absolutno zvezna natanko takrat, ko je skoraj povsod odvedljiva z odvodom $f' \in L^1([a, b])$ in zanjo velja (OIIR):

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a), \quad x \in [a, b].$$

Dokaz. Skoraj povsod odvedljiva funkcija z integrabilnim odvodom, za katero velja (OIIR), je vsota konstante in nedoločenega integrala, torej je tudi sama absolutno zvezna. Obratno, naj bo f poljubna absolutno zvezna funkcija. Ker ima omejeno variacijo, je odvedljiva s.p. na $[a, b]$ in ima integrabilen odvod f' (izrek 4.1). Za vsak $x \in [a, b]$ definirajmo $g(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Kot nedoločeni integral je $g \in AC([a, b])$ in po izreku 1 je $g' = f'$ s.p. na $[a, b]$. Ker je $f - g \in AC([a, b])$ in $(f - g)' = 0$ s.p. na $[a, b]$, je po trditvi 2 funkcija $f - g$ konstantna, torej $f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a)$ za vsak $x \in [a, b]$. Se pravi, da velja (OIIR).

Trditvev 3. Če sta f, g absolutno zvezni funkciji na $[a, b]$, velja formula za integracijo po delih:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Dokaz. Ker je produkt fg tudi absolutno zvezna funkcija, velja (OIIR): $\int_a^b (fg)'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. V točkah, kjer so f, g in fg odvedljive funkcije, torej skoraj povsod na $[a, b]$, pa velja tudi $(fg)' = f'g + fg'$. Od tod in iz (OIIR) takoj sledi formula za integracijo po delih (primerjaj tudi trditvi 3.5 in 3.6).

Opomba. Če funkcija f ni absolutno zvezna, (OIIR) v splošnem ne velja niti v primeru, ko je funkcija f povsod odvedljiva na $[a, b]$. Lahko se namreč zgodi, da odvod ni integrabilen. Klasični zgled je funkcija f , definirana na intervalu $[0, 1]$ s predpisom $f(0) = 0$ in $f(x) = x^2 \cos(1/x^2)$ za $x \neq 0$. Zanj je $f'(0) = 0$ in $f'(x) = 2x \cos(1/x^2) + (2/x) \sin(1/x^2)$ za $x \neq 0$, tako da odvod ni v $L^1([0, 1])$, saj je $\int_0^1 \frac{2}{x} |\sin \frac{1}{x^2}| dx = \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt = \infty$. Torej funkcija f nima niti omejene variacije (o čemer se lahko prepričamo tudi neposredno), zato tudi ni absolutno zvezna.

V takem primeru nastane vprašanje, kako iz znanega odvoda f' ponovno rekonstruirati funkcijo f . Lebesguov integral očitno ne zadošča, pač pa problem reši ti. *Denjoyev integral*, ki je bil izumljen prav s tem namenom (glej npr. [7] ali [19]).

Za povsod odvedljive funkcije z integrabilnim odvodom teh problemov ni, saj so absolutno zvezne, kot pove naslednji (nekoliko splošnejši) izrek.

Izrek 4. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija z lastnostjo, da obstaja končen odvod $f'(x)$ povsod razen na števeni množici točk $x \in (a, b)$ in da je $f' \in L^1([a, b])$. Potem za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a).$$

Dokaz. Dovolj je dokazati izrek, če je f realna zvezna funkcija. Za vsako naravno število n definirajmo $g_n(x) = \min\{f'(x), n\}$, če odvod $f'(x)$ obstaja in je končen. Sicer pa naj bo $g_n(x) = 0$. Vidimo, da je $g_n \leq n$, $g_n \leq f'$, $|g_n| \leq |f'|$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f'$ s.p. na $[a, b]$. Nadalje naj bo $f_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Po (LIDK) velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Kjer obstaja končen odvod f' , je $D_+f = f'$. Skoraj povsod pa po izreku 1 obstaja $f'_n = g_n$. Torej velja s.p. na $[a, b]$ tudi $D_+(f - f_n) = f' - g_n \geq 0$. Ker je za vsak x

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g_n(t)dt \leq n,$$

je za vsak x tudi $D^+f_n(x) \leq n$. Torej velja $D_+(f - f_n)(x) = f' - D^+f_n > -\infty$ povsod razen na števeni množici, kjer odvod f' ne obstaja ali pa ni končen.

Zdaj lahko uporabimo lemo 4.2, ki zagotavlja, da je za vsak n funkcija $f - f_n$ naraščajoča. Torej za vsak n in vsak $x \in [a, b]$ velja $f(x) - f_n(x) \geq f(a) - f_n(a) = f(a)$ oziroma $f_n(x) \leq f(x) - f(a)$. V limiti, ko $n \rightarrow \infty$, dobimo

$$\int_a^x f'(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x) - f(a).$$

Če zamenjamo f z $-f$, spoznamo še obratno neenakost in izrek je dokazan.

Posledica. Zvezna funkcija, ki ima končen integrabilen odvod povsod razen na števeni množici, je absolutno zvezna. V posebnem primeru je to res za vsako funkcijo s povsod končnim integrabilnim odvodom.

Dokaz. Prvi del takoj sledi iz izreka 4. Za drugi del upoštevajmo, da je funkcija zvezna, če je povsod, tudi v krajiščih, (tam seveda enostransko) odvedljiva.

Opomba. Pri zveznih funkcijah je pogoj, da obstaja povsod (razen morda na števni podmnožici) končen integrabilen odvod, zadosten za absolutno zveznost. Ni pa potreben, kot vidimo npr. iz leme 4.1. Po drugi strani ne zadošča zahtevati manj kot v izreku 4, npr. le obstoj končnega integrabilnega odvoda s.p. na $[a, b]$ (zglej: Lebesguova singularna funkcija!). Pač pa iz eksistence končnega integrabilnega odvoda zvezne funkcije s.p. na $[a, b]$, lahko sklepamo, da je funkcija absolutno zvezna, če privzamemo še kakšen dodaten pogoj, npr. da so vsa desna Dinijeva števila realnih in imaginarnih delov funkcije povsod omejena (to sledi iz poenostavljenega dokaza izreka 4) ali da funkcija preslika množice z mero nič v množice z mero nič (glej npr. [25]).

6. Simetrični odvodi

V tem razdelku si bomo na kratko ogledali osnove Schwarzove teorije simetričnih odvodov, ki bo imela pri splošnih trigonometričnih vrstah pomembno vlogo.

Definicija 1. Naj bo F kompleksna funkcija, definirana v okolici točke $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$(a) \quad DF(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} \text{ prvi simetrični odvod funkcije } F \text{ in}$$

$$(b) \quad D^2F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \text{ drugi simetrični odvod funkcije } F.$$

Če je F realna funkcija, lahko definiramo tudi prvi ali drugi *spodnji* in *zgornji simetrični odvod*: $\underline{D}F(x)$, $\underline{D}^2F(x)$, $\overline{D}F(x)$ in $\overline{D}^2F(x)$, ki so definirani kot limes inferior oziroma limes superior zgornjih simetričnih diferenčnih kvocientov. Očitno $DF(x)$ obstaja, če je $\underline{D}F(x) = \overline{D}F(x)$ in je enak temu številu. Prav tako obstaja $D^2F(x)$, če je $\underline{D}^2F(x) = \overline{D}^2F(x)$. Simetrični odvod imenujemo tudi *prvi* ali *drugi Schwarzov odvod*.

Opombe. 1. D in D^2 sta očitno linearna operatorja: $D(aF) = aDF$, $D^2(aF) = aD^2F$, $D(F+G) = DF + DG$ in $D^2(F+G) = D^2F + D^2G$. Za spodnji in zgornji simetrični odvod realnih funkcij velja pozitivna homogenost, $\underline{D}(-F) = -\overline{D}F$, $\underline{D}^2(-F) = -\overline{D}^2F$, za vsoto pa le neenakosti

$$\underline{D}(F) + \underline{D}(G) \leq \underline{D}(F+G) \leq \underline{D}F + \overline{D}G \leq \overline{D}(F+G) \leq \overline{D}F + \overline{D}G,$$

$$\underline{D}^2(F) + \underline{D}^2(G) \leq \underline{D}^2(F+G) \leq \underline{D}^2F + \overline{D}^2G \leq \overline{D}^2(F+G) \leq \overline{D}^2F + \overline{D}^2G.$$

O tem se lahko hitro prepričamo, če upoštevamo definicijo zgornjih in spodnjih limit.

2. Če obstaja običajni odvod $F'(x)$ obstaja tudi simetrični odvod $DF(x)$ in sta enaka. Najprej je

$$\begin{aligned} DF(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{h} = \\ &= \frac{1}{2} F'(x) + \frac{1}{2} F'(x) = F'(x). \end{aligned}$$

Prav tako velja $D^2F(x) = F''(x)$, če $F''(x)$ obstaja. Pišimo $G(h) = F(x+h) + F(x-h)$ in upoštevajmo Cauchyjev izrek za funkcijo G , pa dobimo ($0 \leq \theta \leq h$)

$$\begin{aligned} D^2F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - G(0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G'(\theta h)}{2\theta h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(x+\theta h) - F'(x-\theta h)}{2\theta h} = DF'(x) = F''(x). \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je F' definiran v okolici točke x , če $F''(x)$ obstaja, in je zato F zvezna funkcija v okolici točke x . Polega tega smo uporabili prejšnje spoznanje, da je $DF'(x) = F''(x)$.

Obratno nasploh ne velja, zgled za prvi odvod nudi funkcija $F(x) = |x|$, za drugi odvod pa funkcija $F(x) = x|x|$ v točki $x = 0$. Niti ni treba, da bi bila funkcija F v točki x zvezna, če obstaja $DF(x)$ (npr. $F(x) = 0$ za $x \neq 0$ in $F(0) = 1$) ali $D^2F(x)$ (npr. $F(x) = \text{sign}(x)$).

Prvi in drugi simetrični diferenčni kvocienat pogosto označimo na kratko z

$$\frac{\Delta F(x, h)}{2h} = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h},$$

oziroma z

$$\frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2} = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}.$$

Lema 1 (Schwarz). Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna realna funkcija.

- (a) Če je $\overline{D}^2 F \geq 0$ na (a, b) , je $F(x) \leq F(a) + (F(b) - F(a))(x - a)/(b - a)$ za vsak $x \in [a, b]$.
 (b) Če je $\underline{D}^2 F \leq 0$ na (a, b) , je $F(x) \geq F(a) + (F(b) - F(a))(x - a)/(b - a)$ za vsak $x \in [a, b]$.
 (c) Če je $D^2 F = 0$ na (a, b) , je $F(x) = F(a) + (F(b) - F(a))(x - a)/(b - a)$ za vsak $x \in [a, b]$.

Dokaz. (a) Izberimo $t > 0$. Za vsak $x \in [a, b]$ definirajmo novo funkcijo

$$G_t(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) + t(x - a)(x - b).$$

Ta funkcija je zvezna na $[a, b]$ in zanjo velja $G_t(a) = G_t(b) = 0$. Poleg tega je $\overline{D}^2 G_t(x) = \overline{D}^2 F(x) + 2t$. Pri predpostavki iz (a) je torej $\overline{D}^2 G_t(x) \geq 2t$ za vsak $x \in (a, b)$. Pokažimo, da je $G_t \leq 0$ za $t > 0$. Pa denimo, da je $t > 0$ in hkrati $G_t(x) > 0$ v kakšni točki $x \in (a, b)$. Tedaj doseže funkcija G_t zaradi zveznosti svoj maksimum vsaj v eni točki x_0 v (a, b) , v tem maksimumu pa mora očitno veljati $\overline{D}^2 G_t(x_0) \leq 0$, kar je v nasprotju z $\overline{D}^2 G_t \geq 2t > 0$ na (a, b) . Torej je $G_t \leq 0$ za $t > 0$ in imamo oceno

$$F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a) \leq t(x - a)(b - x).$$

Posljimo $t \rightarrow 0$ in dobimo $F(x) \leq F(a) + (F(b) - F(a))(x - a)/(b - a)$.

Točka (b) sledi iz točke (a) le namesto F vzamemo funkcijo $-F$. Točka (c) pa sledi iz obeh ocen, pod (a) in pod (b).

Ker lahko namesto z intervalom $[a, b]$ delamo s poljubnim podintervalom $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, zgornja lema v resnici pove, da je pri pogoju $\overline{D}^2 F \geq 0$ na (a, b) funkcija F na (a, b) konveksna, pri pogoju $\underline{D}^2 F \leq 0$ konkavna in pri pogoju $D^2 F = 0$ linearna (konveksna in konkavna hkrati). Pogoje leme 1 lahko nekoliko omilimo.

Lema 2. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna realna funkcija.

- (a) Če je $\overline{D}^2 F \geq 0$ s.p. na (a, b) in v nobeni točki $x \in (a, b)$ ni $\overline{D}^2 F(x) = -\infty$, je funkcija F na intervalu $[a, b]$ konveksna.
 (b) Če je $\underline{D}^2 F \leq 0$ s.p. na (a, b) in v nobeni točki $x \in (a, b)$ ni $\underline{D}^2 F(x) = +\infty$, je funkcija F na intervalu $[a, b]$ konkavna.
 (c) Če je $D^2 F = 0$ s.p. na (a, b) in sta $\overline{D}^2 F$ in $\underline{D}^2 F$ na (a, b) povsod končni funkciji, je funkcija F na intervalu $[a, b]$ linearna.

Dokaz. (a) Naj bo $E = \{x \in (a, b); \overline{D}^2 F(x) < 0\}$. Potem je $m(E) = 0$ in po lemi 4.1 obstaja naraščajoča absolutno zvezna funkcija g z lastnostjo $g'(x) = +\infty$ za $x \in E$. Pišimo $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$ in za vsak $\epsilon > 0$ definirajmo $F_\epsilon = F + \epsilon f$. Potem je $\overline{D}^2 F_\epsilon \geq \overline{D}^2 F + \epsilon \underline{D}^2 f$.

Ker zaradi naraščanja funkcije g za vsak x velja $\Delta^2 f(x, h) = \int_x^{x+h} g(t)dt + \int_x^{x-h} g(t)dt = \int_0^h [g(x+t) - g(x-t)]dt \geq 0$, je vedno res $\underline{D}^2 f \geq 0$. Za $x \notin E$ pa je res tudi $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$, zato je tedaj $\overline{D}^2 F_\epsilon(x) \geq 0$. Za $x \in E$ pa imamo celo $\overline{D}^2 F_\epsilon(x) = +\infty$. Od tod vidimo, da je vedno $\overline{D}^2 F_\epsilon(x) \geq 0$. Po lemi 1(a) je funkcija F_ϵ na intervalu $[a, b]$ konveksna. Potem je konveksna tudi funkcija F kot limita funkcij F_ϵ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Točko (b) dokažemo, če namesto funkcije F vzamemo funkcijo $-F$, točka (c) pa je posledica točk (a) in (b).

Naslednja lema bo še igrala pomembno vlogo. Rekli ji bomo kar *osnovna lema* Schwarzove teorije.

Lema 3. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija in naj povsod na (a, b) velja $D^2 F = f$, kjer je $f \in L^1([a, b])$ povsod končna funkcija. Tedaj obstajata taki konstanti A in B , da je za vsak x

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s)ds + Ax + B.$$

Dokaz. Dovolj je dokazati lemo za primer realne funkcije F (in f). Označimo $G(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s)ds$ za vsak x . Za vsak n definirajmo $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ ter postavimo $G_n(x) = \int_a^x dt \int_a^t f_n(s)ds$ (če je f omejena funkcija, je od nekega indeksa dalje $f_n = f$ in $G_n = G$).

Velja $G'_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ za vsak $x \in (a, b)$ in $G''_n(x) = f_n(x)$ s.p. $x \in (a, b)$. Oglejmo si razliko $R_n = F - G_n$. Skoraj povsod velja $D^2 R_n = f - f_n \geq 0$. Poleg tega je po Cauchyju za vsak $x \in (a, b)$ res tudi ($0 \leq \theta \leq 1$)

$$\frac{\Delta^2 G_n(x, h)}{h^2} = \frac{G'_n(x + \theta h) - G'_n(x - \theta h)}{2\theta h} = \frac{1}{2\theta h} \int_{x-\theta h}^{x+\theta h} f_n(t)dt \leq n,$$

zato velja tudi

$$\frac{\Delta^2 R_n(x, h)}{h^2} = \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2} - \frac{\Delta^2 G_n(x, h)}{h^2} \geq \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2} - n.$$

Torej je celo $\underline{D}^2 R_n(x) \geq f(x) - n$ za vsak $x \in (a, b)$. Po lemi 2a je funkcija R_n na $[a, b]$ konveksna.

Zaradi $f_n \rightarrow f$ in $|f_n| \leq |f|$ velja po (LIDK) tudi $\int_a^x f_n(t)dt \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ za vsak x in zaradi $|\int_a^t f_n(s)ds| \leq |\int_a^t f(s)ds|$ za vsak t iz istega razloga tudi $G_n(x) = \int_a^x dt \int_a^t f_n(s)ds \rightarrow \int_a^x dt \int_a^t f(s)ds = G(x)$ za vsak x . Torej konvergira $R_n(x) = F(x) - G_n(x) \rightarrow F(x) - G(x)$ za vsak x in je zato tudi $F - G$ konveksna funkcija na $[a, b]$.

Na enak način bi videli, da je tudi $G - F$ konveksna, torej $F - G$ linearna. Dobimo $F(x) = G(x) + Ax + B$ za ustrezni konstanti A in B .

Opomba. Iz osnovne leme 3 v posebnem primeru, ko je $f = 0$, sledi lema 1(c), saj takoj vidimo, da je $A = (F(b) - F(a))/(b - a)$ in $B = F(a) - Aa$. Seveda pa smo v dokazu osnovne leme rezultat leme 1 (in iz nje izvirajoče leme 2) že uporabili. Osnovno lemo bomo na koncu razdelka še malo posplošili.

Oglejmo si še en pomemben pojem v zvezi s simetričnim odvodom.

Definicija 2. Rečemo, da je funkcija F gladka v točki x , če velja

$$\frac{\Delta^2 F(x, h)}{h} = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Za funkcijo F , ki je gladka v točki x , torej velja $\Delta^2 F(x) = o(h)$, ($h \rightarrow 0$). Ker lahko pišemo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h} &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x) - F(x-h)}{h}, \\ \frac{\Delta F(x, h)}{2h} &= \frac{1}{2} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{1}{2} \frac{F(x) - F(x-h)}{h}, \end{aligned} \quad (*)$$

mora za funkcijo F , gladko v točki x , veljati $D_+ F(x) = D_- F(x) \leq \underline{D}F(x)$ in $D^- F(x) = D^+ F(x) \geq \overline{D}F(x)$.

Opombe. 1. Izraz gladkost izhaja iz tega, ker graf gladke realne funkcije ne more imeti kolena v točki x . Če namreč obstajata v točki x levi in desni odvod, morata biti enaka. Po drugi strani gladke funkcije niso nujno odvedljive (zglej: $F(x) = x \cos(1/x)$ za $x \neq 0$ in $F(0) = 0$). Lahko se celo zgodi, da skoraj v nobeni točki nimajo odvoda (glej [2], str. 689).

2. Hitro se tudi vidi, da je v primeru $f \in L^1([a, b])$ nedoločeni integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ gladka funkcija v vsaki točki x , ki je Lebesguova za f (torej s.p. na (a, b)), npr. v vsaki točki zveznosti funkcije f . Tedaj je namreč (*) enako

$$\frac{\Delta^2 F(x, h)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(t) dt;$$

oba člena konvergirata v vsaki Lebesguovi točki proti $f(x)$.

3. Če ima v točki gladkosti x funkcija F lokalni ekstrem (maksimum ali minimum), sta ulomka v (*) različnega predznaka. Zato velja

$$\left| \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h} \right| = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| + \left| \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \right|.$$

Iz $\frac{\Delta^2 F(x, h)}{h} \rightarrow 0$ sledi tedaj konvergenca obeh ulomkov proti 0. Torej je v taki točki funkcija F odvedljiva, njen odvod pa je enak 0.

Kot posledico točke 3 vidimo, da za zvezno funkcijo na $[a, b]$, ki je gladka povsod v (a, b) velja Lagrangev izrek v obliki:

V intervalu (a, b) lahko najdemo točko ξ , v kateri odvod $F'(\xi)$ obstaja in velja $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$.

Dokaz je enak klasičnemu: najprej pokažemo, da mora imeti funkcija $G(x) = F(x) - (F(b) - F(a))(x - a)/(b - a)$ na intervalu (a, b) maksimum ali minimum, in uporabimo točko 3 zgornjih opomb.

Na odprtem intervalu (a, b) smo torej našli točko, v kateri je gladka zvezna funkcija F odvedljiva v navadnem smislu. Kot pove naslednja trditev, je takih točk veliko.

Trditev 1. Če je F zvezna in gladka funkcija na intervalu (a, b) , je F na poljubnem podintervalu $(c, d) \subset (a, b)$ odvedljiva v kontinuum mnogo točkah .

Dokaz. Če je F linearna, je to jasno. Če ni linearna, lahko najdemo v (c, d) kontinuum mnogo $x \in (c, d)$ z lastnostjo, da so tudi nakloni sekant skozi $(c, F(c))$ in $(x, F(x))$ različni. Po Lagrangevem izreku dobimo tako kontinuum mnogo različnih točk ξ_x v katerih obstaja $F'(\xi_x)$.

Definicija. Rečemo, da je realna funkcija f *Darbouxova* (oziroma ima *Darbouxovo lastnost*) na množici E , če za poljubni točki $\alpha, \beta \in E$ in za vsako c , ki je med $f(\alpha)$ in $f(\beta)$, obstaja točka $\gamma \in E \cap [\alpha, \beta]$ z lastnostjo $f(\gamma) = c$.

Vsaka zvezna funkcija, definirana na $[a, b]$, je tam Darbouxova, kot je dobro znano iz osnovne analize. So pa Darbouxove tudi nekatere nezvezne funkcije.

Trditev 2. Če je realna funkcija F zvezna in gladka na intervalu (a, b) , je njen odvod F' Darbouxova funkcija na množici točk E , kjer obstaja. V posebnem primeru, je Darbouxova na (a, b) vsaka funkcija f , ki je povsod na (a, b) odvod neke zvezne funkcije.

Dokaz. Naj bo $\alpha, \beta \in E$ in $A = F'(\alpha)$, $B = F'(\beta)$. Naj bo C poljubno število med A in B , npr. $A < C < B$. Pokazati moramo, da obstaja točka $\gamma \in (\alpha, \beta)$, v kateri odvod F' obstaja in je $F'(\gamma) = C$.

Definirajmo $G(x) = F(x) - Cx$ in $g(x) = \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$ pri tako majhnem $h > 0$, da je $0 < h < b - \beta$, $g(\alpha) = \frac{G(\alpha+h)-G(\alpha)}{h} = \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} - C < 0$, $g(\beta) = \frac{G(\beta+h)-G(\beta)}{h} = \frac{F(\beta+h)-F(\beta)}{h} - C > 0$ in $g(\beta - h) = \frac{G(\beta)-G(\beta-h)}{h} = \frac{F(\beta)-F(\beta-h)}{h} - C > 0$.

Naj bo $x_0 = \inf\{x \in [\alpha, \beta]; g(x) = 0\}$ (množica ni prazna zaradi zveznosti funkcije g). Zaradi izbire h je $\alpha < x_0 < \beta - h$, torej $(x_0, x_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$. Iz $g(x_0) = 0$ sledi $G(x_0 + h) = G(x_0)$. Če je $\gamma \in (x_0, x_0 + h)$ točka, v kateri ima G maksimum ali minimum, je $G'(\gamma) = 0$ oziroma $F'(\xi) = C$. Med drugim odvod v točki γ obstaja, torej je $\gamma \in E$ in hkrati v (α, β) . Dokaz je končan.

Vrnimo se k vprašanju, kdaj lahko funkcijo rekonstruiramo iz njenega drugega Schwarzovega odvoda. Za posplošitev osnovne leme potrebujemo najprej naslednjo posplošitev leme 2.

Lema 4. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna realna funkcija in $E \subset (a, b)$ števna podmnožica točk, v katerih je funkcija F gladka in velja $\overline{D}^2 F(x) > -\infty$, $\underline{D}^2 F(x) < +\infty$ za $x \notin E$.

- (a) Če je $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ s.p. na $[a, b]$, je F na intervalu $[a, b]$ konveksna.
- (b) Če je $\underline{D}^2 F(x) \leq 0$ s.p. na $[a, b]$, je F na intervalu $[a, b]$ konkavna.
- (c) Če je $D^2 F(x) = 0$ s.p. na $[a, b]$, je F na intervalu $[a, b]$ linearna.

Dokaz. Dokažimo točko (a). Množica $E_0 = \{x \in [a, b]; \overline{D}^2 F(x) < 0\}$ ima mero 0, zato obstaja naraščajoča absolutno zvezna funkcija g z lastnostjo $g'(x) = +\infty$ za $x \in E_0$. Za vsak $x \in [a, b]$ definirajmo $f(x) = \int_a^x f(t)dt$. Izberimo $\epsilon > 0$ in postavimo $F_\epsilon(x) = F(x) + \epsilon(x^2/2 + f(x))$ ter $E_\epsilon = \{x \in [a, b]; \overline{D}^2 F_\epsilon(x) \leq 0\}$. Če uporabimo Cauchyjev izrek, lahko ocenimo ($0 \leq \theta \leq 1$)

$$\frac{\Delta^2 f(x, h)}{h^2} = \frac{f'(x + \theta h) - f'(x - \theta h)}{2\theta h} = \frac{g(x + \theta h) - g(x - \theta h)}{2\theta h} \geq 0$$

zaradi naraščanja funkcije g . Torej je vedno $\underline{D}^2 f \leq 0$. Za $x \notin E_0$, je $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$, zato $\overline{D}^2 F_\epsilon(x) \geq \epsilon > 0$, torej $x \notin E_0$. Vidimo, da velja $E_\epsilon \subset E_0$. Poleg tega je tudi $E_\epsilon \subset E$. Če bi namreč obstajal tak $x \in E_\epsilon$ (torej tudi v E_0), da $x \notin E$, bi dobili protislovje $0 \geq \overline{D}^2 F_\epsilon(x) \geq \overline{D}^2 F(x) + \epsilon(1 + \underline{D}^2 f(x)) = \overline{D}^2 F(x) + \epsilon(1 + g'(x)) = +\infty$, ker je $g'(x) = \infty$ zaradi $x \in E_0$ in $\overline{D}^2 F(x) > -\infty$ zaradi $x \notin E$.

Če pokažemo, da je funkcija F_ϵ konveksna na $[a, b]$, bo v limiti, ko pošljemo ϵ proti 0, tam konveksna tudi funkcija F . Pa denimo, da F_ϵ ni konveksna funkcija. Potem obstaja podinterval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, za katerega je

$$G(x) = F_\epsilon(x) - F_\epsilon(\alpha) - \frac{F_\epsilon(\beta) - F_\epsilon(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) > 0$$

za $\alpha < x < \beta$. Če je r blizu $\frac{F_\epsilon(\beta) - F_\epsilon(\alpha)}{\beta - \alpha}$, obstaja γ blizu β , da je

$$G_r(x) = F_\epsilon(x) - F_\epsilon(\alpha) - r(x - \alpha) > 0$$

za $\alpha < x < \gamma$. Naj bo $x_r = \sup\{x \in [\alpha, \gamma]; G_r \text{ ima maksimum v } x\}$ (množica ni prazna). Tedaj je $\alpha < x_r \leq \gamma$, $G_r(x) \leq G_r(x_r)$ za $\alpha \leq x \leq x_r$ in $G_r(x) < G_r(x_r)$ za $x_r < x \leq \gamma$. V vsakem maksimumu, in zato tudi v x_r , je $\overline{D}^2 F_\epsilon(x_r) = \overline{D}^2 G_r(x_r) \leq 0$. Torej je $x_r \in E$. Zaradi gladkosti funkcije F_ϵ v točki x_r je tam gladka tudi funkcija G_r , torej odvedljiva in velja $G_r'(x_r) = 0$. Se pravi, da je $F_\epsilon'(x_r) = r$. To velja za vsak r , od koder vidimo, da je preslikava $r \mapsto x_r$ injektivna v okolici točke $\frac{F_\epsilon(\beta) - F_\epsilon(\alpha)}{\beta - \alpha}$, kar pa je v nasprotju s števnostjo množice E .

Točko (b) dokažemo, če namesto F vzamemo $-F$, točka (c) pa sledi iz (a) in (b).

Lema 5. Naj bosta f in F realni funkciji na $[a, b]$, $f \in L^1([a, b])$ končna povsod razen morda na števeni množici E . Če je F zvezna na $[a, b]$, gladka v točkah iz E in je $\underline{D}^2 F(x) \leq f(x) \leq \overline{D}^2 F(x)$ za $x \notin E$, velja za vsak $x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s) ds + Ax + B.$$

Dokaz. Kot v dokazu leme 3 vpeljimo funkcije G, f_n, G_n in R_n , ki imajo iste osnovne lastnosti kot prej. Poleg tega velja $\overline{D}^2 R_n = \overline{D}^2 F - f_n \geq \overline{D}^2 F - f \geq 0$ s.p. na $[a, b]$. Funkcija G_n je gladka povsod na (a, b) kot integral zvezne funkcije, funkcija F pa je po predpostavki gladka na množici E . Torej je $R_n = F - G_n$ gladka funkcija na E . Poleg tega je zaradi $\frac{\Delta^2 R_n(x, h)}{h^2} \geq \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2} - n$ res $\overline{D}^2 R_n(x) \geq \overline{D}^2 F(x) - n$, torej $\overline{D}^2 R_n(x) \geq f(x) - n > -\infty$ za $x \notin E$. Lahko uporabimo lemo 4 in ugotovimo, da je funkcija $R_n = F - G_n$ konveksna na $[a, b]$. V limiti ($n \rightarrow \infty$) je potem konveksna na $[a, b]$ tudi funkcija $F - G$.

Zamenjajmo f z $-f$ in F z $-F$, tako da moramo potem zamenjati tudi G z $-G$. Za par $-f, -F$ veljajo isti pogoji, kot za par f, F , zato na isti način dokažemo, da je konveksna tudi funkcija $(-F) - (-G) = G - F$. Torej mora biti funkcija $F - G$ linearna, kar je bilo treba dokazati.

Lema 6. Naj bo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija in naj povsod, razen morda na števeni množici E točk, v katerih je F gladka funkcija, velja $D^2 F = f$, kjer je $f \in L^1([a, b])$ s končnimi vrednostmi $f(x)$ za $x \notin E$. Tedaj obstajata taki konstanti A in B , da je za vsak x

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s) ds + Ax + B.$$

Dokaz. Realni in imaginarni del funkcij f in F zadoščajo pogojem leme 5.

Naslednjo posledico že poznamo (glej izrek 5.4).

Posledica. Naj bo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zvezna funkcija, za katero obstaja končen odvod $g'(x)$ povsoda razen na števeni množici točk $x \in (a, b)$ in je $g' \in L^1([a, b])$. Tedaj je g absolutno zvezna funkcija in za vsak x velja:

$$\int_a^x g'(t) dt = g(x) - g(a).$$

Dokaz. Za vsak $x \in (a, b)$ označimo $f(x) = g'(x)$ in $F(x) = \int_a^x g(t) dt$. Potem je $D^2 F(x) = F''(x) = g'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a, b)$ razen na neki števeni množici E . Kot integral zvezne funkcije je F gladka povsod. Ker je $f \in L^1([a, b])$ in vrednost $f(x) = g'(x)$ končna za $x \notin E$, lahko uporabimo lemo 6 in najdemo $F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s) ds + Ax + B$. Potem pa je $g(x) = F'(x) = \int_a^x f(s) ds + A = \int_a^x g'(s) ds + A$. Takoj se vidi, da je $A = g(a)$.

II. poglavje : FOURIEROVE VRSTE

1. Definicija in osnovne lastnosti Fourierovih koeficientov

Odslej bo osnovni prostor, ki ga bomo obravnavali, prostor $L^1([-\pi, \pi])$ vseh (ekvivalenčnih razredov) integrabilnih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$. To je Banachov prostor z normo $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Pogosto bomo funkcijo z intervala $[-\pi, \pi]$ periodično (s periodo 2π) razširili na vso realno os. Potem ni več pomembno po katerem intervalu dolžine 2π računamo normo. Denimo, da je npr. $2k\pi \leq a < 2(k+1)\pi$ in zato $0 \leq b = a - 2k\pi < 2\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Potem je (zaradi periodičnosti funkcije f)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} |f(t)| dt &= \int_0^{2\pi} |f(a+s)| ds = \int_0^{2\pi} |f(b+s)| ds = \int_b^{b+2\pi} |f(t)| dt = \\ &= \int_b^{2\pi} |f(t)| dt + \int_{2\pi}^{2\pi+b} |f(t)| dt = \int_b^{2\pi} |f(t)| dt + \int_0^b |f(t)| dt = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt = \\ &= \int_0^{\pi} |f(t)| dt + \int_{\pi}^{2\pi} |f(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Prostor bomo zato pogosto označili kar z L^1 (brez oznake intervala).

Opomba. Vemo, da je množica zveznih funkcij $C([-\pi, \pi])$ gosta v $L^1([-\pi, \pi])$ (posledica Luzinovega izreka iz razdelka 1 v prvem poglavju). Toda periodično razširjena funkcija $g \in C([-\pi, \pi])$ ni več nujno zvezna na vsej realni osi \mathbb{R} . To je res natanko takrat, ko je $g(-\pi) = g(\pi)$. Takim funkcijam bomo rekli zvezne periodične funkcije in njihov prostor označili kar s C . Pri tem je $C \subset L^1$ gosta podmnožica. Če je namreč $f \in L^1$ in $\epsilon > 0$, obstaja $g_1 \in C([-\pi, \pi])$ z lastnostjo $\|f - g_1\|_1 < \epsilon/2$. V splošnem ne velja $g_1(-\pi) = g_1(\pi)$, toda g_1 lahko na množici s poljubno majhno mero v bližini točk $-\pi$ in π popravimo do periodične zvezne funkcije g , za katero je npr. $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, tako da je tudi $\|g - g_1\|_1 < \epsilon/2$. Potem je $g \in C$ blizu f . Podobno definiramo tudi množico AC absolutno zveznih periodičnih funkcij, Lipschitzovih periodičnih funkcij Lip , funkcij z omejeno variacijo BV , množico C^1 zvezno odvedljivih periodičnih funkcij (tudi $f'(-\pi) = f'(\pi)$) itd.

Definicija. *Fourierove koeficiente integrabilne funkcije $f \in L^1$ lahko definiramo v kompleksni obliki:*

$$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ali v realni obliki:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Če je funkcija f realna, so števila a_n, b_n res realna. "Kompleksne" in "realne" koeficiente povezujejo formule: $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ oziroma $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ ($n \geq 0$).

Zaporedje $\hat{f} = (\hat{f}(n))$ Fourierovih koeficientov imenujemo *Fourierova transformiranka* funkcije $f \in L^1$, prireditev $f \mapsto \hat{f}$ pa *Fourierova transformacija*.

Definicija. *Fourierova vrsta* za funkcijo $f \in L^1$ v točki $x \in \mathbb{R}$ je definirana v kompleksni obliki s predpisom:

$$S(f, x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

ali v realni obliki s predpisom

$$S(f, x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Na kratko (brez navajanja točke x) bomo Fourierovo vrsto funkcije f označevali kar z $S(f)$. Delne vsote vrste $S(f, x)$ so po definiciji v kompleksni obliki vedno simetrične:

$$S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

kar ustreza delnim vsotam v realni obliki:

$$S_n f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Poudariti je treba, da je prirejanje Fourierove vrste dani integrabilni funkciji zaenkrat zgolj formalno. O konvergenci vrste v tem ali onem smislu bomo govorili kasneje. Fourierova vrsta je poseben primer splošne trigonometrične vrste, kjer so koeficienti c_n (oziroma a_n, b_n) poljubni. Delna vsota vsake trigonometrične vrste je trigonometrični polinom stopnje n .

Trigonometričnemu polinomu $f(x) = \sum_{|j| \leq n} c_j e^{ijx} = a_0/2 + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx$ pripadajoča Fourierova vrsta se ujema s polinomom: $S(f, x) = f(x)$, saj je

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{|j| \leq n} c_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} e^{-ikt} dt = \sum_{|j| \leq n} c_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x} dt = c_k,$$

če je $|k| \leq n$, in 0 sicer. Torej so delne vsote enake $S_k f(x) = f(x)$ za $k \geq n$.

ZGLEDI. V vseh naslednjih primerih (razen pod točko f) naj bo funkcija f definirana na intervalu $[-\pi, \pi]$ z danim predpisom:

a) $f(x) = \text{sign}(x)$, $S(f, x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

b) $f(x) = x$, $S(f, x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$;

c) $f(x) = (\pi \text{sign}(x) - x)/2$, $S(f, x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;

d) $f(x) = |x|$, $S(f, x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

e) $f(x) = x^2$, $S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$;

f) $f(x) = x^2$ na $[0, 2\pi]$, $S(f, x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right)$;

g) $f(x) = e^{iax}$, $a \notin \mathbb{Z}$, $S(f, x) \sim \frac{\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$ (če $a \in \mathbb{Z}$, je $S(f, x) \sim e^{iax}$).

Ogledali si bomo najbolj osnovne lastnosti Fourierovih koeficientov, na koncu pa še pomemben izrek o enoličnosti.

Trditev 1. Naj bosta $f, g \in L^1$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja:

- (a) $(\alpha f + \beta g)^\wedge(n) = \alpha \widehat{f}(n) + \beta \widehat{g}(n)$,
- (b) $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(-n)$, če $g(x) = \overline{f(x)}$ za vsak x , in $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(-n)$, če $g(x) = f(-x)$ za vsak x ,
- (c) $\widehat{g}(n) = e^{ina} \widehat{f}(n)$, če $g(x) = f(x+a)$ za vsak x in je $a \in \mathbb{R}$,
- (d) $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n-m)$, če $g(x) = e^{imx} f(x)$ za vsak x in je $m \in \mathbb{Z}$,
- (e) $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(k)$ za $n = km$ in 0 za $n/m \notin \mathbb{Z}$, če $g(x) = f(mx)$ za vsak x in je $m \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Točke (a),(b),(c),(d) so trivialne. Dokažimo točko (e). Če je $g(x) = f(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, in če označimo $\omega = e^{-2in\pi/m}$, dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(mx) e^{-inx} dx = \frac{1}{2m\pi} \int_0^{2m\pi} f(t) e^{-int/m} dt = \\ &= \frac{1}{2m\pi} \sum_{j=1}^m \int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} f(t) e^{-int/m} dt = \frac{1}{2m\pi} \sum_{j=1}^m e^{-2i(j-1)n\pi/m} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins/m} ds = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega^{j-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins/m} ds. \end{aligned}$$

Ker je $\omega^m = 1$, je $\sum_{j=1}^m \omega^{j-1} = 0$, če $n \not\equiv 0 \pmod{m}$, in $\sum_{j=1}^m \omega^{j-1} = m$, če $n \equiv 0 \pmod{m}$. Torej je $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(k)$, če $n = km$, in $\widehat{g}(n) = 0$, če $n \not\equiv 0 \pmod{m}$.

- Trditev 2.** (a) Če je $f \in L^1$, za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$, se pravi $\widehat{f}(n) = O(1)$, ($|n| \rightarrow \infty$).
- (b) Če je $f \in BV$, za vsak $n \neq 0$ velja $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi|n|} V_{[-\pi, \pi]}(f)$, se pravi $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$, ($|n| \rightarrow \infty$).
- (c) Če je $f \in AC$, za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n)$, se pravi $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$, ($|n| \rightarrow \infty$).

Dokaz. (a) Iz definicije Fourierovega koeficienta v točki n dobimo oceno $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$. Če je $f \geq 0$, velja celo $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$.

(b) Z uporabo formule za integracijo po delih v Riemann-Stieltjesovem integralu (trditev 3.5) je

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d(-e^{-int}/in) = \\ &= -\frac{e^{-int}}{2in\pi} f(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} df = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} df, \end{aligned}$$

od koder sledi $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi|n|} V_{[-\pi, \pi]}(f)$.

(c) Kot prej dobimo za $n \neq 0$ enakost

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} df = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt = \widehat{f}'(n)/(in)$$

oziroma $\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n)$ (glej trditev 3.6). Za $n = 0$ pa uporabimo periodičnost funkcije f in (OIIR) za absolutno zvezne funkcije:

$$\widehat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Torej je $|n\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}'(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_1$ in zato $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$, ($|n| \rightarrow \infty$).

Opomba. Iz Riemann-Lebesguove leme bomo videli, da v točkah (a) in (c) velja celo $\widehat{f}(n) = o(1/|n|)$, ($|n| \rightarrow \infty$). Vse funkcije iz prejšnjega zgleda imajo omejeno variacijo in tudi res se lahko prepričamo, da povsod velja $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$. Funkciji pod (d) in (e) sta zvezni periodični, celo Lipschitzovi in torej v AC . Res velja $\widehat{f}(n) = o(1/|n|)$.

Posledica (točke (c)). Če je $f \in C^1$ in $f' \in AC$, velja $\widehat{f''}(n) = -n^2\widehat{f}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, torej $\widehat{f}(n) = O(1/n^2)$, ($|n| \rightarrow \infty$). Fourierova vrsta tedaj enakomerno in absolutno konvergira proti zvezni funkciji $g \in C$ in velja $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ (vrsto smemo zaradi enakomerne konvergenca členoma integrirati). Kasneje bomo videli, da od tod sledi $g = f$.

Prav tako bi pri pogoju $f \in C^m$ in $f^{(m)} \in AC$ spoznali $\widehat{f^{(m+1)}}(n) = (in)^{m+1}\widehat{f}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, torej $\widehat{f}(n) = O(1/n^{m+1})$, ($|n| \rightarrow \infty$).

Definicija (Lebesguov modul zveznosti). Za $f \in L^1$ definiramo premik za h v levo z $f_h(t) = f(t+h)$ in *Lebesguov (integralski) modul zveznosti* z

$$\omega_1 f(h) = \|f_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_h(t) - f(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)| dt.$$

Trditev 3. Za $f \in L^1$ je $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_1 f(h) = 0$.

Dokaz. Če je $g \in C$, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|h| < \delta$ sledi $|g(t+h) - g(t)| < \epsilon/(2\pi)$ za vsak $t \in [-\pi, \pi]$ (enakomerna zveznost). Torej tudi $\omega_1 g(h) < \epsilon$.

Če je $f \in L^1$, lahko f aproksimiramo s funkcijo $g \in C$, tako da je $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Tedaj je $\|f_h - g_h\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - g(t+h)| dt = \int_{-\pi+h}^{\pi+h} |f(s) - g(s)| ds = \int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - g(s)| ds = \|f - g\|_1 < \epsilon$ in velja $\omega_1 f(h) = \|f_h - f\|_1 \leq \|f_h - g_h\|_1 + \|g_h - g\|_1 + \|g - f\|_1 < \omega_1 g(h) + 2\epsilon < 3\epsilon$, če $|h| < \delta$. Torej $\omega_1 f(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

Trditev 4. Za $f \in L^1$ in vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\omega_1 f(\pi/n)}{4\pi}$.

Dokaz. $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\pi/n)e^{-int} dt$, torej $2\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t+\pi/n)]e^{-int} dt$ oziroma $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t+\pi/n)| dt = \frac{1}{4\pi} \omega_1 f(\pi/n)$.

Posledica (Riemann-Lebesguova lema): $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Zaradi Riemann-Lebesguove leme velja naslednje: Če je $f \in AC$, je $\widehat{f}(n) = o(1/n)$, ($|n| \rightarrow \infty$). Če je $f \in C^1$, $f' \in AC$, je $\widehat{f}(n) = o(1/n^2)$, ($|n| \rightarrow \infty$) itd.

Izrek 1 (Izrek o enoličnosti). Če je $f \in L^1$ in velja $\widehat{f}(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, je $f = 0$ v prostoru L^1 , torej $f = 0$ s.p.

Dokaz. V dokazu se bomo naslonili na dejstvo, da je množica trigonometričnih polinomov gosta v prostoru C (to bomo spoznali kasneje). Za zvezno funkcijo $f \in C$ iz $\widehat{f}(n) = 0$ za vsak n sledi $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p(t) dt = 0$ za vsak trigonometrični polinom p . Zaradi gostote teh polinomov (in zveznosti integrala v supremum normi) dobimo $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)} dt = 0$, torej $f(t) = 0$ za vsak t .

Če pa je $f \in L^1$, definirajmo $F(x) = c + \int_{-\pi}^x f(t) dt$ za vsak x , kjer je $c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t f(t) dt$. Ta funkcija je zvezna in periodična ($F(\pi) = c + 2\pi\widehat{f}(0) = c = F(-\pi)$). Z integracijo po delih pa se lahko takoj prepričamo, da velja tudi zanjo $\widehat{F}(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Po prvem delu dokaza sledi $F(x) = 0$ za vsak x in zato tudi $f(x) = F'(x) = 0$ skoraj za vsak x . Torej je $f = 0$ v prostoru L^1 .

Posledica. Če sta $f, g \in L^1$ in velja $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$, je $f = g$ v prostoru L^1 , torej $f = g$ s.p.

Opomba. Iz Riemann-Lebesguove leme vidimo, da je Fourierova transformacija $f \mapsto \widehat{f}$ linearna preslikava iz L^1 v $c_0(\mathbb{Z})$ (dvostranska zaporedja, ki konvergirajo proti 0 pri pogoju $|n| \rightarrow \infty$). Zaradi trditve 2a je omejena (zvezna). Izrek o enoličnosti pove, da je injektivna. Ni pa surjektivna. Obstajajo namreč zaporedja (c_n) , $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$), ki niso zaporedja Fourierovih koeficientov nobene funkcije $f \in L^1$ (obstajajo torej trigonometrične vrste s koeficienti $c_n \rightarrow 0$, ki niso Fourierove). Konkreten primer $(\sum_n \sin nx / \ln n)$ bomo spoznali kasneje pri sinusnih vrstah (glej razdelek II.9). Da Fourierova transformacija ne more biti surjektivna sledi tudi iz izreka o odprti preslikavi iz funkcionalne analize (glej dodatek A). To bomo videli že v naslednjem razdelku (glej opombe za trditvijo 2.2).

2. Konvolucija in sumacijska jedra

Prostor L^1 bomo opremili s pomembno operacijo (konvolucijo), definirali homogene Banachove prostore in raziskali lastnosti Dirichletovega in Fejérjevega jedra.

Definicija. Za $f, g \in L^1$ definiramo *konvolucijo* $f * g \in L^1$ s predpisom

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Ali konvolucija sploh obstaja? Ali je v L^1 ? Prepričajmo se, da je dobro definirana in integrabilna. Najprej vidimo, da je $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$ merljiva funkcija dveh spremenljivk. Poleg tega velja

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)g(t)|dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|dx \right) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Po Fubini-Tonellijevem izreku potem obstaja $f * g$ skoraj povsod na $[-\pi, \pi]$, je merljiva funkcija, integrabilna, torej v L^1 , periodična in velja

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |(f * g)(x)|dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)||g(t)|dt \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|dx \right) dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Naštejmo nekaj preprostih lastnosti konvolucije:

- (a) $f * g = g * f$ (takoj sledi iz definicije z zamenjavo integracijske spremenljivke $t \mapsto x-t$),
- (b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (sledi iz definicije z uporabo Fubinijevega izreka),
- (c) $(f * g)^\wedge(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ za vsak n .

Dokažimo zgolj točko (c). Uporabili bomo definicijo Fourierovih koeficientov in Fubinijev izrek. Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ imamo:

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dtdx = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}dx \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n). \end{aligned}$$

Točki (a) in (b) lahko takoj dokažemo tudi z uporabo točke (c) in izreka o enoličnosti.

Izrek 1. *Prostor L^1 je za vsoto in konvolucijo komutativna Banachova algebra brez enote.*

Dokaz. Algebraične lastnosti so jasne. Videli smo, da velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 / (2\pi)$. Poln prostor L^1 postane tako Banachova algebra (v ekvivalentni normi $\|f\| = \|f\|_1 / (2\pi)$). Nima pa enote e , torej $e * f = f$ za vsak $f \in L^1$, sicer bi po točki (c) zgornjih lastnosti imeli $\hat{e}(n)\hat{f}(n) = \hat{f}(n)$ za vsak $f \in L^1$ in vsak $n \in \mathbb{Z}$. Če bi pri danem n izbrali funkcijo $f(x) = e^{inx}$, bi imeli $\hat{f}(n) = 1$ in zato $\hat{e}(n) = 1$. To bi veljalo za vsak n , kar je v nasprotju z Riemann-Lebesguovo lemo.

Opombe. 1. Denimo, da sta $f, g \in L^1$ in da je g celo zvezna funkcija, se pravi $g \in C$. Potem je tudi konvolucija $f * g$ zvezna funkcija. To sledi iz ocene

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x')| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |g(x-t) - g(x'-t)| dt \leq \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \epsilon,$$

ki velja, če je $|x - x'| < \delta$. Torej je $f * g \in C$. Med drugim to velja, če je $f \in L^p$ in $g \in C$ za vsak p z lastnostjo $1 \leq p \leq \infty$, saj je tedaj $L^p \subset L^1$.

2. Če je $f \in L^\infty$, je $f * g \in C$ celo za vsak $g \in L^1$. V tem primeru namreč lahko g po normi v L^1 aproksimiramo z zveznimi funkcijami h , za katere je $f * h \in C$ in velja:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(x')| &\leq |((f * (g - h))(x))| + |(f * h)(x) - (f * h)(x')| + \\ &+ |(f * (h - g))(x')| \leq 2\|f\|_\infty \|g - h\|_1 + |(h * g)(x) - (h * g)(x')| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty + \epsilon. \end{aligned}$$

3. Če je $f \in L^p$, $g \in L^q$, kjer sta p in q konjugirana indeksa, torej $1/p + 1/q = 1$ velja $f * g \in L^1$. Pri tem velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q / (2\pi)$. Zdaj moramo uporabiti Hölderjevo neenakost (pri poljubnem x):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)g(t)| dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^q dt \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q,$$

od koder z integracijo po x dobimo zeleno neenakost.

Definicija. *Homogeni Banachov prostor* je tak linearni podprostor $B \subset L^1$, opremljen z normo $\|\cdot\|_B$, za katerega velja:

- (i) B je Banachov prostor v normi $\|\cdot\|_B \geq \frac{1}{2\pi} \|\cdot\|_1$,
- (ii) B vsebuje vse trigonometrične polinome,
- (iii) Hkrati s funkcijo f vsebuje B tudi premaknjeno funkcijo f_s za vsak s , pri čemer je $\|f_s\|_B = \|f\|_B$, preslikava $s \mapsto f_s$ pa je zvezna v normi $\|\cdot\|_B$.

Zgledi za homogene prostore v L^1 so C , C^n , AC , L^p za $1 \leq p < \infty$. Prostor L^∞ pa npr. ni homogen, ker preslikava $s \mapsto f_s$ ni zvezna v normi $\|\cdot\|_\infty$. Iz istega razloga tudi prostor BV ni homogen.

Konvolucijo lahko definiramo tudi, če je ena funkcija v homogenem Banachovem prostoru B , druga pa v L^1 , vendar moramo pri tem ravnati drugače.

Naj bo najprej $f \in B$ in $g \in C$. Potem lahko definiramo naslednji Riemannov integral zvezne funkcije z vrednostmi v Banachovem prostoru B (glej dodatek, trditev A4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t} g(t) dt = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_{-t_k} g(t_k) (t_k - t_{k-1}).$$

Zanj velja ocena (glej dodatek, trditev A4)

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} f_{-t} g(t) dt \right\|_B \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f_{-t}\|_B |g(t)| dt = \|f\|_B \|g\|_1.$$

Če je $B = C$ in $f, g \in C$, velja $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t}g(t)dt = 2\pi(f * g)$, saj je $x \mapsto f(x)$ zvezen linearen funkcional na prostoru C in je zato

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t}g(t)dt(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x - t_k)g(t_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)dt = 2\pi(f * g)(x).$$

Če pa je $B = L^1$ in $f \in L^1, g \in C$, lahko f po normi v L^1 poljubno natančno aproksimiramo z zvezno funkcijo h . Pri tem se konvolucija $f * g$ poljubno natančno aproksimira s konvolucijo $h * g$ in integral $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t}g(t)dt$ z integralom $\int_{-\pi}^{\pi} h_{-t}g(t)dt$, tako da velja enakost $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t}g(t)dt = 2\pi(f * g)$ tudi za $f \in L^1$. Zdaj pa naj bo res $f \in B$ in $g \in C$. Ker je $B \subset L^1$, obstaja zaradi točke (i) v definiciji homogenega Banachovega prostora integral $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-t}g(t)dt \in B$ tudi kot integral v L^1 , ki se po prejšnji ugotovitvi ujema z $2\pi(f * g)$. Vidimo, da je v tem primeru $f * g \in B$ in da velja ocena $\|f * g\|_B \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_B\|g\|_1$.

Iz zadnje ocene sledi, da je preslikava $g \mapsto f * g$ omejen linearen operator iz prostora C , opremljenega z normo $\|\cdot\|_1$, v Banachov prostor B . Ker je C gost linearen podprostor v L^1 , lahko ta operator po zveznosti razširimo na ves prostor L^1 , pri čemer velja zgornja ocena za vsak $g \in L^1$. Dokazali smo naslednjo trditev (ki pove, da je homogeni Banachov prostor B Banachov modul nad Banachovo algebro L^1 s konvolucijo kot modulskim množenjem).

Trditev 1. *Naj bo B homogen Banachov prostor, $f \in B$ in $g \in L^1$. Tedaj je tudi $f * g \in B$ in velja $\|f * g\|_B \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_B\|g\|_1$.*

Kot zgled za uporabo konvolucije pokažimo, da lahko z njo izrazimo delne vsote dane Fourierove vrste $S(f, x)$. Upošteva je definicijo Fourierovih koeficientov lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt. \end{aligned}$$

Torej je $S_n f(x) = (f * D_n)(x)$, kjer smo z D_n označili ti. *Dirichletovo jedro*:

$$D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $D_n(0) = 2n + 1$. Dirichletovo jedro je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje n). Za njegove Fourierove koeficiente očitno velja $\hat{D}_n(k) = 1$ za $|k| \leq n$ in $\hat{D}_n(k) = 0$ za $|k| > n$.

Poleg Dirichletovega jedra včasih vpeljemo tudi *konjugirano Dirichletovo jedro*:

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k| \leq n} (-i \operatorname{sign} k) e^{ikx} = 2 \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $\tilde{D}_n(0) = 0$. Potem je (podobno kot prej)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n f(x) &= (f * \tilde{D}_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{D}_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq n} (-i \operatorname{sign} k) e^{ik(x-t)} dt = \\ &= \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} (-i \operatorname{sign} k) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} (-i \operatorname{sign} k) \hat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

delna vsota ti. *konjugirane vrste* $\tilde{S}(f, x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k) \hat{f}(k) e^{ikx}$.

Ta vrsta ni nujno Fourierova, se pravi, ne obstaja nujno integrabilna funkcija \tilde{f} , katere Fourierovi koeficienti so enaki $\tilde{f}(n) = (-i \operatorname{sign} n) \hat{f}(n)$ za vsak n . Kadar obstaja, rečemo funkciji \tilde{f} *konjugirana funkcija* k funkciji f .

Zgled. Naj bo Fourierova vrsta *kosinusna* (tj. zapisana v realni obliki, kjer so vsi koeficienti $b_k = 0$), se pravi, $S(f, x) \sim a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$. Tedaj je konjugirana vrsta ravno *sinusna* (z istimi koeficienti): $\tilde{S}(f, x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Kasneje bomo npr. spoznali, da je vrsta $\sum_{k=2}^{\infty} \cos kx / \ln k$ Fourierova, njej konjugirana vrsta $\sum_{k=2}^{\infty} \sin kx / \ln k$ pa ni Fourierova.

Trditev 2. (a) $\|D_n\|_1 = \frac{8}{\pi} \ln n + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$),
 (b) $\|\tilde{D}_n\|_1 = 4 \ln n + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. (a) Najprej vidimo, da je $\|D_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\sin(x/2)} dx$. Zapišimo D_n v drugi obliki:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = \sin nx \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \cos nx = 2 \frac{\sin nx}{x} + g_n(x),$$

kjer je $g_n(x) = (\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{x}) \sin nx + \cos nx$ zvezna in zato integrabilna funkcija. Ocenimo $\|g_n\|_1 \leq 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{x}| dx = c$. Iz $2 \frac{|\sin nx|}{|x|} - |g_n(x)| \leq |D_n(x)| \leq 2 \frac{|\sin nx|}{|x|} + |g_n(x)|$ sledi

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x|} dx - c \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x|} dx + c$$

oziroma $\|D_n\|_1 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x|} dx + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Od prej, iz zgleada ob koncu razdelka 1.1, pa vemo, da je $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x|} dx = (4/\pi) \ln n + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$), torej je

$$\|D_n\|_1 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x|} dx + O(1) = \frac{8}{\pi} \ln n + O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(b) Podobno kot v točki (a) lahko tudi sedaj zapišemo

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} (1 - \cos nx) + \sin nx = \frac{4}{x} \sin^2 \frac{nx}{2} + \tilde{g}_n(x),$$

kjer je $\tilde{g}_n(x) = 2(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{x}) \sin^2 \frac{nx}{2} + \sin nx$ zvezna in zato integrabilna funkcija z normo, manjšo od $2c$. Torej

$$\|\tilde{D}_n\|_1 = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nx/2)}{x} dx + O(1) = 8 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nx/2)}{x} dx + O(1) = 8 \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t} dt + O(1).$$

Ker je

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t+k\pi} dt$$

in hkrati (z Eulerjevo konstanto C)

$$\begin{aligned} C + \ln n \leq H_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t/2) dt \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t+k\pi} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi} \sin^2(t/2) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t/2) dt \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2 \int_0^{\pi} \sin^2(t/2) dt + H_{n-1} \leq C_1 + \ln n, \end{aligned}$$

dobimo $2 \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t} dt = \ln n + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Torej je $\|\tilde{D}_n\|_1 = 4 \ln n + O(1)$ ($n \rightarrow \infty$), kar je bilo treba pokazati.

Opombe. 1. Konstante $L_n = \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1$ običajno imenujemo *Lebesguove konstante*. Zanje torej velja:

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Ker $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), hkrati pa je $\|\hat{D}_n\|_\infty = 1$ za vsak n , ne obstaja konstanta $M > 0$, da bi za vsak n veljalo $\|D_n\|_1 \leq M \|\hat{D}_n\|_\infty$. To pomeni, da Fourierova transformacija $f \mapsto \hat{f}$ kot preslikava iz L^1 v $c_0(\mathbb{Z})$ ne more biti surjektivna (glej dodatek A).

Različne izražave delnih vsot Fourierove vrste nam bodo koristile pri obravnavi konvergence Fourierovih vrst. Poleg njih bodo pomembno vlogo igrale tudi ti. *Cesárove delne vsote*, ki jih definiramo preprosto kot aritmetične sredine običajnih delnih vsot:

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f,$$

torej so tudi trigonometrični polinomi stopnje N . V vsaki točki x jih torej lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} \sigma_N f(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{N+1} \sum_{|k| \leq N} \sum_{n=|k|}^N c_k e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{|k| \leq N} (N - |k| + 1) c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Ob tem naj omenimo, da se iz te izražave Cesárovih delnih vsot vidi, da je $\widehat{\sigma_N f}(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k)$ za $|k| \leq N$ in 0 sicer, zato konvergira $\widehat{\sigma_N f}(k)$ proti $\hat{f}(k)$ za vsak k , ko $N \rightarrow \infty$. To pomeni, da delne vsote $\sigma_N f$ enakomerno konvergirajo proti f za vsak trigonometrični polinom f . Kasneje bomo spoznali, da je to res celo za vsako zvezno funkcijo.

Tudi Cesárove delne vsote lahko izrazimo s konvolucijo, če upoštevamo že znano dejstvo, da je $S_n f = f * D_n$:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (f * D_n)(x) = (f * F_N)(x),$$

kjer smo z F_N označili ti. *Fejérjevo jedro*:

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = \\ &= \frac{1}{2(N+1) \sin^2(x/2)} \sum_{n=0}^N 2 \sin(n+1/2)x \sin(x/2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(N+1) \sin^2(x/2)} (1 - \cos(N+1)x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)} \right)^2$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $F_N(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (2n+1) = N+1$.

Fejérjevo jedro ima še nadaljnje koristne lastnosti:

1. F_N je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje N), ki je poleg tega pozitivna: $F_N \geq 0$.

$$2. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1.$$

$$3. F_N(x) \leq \frac{1}{(N+1) \sin^2(x/2)} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)x^2} \leq \frac{\pi^2}{Nx^2} \leq \frac{\pi^2}{N\delta^2} \text{ za } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi.$$

Posledica: $\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N(x) dx \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), če $0 < \delta \leq \pi$.

$$4. F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)} \right)^2 \leq \frac{(N+1)^2 x^2/4}{(N+1)x^2/\pi^2} = \frac{\pi^2}{4}(N+1) \leq \frac{\pi^2}{2}N \text{ za } |x| \leq \pi.$$

$$5. F_N(x) \leq \frac{AN}{1+N^2x^2} \text{ za vsak } |x| \leq \pi, \text{ kjer je } A = \pi^2(1+\pi^2)/2.$$

Iz točke 4 namreč dobimo pri pogoju $|x| \leq \pi/N$ oceno

$$F_N(x) \leq \frac{N\pi^2}{2} \leq \frac{N\pi^2(1+\pi^2)}{2(1+N^2x^2)} = \frac{AN}{1+N^2x^2},$$

iz točke 3 pa pri pogoju $|x| \geq \pi/N$ oceno

$$F_N(x) \leq \frac{\pi^2}{Nx^2} \leq \frac{\pi^2(1+\pi^2)}{Nx^2(\pi^2/(N^2x^2) + \pi^2)} = \frac{N(1+\pi^2)}{1+N^2x^2} \leq \frac{AN}{1+N^2x^2}.$$

Obakrat smo dobili oceno $F_N(x) \leq G_N(x)$, kjer je $G_N(x) = AN/(1+N^2x^2)$. Za racionalno funkcijo G_N lahko dobimo še druge ocene, npr. $|x|G_N(x) \leq A/2$ za $|x| \leq \pi$, od koder dobimo $F_N(x) \leq G_N(x) \leq A/(2|x|)$ za $0 < |x| \leq \pi$.

Poleg tega je G_N odvedljiva in $G'_N(x) = -2AN^3x/(1+N^2x^2)^2$. Dejstvo, da je zaradi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |xG'_N(x)| dx &= 2AN^3 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 dx}{(1+N^2x^2)^2} = 2A \int_{-N\pi}^{N\pi} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} \leq \\ &\leq 2A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = B < \infty \end{aligned}$$

funkcija $x \mapsto xG'_N(x)$ integrabilna, nam bo kasneje prišlo prav.

3. Konvergenca Fourierovih vrst po normi

Najprej pogledajmo, kako se vedejo delne vsote ali Cesárove delne vsote Fourierove vrste glede konvergence v prostoru L^1 ali v kakšnem drugem prostoru, npr. C , L^∞ , L^p , kjer je $1 \leq p < \infty$ in $p \neq 2$. Konvergenco v prostoru L^2 , ki je preprostejša in se da o njej povedati veliko več, bomo obravnavali v naslednjem razdelku.

Trditev 1. *Naj bosta za vsak $n \geq 0$ kot doslej $S_n f$ n -ta delna in $\sigma_n f$ n -ta Cesárova delna vsota Fourierove vrste funkcije f .*

(a) *Če je $f \in L^1$, je $\|S_n f\|_1 = O(\ln n)$, ($n \rightarrow \infty$), in $\|\sigma_n f\|_1 \leq \|f\|_1$.*

(b) *Če je $f \in L^\infty$, je $\|S_n f\|_\infty = O(\ln n)$, ($n \rightarrow \infty$), in $\|\sigma_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

Dokaz. Točka (a) sledi iz ocen $\|S_n f\|_1 = \|f * D_n\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \|D_n\|_1 = L_n \|f\|_1$, kjer so $L_n = O(\ln n)$ Lebesguove konstante, in $\|\sigma_n f\|_1 = \|f * F_n\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \|F_n\|_1 = \|f\|_1$, kjer upoštevamo, da je $\|F_n\|_1 = 2\pi$.

Točko (b) dokažemo s podobnimi ocenami:

$$\begin{aligned} |S_n f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)| dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\infty} \|D_n\|_1 = L_n \|f\|_{\infty} = O(\ln n) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

za vsak x in torej tudi $\|S_n f\|_{\infty} = O(\ln n)$ ($n \rightarrow \infty$). Podobno je

$$\begin{aligned} |\sigma_n f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) dt = \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

in zato $\|\sigma_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

Opomba. Podobna ocena velja v vsakem homogenem Banachovem prostoru B , saj lahko zaradi trditve 2.1 pišemo $\|S_n f\|_B = \|f * D_n\|_B \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_B \|D_n\|_1 = L_n \|f\|_B$ in $\|\sigma_n f\|_B = \|f * F_n\|_B \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_B \|F_n\|_1 = \|f\|_B$.

Trditev 2. Če je $f \in BV$ in ima na intervalu $[-\pi, \pi]$ variacijo $V(f)$, potem za n -to delno vsoto $S_n f$ Fourierove vrste za f velja:

$$\|S_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + V(f)/\pi.$$

Dokaz. Funkcija $f \in BV$ je tudi omejena in po trditvi 1(b) velja $\|\sigma_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. Za vsak n je

$$S_n f(x) - \sigma_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} |k| \hat{f}(k) e^{ikx}$$

in zato po trditvi 1.2(b)

$$|S_n f(x) - \sigma_n f(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} |k \hat{f}(k)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} \frac{V(f)}{2\pi} \leq \frac{(n+1/2)V(f)}{(n+1)\pi} \leq \frac{V(f)}{\pi}$$

oziroma $\|S_n f - \sigma_n f\|_{\infty} \leq V(f)/\pi$. Ker je $\|S_n f\|_{\infty} \leq \|S_n f - \sigma_n f\|_{\infty} + \|\sigma_n f\|_{\infty}$ in ker zaradi omejenosti funkcije $f \in BV$ velja $\|\sigma_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ (trditev 1(b)), dobimo želeno neenakost.

Opomba. Definirajmo $\tau(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{|k| \leq n} |k \hat{f}(k)|$. Če je $\tau(n) \leq M$ za vsak $n = 0, 1, 2, \dots$, dobimo tako kot v dokazu zgornje trditve $\|S_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + M$. Tu je veljalo $\tau(n) = O(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Če pa bi veljalo celo $\tau(n) = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), se pravi $\tau(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), bi imeli $\lim_n S_n f(x) = \lim_n \sigma_n f(x)$ enakomerno po x in za vsak $\epsilon > 0$ bi za dovolj velike n veljalo $\|S_n f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \epsilon \|f\|_{\infty}$, za vsak n pa $\|S_n f\|_{\infty} \leq M_f \|f\|_{\infty}$.

Imejmo poljuben homogen Banachov podprostor $B \subset L^1$. Pokazali bomo, da je množica trigonometričnih polinomov gosta v B in obravnavali tudi konvergenco Fourierove vrste v B .

Trditev 3. Za vsak $f \in B$ velja $\|\sigma_n f - f\|_B \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. Ker lahko zaradi zveznosti Fejérjevega jedra za vsak n zapišemo $\sigma_n f = f * F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) f_{-t} dt$ v smislu abstraktnega Riemannovega integrala (glej dodatek, trditev A4), imamo za vsak dovolj velik n in vsak dovolj majhen $\delta > 0$ oceno

$$\|\sigma_n f - f\|_B = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) (f_{-t} - f) dt \right\|_B \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t)(f_{-t} - f) dt \right\|_B + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} F_n(t)(f_{-t} - f) dt \right\|_B \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) \|f_{-t} - f\|_B dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \delta} F_n(t) \|f_{-t} - f\|_B dt < \epsilon/2 + \frac{\pi \|f\|_B}{n\delta^2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Posledica. *Množica trigonometričnih polinomov je gosta v homogenem Banachovem prostoru B .*

V posebnem primeru je to res za prostor L^1 in v njem velja izrek o enoličnosti: iz $\hat{f}(k) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ sledi $f = 0$ s.p. na \mathbb{R} (glej izrek 1.1).

Vprašajmo se zdaj, ali Fourierova vrsta za $f \in B$ konvergira po normi prostora B , se pravi, ali velja $\|S_n f - g\|_B \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$) za funkcijo $g \in B$ (ki je odvisna od f). Ker za vsak $f \in B$ velja $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \leq \|f\|_B$ za vsak k , sledi iz $\|S_n f - g\|_B \rightarrow 0$ enakost $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ za vsak k . Po izreku o enoličnosti je tedaj $g = f$ (v prostoru B), zato je pravo vprašanje, kdaj velja $\|S_n f - f\|_B \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$) za vsak $f \in B$. Odgovor nudi naslednji izrek.

Izrek 1. *$\|S_n f - f\|_B \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$) velja za vsak $f \in B$ natanko takrat, ko obstaja konstanta M , da je $\|S_n f\|_B \leq M \|f\|_B$ za vsak $f \in B$ in vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Za vsak trigonometrični polinom g velja $S_n g = g$, če je le n dovolj velik. Množica takih polinomov pa je po zgornji posledici gosta v B , zato rezultat sledi, če v trditvi A3 v dodatku A vzamemo $T_n = S_n - I$, kjer je S_n operator, ki vsakemu elementu $f \in B$ priredi delno vsoto $S_n f$ in I identični operator na B .

Definirajmo normo operatorja S_n s predpisom $\|S_n\|_B = \sup\{\|S_n f\|_B; \|f\|_B \leq 1\}$. Vprašanje konvergence Fourierove vrste v homogenem prostoru B se torej reducira na vprašanje, ali je zaporedje $\|S_n\|_B$ omejeno. Zaradi $S_n f = f * D_n$ in $\|S_n f\|_B \leq \|f * D_n\|_B \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_B \|D_n\|_1 = L_n \|f\|_B$ je vedno $\|S_n\|_B \leq L_n$. Če nam uspe dokazati tudi obratno neenakost, lahko na vprašanje konvergence odgovorimo negativno.

Trditev 4. *Če je B eden od naslednjih prostorov: L^1, L^∞ ali C , velja $\|S_n\|_B = L_n$ (Lebesguove konstante).*

Dokaz. Najprej obravnavajmo primer $B = L^1$. Videli smo že, da je $\|S_n f\|_1 \leq L_n \|f\|_1$ za vsak $f \in L^1$ (primerjaj dokaz trditve 1), torej velja $\|S_n\|_{L^1} \leq L_n$. Po drugi strani ima vsak člen zaporedja $f_N = F_N/(2\pi)$, kjer je F_N N -to Fejérjevo jedro, normo 1 in velja $S_n f_N = \frac{1}{2\pi} S_n F_N = \frac{1}{2\pi} F_N * D_n = \frac{1}{2\pi} \sigma_N D_n \rightarrow \frac{1}{2\pi} D_n$ ($N \rightarrow \infty$) za vsak x . Ker je $\|S_n f_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \|\sigma_N D_n\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1$ za vsak N , sledi po (LIDK) tudi $\|S_n f_N\|_1 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1 = L_n$ ($N \rightarrow \infty$). Torej zaradi $\|S_n\|_{L^1} \geq \|S_n f_N\|_1$ za vsak N velja $\|S_n\|_{L^1} \geq L_n$ za vsak n .

Podobno že vemo, da je $\|S_n f\|_\infty \leq L_n \|f\|_\infty$ za vsak $f \in L_\infty$ in vsak n (glej dokaz trditve 1), torej je $\|S_n\|_{L^\infty} \leq L_n$ za vsak n . Naj bo $f_n(t) = \text{sign}(D_n(t))$. Potem je $\|f_n\|_\infty = 1$ in

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{L^\infty} &\geq \|S_n f_n\|_\infty = \sup\{|(f_n * D_n)(x)|; x \in [-\pi, \pi]\} \geq |(f_n * D_n)(0)| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) D_n(-t) dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \text{sign}(D_n(t)) dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1 = L_n. \end{aligned}$$

Torej imamo spet enakost $\|S_n\|_{L^\infty} = L_n$.

Nazadnje si pogledjmo še prostor C , ki je zaprt podprostor v L^∞ . Po eni strani imamo $\|S_n\|_C \leq L_n$ zaradi $\|S_n f\|_\infty \leq L_n \|f\|_\infty$. Po drugi strani lahko ravnamo podobno kot prej, le da funkcijo $\text{sign}(D_n(t))$ na intervalih blizu ničel funkcije D_n s poljubno majhno skupno dolžino (pod ϵ) tako popravimo, da dobimo zvezno funkcijo g_n z normo $\|g_n\|_\infty = 1$. Potem je

$$\begin{aligned} \|S_n\|_C &\geq \|S_n g_n\|_\infty \geq |(g_n * D_n)(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) D_n(-t) dt \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \text{sign}(D_n(t)) dt \right| - \epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt - \epsilon = \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1 - \epsilon = L_n - \epsilon. \end{aligned}$$

Ker je bil ϵ poljuben, imamo $\|S_n\|_C \geq L_n$ oziroma celo $\|S_n\|_C = L_n$ za vsak n .

Posledica 1. V prostorih L^1 , L^∞ in C Fourierova vrsta $S(f)$ ne konvergira po normi za vsako funkcijo f .

Dokaz. Sledi iz trditve 4 in trditve A3.

Posledica 2. Naj bo x_0 poljubno realno število. Potem obstaja zvezna funkcija $f \in C$, katere Fourierova vrsta $S(f)$ ne konvergira v točki x_0 .

Dokaz. Denimo, da bi zaporedje $S_n f(x_0)$ konvergiralo za vsak $f \in C$. Potem bi bilo za vsak $f \in C$ omejeno in bi obstajala taka konstanta $M_f > 0$, da bi veljalo $\sup_n |S_n f(x_0)| \leq M_f$. Zaporedje omejenih linearnih funkcionalov $f \mapsto S_n f(x_0)$ bi bilo torej omejeno za vsak f in po principu enakomerne omejenosti (glej izrek A3 v dodatku), bi bilo omejeno tudi po normi, se pravi, da bi obstajala konstanta $M > 0$, neodvisna od f , tako da bi za vsak n in vsak $f \in C$ veljalo $|S_n f(x_0)| \leq M \|f\|_\infty$. Za vsak x pa je $S_n f(x) = S_n f_{x-x_0}(x_0)$ in zato $\|S_n f\|_\infty = \sup\{|S_n f_{x-x_0}(x_0)|; x \in [-\pi, \pi]\} \leq M \sup\{\|f_{x-x_0}\|_\infty; x \in [-\pi, \pi]\} = M \|f\|_\infty$. Ker bi to veljalo za vsak $f \in C$, bi imeli $\|S_n\|_C \leq M$, kar pa je v nasprotju s trditvijo 4.

Opomba. Zadnja posledica pove, da obstajajo zvezne funkcije, katerih Fourierova vrsta v poljubni (vnaprej izbrani) točki ne konvergira. Brez posebnega dodatnega truda se da ugotoviti, da obstajajo zvezne funkcije, katerih Fourierova vrsta ne konvergira na poljubni (vnaprej izbrani) števnici množici.

Katznelson in Kahane pa sta pokazala, da je to res tudi, če števno množico nadomestimo z množico z mero 0 (glej [15], str. 58). Več ne moremo doseči. Kot posledica znamenitega izreka Carlesona iz leta 1966 (glej [8]) namreč Fourierova vrsta vsake zvezne funkcije konvergira skoraj povsod na realni osi. Mimogrede, za splošne integrabilne funkcije to ni res. Kolmogorov je leta 1926 dokazal obstoj funkcij $f \in L^1$, katerih Fourierova vrsta $S(f)$ nikjer (tj. v nobeni točki) ne konvergira (glej [15], str. 59).

Naj bo $f \in L^1$. Funkciji $\tilde{f} \in L^1$, za katero velja $\widehat{\tilde{f}}(n) = -i \text{sign}(n) \hat{f}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, rečemo *konjugiranika* funkcije f (glej opombe h konjugiranemu Dirichletovemu jedru), linearni preslikavi $Q: f \mapsto \tilde{f}$ (ki ni povsod definirana) pa *konjugiranje*. Podobno rečemo funkciji $f_{(p)} \in L^1$, za katero velja $\widehat{f_{(p)}}(n) = \chi_{\mathbb{Z}_+}(n) \hat{f}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, *projiciranka* funkcije f , linearni preslikavi $P: f \mapsto f_{(p)}$ (ki tudi ni povsod definirano) pa *projiciranje*. Če obstaja ena od prirejenih preslikav, obstaja tudi druga, saj med njima veljata zvezi

$$f_{(p)} = \frac{1}{2}(\hat{f}(0) + f + i\tilde{f}), \quad \tilde{f} = -i(2f_{(p)} - f - \hat{f}(0)).$$

Definicija. Rečemo, da homogeni Banachov prostor B dopušča *konjugiranje*, če je konjugiranje Q definirano povsod na B in je omejen linearen operator iz B v B , tj. obstaja konstanta $M > 0$, da velja $\|Qf\|_B \leq M \|f\|_B$ za vsak $f \in B$.

Prav tako rečemo, da homogeni Banachov prostor B *dopušča projiciranje*, če je projiciranje P definirano povsod na B in je omejen linearen operator iz B v B , tj. obstaja konstanta $M > 0$, da velja $\|Pf\|_B \leq M\|f\|_B$ za vsak $f \in B$.

Očitno dopušča homogeni Banachov prostor B konjugiranje natanko takrat, ko dopušča projiciranje. Za vsak n označimo z e_n funkcijo $e_n(x) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Izrek 2. *Naj bo B tak homogeni Banachov podprostor v L^1 , da je za vsak $f \in B$ in vsak $n \in \mathbb{Z}$ tudi $e_n f \in B$ in velja $\|e_n f\|_B = \|f\|_B$. Tedaj dopušča B projiciranje natanko takrat, ko v B vsaka Fourierova vrsta konvergira po normi.*

Dokaz. Denimo najprej, da B dopušča projiciranje in je $M > 0$ taka konstanta, da je $\|Pf\|_B \leq M\|f\|_B$ za vsak $f \in B$. Ker je očitno $S_n f = e_{-n} P(e_n f) - e_{n+1} P(e_{-n-1} f)$, velja tudi $\|S_n f\|_B \leq \|P(e_n f)\|_B + \|P(e_{-n-1} f)\|_B \leq 2M\|f\|_B$ in po izreku 1 imamo tudi $\|S_n f - f\|_B \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za vsak $f \in B$.

Obratno, naj v B vsaka Fourierova vrsta konvergira, se pravi, da po izreku 1 obstaja konstanta $M > 0$, da velja $\|S_n f\|_B \leq M\|f\|_B$ za vsak $f \in B$ in vsak n . Pri dani funkciji $f \in B$ označimo $f_n = e_n S_n(e_{-n} f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}(k) e_k$ in pokažimo, da je zaporedje (f_n) Cauchyjevo v B . Najprej za vsak n velja $\|f_n\|_B = \|S_n(e_{-n} f)\|_B \leq M\|f\|_B$. Naj bo $\epsilon > 0$ in N tako velik, da je $\|S_N f - f\|_B < \epsilon$. Tedaj za $m, n \geq N/2$ velja

$$(S_N f)_m = \sum_{k=0}^{2m} (S_N f)^\wedge(k) e_k = \sum_{k=0}^{2n} (S_N f)^\wedge(k) e_k = (S_N f)_n$$

in zato $\|f_m - f_n\|_B \leq \|f_m - (S_N f)_m\|_B + \|(S_N f)_n - f_n\|_B \leq 2M\|S_N f - f\|_B < 2M\epsilon$. Zaporedje (f_n) je Cauchyjevo in v polnem prostoru B konvergira k elementu $g \in B$, za katerega velja $\|g\|_B \leq M\|f\|_B$. Zaradi $|\hat{g}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_1 \leq \|g\|_B$ za vsak k velja $\hat{g}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(k)$. Torej dobimo $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ za $k \geq 0$ in $\hat{g}(k) = 0$ za $k < 0$. To pomeni, da je $g = Pf$ in da je projiciranje P povsod definiran omejen linearen operator na prostoru B .

Posledica. *Prostora L^1 in C ne dopuščata ne konjugiranja ne projiciranja.*

Dokaz. Sledi iz izreka 2 in posledice 1 trditve 4.

V nasprotju s tem bomo v naslednjem razdelku spoznali, da prostor L^2 dopušča konjugiranje in projiciranje, torej v njem vsaka Fourierova vrsta konvergira po normi. V resnici to velja v vseh prostorih L^p , $1 < p < \infty$, toda dokaz je v primeru $p \neq 2$ precej težji in se v to ne bomo spuščali. Ustrezní rezultat je vsebina izreka M. Rieszja (glej npr. [17], izrek 8.6).

4. Kvadratična konvergenca

Prostor L^2 je med vsemi homogenimi Banachovimi podprostori v L^1 nekaj posebnega, saj ni samo Banachov ampak celo Hilbertov. Normo porodi skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

ki je zvezen v obeh argumentih, linearen v prvem in konjugirano linearen v drugem. Zanj velja Cauchy-Schwarzova ocena $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Sistem trigonometričnih funkcij $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, je ortogonalen sistem v Hilbertovem prostoru L^2 , saj velja $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ za $m \neq n$. Poleg tega je $\langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|_2^2 = 2\pi$, zato bi za ortonormirani sistem lahko vzeli $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Fourierove koeficiente funkcije $f \in L^2$ lahko izrazimo s skalarnim produktom:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \langle f, e_k \rangle,$$

delne vsote pa z

$$S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle e_k.$$

Iz Cauchy-Schwarzove neenakosti sledi $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ za vsak $f \in L^2$, torej je $L^2 \subset L^1$. Seveda je tudi $C \subset L^2$. Množica zveznih periodičnih funkcij C je gosta ne le v L^1 ampak tudi v L^2 . To sledi iz Luzinovega izreka iz I. poglavja, vemo pa tudi, da $\|\sigma_n f - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (trditev 3.3), saj je L^2 homogeni Banachov podprostor v L^1 in so $\sigma_n f$ zvezne periodične funkcije. V tem razdelku bomo pokazali, da celo delne vsote Fourierove vrste funkcije $f \in L^2$ konvergirajo po normi prostora L^2 proti f .

Izrek 1 (Riesz-Fischer). *Naj bo $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tako dvostransko zaporedje kompleksnih števil, da je $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$. Tedaj je trigonometrična vrsta $\sum_k c_k e^{ikx}$ Fourierova vrsta za neko funkcijo $f \in L^2$ s Fourierovimi koeficienti $\hat{f}(k) = c_k$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ in konvergira proti f po normi prostora L^2 .*

Dokaz. Zaradi ortogonalnosti sistema funkcij $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ velja po Pitagorovem izreku $\|\sum_{m \leq |k| \leq n} c_k e_k\|_2^2 = 2\pi \sum_{m \leq |k| \leq n} |c_k|^2 \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$). Torej tvorijo delne vsote Fourierove vrste Cauchyjevo zaporedje v L^2 in zato konvergirajo v polnem prostoru L^2 proti neki funkciji $f \in L^2$. Ker je skalarni produkt zvezen, za vsak $j \in \mathbb{Z}$ velja

$$\hat{f}(j) = \frac{1}{2\pi} \langle f, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n f, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = c_j.$$

Riesz-Fischerjev izrek karakterizira tiste trigonometrične vrste, ki so Fourierove za funkcije iz L^2 . Nekatere druge karakterizacije Fourierovih vrst za funkcije iz L^2 in iz drugih podprostorov v L^1 bomo spoznali v naslednjem razdelku.

Izrek 2. *Za vsak $f \in L^2$ konvergirajo delne vsote $S_n f$ Fourierove vrste za f v normi prostora L^2 proti funkciji f , se pravi $\|S_n f - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in velja Parsevalova enakost:*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2.$$

Dokaz. Z uporabo skalarnega produkta lahko izračunamo

$$\begin{aligned} \|S_n f - f\|_2^2 &= \langle f - S_n f, f - S_n f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle S_n f, f \rangle - \langle f, S_n f \rangle + \langle S_n f, S_n f \rangle = \\ &= \|f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} c_k \langle e_k, f \rangle - \sum_{|k| \leq n} \bar{c}_k \langle f, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Ker je $\langle f, e_k \rangle = \overline{\langle e_k, f \rangle} = 2\pi c_k$ in $\|S_n f\|_2^2 = 2\pi \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2$ dobimo končno

$$\|S_n f - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.$$

Torej je $2\pi \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. Ocena velja za vsak n , torej tudi $2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$.

To neenakost imenujemo *Besselova neenakost*. Iz nje spoznamo, da je $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$, zato po izreku 1 in po izreku o enoličnosti Fourierova vrsta za f konvergira po normi prostora L^2 proti f . Torej velja $\|S_n f - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Ker pa smo v dokazu videli, da je $\|S_n f - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2$, velja tudi Parsevalova enakost.

Opombe. 1. Parsevalova enakost je posplošitev Pitagorovega izreka na vsote z neskončno mnogo členi. Lahko jo povemo še bolj splošno: za $f, g \in L^2$ je

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{K \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

To sledi iz zveznosti skalarnega produkta: $\langle f, g \rangle = \sum_k \widehat{f}(k) \langle e_k, g \rangle = \sum_k \widehat{f}(k) \overline{\langle g, e_k \rangle} = 2\pi \sum_k \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}$.

2. Ker za vsako funkcijo $f \in L^2$ velja $\|S_n f - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), homogeni prostor L^2 po izreku 3.2 dopušča konjugiranje in projiciranje.

Uporaba Parsevalove enakosti v analizi je mnogostranska. Tu si bomo kot zgled ogledali posebno preprost konvergenčni izrek za Fourierove vrste. Najprej potrebujemo naslednji rezultat.

Trditev 1. Če je $f \in AC$ in $f' \in L^2$, velja $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

Dokaz. Za absolutno zvezno funkcijo f vemo, da je $\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n) = inc_n$ za vsak n . Tedaj je po Cauchy-Schwarzu in Parsevalovi enakosti za funkcijo f' (in ob upoštevanju znanega dejstva, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |c_n| &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |nc_n| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} n^2 |c_n|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \|f'\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Posledica. Če je f absolutno zvezna funkcija in je njen odvod $f' \in L^2$, konvergira Fourierova vrsta $S(f)$ proti f absolutno in enakomerno na vsej realni osi.

Dokaz. Pod danimi pogoji je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq \sum_{n \neq 0} |c_n| < \infty,$$

torej $\sum_{n \neq 0} |c_n|$ konvergentna številska majoranta Fourierove vrste, ki zato absolutno in enakomerno konvergira proti zvezni funkciji z istimi Fourierovimi koeficienti (enakomerno konvergentno vrsto smemo členoma integrirati), se pravi proti f (izrek o enoličnosti).

V posebnem primeru konvergira $S(f)$ proti f absolutno in enakomerno, če je $f \in Lip$ ali celo $f \in C^1$.

5. Sumabilnost Fourierovih vrst

Konvergenca Fourierovih vrst je zahtevno vprašanje, nasploh te vrste nimajo dobrih konvergenčnih lastnosti, lepše pa se obnašajo pri konvergenci v posplošenem smislu. Tako namesto prave konvergence raje obravnavamo Cesárovo sumabilnost (glej dodatek B).

Fourierove vrste so funkcijske (trigonometrične) vrste. Delne vsote so simetrične, zato so členi vrste enaki $\widehat{f}(k)e^{ikx} + \widehat{f}(-k)e^{-ikx} = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, Cesárove delne vsote pa so nam tudi znane s konca 2. razdelka.

Oglejmo si npr. tretji Tauberjev pogoj (glej dodatek B), ki se zdaj glasi $|k(\widehat{f}(k)e^{ikx} + \widehat{f}(-k)e^{-ikx})| \rightarrow 0$ ($|k| \rightarrow \infty$) enakomerno po vseh $x \in \mathbb{R}$. Ta pogoj je npr. izpolnjen, če velja $k\widehat{f}(k) \rightarrow 0$, ko $|k| \rightarrow \infty$. V resnici sta oba pogoja ekvivalentna, kar sledi iz naslednje trditve o splošnih trigonometričnih vrstah.

Trditev 1. Če velja $c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \rightarrow 0$ ($|k| \rightarrow \infty$) za vsak x iz množice E s pozitivno mero, velja tudi $c_k \rightarrow 0$ ($|k| \rightarrow \infty$).

Dokaz. Člen $c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$ zapišimo raje v realni obliki $a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Trditev zadošča dokazati za realne koeficiente a_k in b_k (sicer obravnavamo posebej realni in posebej imaginarni del). Potem lahko zapišemo naprej $a_k \cos kx + b_k \sin kx = \rho_k \cos(kx - \delta_k)$, kjer je $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ in $\delta_k = \arctg(b_k/a_k)$. Po predpostavki velja $\rho_k \cos(kx - \delta_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Pokazati moramo, da $\rho_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), saj bo potem tudi $a_k, b_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) oziroma $c_k \rightarrow 0$ ($|k| \rightarrow \infty$). Denimo, da $\rho_k \not\rightarrow 0$. Obstaja torej $\delta > 0$ in podzaporedje (n_k) naravnih števil, tako da je $\rho_{n_k} \geq \delta$ za vsak k . Tedaj mora veljati $\cos(n_k x - \delta_{n_k}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Lahko predpostavimo, da je množica E omejena, npr. $E \subset [-\pi, \pi]$ (sicer opazujemo $E \cap [-\pi, \pi]$, ki ima tudi pozitivno mero). Po (LIDK) velja pri pogoju $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(n_k x - \delta_{n_k}) dx = 0.$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} \int_E \cos^2(n_k x - \delta_{n_k}) dx &= \frac{1}{2} \int_E (1 - \cos 2(n_k x - \delta_{n_k})) dx = \\ &= \frac{m(E)}{2} - \frac{\cos 2\delta_{n_k}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(x) \cos 2n_k x dx + \frac{\sin 2\delta_{n_k}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(x) \sin 2n_k x dx, \end{aligned}$$

kar pa po Riemann-Lebesguovi lemi konvergira proti $m(E)/2$. Torej dobimo $m(E) = 0$, v nasprotju s privzetkom.

Posledica (Cantor-Lebesguov izrek). Če trigonometrična vrsta $\sum_k c_k e^{ikx}$ konvergira na množici s pozitivno mero, konvergirajo koeficienti c_k pri pogoju $|k| \rightarrow \infty$ proti 0.

V prejšnjem razdelku smo videli, da niti za zvezno funkcijo Fourierova vrsta ne konvergira v vsaki točki. To pomanjkljivost odpravimo, če namesto konvergence Fourierove vrste opazujemo njeno Cesárovo sumabilnost, kar je vsebina naslednjega pomembnega izreka.

Izrek 1 (Fejér 1904). Naj bo $f \in L^1$.

(a) Če v točki x obstajata leva in desna limita, $f(x-)$ in $f(x+)$, Cesárove delne vsote $\sigma_N f(x)$ konvergirajo proti $(f(x+) + f(x-))/2$. Če je funkcija f zvezna v točki x , velja $\sigma_N f(x) \rightarrow f(x)$ ($N \rightarrow \infty$).

(b) Če je funkcija f zvezna na intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, konvergirajo Cesárove delne vsote $\sigma_N f$ proti f enakomerno na vsakem zaprtem podintervalu v (α, β) . Če je $f \in C$, velja $\sigma_N f \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno na \mathbb{R} .

Dokaz. Preoblikujmo Cesárove delne vsote:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_N(t) dt,$$

torej

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_N(t) dt.$$

Dokažimo sedaj točko (a). Označimo $s = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, saj ima f desno in levo limito v točki x . Potem je

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) - s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) F_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) F_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (f(x+t) - f(x+)) F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (f(x-t) - f(x-)) F_N(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) F_N(t) dt\end{aligned}$$

in zato

$$\begin{aligned}|\sigma_N f(x) - s| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(x+t) - f(x+)| F_N(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(x-t) - f(x-)| F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|s|) F_N(t) dt.\end{aligned}$$

Če je δ dovolj majhen, je $|f(x+t) - f(x+)| < \epsilon$ in $|f(x-t) - f(x-)| < \epsilon$, torej

$$\begin{aligned}|\sigma_N f(x) - s| &\leq \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^{\delta} F_N(t) dt + \frac{\pi}{2N\delta^2} \int_{\delta}^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|s|) dt \leq \\ &\leq \epsilon + \frac{\pi}{2N\delta^2} (\|f\|_1 + 2\pi|s|)\end{aligned}$$

za vsak N in vsak ϵ . V limiti dobimo $\limsup_{N \rightarrow \infty} |\sigma_N f(x) - s| \leq \epsilon$. To velja za vsak $\epsilon > 0$, torej

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = s = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Če je funkcija f zvezna v točki x , je seveda $s = f(x)$.

(b) Če je funkcija f zvezna na intervalu (α, β) , je enakomerno zvezna na vsakem zaprtem podintervalu $[a, b]$. Zato za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon$ in $|f(x-t) - f(x)| < \epsilon$ za vsak $x \in [a, b]$, kakor hitro je $0 \leq t \leq \delta$. Tu je δ odvisen le od ϵ . Prav tako je $|s| = |f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$. Pri danem δ lahko izberemo tako velik N , da bo ob koncu prejšnje izpeljave

$$\frac{\pi}{2N\delta^2} (\|f\|_1 + 2\pi|s|) \leq \frac{\pi}{2N\delta^2} (\|f\|_1 + 2\pi M) < \epsilon$$

Torej dobimo oceno $|\sigma_N f(x) - f(x)| < 2\epsilon$ za vsak $x \in [a, b]$, če je le N dovolj velik, kar pomeni enakomerno konvergenco na $[a, b]$. Nazadnje, če je $[a, b] = [-\pi, \pi]$, je konvergenca v resnici enakomerna povsod na \mathbb{R} .

Opomba. Če je f zvezna v x , je smiselno pričakovati konvergenco $\sigma_N f(x) \rightarrow f(x)$ zaradi

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) F_N(t) dt \sim \\ &\sim f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_N(t) dt \sim f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = f(x).\end{aligned}$$

Trditvev 2. Če je $f \in L^1$, je $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N f - f\|_1 = 0$.

Dokaz. Po Fejérjevem izreku, točka (b), velja $\|\sigma_N g - g\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) za vsak $g \in C$. Za vsak $f \in L^1$, $g \in C$ je po trditvi 2.1(a)

$$\|\sigma_N f - f\|_1 \leq \|\sigma_N f - \sigma_N g\|_1 + \|\sigma_N g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \leq 2\|g - f\|_1 + \|\sigma_N g - g\|_1.$$

Ker je množica C gosta v L^1 , lahko izberemo $g \in C$ tako, da bo $\|g - f\|_1 < \epsilon$, nato pa še N tako velik, da bo tudi $\|\sigma_N g - g\|_1 \leq 2\pi \|\sigma_N g - g\|_\infty < \epsilon$. Potem je $\|\sigma_N f - f\|_1 < 3\epsilon$ in trditve je dokazana.

Ta rezultat v resnici že poznamo iz trditve 3.3, saj je tudi L^1 homogeni Banachov prostor. Isto seveda velja za prostor C (zadnji stavek v izreku 1(b)).

Posledice Fejérjevega izreka.

1. **(Izrek o gostoti).** *Množica trigonometričnih polinomov je gosta v L^1 .*

Dokaz. Za $f \in L^1$ namreč velja $\sigma_N f \rightarrow f$ po normi prostora L^1 , $\sigma_N f$ pa je trigonometrični polinom stopnje N .

2. **(Weierstrassov izrek).** *Na vsakem podintervalu $[a, b]$ je množica (navadnih) polinomov gosta v $C([a, b])$.*

Dokaz. Če je $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, lahko funkcijo $f \in C([a, b])$ razširimo do zvezne periodične funkcije na $[-\pi, \pi]$ oziroma \mathbb{R} . Po Fejérjevem izreku konvergirajo Cesárove delne vsote $\sigma_N f$ proti f enakomerno na $[a, b]$. Vsak trigonometrični polinom $\sigma_N f$ pa lahko na $[a, b]$ enakomerno aproksimiramo s pripadajočim Taylorjevim polinomom. Torej je množica polinomov na $[a, b]$ gosta v prostoru $C([a, b])$. Druge intervale najprej z raztegom in premikom prevedemo na podinterval v $(-\pi, \pi)$.

3. **(Izrek o enoličnosti).** *Če je $f \in L^1$ in $\widehat{f}(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, je $f = 0$.*

Dokaz. Za vsak N namreč velja $\sigma_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} (1 - \frac{|n|}{N+1}) \widehat{f}(n) e^{inx} = 0$. Potem pa je $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f = 0$ v prostoru L^1 .

4. **(Riemann-Lebesguova lema).** *Za $f \in L^1$ velja $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$).*

Dokaz. Aproksimirajmo f s trigonometričnim polinomom p v normi prostora L^1 , tako da bo $\|f - p\|_1 < \epsilon$. Naj bo naravno število $|n|$ večje od stopnje polinoma p . Potem je

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - p(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f - p\|_1 < \epsilon.$$

To velja za vsak dovolj velik $|n|$, torej $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Izrek 2. (a) *Če je $f \in BV$ periodična funkcija z omejeno variacijo, konvergira njena Fourierova vrsta $S(f, x)$ v vsaki točki x proti $(f(x+) + f(x-))/2$.*

(b) *Če je $f \in AC$ periodična absolutno zvezna funkcija, konvergira njena Fourierova vrsta $S(f)$ enakomerno na \mathbb{R} proti f .*

Dokaz. (a) Funkcija $f \in BV$ ima v vsaki točki x levo in desno limito in po Fejérjevem izreku velja $\sigma_N f(x) \rightarrow (f(x+) + f(x-))/2$. Fourierovi koeficienti take funkcije zadoščajo Hardyjevemu Tauberjevemu pogoju: $n|\widehat{f}(n)| \leq V(f)/\pi$, zato sledi tudi konvergenca delnih vsot $S_N f(x) \rightarrow (f(x+) + f(x-))/2$ ($N \rightarrow \infty$).

(b) Po Fejérjevem izreku velja $\sigma_N f \rightarrow f$ enakomerno na \mathbb{R} . Fourierovi koeficienti absolutno zvezne funkcije zadoščajo Tauberjevemu pogoju: $n|\widehat{f}(n)| \rightarrow 0$, zato sledi tudi enakomerna konvergenca delnih vsot $S_N f \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$).

Trditvev 3. Za $x \in \mathbb{R}$ in $s \in \mathbb{C}$ iz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| dt = 0$ sledi $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = s$.

Dokaz. Vemo, da je $\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_N(t) dt$, torej tudi $\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_N(t) dt$. Tedaj je za $0 < \delta < \pi$

$$\begin{aligned} |\sigma_N f(x) - s| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| F_N(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| F_N(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| F_N(t) dt. \end{aligned}$$

Pri $h > 0$ označimo $I(h) = \int_0^h \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| dt$. Po predpostavki velja $I(h)/h \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), zato za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $0 \leq h \leq \delta$ sledi $I(h) \leq \epsilon h$.

Spomnimo se, da za Fejérjevo jedro velja $F_N f(x) \leq G_N(x)$, kjer je na desni racionalna funkcija $G_N(x) = AN/(1 + N^2 x^2)$ za primerno konstanto A . Poleg tega pa imamo še oceni $|x|G_N(x) \leq A/2 < A$ in $\int_{-\pi}^{\pi} |xG'_N(x)| dx \leq B$ za neko drugo konstanto B (glej konec razdelka 2). Potem lahko prejšnja integrala ocenimo (pri prvem integriramo po delih):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| F_N(t) dt &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| G_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} I(\delta) G_N(\delta) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} I(t) G'_N(t) dt \leq \frac{\epsilon}{\pi} \delta G_N(\delta) + \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^{\delta} t |G'_N(t)| dt \leq \frac{(A+B)\epsilon}{2\pi}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| F_N(t) dt &\leq \frac{\pi}{N\delta^2} \int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right| dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2N\delta^2} (\|f\|_1 + 2|s|\pi). \end{aligned}$$

Za vsak dovolj majhen $\delta > 0$ in vsak N dobimo torej oceno

$$|\sigma_N f(x) - s| \leq \frac{A+B}{2\pi} \epsilon + \frac{\pi}{2N\delta^2} (\|f\|_1 + 2|s|\pi),$$

se pravi, da je

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |\sigma_N f(x) - s| \leq \frac{A+B}{2\pi} \epsilon$$

in tudi $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = s$, ker je ϵ poljuben.

Posledica 1. Če je $x \in \mathbb{R}$ Lebesguova točka za funkcijo $f \in L^1$, je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = f(x).$$

Dokaz. Za Lebesguovo točko x velja $\frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) in (s substitucijo $t \mapsto -t$) tudi $\frac{1}{h} \int_0^h |f(x-t) - f(x)| dt \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). Torej velja (najprej za $h > 0$, potem pa tudi za $h < 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt + \frac{1}{2h} \int_0^h |f(x-t) - f(x)| dt \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Iz trditve 3 tedaj sledi $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = f(x)$.

Posledica 2 (Fejér-Lebesguov izrek). Za vsak $f \in L^1$ velja $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = f(x)$ s.p. $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Po izreku I.3.3 je skoraj vsaka točka $x \in \mathbb{R}$ Lebesguova za f .

Posledica 3. Če za $f \in L^1$ velja $S_n f(x) \rightarrow g(x)$ ($n \rightarrow \infty$) s.p. $x \in \mathbb{R}$, je $g(x) = f(x)$ s.p. $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Po posledici 2 velja $\sigma_N f(x) \rightarrow f(x)$ s.p. $x \in \mathbb{R}$. Iz konvergence $S_n f(x) \rightarrow g(x)$ pa seveda sledi tudi konvergenca $\sigma_N f(x) \rightarrow g(x)$. Ker dveh limit ne more biti, velja $g(x) = f(x)$ s.p. $x \in \mathbb{R}$.

Kot posledico Fejérjevega oziroma Fejér-Lebesguovega izreka si oglejmo še nekaj različnih karakterizacij Fourierovih vrst med trigonometričnimi vrstami z uporabo Cesárovih delnih vsot.

Trditvev 4. Trigonometrična vrsta $\sum_k c_k e^{ikx}$ s Cesárovimi delnimi vsotami $\sigma_n(x)$ je Fourierova

- (a) za funkcijo $f \in L^1$ natanko takrat, ko velja $\|\sigma_n - f\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
- (b) za funkcijo $f \in C$ natanko takrat, ko velja $\|\sigma_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
- (c) za neko funkcijo $f \in L^2$ natanko takrat, ko velja $\sup_n \|\sigma_n\|_2 < \infty$,
- (d) za neko funkcijo $f \in L^\infty$ natanko takrat, ko velja $\sup_n \|\sigma_n\|_\infty < \infty$.

Dokaz. Po Fejérjevem izreku, točka (b), velja $\|\sigma_n f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za vsako funkcijo $f \in C$ in po trditvi 3 tudi $\|\sigma_n f - f\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za vsako funkcijo $f \in L^1$. Obratno, če velja $\|\sigma_n - f\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ali celo $\|\sigma_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za neko funkcijo $f \in L^1$ (oziroma celo $f \in C$), velja tudi $\hat{\sigma}_n(k) \rightarrow \hat{f}(k)$ ($n \rightarrow \infty$) za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Toda

$$\hat{\sigma}_n(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k \rightarrow c_k$$

za vsak k , zato je tudi $\hat{f}(k) = c_k$ za vsak k in vrsta je Fourierova za funkcijo f . Točki (a) in (b) sta dokazani.

Za dokaz točke (c) najprej pomislimo, da je zaradi trditve 2.1 (glej tudi opombo za trditvijo 3.1) $\|\sigma_n f\|_2 \leq \|f\|_2$ za vsak $f \in L^2$ in za vsak n , saj je tudi L^2 homogeni Banachov prostor. Torej je $\sup_n \|\sigma_n f\|_2 < \infty$. Obratno, naj obstaja taka konstanta $M > 0$, da velja $\|\sigma_n\|_2 \leq M$ za vsak $f \in L^2$. Tedaj po Pitagorovem izreku za $\sigma_n \in L^2$ za vsak n velja

$$2\pi \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)^2 |c_k|^2 = \|\sigma_n\|_2^2 \leq M^2.$$

Po (LIMK) dobimo od tod v limiti ($n \rightarrow \infty$) oceno $2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq M^2$. Po Riesz-Fisherjevem izreku (izrek 4.1) obstaja funkcija $f \in L^2$, tako da $\|S_n - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in vrsta je Fourierova za funkcijo f , se pravi $\hat{f}(k) = c_k$ za vsak k .

Točka (d) sledi iz točke (c). Po eni strani vemo, da je $\|\sigma_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ za vsak n in vsak $f \in L^\infty$ (trditvev 3.1(b)). Po drugi strani iz $\|\sigma_n\|_\infty \leq M$ za vsak n sledi za vsak n ocena

$$\|\sigma_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(t)|^2 dt \leq 2\pi M^2.$$

Torej je po točki (c) vrsta Fourierova za neko funkcijo f iz L^2 . Po Fejér-Lebesgovem izreku (posledica 2 trditve 3) velja potem tudi $\sigma_n = \sigma_n f \rightarrow f$ s.p. na \mathbb{R} . Ker je $|\sigma_n(x)| \leq M$ s.p. $x \in \mathbb{R}$ in za vsak n , velja tudi $|f(x)| \leq M$ s.p. $x \in \mathbb{R}$. Se pravi, da je $f \in L^\infty$.

6. Lakunarne Fourierove vrste

Posledica 3 trditve 5.3 pove, da Fourierova vrsta funkcije $f \in L^1$ skoraj povsod konvergira ravno proti funkciji f , če sploh kam konvergira skoraj povsod. Kdaj pa velja $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$ s.p. $x \in \mathbb{R}$? Odgovor na to vprašanje ni tako preprost. Za vse funkcije $f \in L^1$ to gotovo ni res (Kolmogorov 1926). Po Carlesonu (1966) za $f \in L^2$ to velja. Po drugi strani to velja vedno, ko je izpolnjen kakšen od Tauberjevih pogojev. En tak pogoj je npr. pogoj

$$\tau(N) \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{|n| \leq N} |n \hat{f}(n)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

saj smo v dokazu trditve 3.2 videli, da je $|S_N f(x) - \sigma_N f(x)| \leq \tau(N)$, in zato iz $\sigma_N f(x) \rightarrow f(x)$ sledi $S_N f(x) \rightarrow f(x)$. Zdaj bomo definirali cel razred Fourierovih vrst, pri katerih je pogoj $\tau(N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) vedno izpolnjen.

Definicija (Hadamard). Zaporedje $(n_k)_{k \geq 0}$ naravnih števil je *lakunarno*, če obstaja tako realno število $\lambda > 1$, da velja $n_{k+1} \geq \lambda n_k$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$

Definicija. *Lakunarna trigonometrična vrsta* je trigonometrična vrsta z lastnostjo $c_n = 0$, če $|n| \neq n_k$, kjer je (n_k) lakunarno zaporedje naravnih števil (v realni obliki so koeficienti od 0 različni le za lakunarno podzaporedje naravnih števil).

Lakunarno vrsto, pripadajočo lakunarnemu zaporedju (n_k) , lahko torej zapišemo v obliki $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$.

Trditev 1. *Za lakunarne trigonometrične vrste*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{in_k x} + c_k e^{-in_k x}) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x),$$

katerih koeficienti konvergirajo k 0, je pogoj $\tau(N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) izpolnjen.

Dokaz. Ocenimo

$$\begin{aligned} \tau(N) &= \frac{1}{N+1} \sum_{|n| \leq N} |n c_n| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{0 \leq n_k \leq N} n_k (|c_k| + |c_{-k}|) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^m n_k (|c_k| + |c_{-k}|) = \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^p n_k (|c_k| + |c_{-k}|) + \frac{1}{N+1} \sum_{k=p+1}^m n_k (|c_k| + |c_{-k}|). \end{aligned}$$

Če je p izbran tako, da je $|c_k|, |c_{-k}| \leq \epsilon$ za $k > p$ (ker $c_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$), dobimo

$$\begin{aligned} \tau(N) &\leq \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^p n_k (|c_k| + |c_{-k}|) + \frac{2\epsilon}{N+1} \sum_{k=p+1}^m n_k \leq \\ &\leq \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^p n_k (|c_k| + |c_{-k}|) + \frac{2\epsilon\lambda}{\lambda-1}, \end{aligned}$$

saj je $n_k \leq n_m / \lambda^{m-k}$ za vsak $k \leq m$ in $\sum_{k=1}^m n_k \leq n_m (1 + \lambda^{-1} + \dots + \lambda^{1-m}) \leq \lambda n_m / (\lambda - 1) \leq \lambda N / (\lambda - 1)$. Prvi člen konvergira z rastočim N proti 0, zato je $\limsup_{N \rightarrow \infty} \tau(N) \leq \frac{2\epsilon\lambda}{\lambda-1}$ za vsak $\epsilon > 0$ oziroma na koncu $\lim_{N \rightarrow \infty} \tau(N) = 0$.

Izrek 1 (Kolmogorov). *Če ima funkcija $f \in L^1$ lakunarno Fourierovo vrsto, konvergira le-ta skoraj povsod k funkciji f . Če je $f \in C$, je konvergenca enakomerna.*

Dokaz. Po posledici 2 trditve 5.3 velja $\sigma_N f \rightarrow f$ s.p. na \mathbb{R} . Ker je vrsta Fourierova, konvergirajo njeni koeficienti zaradi Riemann-Lebesguove leme proti nič. Zaradi lakunarnosti vrste po trditvi 1 potem velja Hardyjev pogoj $\tau(N) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), torej velja tudi $S_n f \rightarrow f$ s.p. na \mathbb{R} . Ker je ta pogoj enakomeren glede na $x \in \mathbb{R}$, iz enakomerne konvergence Cesárovih delnih vsot $\sigma_N f$ za zvezno funkcijo $f \in C$ sledi tudi enakomerna konvergenca pravih delnih vsot $S_N f$.

Ker smo ravno pri lakunarnih zaporedjih in lakunarnih Fourierovih vrstah, obravnavamo še kakšno njihovo posebnost.

Lema 1. *Če je (n_k) lakunarno zaporedje, obstaja tako naravno število s , da lahko vsak $n \in \mathbb{N}$ kvečjemu na s načinov zapišemo v obliki $n = n_k + n_j$ ali $n = n_k - n_j$.*

Dokaz. Naj bo najprej $n = n_k + n_j$, kjer je npr. $k > j$. Tedaj je $n_k \geq \lambda n_j$ in zato $n \geq (\lambda + 1)n_j$ ter $n_k = n - n_j \geq \lambda n/(\lambda + 1)$. Torej je $\lambda n/(\lambda + 1) \leq n_k \leq n$. Če pa je $n = n_k - n_j$, kjer je $k > j$, je $n \geq (\lambda - 1)n_j$ in $n_k = n + n_j \leq \lambda n/(\lambda - 1)$, oziroma $n \leq n_k \leq \lambda n/(\lambda - 1)$. Vedno torej velja $\lambda n/(\lambda + 1) \leq n_k \leq \lambda n/(\lambda - 1)$. Naj bo n_{k_1} najmanjše in n_{k_2} največje število n_k s to lastnostjo. Potem je $n_{k_1} \geq \lambda n/(\lambda + 1)$ in $n_{k_2} \leq \lambda n/(\lambda - 1)$ in zato

$$\lambda^{k_2 - k_1} \leq \frac{n_{k_2}}{n_{k_1}} \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

Odtod vidimo, da je le $s = k_2 - k_1 + 1$ števil n_k iz lakunarnega zaporedja takih, da je $n = n_k \pm n_j$, enako mnogo pa je tudi števil n_j . Ker je zaradi zgornje ocene s neodvisen od n , je lema dokazana.

Lema 2. *Za vsak par indeksov $k, j \in \mathbb{N}$ označimo $c_{kj} = \int_F \cos(n_k x + \delta_k) \cos(n_j x + \delta_j) dx$, kjer je F merljiva podmnožica v $[-\pi, \pi]$, (δ_k) poljubno zaporedje realnih števil, (n_k) pa lakunarno zaporedje naravnih števil. Tedaj je $\sum_{k \neq j} |c_{kj}|^2 < \infty$.*

Dokaz. Izraz za c_{kj} predelajmo v obliko

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \frac{1}{2} \int_F \cos((n_k + n_j)x + (\delta_k + \delta_j)) dx + \frac{1}{2} \int_F \cos((n_k - n_j)x + (\delta_k - \delta_j)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\delta_k + \delta_j) \int_F \cos(n_k + n_j)x dx - \frac{1}{2} \sin(\delta_k + \delta_j) \int_F \sin(n_k + n_j)x dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(\delta_k - \delta_j) \int_F \cos(n_k - n_j)x dx - \frac{1}{2} \sin(\delta_k - \delta_j) \int_F \sin(n_k - n_j)x dx. \end{aligned}$$

Integrali v tem izrazu so s π pomnoženi realni Fourierovi koeficienti karakteristične funkcije χ_F množice F . Označimo jih z $a'_{n_k \pm n_j}$ in $b'_{n_k \pm n_j}$. Potem je

$$\begin{aligned} |c_{kj}|^2 &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (a'_{n_k + n_j} \cos(\delta_k + \delta_j) - b'_{n_k + n_j} \sin(\delta_k + \delta_j) + a'_{n_k - n_j} \cos(\delta_k - \delta_j) - b'_{n_k - n_j} \sin(\delta_k - \delta_j))^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} (a'^2_{n_k + n_j} + b'^2_{n_k + n_j} + a'^2_{n_k - n_j} + b'^2_{n_k - n_j}). \end{aligned}$$

Uporabili smo Cauchy-Schwarzovo oceno za končno vsoto (skalarni produkt med vektorjem koeficientov in vektorjem trigonometričnih funkcij). Dobimo torej oceno

$$|c_{kj}|^2 \leq 2\pi^2 (|c'_{n_k + n_j}|^2 + |c'_{n_k - n_j}|^2)$$

in odtod

$$\sum_{k \neq j} |c_{kj}|^2 \leq 2\pi^2 \left(\sum_{k \neq j} |c'_{n_k + n_j}|^2 + \sum_{k \neq j} |c'_{n_k - n_j}|^2 \right) \leq 2\pi^2 s \sum_{n \geq 1} |c'_n|^2 < \infty,$$

kjer so c'_n , $n \geq 1$, Fourierovi koeficienti za funkcijo $\chi_F \in L^2$, s pa je število izražav naravnega števila n v obliki $n = n_k \pm n_j$ iz leme 1.

Izrek 2 (Zygmund). Če ima funkcija $f \in L^1$ lakunarno Fourierovo vrsto, je $f \in L^2$.

Dokaz. Izrek zadošča dokazati za realno funkcijo f . Če je njena Fourierova vrsta oblike $S(f) \sim \sum_k c_k e^{in_k x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(n_k x + \delta_k)$, moramo dokazati, da je $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ oziroma $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ oziroma $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty$, kjer je $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2 = 4|c_k|^2$ za $k = 1, 2, 3, \dots$

Po izreku Kolmogorova (izrek 1) konvergirajo delne vsote $S_n f \rightarrow f$ s.p. na \mathbb{R} , torej gotovo povsod na podmnožici $E \subset [-\pi, \pi]$ s pozitivno mero $m(E) > 0$. Po izreku Jegorova iz I. poglavja za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka zaprta podmnožica $F \subset E$, da je $m(E \setminus F) < \epsilon$ in je konvergenca $S_n f \rightarrow f$ enakomerna na F . Število ϵ vzamemo tako majhno, da je tudi $m(F) > 0$.

Izberimo dovolj velik indeks m in $n > m$. Tedaj je $\int_F |S_n f(x) - S_m f(x)|^2 dx < \epsilon^2 m(F)$. Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} \int_F |S_n f(x) - S_m f(x)|^2 dx &= \int_F \left(\sum_{m < k \leq n} \rho_k \cos(n_k x + \delta_k) \right)^2 dx = \\ &= \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 \int_F \cos^2(n_k x + \delta_k) dx + \sum_{m < k, j \leq n, k \neq j} \rho_k \rho_j \int_F \cos(n_k x + \delta_k) \cos(n_j x + \delta_j) dx = \\ &= \sum_{m < k \leq n} c_{kk} \rho_k^2 + \sum_{m < k, j \leq n, k \neq j} c_{kj} \rho_k \rho_j, \end{aligned}$$

če uporabimo oznake iz leme 1. Izberimo poljuben $\delta > 0$, pa lahko za vsak dovolj velik m po Cauchy-Schwarzu in po lemi 1 ocenimo

$$\left| \sum_{m < k, j \leq n, k \neq j} c_{kj} \rho_k \rho_j \right| \leq \left(\sum_{m < k, j \leq n, k \neq j} |c_{kj}|^2 \right)^{1/2} \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 < \delta \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2.$$

Naj bo še m tako velik, da je $|c_{kk} - m(F)/2| < \delta$, saj vemo, da po Riemann-Lebesguovi lemi $c_{kk} = \int_F \cos^2(n_k x + \delta_k) dx$ konvergira pri pogoju $k \rightarrow \infty$ proti $m(F)/2$ (glej dokaz trditve 5.1). Tedaj imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(F) \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 &= \left(\sum_{m < k \leq n} \left(\frac{1}{2} m(F) - c_{kk} \right) \rho_k^2 - \sum_{m < k, j \leq n, k \neq j} c_{kj} \rho_k \rho_j \right) + \\ &+ \int_F |S_n f(x) - S_m f(x)|^2 dx \leq 2\delta \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 + \epsilon^2 m(F) \end{aligned}$$

oziroma

$$\frac{1}{4} m(F) \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 \leq \epsilon^2 m(F),$$

če je $\delta < m(F)/8$. Torej je $\sum_{m < k \leq n} |c_k|^2 = \frac{1}{4} \sum_{m < k \leq n} \rho_k^2 \leq \epsilon^2$. To pa že pomeni, da je $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ in po Riesz-Fischerjevem izreku je $f \in L^2$.

Opomba. V resnici smo v dokazu Zygmundovega izreka potrebovali samo dejstvo, da zaporedje delnih vsot $S_n f$ lakunarne Fourierove vrste za f konvergira (nekam) na množici s pozitivno mero. Potem sledi $f \in L^2$ (obratno je tudi res, kot je pokazal Carleson). Pravzaprav niti ni treba, da je trigonometrična vrsta Fourierova, da le delne vsote $S_n(x)$ konvergirajo za vsak $x \in E$ in je $m(E) > 0$. Spet dobimo $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ in po Riesz-Fischerjevem izreku je to Fourierova vrsta neke funkcije iz L^2 .

Še več, isto bi skoraj na enak način z uporabo Cesárovih namesto navadnih delnih vsot lahko pokazali tudi v primeru, če bi bila vrsta le Cesárovo sumabilna na množici s pozitivno mero.

Posledica 1. Če za lakunarno trigonometrično vrsto $\sum_k c_k e^{in_k x}$ velja $\sum_k |c_k|^2 = \infty$, potem ta vrsta ni Fourierova, ne konvergira in ni sumabilna na nobeni podmnožici s pozitivno mero (torej divergira skoraj povsod).

Dokaz. To sledi iz izreka 2 ob upoštevanju zgornje opombe.

Posledica 2. Če je $f \in L^1 \setminus L^2$, Fourierova vrsta $S(f)$ ne more biti lakunarna.

Zgled. Trigonometrična vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos 2^k x$ je očitno lakunarna, vendar je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Torej vrsta ni Fourierova.

Brez dokaza povejmo še naslednji izrek o lakunarnih Fourierovih vrstah omejenih funkcij, analogen Zygmundovemu izreku.

Izrek (Sidon). Če ima omejena funkcija f lakunarno Fourierovo vrsto, je funkcija f zvezna in za njene Fourierove koeficiente c_k velja $\sum_k |c_k| < \infty$, se pravi, da je vrsta tudi absolutno in enakomerno konvergentna (k funkciji f).

Dokaz. Glej npr. [2], str. 693.

Posledica. (a) Če za lakunarno trigonometrično vrsto $\sum_k c_k e^{in_k x}$ velja $\sum_k |c_k| = \infty$, potem to ni Fourierova vrsta nobene omejene funkcije.

(b) Če omejena funkcija f ni zvezna, njena Fourierova vrsta ne more biti lakunarna.

Dokaz. To je direktna posledica Sidonovega izreka.

Dotaknili smo se absolutne in enakomerne konvergence trigonometričnih vrst. Pogoj $\sum_k |c_k| < \infty$ je za to vsekakor zadosten. Kdaj je tudi potreben, pove naslednji Luzin-Denjoyev izrek, katerega dokaz je podoben tako dokazu Cantor-Lebesguovega izreka (posledica trditve 5.1) kot dokazu Zygmundovega izreka (izrek 2) in s katerim zaključujemo ta razdelek.

Izrek 3 (Luzin-Denjoy). Če trigonometrična vrsta $\sum_k c_n e^{in x}$ absolutno konvergira na množici s pozitivno mero, velja $\sum_n |c_n| < \infty$.

Dokaz. Izrek zadošča dokazati za vrsto z realnimi koeficienti a_n in b_n . Pogoj $\sum_n |c_n| < \infty$ je ekvivalenten pogoju $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$, le-ta pa pogoju $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, kjer je spet $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Če je še δ_n tak, da je $a_n = \rho_n \cos \delta_n$ in $b_n = \rho_n \sin \delta_n$, je trigonometrična vrsta dana z $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \delta_n)$.

Denimo, da trigonometrična vrsta absolutno konvergira na množici E in da je $m(E) > 0$. Tedaj velja na E tudi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx - \delta_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \delta_n)| < \infty.$$

Torej konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx - \delta_n)$ povsod na E proti končni merljivi pozitivni funkciji f . Lahko predpostavimo, da je E omejena množica s pozitivno mero. Po izreku Jegorova obstaja za vsak $\epsilon > 0$ zaprta podmnožica $F \subset E$ z lastnostjo $m(E \setminus F) < \epsilon$, tako

da je na F konvergenca enakomerna, za to lahko po F členoma integriramo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \int_F \cos^2(nx - \delta_n) dx = \int_F \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos^2(nx - \delta_n) dx = \int_F f(x) dx < \infty.$$

Funkcija f je namreč na kompaktni množici F zvezna in zato omejena in integrabilna. Število $\epsilon > 0$ lahko izberemo tako majhno, da je tudi $m(F) > 0$. Po Riemann-Lebesguovi lemi konvergira $\int_F \cos^2(nx - \delta_n) dx$ proti $m(F)/2$. Obstaja torej tak indeks N , da velja neenakost $\int_F \cos^2(nx - \delta_n) dx > m(F)/4$ za $n \geq N$. Torej je

$$\frac{m(F)}{4} \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n \int_F \cos^2(nx - \delta_n) dx < \infty$$

oziroma $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$.

7. Večkratne Fourierove vrste

Ogledali si bomo samo najosnovnejše pojme v zvezi z večkratnimi Fourierovimi vrstami, ne zaradi razvijanja njihove teorije, ampak bolj zato, da jih bomo lahko uporabili za dokaz izreka Minkowskega, ki ga bomo potrebovali v zadnjem poglavju.

Dogovorimo se za nekaj oznak. Element v r -razsežnem evklidskem prostoru \mathbb{R}^r , se pravi r -terico realnih števil, bomo označili z $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, običajni skalarni produkt v \mathbb{R}^r pa z $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r$. Naj bo $I = [-\pi, \pi]$ in $I^r = I \times I \times \dots \times I$ (r -krat) r -razsežna kocka v \mathbb{R}^r in $L^1(I^r)$ ustrezeni prostor integrabilnih funkcij na I^r . Pravzaprav bomo funkcije periodično nadaljevali na ves prostor \mathbb{R}^r s periodo 2π v vsaki spremenljivki. Tedaj bomo na kratko pisali kar L^1 namesto $L^1(I^r)$.

Vektor (r -terico) $k = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{R}^r$, kjer so $k_i \in \mathbb{Z}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, r$, bomo imenovali *multiindeks*. Če je $f \in L^1$, lahko vsakemu multiindeksu k priredimo Fourierov koeficient $c_k = \widehat{f}(k)$ s predpisom

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{I^r} f(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

ali na dolgo

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2, \dots, x_r) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r)} dx_1 dx_2 \dots dx_r,$$

funkciji f pa Fourierovo vrsto $S(f, x)$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^r} c_k e^{ik \cdot x} = \sum_{k_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_r = -\infty}^{\infty} c_{k_1, k_2, \dots, k_r} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r)}.$$

V posebnem primeru imamo pri funkcijah dveh spremenljivk Fourierove koeficiente

$$c_{m,n} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy$$

in dvojno (dvakratno) Fourierovo vrsto v kompleksni obliki

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} = c_{0,0} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{m,0} e^{imx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{0,n} e^{iny} + \sum_{m \neq n} \sum c_{m,n} e^{i(mx+ny)}.$$

Oboje lahko zapišemo tudi v realni obliki

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy, \quad a'_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy,$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \cos ny dx dy, \quad b'_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny dx dy,$$

oziroma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} a_{0,0} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m,0} \cos mx + b_{m,0} \sin mx) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0,n} \cos ny + b_{0,n} \sin ny) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{m,n} \cos mx \cos ny + a'_{m,n} \cos mx \sin ny + b_{m,n} \sin mx \cos ny + b'_{m,n} \sin mx \sin ny). \end{aligned}$$

Pri tem veljajo naslednje relacije ($m, n \geq 1$): $a_{0,0} = 4c_{0,0}$

$$\begin{array}{ll} a_{m,0} - ib_{m,0} = 4c_{m,0} & a_{m,n} - ia'_{m,n} - ib_{m,n} - b'_{m,n} = 4c_{m,n}, \\ a_{m,0} + ib_{m,0} = 4c_{-m,0} & a_{m,n} - ia'_{m,n} + ib_{m,n} + b'_{m,n} = 4c_{-m,n}, \\ a_{0,n} - ib_{0,n} = 4c_{0,n} & a_{m,n} + ia'_{m,n} - ib_{m,n} + b'_{m,n} = 4c_{m,-n}, \\ a_{0,n} + ib_{0,n} = 4c_{0,-n} & a_{m,n} + ia'_{m,n} + ib_{m,n} - b'_{m,n} = 4c_{-m,-n}. \end{array}$$

Opomba. S konvergenco po točkah dvakratnih ali večkratnih Fourierovih vrst so (tako kot s konvergenco navadnih številskih večkratnih vrst) hude težave. Gre za vprašanje vrstnega reda sumiranja členov oziroma za vprašanje, kako sploh definirati delne vsote. Ker je možnih več različnih odgovorov, imamo tudi več različnih tipov konvergence. Tako govorimo npr. pri dvojnih Fourierovih vrstah o

- (a) *kvadratni konvergenca*, če je $S_n f(x, y) = \sum_{|k| \leq n} \sum_{|j| \leq n} c_{k,j} e^{i(kx+jy)}$ in pošljemo $n \rightarrow \infty$,
 (b) *krožni konvergenca*, če je $S_n f(x, y) = \sum_{k^2+j^2 \leq r^2} c_{k,j} e^{i(kx+jy)}$ in pošljemo $r \rightarrow \infty$,
 (c) *pravokotni konvergenca*, če je $S_n f(x, y) = \sum_{|k| \leq m} \sum_{|j| \leq n} c_{k,j} e^{i(kx+jy)}$ in pošljemo $m, n \rightarrow \infty$, itd.

Glede na tip konvergence so npr. tudi za dvojne Fourierove vrste dobili različne rezultate. Nekateri so podobni tistim pri navadnih Fourierovih vrstah, nekateri pa so povsem drugačni. Tako so npr. za kvadratno konvergenco ugotovili, da Fourierova vrsta $S(f, x)$ konvergira s.p. $x \in \mathbb{R}^2$ proti f , če je $f \in L^2$, kar je analogija Carlesonovega rezultata. Za krožno konvergenco je, kot kaže, problem s.p. konvergence za funkcije iz L^2 še odprt (glej [1]). Za pravokotno konvergenco pa je C. Fefferman leta 1971 podal primer *vezne* funkcije dveh spremenljivk, katere Fourierova vrsta *nikjer* ne konvergira.

Kvadratična konvergenca, se pravi konvergenca v prostoru L^2 , je lažja in rezultati enaki kot pri navadnih Fourierovih vrstah. Prostor $L^2 = L^2(I^r)$ je Hilbertov, s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_{I^r} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2, \dots, x_r) \overline{g(x_1, x_2, \dots, x_r)} dx_1 dx_2 \dots dx_r$$

za $f, g \in L^2$. Torej so Fourierovi koeficienti (z multiindeksom k)

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \langle f, e_k \rangle,$$

kjer je $e_k = e^{ik \cdot x}$ za vsak multiindeks k . Funkcije $e_k / (2\pi)^{r/2}$, kjer teče k po vseh multiindeksih, sestavljajo ortonormiran sistem. Pravokotne delne vsote (z multiindeksom $n = (n_1, n_2, \dots, n_r)$) so

$$S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik \cdot x} = \sum_{|k_1| \leq n_1} \sum_{|k_2| \leq n_2} \dots \sum_{|k_r| \leq n_r} c_{k_1, k_2, \dots, k_r} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r)}.$$

Podobno kot v izreku 4.2 najdemo $\|S_n f - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - (2\pi)^r \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2$ in Besselovo neenakost $(2\pi)^r \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. Odtod vidimo, da Fourierova vrsta funkcije $f \in L^2$ pravokotno konvergira v normi prostora L^2 proti neki funkciji g , ki ima iste Fourierove koeficiente kakor f . To je, velja $\|S_n f - g\|_2 \rightarrow 0$ ($\min_k n_k \rightarrow \infty$).

Za $r = 2$ npr. imamo za poljubna indeksa $M > m, N > n$ (glej skico):

$$\|S_{M,N}f - S_{m,n}\|_2^2 \leq (2\pi)^2 \left(\sum_{k=-M}^{-m-1} \sum_{j=-N}^N |c_{k,j}|^2 + \sum_{k=-m}^m \left(\sum_{j=-N}^{-n-1} |c_{k,j}|^2 + \sum_{j=n+1}^N |c_{k,j}|^2 \right) + \sum_{k=m+1}^M \sum_{j=-N}^N |c_{k,j}|^2 \right) \rightarrow 0 \quad (m, n, M, N \rightarrow \infty).$$

Ker se da pokazati (glej spodnjo opombo), da velja izrek o enoličnosti, mora biti $g = f$ s.p. Nazadnje velja tudi v primeru večkratnih Fourierovih vrst Parsevalova enakost (zapisana z multiindeksi):

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^r \sum_{k \in \mathbb{Z}^r} |c_k|^2.$$

Opomba. Naj bo $h \in L^1(I^2)$ in $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy = 0$ za vsak $m, n \in \mathbb{Z}$. Tedaj je $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) e^{-iny} dy \right) e^{-imx} dx = 0$ za vsak $m, n \in \mathbb{Z}$, torej $\int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) e^{-iny} dy = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ s.p. x . Natančneje, za vsak n obstaja merljiva množica A_n z lastnostjo $m(A_n^c) = 0$, tako da je $\int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) e^{-iny} dy = 0$, če je $x \in A_n$. Naj bo $A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n$, pa je tudi $m(A^c) = m(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n^c) = 0$. Poleg tega velja $\int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) e^{-iny} dy = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, če je $x \in A$. Torej je $h(x, y) = 0$ s.p. y , če je $x \in A$. Potem pa je res tudi $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x, y)| dx dy = \int_A \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(x, y)| dy \right) dx = 0$, se pravi, $h(x, y) = 0$ s.p. $x, y \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Riemann-Lebesguova lema. Za $f \in L^1$ je $c_k \rightarrow 0$ ($\max_j |k_j| \rightarrow \infty$).

Dokaz. Če je $f \in L^2$ sledi dokaz iz konvergence vrste $\sum_k |c_k|^2 < \infty$. Ker je $L^2 \subset L^1$ gost podprostor (posplošitev Luzinovega izreka na več spremenljivk npr. pove, da je množica zveznih funkcij gosta v L^1), za vsak $f \in L^1$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja $g \in L^2$, tako da je $\|f - g\|_1 < \epsilon(2\pi)^r$. Potem je

$$|c_k| = |\widehat{f}(k)| \leq |(f - g)\widehat{}(k)| + |\widehat{g}(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^r} \|f - g\|_1 + |\widehat{g}(k)| \leq \epsilon + |\widehat{g}(k)|.$$

Odtod je $\limsup_{\max_j |k_j| \rightarrow \infty} |c_k| \leq \epsilon$ oziroma $\lim_{\max_j |k_j| \rightarrow \infty} |c_k| = 0$.

Večkratne Fourierove vrste uporabimo v teoriji konveksnih množic v evklidskem prostoru.

Trditvev 1. Naj bo K konveksna množica v \mathbb{R}^r , simetrična glede na koordinatno izhodišče in taka, da je njena prostornina večja od 2^r , tedaj obstaja v K vsaj ena od 0 različna točka s celimi koordinatami.

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je K omejena množica, sicer jo presekamo z dovolj veliko kroglo tako, da presek še vedno zadošča predpostavkam trditve. Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R}^r)$ funkcija z lastnostjo $f = 0$ zunaj množice $2\pi K$. Za vsak $x \in \mathbb{R}^r$ definirajmo

$$g(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} f(2x + 4\pi p).$$

Ker je pri vsakem x zaradi omejenosti množice K število od 0 različnih členov končno, celo omejeno z neko konstanto M , neodvisno od x , je funkcija g dobro definirana. Očitno je periodična s periodo 2π glede na vsako spremenljivko in merljiva. Poleg tega je $g \in L^2$,

kjer je $L^2 = L^2(I^r)$ in kot prej $I^r = I \times I \times \dots \times I$ (r -krat), $I = [0, 2\pi]$. To sledi iz ocene

$$|g(x)|^2 = \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} f(2x + 4\pi p) \right|^2 \leq M \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} |f(2x + 4\pi p)|^2,$$

veljavne za vsak x (po Cauchy-Schwarzovi neenakosi), od koder dobimo z integracijo

$$\|g\|_2^2 \leq M \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} \int_{I^r} |f(2x + 4\pi p)|^2 dx = \frac{M}{2^r} \int_{\mathbb{R}^r} |f(t)|^2 dt = \frac{M}{2^r} \|f\|_{\mathbb{R}^r}^2 < \infty.$$

Fourierovi koeficienti funkcije g so $c_k = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{I^r} g(x) e^{-ik \cdot x} dx$ in v posebnem primeru dobimo podobno kot prej

$$\begin{aligned} (2\pi)^r c_0 &= \int_{I^r} g(x) dx = \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} \int_{I^r} f(2x + 4\pi p) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} f(2x) dx = \frac{1}{2^r} \int_{\mathbb{R}^r} f(t) dt = \frac{1}{2^r} \int_{2\pi K} f(t) dt. \end{aligned}$$

Poleg tega velja Parsevalova enakost:

$$(2\pi)^r \sum_k |c_k|^2 = \|g\|_2^2 = \int_{I^r} |g(x)|^2 dx = \int_{I^r} \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} f(2x + 4\pi p) \right|^2 dx.$$

Pokažimo, da obstaja točka $x \in I^r$ ter različna multiindeksa $p, q \in \mathbb{Z}^r$, $p \neq q$, tako da je $f(2x + 4\pi p) \overline{f(2x + 4\pi q)} \neq 0$. Pa denimo, da to ni res. Tedaj za vsak $x \in I^r$ in za poljubna multiindeksa $p \neq q$ velja $f(2x + 4\pi p) \overline{f(2x + 4\pi q)} = 0$. Pokazali bomo, da pri predpostavkah trditve to privede do protislovja. Parsevalova enakost nam v tem primeru da

$$(2\pi)^r \sum_k |c_k|^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}^r} \int_{I^r} |f(2x + 4\pi p)|^2 dx = \frac{1}{2^r} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^r)}^2.$$

Izberimo za f karakteristično funkcijo množice $2\pi K$. Tedaj je

$$(2\pi)^r \sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{2^r} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^r)}^2 = \frac{(2\pi)^r}{2^r} V(K)$$

oziroma $\sum_k |c_k|^2 = V(K)/2^r$. Poleg tega je

$$(2\pi)^r c_0 = \frac{1}{2^r} \int_{2\pi K} f(t) dt = \frac{(2\pi)^r}{2^r} V(K)$$

oziroma $c_0 = V(K)/2^r$. Ker je vedno $|c_0|^2 \leq \sum_k |c_k|^2$, velja $(V(K)/2^r)^2 \leq V(K)/2^r$, od koder sledi $V(K)/2^r \leq 1$ oziroma $V(K) \leq 2^r$ v nasprotju s predpostavko $V(K) > 2^r$.

Dokazali smo, da obstaja taka točka $x \in I^r$ in taka multiindeksa $p \neq q$, da je $f(2x + 4\pi p) \overline{f(2x + 4\pi q)} \neq 0$. Tedaj je $2x + 4\pi p \in 2\pi K$ in hkrati $2x + 4\pi q \in 2\pi K$. Zaradi simetričnosti množice K , je tudi $-2x - 4\pi q \in 2\pi K$, zaradi konveksnosti pa celo $2\pi(p - q) \in 2\pi K$ oziroma $p - q \in K$. Ker sta p in q različna multiindeksa, je $p - q$ od 0 različna točka v K s celimi koordinatami.

Posledica. Trditev 1 velja tudi, če je K zaprta konveksna simetrična množica v \mathbb{R}^r z lastnostjo $V(K) \geq 2^r$.

Dokaz. Množico K lahko od zunaj poljubno natančno aproksimiramo s konveksnimi simetričnimi množicami $K_j \supset K$ z lastnostjo $V(K_j) > 2^r$. Po trditvi 1 vsaka množica K_j vsebuje od 0 različno točko x_j s celimi koordinatami. Ker lahko iz (omejenega) zaporedja (x_j) izberemo konvergentno podzaporedje (tako podzaporedje je konstantno od nekje naprej) in je K zaprta množica, je limitna točka tega podzaporedja v K in ima seveda cele koordinate.

Izrek 1 (Minkowski). Naj bo A nesingularna kvadratna matrika reda r z realnimi koeficienti. Za poljubna pozitivna števila $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ z lastnostjo $|\det A| \leq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_r$ obstaja tak vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^\top$ s celimi komponentami, da velja $|(Ax)_k| \leq \delta_k$ za vsak $k = 1, 2, \dots, r$.

Dokaz. Definirajmo množico $K = \{x \in \mathbb{R}^r; |(Ax)_k| \leq \delta_k \text{ za } k = 1, 2, \dots, r\}$. To je zaprta konveksna simetrična množica s prostornino

$$V(K) = \int_K dx = \int_{|y_k| \leq \delta_k, \forall k} |\det(A^{-1})| dy = \frac{1}{|\det A|} 2^r \delta_1 \delta_2 \dots \delta_r \geq 2^r.$$

Upoštevali smo, da $y = Ax$ definira bijektivno zvezno preslikavo in da je $\det(A^{-1})$ Jacobijeva determinanta inverzne preslikave. Po posledici trditve 1 obstaja v K točka $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^\top$ s celimi koordinatami. Zanj veljajo zelene relacije.

Pristavek. Izrek Minkowskega velja tudi za matriko A s kompleksnimi koeficienti, če nastopajo v njej vrstice v konjugiranih parih in pripadata vrsticama iz istega para enaki števili δ_k .

Dokaz. V matriki A naj bo npr. m vrstic realnih, $2n$ vrstic pa (konjugirano) kompleksnih, pri čemer je $m + 2n = r$. S permutacijo vrstic lahko dosežemo, da je prvih m vrstic realnih, naslednjih n kompleksnih, zadnjih n pa konjugiranih prejšnjim. Potem

lahko permutirano matriko A zapišemo v bločni obliki: $A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 + iA_2 \\ A_1 - iA_2 \end{bmatrix}$, kjer so A_0, A_1

in A_2 realne matrike. Definirajmo novo realno matriko $A' = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$. Ker je

$$\begin{aligned} \det A' &= \det \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 + iA_2 \\ A_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(-2i)^n} \det \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 + iA_2 \\ -2iA_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-2i)^n} \det \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 + iA_2 \\ A_1 - iA_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-2i)^n} \det A, \end{aligned}$$

je tudi matrika A' nesingularna. Poleg tega velja

$$\begin{aligned} |\det A'| &= \frac{1}{2^n} |\det A| \leq \frac{1}{2^n} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_r = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \frac{\delta_{m+1} \delta_{m+2} \dots \delta_{m+n}}{(\sqrt{2})^n} \cdot \frac{\delta_{m+n+1} \delta_{m+n+2} \dots \delta_{m+2n}}{(\sqrt{2})^n} \\ &= \delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \left(\frac{\delta_{m+1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta_{m+2}}{\sqrt{2}} \cdot \dots \cdot \frac{\delta_{m+n}}{\sqrt{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Označimo $\delta'_k = \delta_k$ za $k = 1, 2, \dots, m$ in $\delta'_k = \delta'_{k+n} = \delta_{m+k}/\sqrt{2}$ za $k = m+1, m+2, \dots, m+n$. Po izreku 1, uporabljenem za matriko A' , obstaja vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^\top$ s celimi komponentami, tako da je $|(A'x)_k| \leq \delta'_k$ za vsak $k = 1, 2, \dots, r$ oziroma

$$|(A_0x)_k| \leq \delta_k \text{ za } k = 1, 2, \dots, m,$$

$$|(A_1x)_j| \leq \delta_{m+j}/\sqrt{2}, \quad |(A_2x)_j| \leq \delta_{m+j}/\sqrt{2} \text{ za } j = 1, 2, \dots, n.$$

Torej velja tudi $|(A_0x)_k| \leq \delta_k$ za $k = 1, 2, \dots, m$ ter

$$|((A_1 \pm iA_2)x)_j| = |(A_1x)_j \pm i(A_2x)_j| = \sqrt{(A_1x)_j^2 + (A_2x)_j^2} \leq \sqrt{\delta_{m+j}^2/2 + \delta_{m+j}^2/2} = \delta_{m+j}$$

za $j = 1, 2, \dots, n$. Zato je $|(Ax)_k| \leq \delta_k$ za $k = 1, 2, \dots, r$ in dokaz je končan.

8. Konvergenca Fourierovih vrst po točkah

Konvergenca delnih vsot Fourierove vrste po točkah smo se že dotaknili, ko smo obravnavali konvergenco Cesárovih delnih vsot (če je izpolnjen ta ali oni Tauberjev pogoj, iz konvergenca slednjih sledi konvergenca Fourierove vrste). V tem razdelku bomo predstavili dva klasična konvergenčna izreka in omenili nekaj drugih kriterijev za konvergenco. Obravnavali bomo tudi vprašanje integriranja Fourierove vrste.

Najprej preoblikujmo Dirichletovo jedro in izpeljimo asimptotično vedenje delnih vsot Fourierove vrste za dano funkcijo $f \in L^1$. Ker za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ velja

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)} = 2 \frac{\sin nx}{x} + \cos nx + (\operatorname{ctg}(x/2) - 2/x) \sin nx,$$

je

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) (\operatorname{ctg}(t/2) - 2/t) \sin nt dt. \end{aligned}$$

Zadnja dva člena z rastočim n konvergirata proti 0 po Riemann-Lebesguovi lemi, zato imamo pri poljubnem $0 < \delta < \pi$

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{f(x+t)}{t} \sin nt dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Drugi integral spet konvergira proti 0, ko $n \rightarrow \infty$, po Riemann-Lebesguovi lemi, saj je $t \rightarrow \frac{f(x+t)}{t} \chi_{\{|t| \geq \delta\}}(t)$ integrabilna funkcija. Torej je končno

$$(a) \quad S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Upošteva je sodost funkcije $\sin nt/t$ lahko to formulo prepisemo v

$$(b) \quad S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

V posebnem primeru $f(x) = 1$ za vsak x , ko je tudi $S_n f(x) = 1$ za vsak x , dobimo iz formule (b)

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Odtod lahko izpeljemo znan rezultat, da je

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin nt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Upošteva je (b) lahko za poljuben $s \in \mathbb{R}$ zapišemo

$$(c) \quad S_n f(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t) - 2s] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Odtod dobimo potreben in zadosten pogoj za konvergenca delnih vsot Fourierove vrste proti številu s .

Izrek 1. *Fourierova vrsta je konvergentna in ima vsoto s natanko takrat, ko velja*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t) - 2s] \frac{\sin nt}{t} dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dokaz. Sledi takoj iz formule (c).

Druga preprosta posledica je ti. *Riemannov princip lokalizacije* za Fourierove vrste.

Izrek 2. Če je $f = 0$ na intervalu $(x - \delta, x + \delta)$, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = 0.$$

Dokaz. Iz (a) ali (b) dobimo v tem primeru relacijo $S_n f(x) = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$).

Princip lokalizacije pove, da je konvergenčno vedenje Fourierove vrste $S(f)$ v točki x odvisno samo od lokalnih lastnosti funkcije f v bližini točke x . Z dugimi besedami, dve funkciji, ki se ujemata v okolici točke x , imata Fourierovi vrsti, ki v točki x hkrati obe konvergirata ali obe divergirata.

Izrek 3 (Dini). Če je funkcija $f_{x,s}(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s}{t}$ integrabilna na intervalu $[0, \delta]$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = s$. Če v točki x obstajata leva in desna limita funkcije f , je $s = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Če je f zvezna v točki x , je $s = f(x)$.

Dokaz. Iz formule (c) vidimo, da je v primeru integrabilnosti funkcije $f_{x,s}$ po Riemann-Lebesguovi lemi izpolnjen pogoj izreka 1, torej je $S_n f(x) - s = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Če obstajata leva in desna limita, $f(x+)$ in $f(x-)$, funkcije f v točki x , sledi iz integrabilnosti funkcije $f_{x,s}$ nujno $s = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, sicer bi v bližini točke 0 nastopile težave. Če je f zvezna v x , je seveda $s = f(x)$.

Posledica. Za funkcijo $f \in L^1$ velja $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) v vsakem od naslednjih primerov:

- (a) f je Lipschitzova v okolici točke x .
- (b) f je zvezna v x in obstajata (končna) levi in desni odvod v x .
- (c) f je odvedljiva v točki x .

Dokaz. (a) Če je f Lipschitzova v okolici točke x (s konstanto M), je v x zvezna, zato je $s = f(x)$ in $|f_{x,f(x)}(t)| \leq (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|)/t \leq 2M$ za vsak t blizu x . Torej je funkcija $f_{x,f(x)}$ integrabilna v okolici točke x . Po izreku 3 zato velja $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Če je f zvezna v x s končnim levim in desnim odvodom ali če je celo odvedljiva v x , je v okolici x Lipschitzova, tako da točki (b) in (c) sledita iz točke (a).

Trditev 1. Bodita $f, g \in L^1$ in g omejena funkcija. Tedaj konvergirata pri pogoju ($|n| \rightarrow \infty$) integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)e^{-int} dt$ proti 0 enakomerno za $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Naj bo $|g(t)| \leq M$ za vsak t in $\epsilon > 0$. Po izreku o gostoti lahko izberemo tak trigonometrični polinom $p(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx}$, da velja $\|f - p\|_1 < \epsilon/M$. Za poljuben $n \in \mathbb{Z}$ ocenimo

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)e^{-int} dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - p(x+t)]g(t)e^{-int} dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} p(x+t)g(t)e^{-int} dt \right| \leq \\ &\leq M\|f - p\|_1 + \sum_{|k| \leq N} |c_k| \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{i(k-n)t} dt \leq \epsilon + 2\pi \sum_{|k| \leq N} |c_k| |\hat{g}(n-k)|, \end{aligned}$$

od koder dobimo po Riemann-Lebesguovi lemi $\limsup_{|n| \rightarrow \infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)e^{-int} dt \right| \leq \epsilon$ za vsak x in odtod $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)e^{-int} dt = 0$ enakomerno po x .

Opomba. V izpeljavi formul (a),(b) in (c) na začetku razdelka po trditvi 1 vsi izrazi $o(1)$ konvergirajo enakomerno proti 0 pri pogoju $n \rightarrow \infty$.

Izrek 4 (Jordan). Naj bo $f \in L^1$.

(a) Če ima funkcija f v okolici $(x-\delta, x+\delta)$ točke x omejeno variacijo, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

(b) Če je $f \in C(a, b) \cap BV(a, b)$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x)$ enakomerno na vsakem zaprtem podintervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

(c) Če je $f \in C \cap BV([-\pi, \pi])$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = f(x)$ enakomerno na \mathbb{R} .

Dokaz. Kot prej označimo $s = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ in uporabimo formulo (c) z začetka razdelka. Ker gre v vseh treh primerih za funkcije z omejeno variacijo v okolici točke x , zadošča izrek dokazati za realne funkcije, ki so naraščajoče v okolici točke x . Pri poljubnem $\delta > 0$ zapišimo

$$S_n f(x) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+t) - f(x+)] \frac{\sin nt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x-t) - f(x-)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ker je funkcija $f(x+t) - f(x+) \geq 0$ naraščajoča, funkcija $f(x-t) - f(x-) \leq 0$ pa padajoča, dobimo po drugem izreku o povprečni vrednosti (iz razdelka I.3) za primerna števila δ_1, δ_2 , $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq \delta$ odtod

$$\begin{aligned} S_n f(x) - s &= \\ &= [f(x+\delta) - f(x+)] \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + [f(x-\delta) - f(x-)] \frac{1}{\pi} \int_{\delta_2}^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Izberimo $\epsilon > 0$. Ker je

$$\left| \int_{\delta_1}^\delta \frac{\sin nt}{t} dt \right| = \left| \int_{n\delta_1}^{n\delta} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq \left| \int_0^{n\delta} \frac{\sin u}{u} du \right| + \left| \int_0^{n\delta_1} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq 2 \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \leq 2\pi,$$

imamo pri dovolj majhnem $\delta > 0$ oceno

$$|S_n f(x) - s| \leq 2|f(x+\delta) - f(x+)| + 2|f(x-\delta) - f(x-)| + |o(1)| < 4\epsilon + |o(1)|.$$

Torej je $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n f(x) - s| \leq 4\epsilon$ oziroma $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = s$ in velja točka (a). Poleg tega velja naslednje. Če je f zvezna na (a, b) in je $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, je f enakomerno zvezna na $[\alpha, \beta]$, zato je tedaj δ odvisen le od ϵ in ne od x . Če pogledamo, kje smo uporabili Riemann-Lebesguovo lemo, iz opombe pred izrekom oziroma iz trditve 1 vidimo, da tudi $o(1) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) enakomerno po x . Torej je konvergenca $S_n f \rightarrow f(x)$ enakomerna na $[\alpha, \beta]$ in veljata tudi točki (b) in (c).

Posledica 1 (Dirichlet 1829). Če je f omejena funkcija s končno mnogo nezveznostmi prve vrste (skoki) in s končno mnogo ekstremi (npr. odsekoma zvezna in odsekoma odvedljiva), njena Fourierova vrsta v vsaki točki x konvergira proti vrednosti $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

To je bil zgodovinsko prvi znani izrek o konvergenci Fourierovih vrst.

Posledica 2. Če je $f \in AC$, je konvergenca $S_n f \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) enakomerna.

Dokaz. V tem primeru je namreč $f \in C \cap BV([-\pi, \pi])$ in lahko uporabimo izrek 4(c).

Kot vemo, celo za zvezne funkcije Fourierova vrsta ne konvergira nujno v vsaki točki (ampak le skoraj povsod), kaj šele, da bi bila konvergenca enakomerna. Če pa členoma integriramo Fourierovo vrsto, ima dobljena vrsta v tem pogledu precej lepše lastnosti.

Izrek 5. Naj bo $f \in L^1$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ za vsak x , $c_n = \widehat{f}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ in $C = \widehat{F}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. Tedaj vrsta $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$ konvergira enakomerno na \mathbb{R} in za vsak x velja

$$F(x) = c_0 x + C + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}.$$

Dokaz. Pišimo $G(x) = F(x) - c_0 x$. To je zvezna periodična funkcija, saj je $F(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = F(x) + F(2\pi)$ in zato $G(x + 2\pi) = F(x + 2\pi) - c_0(x + 2\pi) = F(x) - c_0 x + F(2\pi) - 2\pi c_0 = G(x)$. Upoštevali smo, da je $F(2\pi) = 2\pi c_0$ po definiciji koeficienta c_0 . Ker je $G(x) = \int_0^x (f(t) - c_0)dt$ za vsak x , je $G \in AC \subset BV$. Po Jordanovem izreku (izrek 4) oziroma njegovi posledici Fourierova vrsta za G enakomerno konvergira proti G . Za Fourierove koeficiente funkcije G dobimo $\widehat{G}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = C$ in $\widehat{G}(n) = \widehat{G}'(n)/in = \widehat{f}(n)/in = c_n/in$ za $n \neq 0$, saj je $G' = f - c_0$ s.p. Torej je Fourierova vrsta za G enaka $G(x) = C + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$, pri čemer je konvergenca enakomerna.

Posledica. Fourierovo vrsto funkcije $f \in L^1$ smemo členoma integrirati na poljubnem intervalu $[a, b]$, ne glede na to, ali sama vrsta konvergira. Pri tem je

$$\int_a^b f(t)dt = c_0(b-a) + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} (e^{inb} - e^{ina}).$$

Dokaz. Po izreku 5 je $\int_0^x f(t)dt = c_0 x + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$ za vsa $x \in \mathbb{R}$. Vstavimo $x = b$ in $x = a$ in obe konvergentni vrsti odštejemo.

Iz izreka o integriranju Fourierovih vrst dobimo koristen potreben pogoj za to, da je dana trigonometrična vrsta Fourierova.

Trditev 2. Če je trigonometrična vrsta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ Fourierova, vrsti $\sum_{n \neq 0} c_n/n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$, kjer je $b_n = i(c_n - c_{-n})$, konvergirata.

Dokaz. V izreku 5 izberimo $x = 0$ in dobimo $F(0) = C + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in}$. Ker je $F(0) = 0$, imamo $\sum_{n \neq 0} c_n/n = -iC = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. Poleg tega je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n = i \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}/n \right) = i \sum_{n \neq 0} c_n/n = C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$

Zgled. 1. Iz razvoja $(\pi - x)/2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$ za $0 < x < 2\pi$ lahko npr. takoj izračunamo vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

2. Iz trditve 2 vidimo, da sinusna vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ ni Fourierova, čeprav koeficienti monotonno konvergirajo proti 0. Potreben pogoj $\sum_{n=2}^{\infty} b_n/n < \infty$ namreč ni izpolnjen, saj vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ne konvergira. Kasneje bomo videli, da sinusna vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ konvergira za vsak x . Prav tako bomo videli, da konjugirana kosinusna vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ konvergira za vsak $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in je poleg tega celo Fourierova vrsta.

Dinijev in Jordanov izrek lahko gledamo kot kriterija za lokalno konvergenco Fourierove vrste, saj sta njuni predpostavki dva (različna) zadostna pogoja za konvergenco v točki x . Denimo, da za funkcijo f velja $f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$. Potem je Dinijev pogoj integrabilnost funkcije

$$f_{x,f(x)}(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/t$$

v bližini točke x , Jordanov pa omejena variacija funkcije f v bližini točke x .

Dinijev in Jordanov kriterij sta ne samo različna ampak med seboj tudi neprimerljiva. To pomeni, da obstajajo primeri, ko po enem kriteriju lahko ugotovimo konvergenco Fourierove vrste, po drugem pa ne.

Zgled. 1. Izberimo npr. funkcijo f , definirano s predpisom $f(x) = -1/\ln(|x|/2\pi)$ za $x \neq 0$ in $f(0) = 0$. Preprosto se vidi, da je $f \in BV([-\pi, \pi])$, saj je za $x < 0$ padajoča, za $x > 0$ pa naraščajoča. Po Jordanovem kriteriju njena Fourierova vrsta konvergira celo enakomerno na vsej realni osi. Dinijevega kriterija pa npr. v točki $x = 0$ ne moremo uporabiti, saj je $f_{0,0}(t) = 2f(t)/t$ zaradi sodosti funkcije f . Ta funkcija pa ni integrabilna v bližini točke 0, saj je za vsak $\delta > 0$

$$\int_0^\delta \frac{f(t)}{t} dt = - \int_0^\delta \frac{dt}{t \ln(t/2\pi)} = - \int_0^{\delta/2\pi} \frac{ds}{s \ln s} = - \int_{-\infty}^{\ln(\delta/2\pi)} \frac{du}{u} = +\infty.$$

2. Za drug primer vzemimo npr. funkcijo f , definirano z $f(x) = \sqrt{|x|} \sin(1/|x|)$ za $x \neq 0$ in $f(0) = 0$. Kot vemo, ta funkcija nima omejene variacije v nobeni okolici točke 0, zato Jordanovega kriterija ne moremo uporabiti. Po drugi strani pa po Dinijevem kriteriju konvergira v točki 0, saj je pri poljubnem $\delta > 0$

$$\int_0^\delta |f_{0,0}(t)| dt = 2 \int_0^\delta \frac{|f(t)|}{t} dt = 2 \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \sin \frac{1}{t} \right| dt \leq 2 \int_0^\delta \frac{dt}{\sqrt{t}} = 4\sqrt{\delta} < \infty.$$

Oglejmo si še kakšen drug kriterij konvergence. Za $f \in L^1$ in $0 \leq t \leq \delta$ označimo $\phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$. Potem je, kot vemo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \phi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = 0$ potreben in zadosten pogoj za konvergenco $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ (izrek 1).

Naj bo ψ_x funkcija povprečja, definirana z $\psi_x(0) = 0$ in

$$\psi_x(u) = \frac{1}{u} \int_0^u \phi_x(t) dt.$$

Ta funkcija je zvezna v točki 0, se pravi $\psi_x(u) \rightarrow 0$, ko $u \rightarrow 0$, za vsako Lebesguovo točko x za funkcijo f ali za vsako točko x , v kateri obstajata leva in desna limita funkcije f in velja $f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Izrek 6 (de la Vallée-Poussin). Če je funkcija ψ_x zvezna v točki 0 in ima omejeno variacijo na intervalu $[0, \delta]$, velja $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. Očitno je $[t\psi_x(t)]' = \phi_x(t)$ s.p. t . Torej velja

$$\int_0^\delta \phi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^\delta [t\psi_x(t)]' \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^\delta \psi_x'(t) \sin ntdt + \int_0^\delta \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt.$$

Prvi integral konvergira k 0 po Riemann-Lebesguovi lemi, ker je $\psi_x' \in L^1([0, \delta])$ zaradi $\psi_x \in BV([0, \delta])$. Pokažimo, da konvergira k 0 tudi drugi integral.

Po Jordanovem izreku (izrek 4) Fourierova vrsta za ψ_x v točki 0 konvergira proti $\psi_x(0) = 0$. Upoštevajmo, da je ψ_x soda funkcija. Potem pa po izreku 1 velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta [\psi_x(t) + \psi_x(-t) - 2\psi_x(0)] \frac{\sin nt}{t} dt = 0$$

oziroma $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \psi_x(t) \frac{\sin nt}{t} dt = 0$, kar je potrebno in zadostno za konvergenco Fourierove vrste.

Novi kriterij bomo primerjali s prejšnjima, za kar pa potrebujemo dejstvo, da je zvezna funkcija g na intervalu $[a, b]$, ki je odvedljiva na (a, b) , odvod g' pa je na tem intervalu integrabilen, absolutno zvezna na $[a, b]$ (glej posledico izreka I.5.4).

Trditev 3. *Kriterij de la Vallée-Poussina je močnejši od Dinijevega in od Jordanovega kriterija, tj. če lahko ugotovimo konvergenco Fourierove vrste po kateremkoli od teh dveh kriterijev, jo lahko ugotovimo tudi po de la Vallée-Poussinovem kriteriju. Obratno pa ne velja: obstajajo primeri, ko lahko konvergenco ugotovimo po de la Vallée-Poussinovem kriteriju ne pa po Dinijevem oziroma Jordanovem kriteriju.*

Dokaz. Trditev zadošča dokazati za realno funkcijo f . Naj bo najprej izpolnjen Jordanov pogoj. Če ima funkcija f omejeno variacijo v okolici točke x , jo ima tudi funkcija ϕ_x v okolici točke 0. Torej je ϕ_x razlika dveh naraščajočih funkcij. Potem pa isto velja tudi za funkcijo ψ_x . To se vidi tako: če je npr. že ϕ_x naraščajoča, je $\frac{1}{t} \int_0^t \phi_x(u) du \leq \phi_x(t) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi_x(u) du$ za vsak (dovolj majhen $h > 0$) in zato tudi

$$\begin{aligned} \psi_x(t+h) &= \frac{1}{t+h} \int_0^{t+h} \phi_x(u) du = \frac{1}{t+h} \int_0^t \phi_x(u) du + \frac{1}{t+h} \int_t^{t+h} \phi_x(u) du = \\ &= \frac{t}{t+h} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \phi_x(u) du + \frac{h}{t+h} \cdot \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi_x(u) du \geq \left(\frac{t}{t+h} + \frac{h}{t+h} \right) \frac{1}{t} \int_0^t \phi_x(u) du = \psi_x(t). \end{aligned}$$

Odtod neposredno sledi, da je ψ_x razlika dveh naraščajočih funkcij, če velja to za ϕ_x . Torej je tudi $\psi_x \in BV([0, \delta])$, če velja to za ϕ_x . Poleg tega je funkcija ϕ_x zvezna v točki 0, saj iz $f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, kar je naša stalna predpostavka, sledi $\phi_x(t) \rightarrow 0$, če $t \rightarrow 0$. Potem pa je znano, da velja pri pogoju $t \rightarrow 0$ tudi $\psi_x(t) \rightarrow 0$, se pravi, da je tudi funkcija ψ_x zvezna v točki 0. Torej je izpolnjen de la Vallée-Poussinov pogoj, kar pomeni, da ta kriterij ni slabši od Jordanovega.

Naj bo zdaj izpolnjen Dinijev pogoj $\int_0^\delta \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt < \infty$. Ker je $\psi_x(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \phi_x(u) du$, je

$$\psi'_x(t) = \frac{1}{t} \phi_x(t) - \frac{1}{t^2} \int_0^t \phi_x(u) du$$

s.p. t in imamo zato za $t > 0$ oceno

$$|\psi'_x(t)| \leq \frac{1}{t} |\phi_x(t)| + \frac{1}{t^2} \int_0^t |\phi_x(u)| du.$$

Pokazali bomo, da je desna (in s tem tudi leva) stran integrabilna funkcija.

Izberimo $0 < \epsilon < \delta$ in integrirajmo po delih:

$$\int_\epsilon^\delta \frac{1}{t^2} \int_0^t |\phi_x(u)| du = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon |\phi_x(u)| du - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\phi_x(u)| du + \int_\epsilon^\delta \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt.$$

Ker je $\phi_x(0) = 0$ in iz integrabilnosti funkcije $|\phi_x(t)|/t$ sledi zveznost funkcije ϕ_x v točki 0, obstaja limita $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon |\phi_x(u)| du = |\phi_x(0)| = 0$. Po predpostavki obstaja tudi končna $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\delta \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt$. Torej obstaja limita desne strani (ko $\epsilon \rightarrow 0$). Potemtakem obstaja tudi limita leve strani in je zaradi pozitivnosti integranda enaka njegovemu Lebesguovem integralu. Funkcija $\frac{1}{t^2} \int_0^t |\phi_x(u)| du$ je torej integrabilna na intervalu $[0, \delta]$. Isto po predpostavki velja za funkcijo $|\phi_x(t)|/t$. Iz prejšnje ocene tako sledi, da je funkcija ψ'_x integrabilna na $[0, \delta]$. Poleg tega je $|\psi_x(t)| = \left| \frac{1}{t} \int_0^t \phi_x(u) du \right| \leq \int_0^t \frac{|\phi_x(u)|}{u} du \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$), se pravi, da je ψ_x zvezna tudi v 0 (drugje je povsod odvedljiva). Po izreku I.5.4 je zato funkcija ψ_x absolutno zvezna, torej ima omejeno variacijo na intervalu $[0, \delta]$. Izpolnjen je de la Vallée-Poussinov pogoj, torej ta kriterij ni slabši od Dinijevega.

Ker pa sta, kot smo videli, Dinijev in Jordanov pogoj neprimerljiva, mora biti de la Vallée-Poussinov kriterij res močnejši in dokaz je končan.

Brez dokaza omenimo še dva kriterija za konvergenco Fourierovih vrst, ki sta v zvezi s funkcijo ϕ_x (dokaz glej v [2], str. 249 in 254):

1. **(Young)** Če je funkcija ϕ_x zvezna v 0, funkcija $\theta_x(t) = t\phi_x(t)$ pa ima omejeno variacijo v okolici točke 0 in je $V_{[0,h]}(\theta_x) = O(h)$ ($h \rightarrow 0$), velja $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). Ta kriterij je močnejši od Jordanovega, ni pa močnejši od Dinijevega in je z njim neprimerljiv. Prav tako Youngov kriterij ni primerljiv z de la Vallée-Poussinovim (glej [2], str. 251 - 254).
2. **(Lebesgue)** Če velja $\int_0^\delta \left| \frac{\phi_x(u+h)}{u+h} - \frac{\phi_x(u)}{u} \right| du \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0, h > 0$), velja tudi $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). Ta kriterij je močnejši od vseh prejšnjih kriterijev (glej [2], str. 258), težko pa ga je preveriti v posameznih primerih.

9. Sinusna in kosinusna vrsta

Razdelek obravnava konvergenco trigonometričnih vrst, v katerih nastopajo zgolj sinusi ali zgolj kosinusi. Posebna pozornost je namenjena vprašanju, kdaj je taka vrsta Fourierova.

Definicija. Trigonometrično vrsto oblike (C) $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ imenujemo *kosinusna vrsta*, oblike (S) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ pa *sinusna vrsta*.

Večkrat bomo kosinusni vrsti rekli vrsta (C), sinusni pa vrsta (S). Pri sinusni vrsti tudi običajno potihem privzamemo, da je $a_0 = 0$. Osnovni konvergenčni izrek je naslednji.

Izrek 1. Naj bo $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Tedaj velja:

- (a) Vrsta (C) konvergira za vsak $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in enakomerno za $\delta \leq |x| \leq \pi$ pri $\delta > 0$.
- (b) Vrsta (S) konvergira za vsak x in enakomerno za $\delta \leq |x| \leq \pi$ pri poljubnem $\delta > 0$.

Dokaz. (a) V dodatku C izberimo $b_0 = 1/2$ in $b_k = \cos kx$ za $k = 1, 2, 3, \dots$. Potem za vsak n velja $B_n = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kx = D_n(x)/2$, kjer je D_n Dirichletovo jedro. Za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ imamo oceno

$$|B_n| = \frac{1}{2}|D_n(x)| = \left| \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)} \right| \leq \frac{\pi}{2|x|}$$

oziroma $|B_n| \leq \frac{\pi}{2\delta}$, če je $\delta \leq |x| \leq \pi$. Po trditvi C2 vrsta (C) konvergira za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ oziroma celo enakomerno za $\delta \leq |x| \leq \pi$, ker je tedaj ocena za $|B_n|$ neodvisna od x .

(b) Zdaj izberimo $b_k = \sin kx$ za $k = 1, 2, \dots$ iz za vsak n dobimo $B_n = \sum_{k=1}^n \sin kx = \tilde{D}_n(x)/2$ (konjugirano Dirichletovo jedro). Za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ je

$$|B_n| = \frac{1}{2}|\tilde{D}_n(x)| = \left| \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)} \right| \leq \frac{\pi}{|x|}$$

oziroma $|B_n| \leq \frac{\pi}{\delta}$, če je $\delta \leq |x| \leq \pi$. Po trditvi C2 vrsta (S) konvergira za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ oziroma celo enakomerno za $\delta \leq |x| \leq \pi$, ker je tedaj ocena za $|B_n|$ neodvisna od x . Poleg tega očitno vrsta (S) konvergira tudi pri $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Posledica. Vsota kosinusne ali sinusne vrste je zvezna funkcija za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Dokaz. To je res za vsak $\delta > 0$ na območju $\delta \leq |x| \leq \pi$ zaradi enakomerne konvergence funkcijske vrste z zveznimi členi.

V naslednjem izreku uporabljamo pojem *omejene konvergence* funkcijske vrste. To pomeni, da delne vsote S_n konvergirajo v vsaki točki dane množice E in so hkrati na E enakomerno omejene funkcije: obstaja taka konstanta M , da velja $|S_n(x)| \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $x \in E$. Omejena konvergenca je šibkejša od enakomerne konvergence (iz enakomerne sledi omejena, ne pa obratno). Na omejeno konvergenco bomo naleteli tudi pri kasnejših izrekih.

Izrek 2. Naj za koeficiente vrste velja $a_k \geq 0$ za vsak k .

- (a) Za kosinusno vrsto je ekvivalentno:
- (i) Vrsta (C) konvergira enakomerno na \mathbb{R} .
 - (ii) Vrsta (C) konvergira povsod na \mathbb{R} .
 - (iii) Velja $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.
- (b) Za sinusno vrsto je pri pogoju $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) ekvivalentno:
- (i) Vrsta (S) konvergira omejeno na \mathbb{R} .
 - (iii) Velja $\sup_{n \geq 1} na_n < \infty$.
- (c) Za sinusno vrsto je pri pogoju $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) ekvivalentno:
- (i) Vrsta (S) konvergira enakomerno na \mathbb{R} .
 - (iii) Velja $na_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. (a) Implikaciji (i) \implies (ii) in (ii) \implies (iii) sta očitni. Iz (iii) pa seveda sledi absolutna in enakomerna konvergenca vrste (C).

Točki (b) in (c) za sinusno vrsto dokažimo skupaj. Izberimo zaporedje $x_n = \frac{\pi}{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. Potem je $\pi/4 \leq kx_n \leq \pi/2$ za $n/2 \leq k \leq n$ in imamo oceno

$$\sum_{k=[n/2]+1}^n a_k \sin kx_n \geq \sin(\pi/4) \sum_{k=[n/2]+1}^n a_k \geq (n - [n/2])a_n/\sqrt{2}$$

oziroma $S_n(x_n) - S_{[n/2]}(x_n) \geq \frac{\sqrt{2}}{4}na_n$. Če vrsta (S) konvergira omejeno, je $|S_n(x)| \leq M$ za vsak n in vsak $x \in \mathbb{R}$, torej tudi $na_n \leq 4\sqrt{2}M$ za vsak n . Če pa je konvergenca vrste (S) celo enakomerna, mora veljati $na_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Obratno, naj bo $c_m = \sup_{n \geq m} na_n$ za vsak m . Če velja $na_n \leq M$ za vsak n (oziroma $na_n \rightarrow 0$, ko $n \rightarrow \infty$), velja tudi $c_m \leq M$ za vsak m (oziroma $c_m \rightarrow 0$, ko $m \rightarrow \infty$). Zadošča pokazati, da vrsta (S) konvergira omejeno (oziroma enakomerno) na intervalu $[0, \pi]$ (tedaj bo zaradi lihosti členov konvergirala tudi na $[-\pi, 0]$ in zaradi periodičnosti na vsej realni osi). V ta namen bomo izpeljali oceno $|\sum_{n \geq m} a_n \sin nx| \leq (\pi + 2)c_m$ za vsak m in vsak $x \in [0, \pi]$, od koder bo takoj sledila omejena oziroma enakomerna konvergenca.

Naj bo $0 < x \leq \pi$ in N tak, da je $\pi/(N+1) < x \leq \pi/N$. Po izreku 1 v točki x vrsta (S) konvergira. Po posledici trditve C2 iz dodatka C (kjer izberemo b_k kot v dokazu izreka 1(b) in je zato tudi $B_n \leq \pi/x$) za vsak m velja

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \geq m} a_n \sin nx \right| \leq \sum_{m \leq n < m+N} a_n |\sin nx| + \left| \sum_{n \geq m+N} a_n \sin nx \right| \leq \\ & \leq x \sum_{m \leq n < m+N} na_n + \frac{2\pi}{x} a_{m+N} \leq xNc_m + 2(N+1)a_{m+N} \leq \pi c_m + 2(m+N)a_{m+N} \leq (\pi+2)c_m. \end{aligned}$$

Oceno smo izpeljali pri pogoju $x > 0$, očitno pa velja tudi za $x = 0$. Upošteva je prejšnji komentar je izrek tako dokazan tudi v drugo smer.

Posledica. (a) Če je $a_k \geq 0$ za vsak k in $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, je (C) Fourierova vrsta zvezne funkcije, ki je vsota te vrste.

(b) Če velja $a_k \searrow 0$ in $\sup_{n \geq 1} na_n < \infty$, je (S) Fourierova vrsta omejene funkcije, ki je vsota te vrste.

(c) Če velja $a_k \searrow 0$ in $na_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), je (S) Fourierova vrsta zvezne funkcije, ki je vsota te vrste.

Dokaz. Po izreku 2 pri omenjenih pogojih obe vrsti omejeno konvergirata proti omejeni merljivi funkciji f . Po (LIDK) so Fourierovi koeficienti te funkcije ravno koeficienti a_k , saj smemo vrsto členoma integrirati. V primeru (a) in (c) je konvergenca po izreku 2 celo enakomerna, zato je tudi limitna funkcija zvezna.

Naslednji rezultat govori o absolutni (in enakomerni) konvergenci kosinusne in sinusne vrste.

Izrek 3. Naj bo (a_k) kompleksno zaporedje in naj velja $|a_k| \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

(a) Če vrsta (C) konvergira absolutno v eni sami točki $x_0 \in \mathbb{R}$, velja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ in vrsta (C) konvergira absolutno in enakomerno na vsej realni osi.

(b) Če vrsta (S) konvergira absolutno v eni sami točki $x_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, velja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ in vrsta (S) konvergira absolutno in enakomerno na vsej realni osi.

Dokaz. (a) Lahko predpostavimo, da je $0 < x_0 < \pi$ (za $x_0 = 0$ ali $x_0 = \pi$ je konvergenca vrste $\sum_k |a_k|$ očitna, za druge vrednosti števila x_0 pa upoštevajmo sodost in periodičnost funkcije kosinus). Potem je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx_0| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cos^2 kx_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cos 2kx_0.$$

Leva stran konvergira po predpostavki, druga vrsta na desni pa po izreku 1(a), ker je $2x_0 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ zaradi $0 < x_0 < \pi$. Torej mora konvergirati tudi prva vrsta $\sum_k |a_k|$. Odtod takoj sledi, da vrsta (C) konvergira absolutno in enakomerno na vsej realni osi.

(b) Naj konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \sin kx_0|$ za $x_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Potem lahko ocenimo

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \sin kx_0| &\geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sin^2 kx_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}| \sin^2(k-1)x_0 \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (\sin^2 kx_0 + \sin^2(k-1)x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (\cos 2kx_0 + \cos 2(k-1)x_0) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \cos x_0 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cos(2k-1)x_0 \geq (1 - |\cos x_0|) \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \end{aligned}$$

Odtod sledi $\sum_k |a_k| < \infty$, torej tudi absolutna in enakomerna konvergenca vrste (S).

Doslej smo pozornost posvečali (splošni, omejeni, enakomerni ali absolutni) konvergenci kosinusne in sinusne vrste. V naslednjih dveh izrekih pa bomo obravnavali vprašanje, kdaj je taka vrsta Fourierova.

Za zaporedje (a_k) definirajmo $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ in $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$. Če je $\Delta^2 a_k \geq 0$, rečemo, da je zaporedje (a_k) konveksno.

Izrek 4. Naj bo (a_k) zaporedje realnih števil z lastnostjo $a_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) in $\Delta^2 a_k \geq 0$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$. Tedaj obstaja nenegativna funkcija $f \in L^1$, da konvergira vrsta (C)

(a) za vsak $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ proti $f(x)$ in je Fourierova za f ,

(b) po normi prostora L^1 proti f natanko takrat, ko velja $a_n \ln n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. (a) Po trditvi C5 iz dodatka C velja $a_n \geq 0$, $\Delta a_n \geq 0$ za vsak n , $n\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in $\sum_{n=m}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = m\Delta a_m + a_m$ za vsak m . Po isti trditvi je zaporedje (a_n) kvazikonveksno, se pravi, da velja $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = a_0 < \infty$ (glej definicijo C3). Za vsak $t \in \mathbb{R}$ definirajmo

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n F_n(t),$$

kjer je F_n Fejérjevo jedro. Potem je $g \geq 0$ s.p. Ker je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n \|F_n\|_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = 2\pi a_0,$$

zgornja vrsta namreč konvergira po normi v L^1 proti funkciji $g \in L^1$, delne vsote pa so nenegativne. Izračunajmo Fourierov koeficient funkcije g v točki $k \in \mathbb{Z}$ (upoštevajmo njegovo zvezno odvisnost od norme funkcije):

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n \widehat{F}_n(k) = \sum_{n=|k|}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) = \\ &= \sum_{n=|k|}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n - |k| \sum_{n=|k|}^{\infty} \Delta^2 a_n = |k|\Delta a_{|k|} + a_{|k|} - |k|\Delta a_{|k|} = a_{|k|}.\end{aligned}$$

Torej je Fourierova vrsta funkcije g kosinusna:

$$g \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (e^{ikx} + e^{-ikx}) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Vemo, da ta vrsta konvergira za vsak $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ proti neki funkciji h , torej je za take x tudi Cesárovo sumabilna proti h . Po Fejér-Lebesguovem izreku pa je skoraj povsod Cesárovo sumabilna k g , torej je $h = g$ s.p. na \mathbb{R} in zadnja kosinusna vrsta je Fourierova tudi za h . Potem vrsta (C) konvergira k funkciji $f = h/2 \in L^1$ za vsak $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Zaradi zveznosti funkcije f pri teh vrednostih za x in zaradi $g \geq 0$ s.p., je tudi $f \geq 0$ povsod na definicijskem območju. Poleg tega je vrsta (C) Fourierova za funkcijo f .

Za dokaz točke (b) moramo oceniti normo funkcije $S_n - f$, kjer je S_n delna vsota kosinusne vrste. V ta namen dobimo po Abelovih formulah za parcialno sumacijo (glej dodatek C, kjer vzamemo $b_0 = 1/2$ in $b_k = \cos kx$ za $k \geq 1$, tako da je $B_n = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kx = D_n(x)/2$):

$$\begin{aligned}S_n(x) &= a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_k(x) + \frac{1}{2} a_n D_n(x) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k (k+1) F_k(x) + \frac{1}{2} \Delta a_{n-1} n F_{n-1}(x) + \frac{1}{2} a_n D_n(x).\end{aligned}$$

Potem je za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ tudi

$$\begin{aligned}f(x) - S_n(x) &= \frac{1}{2} h(x) - S_n(x) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k (k+1) F_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k (k+1) F_k(x) - \frac{1}{2} \Delta a_{n-1} n F_{n-1}(x) - \frac{1}{2} a_n D_n(x)\end{aligned}$$

oziroma

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n-1}^{\infty} \Delta^2 a_k (k+1) F_k(x) + \frac{1}{2} \Delta a_{n-1} n F_{n-1}(x) + \frac{1}{2} a_n |D_n(x)|.$$

Z integracijo dobimo

$$\|f - S_n\|_1 \leq \pi \sum_{k=n-1}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k + \pi n \Delta a_{n-1} + \pi a_n L_n,$$

kjer so L_n Lebesguove konstante. Torej je $\|f - S_n\|_1 - \pi a_n L_n \leq o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), saj ostali členi konvergirajo proti 0. Na isti način bi dobili $\pi a_n L_n - \|f - S_n\|_1 \leq o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), se pravi tudi oceno $\|\|f - S_n\|_1 - \pi a_n L_n\| \leq o(1)$ ($n \rightarrow \infty$). To pomeni, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_1 = 0 \text{ natanko takrat, ko velja } a_n L_n \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$$

Ker pa je $a_n L_n = \frac{4}{\pi^2} a_n \ln n + a_n O(1)$ ($n \rightarrow \infty$) in $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), dobimo končno želeni rezultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_1 = 0 \iff a_n \ln n \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}.$$

Opomba. Izrek 4 omogoča konstruirati kosinusno Fourierovo vrsto s poljubnim vnaprej predpisanim konveksnim zaporedjem koeficientov, ki konvergirajo k 0. Če upoštevamo še trditev C8 iz dodatka C, vidimo, da obstajajo Fourierove vrste s koeficienti, ki poljubno počasi konvergirajo proti 0. Zaporedje $(1/\ln n)_{n \geq 2}$ je npr. konveksno (glej zgled za definicijo C3 v dodatku C) in konvergira proti 0, zato je vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ Fourierova. Ker pa je $a_n \ln n = 1$ za vsak n , vrsta ne konvergira po normi prostora L^1 .

Izrek 5. Naj bo (a_k) zaporedje realnih števil z lastnostjo $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) in $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ (vrsta konvergira po točkah). Tedaj je $f \in L^1$, sinusna vrsta pa Fourierova vrsta za funkcijo f natanko takrat, ko je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$. V tem primeru velja $\|f - S_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. Potrebnost pogoja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$ za to, da je vrsta (S) Fourierova že poznamo (glej trditev 8.2, kjer so ustrezni koeficienti pri sinusih označeni z b_n). Ker vrsta (S) povsod konvergira k f , je (S) Fourierova vrsta za f (to je posledica Fejér-Lebesgueovega izreka v 5. razdelku).

Dokaz obratne trditve je daljši. Naj velja $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$. Najprej se prepričajmo, da je tedaj $f \in L^1$. Ker je f liha funkcija, zadošča pokazati, da je $\int_0^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. Kot v dokazu izreka 2(b),(c) za $0 < x < \pi$ izberimo tako naravno število n , da je $\pi/(n+1) < x \leq \pi/n$ (takrat smo pisali N) in ocenimo

$$|f(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=1}^n a_k + \frac{2\pi}{x} a_{n+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k + 2(n+1)a_n.$$

Torej dobimo z integracijo

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= 2 \int_0^{\pi} |f(x)| dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} |f(x)| dx \leq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k + 2(n+1)a_n \right) \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k/k + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n = 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty. \end{aligned}$$

Pokažimo, da $\|f - S_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Odtod bo potem sledilo, da je (S) Fourierova vrsta za f . Najprej kot v dokazu točke (b) prejšnjega izreka zapišimo delno vsoto S_n z uporabo Abelovih formul v drugačni obliki:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \sin kx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k \tilde{D}_k(x) + \frac{1}{2} a_n \tilde{D}_n(x) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k (\tilde{D}_k(x) - \sin kx) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k \sin kx + \frac{1}{2} a_n \tilde{D}_n(x). \end{aligned}$$

Pišimo $E_k(x) = \tilde{D}_k(x) - \sin kx$, pa vidimo, da za $0 < x \leq \pi$ velja

$$E_k(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos(k+1/2)x}{\sin(x/2)} - \sin kx = \operatorname{ctg}(x/2)(1 - \cos kx) \geq 0$$

in

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k E_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k \sin kx + \frac{1}{2} a_n \tilde{D}_n(x).$$

Ker vemo, da je $|\tilde{D}_k(x)| \leq 2\pi/|x|$ za $0 < x < \pi$ in $\tilde{D}(0) = 0$, velja $a_n \tilde{D}_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za vsak x . Prav tako hitro vidimo, da konvergira vrsta $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \sin kx$ absolutno in enakomerno, saj ima konvergentno številsko majoranto $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k = a_1$. Torej je $g(x) =$

$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \sin kx$ zvezna funkcija. Ker povsod velja $S_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), velja povsod tudi $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k E_k(x) \rightarrow h(x)$ ($n \rightarrow \infty$), kjer je h liha in pozitivna na $[0, \pi]$. Poleg tega je $f = g + h$. Ker je $f \in L^1$ in $g \in C \subset L^1$, je tudi $h \in L^1$, njeno normo dobimo z integracijo po členih (kar nam tudi pove, da vrsta iz norm konvergira):

$$\|h\|_1 = 2 \int_0^{\pi} |h(x)| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \int_0^{\pi} E_k(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \|E_k\|_1.$$

Ker je $E_k(x) = \tilde{D}_k(x) - \sin kx$, lahko takoj izpeljemo $\|E_k\|_1 = \|\tilde{D}_k\|_1 + O(1)$ ($k \rightarrow \infty$) = $2 \ln k + O(1)$ ($k \rightarrow \infty$) (glej konec razdelka 2). Torej je tudi $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \ln k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \|E_k\|_1 + O(1)$ ($k \rightarrow \infty$) (vrsta konvergira) in zato $a_n \ln n = \ln n \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k \ln k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Ker lahko zapišemo $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k E_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \sin kx$, lahko iz vrste za $S_n(x)$ dobimo $f(x) - S_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k E_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k \sin kx - \frac{1}{2} a_n \tilde{D}(x)$. Potem je z integracijo

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_1 &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k \|E_k\|_1 + \pi \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k + \frac{1}{2} a_n \|\tilde{D}\|_1 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k \|E_k\|_1 + \pi a_n + a_n \ln n + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Zaradi konvergence delnih vsot proti funkciji f po normi prostora L^1 pa so Fourierovi koeficienti funkcije f ravno koeficienti a_k . Torej je (S) Fourierova vrsta za funkcijo f .

Poglejmo na zadnja dva izreka o kosinusni in sinusni vrsti še z drugega, skupnega gledišča. Naj velja $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Z $B_n(x)$ označimo $D_n(x)/2$ za vrsto (C) in $\tilde{D}_n(x)/2$ za vrsto (S). Vemo, da v vsakem primeru velja $|B_n(x)| \leq \pi/|x|$ za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $\|B_n\|_1 = O(\ln n)$ ($n \rightarrow \infty$). Naj bo f funkcija, h kateri povsod (razen morda v nekaterih točkah) konvergira ena ali druga vrsta. Potem lahko z Abelovo parcialno sumacijo zapišemo za katerokoli od obeh vrst $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k B_k(x) + a_n B_n(x)$. Ker za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ velja $S_n(x) \rightarrow f(x)$ in $a_n B_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) je za take x res $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k B_k(x)$.

Če velja $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \|B_k\|_1 < \infty$, konvergira zgornja vrsta po normi v prostoru L^1 proti funkciji f , ki je tudi v L^1 , in vrsta (C) oziroma (S) je Fourierova vrsta za f . Toda, kot vemo, velja $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k \|B_k\|_1 < \infty$ natanko takrat, ko velja $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \ln k < \infty$. Za vsak n pa je

$$\sum_{k=1}^n \Delta a_k \ln k = \sum_{k=2}^n a_k [\ln k - \ln(k-1)] - a_{n+1} \ln n \leq \sum_{k=2}^n a_k \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k-1} \leq 2 \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k},$$

se pravi tudi $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k \ln k \leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k}$. Dokazali smo trditev:

Trditev 1. Pri pogoju $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$ sta vrsti (C) in (S) Fourierovi.

Opombe. 1. Za vrsto (S) velja, kot vemo, tudi obratno: če je Fourierova, mora biti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$ (trditev 8.2). Tako smo še enkrat ugotovili, da je za sinusno vrsto z monotonimi koeficienti pogoj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$ potreben in zadosten za to, da je Fourierova. Za vrsto (C) z monotonimi koeficienti ta pogoj ni potreben, kot kaže zgled kosinusne vrste $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$, pri katerem pogoj ni izpolnjen, saj vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira, kljub temu pa je vrsta Fourierova, saj je zaporedje $(1/\ln n)$ konveksno (glej zgled za definicijo C3 v dodatku C) in lahko uporabimo izrek 4).

2. Samo pogoj $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) pa ni dovolj za to, da je (C) Fourierova vrsta. Da se namreč pokazati, da je poleg tega potrebna konvergenca $\Delta a_n \ln n \rightarrow 0$ (glej npr. [2], str. 229). Brez nje kosinusna vrsta z monotonno proti 0 konvergirajočimi koeficienti ne more biti Fourierova. To je npr. res za vrsto s koeficienti $a_n = 1/m$ za $2^{(m-1)^2} \leq n < 2^{m^2}$. V tem primeru velja $a_n \searrow 0$, vendar pa $\Delta a_n \ln n = (1/m - 1/(m+1))m^2 \ln 2 \rightarrow 2$.

Razdelek zaključimo še z enim zanimivim rezultatom. Kot smo videli, kljub pogoju $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, ki obstaja v vsaki točki x , ni nujno v L^1 (zglej: $a_n = 1/\ln n$). Kljub temu pa velja trditev:

Trditev 2. Če je $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), je v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) \sin nx$ zvezna za vsak n in velja $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$.

Dokaz. Pišimo

$$\begin{aligned} 2f(x) \sin x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] = \\ &= a_1 + a_2 \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) \cos nx. \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $\sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+1} - a_{n-1}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \Delta a_n + \sum_{n=2}^{\infty} \Delta a_{n-1} = a_2 + a_1 < \infty$ in je zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) \cos nx$ absolutno in enakomerno konvergenta. Torej je funkcija $f(x) \sin x$ zvezna, njeni Fourierovi (kosinusni) koeficienti pa so

$$a_1, a_2/2, (a_3 - a_1)/2, (a_4 - a_2)/2, \dots$$

Zato je pri vsakem n zvezna tudi funkcija $f(x) \sin nx = f(x) \sin x (\sin nx / \sin x)$ in lahko jo integriramo. Za kosinusne koeficiente funkcije $f(x) \sin x$ dobimo relacije $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$, $a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) \sin x \cos x dx$ in

$$a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x) \sin x \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx$$

za vsak $n = 2, 3, \dots$, od koder rekurzivno izračunamo, da velja $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$ za $n = 3, 4, \dots$

Trditev velja tudi v primeru, če je zaporedje (a_n) kompleksno in ima omejeno variacijo (glej dodatek C). Dokaz je praktično isti.

III. poglavje : TRIGONOMETRIČNE VRSTE

1. Riemannova teorija trigonometričnih vrst

Definicija 1 (Riemannova funkcija). Naj bo $S(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ trigonometrična vrsta z omejenimi koeficienti (tj. $|c_n| \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ in neko konstanto $M > 0$). Riemannova funkcija trigonometrične vrste S je funkcija F_S , definirana z vrsto:

$$F_S(x) = c_0 x^2 / 2 - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}.$$

Riemannovo funkcijo F_S torej dobimo z dvakratno formalno integracijo trigonometrične vrste. Ker integrirana vrsta zaradi omejenosti koeficientov c_n konvergira absolutno in enakomerno na vsej realni osi, je F_S zvezna funkcija na \mathbb{R} ($F_S(x) - c_0 x^2 / 2$ celo zvezna periodična).

Naslednji izrek je temelj cele teorije in povezuje pojem Riemannove sumabilnosti (glej dodatek B) z dugim Schwarzovim odvodom (glej razdelek I.6).

Izrek 1 (Riemann). Trigonometrična vrsta S z omejenimi koeficienti je v točki $x \in \mathbb{R}$ Riemannovo sumabilna k vrednosti s natanko takrat, ko obstaja drugi Schwarzov odvod Riemannove funkcije F_S v točki x in je enak s . Na kratko: $S(x) \rightarrow s (R) \iff D^2 F_S(x) = s$.

Dokaz. Izberimo $h > 0$ in izračunajmo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 F_S(x, 2h)}{4h^2} &= \frac{1}{4h^2} [F_S(x+2h) + F_S(x-2h) - 2F_S(x)] = \\ &= \frac{1}{4h^2} \left[\frac{c_0}{2} [(x+2h)^2 + (x-2h)^2 - 2x^2] - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} [e^{in(x+2h)} + e^{in(x-2h)} - 2e^{inx}] \right] = \\ &= c_0 - \sum_{n \neq 0} c_n e^{inx} \left(\frac{e^{inh} - e^{-inh}}{2nh} \right)^2 = c_0 + \sum_{n \neq 0} c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2. \end{aligned}$$

Če za desno stran uporabimo oznako $S(x, h)$ iz teorije Riemannove sumabilnosti (glej dodatek B), vidimo, da za vsak $h > 0$ velja $\frac{\Delta^2 F_S(x, 2h)}{4h^2} = S(x, h)$. V limiti, ko $h \rightarrow 0$, dobimo na levi strani drugi Schwarzov odvod $D^2 F_S(x)$, na desni pa vrednost, kamor je Riemannovo sumabilna trigonometrična vrsta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ in izrek je dokazan.

Opomba. Ker je pri danem h konvergenca vrste $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2$ enakomerna, je $S(x, h)$ zvezna funkcija, kar je skladno z zveznostjo Riemannove funkcije F_S oziroma njene druge difference.

Posledica. Za vsak $f \in L^1$ je Fourierova vrsta za f skoraj v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$ Riemannovo sumabilna k $f(x)$.

Dokaz. Vsako Fourierovo vrsto lahko členoma integriramo, integrirana vrsta enakomerno konvergira proti integralu ustrezne funkcije (glej izrek II.8.5). Če to storimo dvakrat, dobimo

$$g(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s) ds = A + Bx + c_0 x^2/2 - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} e^{inx} = A + Bx + F_S(x).$$

Od tod je $D^2 F_S(x) = D^2 g(x) = g''(x) = f(x)$ s.p. x in rezultat sledi po izreku 1.

Spomnimo se, da je zvezna funkcija F gladka v točki x , če velja $\Delta^2 F(x, h)/h \rightarrow 0$, kadar $h \rightarrow 0$ (glej definicijo I.6.2). Če je ta konvergenca enakomerna po x iz neke množice E , govorimo o enakomerni gladkosti funkcije F na množici E .

Izrek 2 (Riemann). Če koeficienti c_n trigonometrične vrste $S(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ konvergirajo proti 0, je njena Riemannova funkcija F_S enakomerno gladka na \mathbb{R} .

Dokaz. Izberimo zaporedje (h_i) realnih števil z lastnostjo $0 < h_i < 1/2$ za vsa $i = 0, 1, 2, \dots$ in $h_i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Podobno kot v dokazu izreka 1 zapišimo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 F_S(x, 2h_i)}{4h_i} &= c_0 h_i + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx} \frac{\sin^2 kh_i}{k^2 h_i} = c_0 h_i + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \frac{\sin^2 kh_i}{k^2 h_i} = \\ &= s_{i0} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s_{ik} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}), \end{aligned}$$

$$\text{kjer je } s_{i0} = h_i \text{ in } s_{ik} = \frac{\sin^2 kh_i}{k^2 h_i} = \left(\frac{\sin kh_i}{kh_i} \right)^2 h_i.$$

Preverimo potrebne in zadostne pogoje za regularnost matrike $S = (s_{ik})$ v izreku B1. Očitno za vsak i in k velja $0 \leq s_{ik} \leq h_i$, zato imamo $s_{ik} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) pri poljubnem k (točka (i) Töplitzovih pogojev). Za $k \geq 1$ velja tudi $s_{ik} \leq \frac{1}{k^2 h_i}$. Če definiramo $n_i = [1/h_i]$ (celi del) za vsak i , lahko za vsak i ocenimo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |s_{ik}| &= \sum_{k=0}^{n_i-1} |s_{ik}| + \sum_{k=n_i}^{\infty} |s_{ik}| \leq n_i h_i + \frac{1}{h_i} \sum_{k=n_i}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{h_i} \sum_{k=n_i}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \\ &= 1 + \frac{1}{(n_i-1)h_i} < 1 + \frac{n_i+1}{n_i-1} = \frac{2n_i}{n_i-1} \leq 4, \end{aligned}$$

ker je $n_i \geq 2$. Torej velja točka (ii) Töplitzovih pogojev. Točke (iii) pa ni treba preverjati, ker dokazujemo konvergenco proti 0.

Metoda, ki zaporedju funkcij c_0 in $(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx})$ za $k \geq 1$ priredi funkcijsko zaporedje $\Delta^2 F_S(x, 2h_i)/(4h_i)$, je torej regularna. Ker velja $(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) enakomerno za vsak $x \in \mathbb{R}$, velja tudi $\frac{\Delta^2 F_S(x, 2h_i)}{4h_i} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) enakomerno za $x \in \mathbb{R}$.

Trditvev 1. Če trigonometrična vrsta S konvergira proti 0 povsod na intervalu (a, b) , Riemannova funkcija F_S obstaja in je na intervalu (a, b) linearna.

Dokaz. Ker vrsta S konvergira na množici s pozitivno mero, konvergirajo po Cantor-Lebesguovem izreku (posledica trditve II.5.1) koeficienti c_n vrste S pri pogoju $|n| \rightarrow \infty$ proti 0. Torej so omejeni, zato Riemannova funkcija F_S obstaja in je zvezna.

Če trigonometrična vrsta povsod na intervalu (a, b) konvergira proti 0, je po trditvi B2 na (a, b) tudi Riemannovo sumabilna k 0. To pomeni, da je povsod na (a, b) drugi Schwarzov odvod enak 0 (izrek 1). Po Schwarzovi lemi (lema I.6.1c) pa iz $D^2 F_S(x) = 0$ za $x \in (a, b)$ sledi, da je F_S linearna funkcija na (a, b) .

Izrek 3 (Cantor). Če trigonometrična vrsta $S(x)$ konvergira proti 0 za vsak $x \in \mathbb{R}$, so vsi njeni koeficienti enaki 0 (torej velja $S = 0$).

Dokaz. Po trditvi 1 (kjer je interval vsa realna os) je Riemannova funkcija F_S linearna na \mathbb{R} . Torej obstajata konstanti A in B , tako da za vsak x velja $A + Bx = F_S(x)$ oziroma

$$A + Bx = c_0 x^2 / 2 - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}.$$

Če primerjamo vrednost obeh strani v točkah π in $-\pi$, dobimo ob upoštevanju sodosti funkcije $c_0 x^2 / 2$ in periodičnosti funkcije, določene z vrsto na desni strani, da mora biti $B = 0$. Če primerjamo še vrednosti v 0 in 2π , najdemo $c_0 = 0$. Torej ostane

$$A = - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}.$$

Ker vrsta na desni strani enakomerno konvergira, dobimo od tod z integracijo po členih, da so vsi koeficienti enaki nič: $A = 0$ in $c_n = 0$ za $n \neq 0$. Torej je res $S = 0$.

Zgornji izrek je znameniti Cantorjev izrek o enoličnosti iz leta 1870. Tako ime ima zaradi naslednje posledice.

Posledica. Če trigonometrična vrsta S povsod konvergira k funkciji f , je razvoj funkcije f v trigonometrično vrsto en sam.

Dokaz. Dvojni zapis $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c'_n e^{inx}$ s povsod konvergentnima vrstama bi pomenil, da trigonometrična vrsta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (c'_n - c_n) e^{inx}$ povsod konvergira k 0. Po izreku 3 bi dobili $c'_n = c_n$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Trditev 2. Če trigonometrična vrsta S konvergira proti 0 povsod na intervalu (a, b) razen v končno ali števno neskončno mnogo točkah, Riemannova funkcija F_S obstaja in je na intervalu (a, b) linearna.

Dokaz. Ker konvergira tudi v tem primeru trigonometrična vrsta na množici s pozitivno mero, konvergirajo po Cantor-Lebesguovem izreku koeficienti c_n proti 0, zato je po izreku 2 Riemannova funkcija ne le zvezna ampak tudi enakomerno gladka na \mathbb{R} . Če je izjemnih točk končno mnogo, razdelijo (a, b) na končno mnogo podintervalov. Na vsakem od njih je po trditvi 1 Riemannova funkcija F_S linearna. Ker kolen v izbranih točkah zaradi gladkosti ne more biti, je funkcija F_S linearna povsod na (a, b) . Če pa je izjem števno neskončno, lahko uporabimo lemo I.6.6 za primer $f = 0$ in zaradi gladkosti funkcije F_S povsod (izrek 2) ter njene simetrične odvedljivosti $D^2 F_S = 0$ razen v števno mnogo točkah (izrek 1) dobimo njeno linearnost.

Posledica. Če trigonometrična vrsta S konvergira proti 0 povsod razen v števno mnogo točkah, je $S = 0$.

Ta posledica razširja veljavnost klasičnega Cantorjevega izrek na primer števno mnogo izjem. Naslednji izrek pa je pomembna posplošitev Cantorjevega izreka v drugo smer.

Izrek 4 (de la Vallée-Poussin). Če trigonometrična vrsta S povsod na \mathbb{R} z izjemo števno mnogo točk konvergira (ali je po Riemannu sumabilna) proti (končni) funkciji $f \in L^1$, je $S = S(f)$, Fourierova vrsta za funkcijo f .

Dokaz. Zaradi konvergence na množici s pozitivno mero velja $c_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Naj bo F_S Riemannova funkcija trigonometrične vrste S . Po izreku 1 je $D^2 F_S(x) = f(x)$ za vsak x , razen v števno mnogo izjemah, po izreku 2 pa je F_S povsod na \mathbb{R} gladka funkcija. Po lemi I.6.6 je $F_S(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s) ds + Ax + B$ in zato $F'_S(x) = \int_0^x f(s) ds + A$ za vsak x . Pokazali bomo, da je S Fourierova vrsta za f . Izračunajmo drugo diferenco funkcije F_S :

$$\begin{aligned} \Delta^2 F_S(x, 2h) &= F_S(x+2h) + F_S(x-2h) - 2F_S(x) = \int_0^{2h} [F'_S(x+t) - F'_S(x-t)] dt = \\ &= \int_0^{2h} dt \int_{x-t}^{x+t} f(s) ds = \int_0^{2h} dt \int_{-t}^t f(x+u) du. \end{aligned}$$

Odtod je za vsak $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^2 F_S(x, 2h) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \int_0^{2h} dt \int_{-t}^t f(x+u) du dx = \\ &= \int_0^{2h} dt \int_{-t}^t du \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) e^{-ikx} dx = \int_0^{2h} dt \int_{-t}^t e^{iku} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) du = \\ &= \widehat{f}(k) \int_0^{2h} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{ik} dt = \frac{2}{k} \widehat{f}(k) \int_0^{2h} \sin kt dt = \frac{2}{k^2} \widehat{f}(k) (1 - \cos 2kh) = 4\widehat{f}(k) \frac{\sin^2 kh}{k^2}. \end{aligned}$$

Prav tako je $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^2 F_S(x, 2h) dx = 4h^2 \widehat{f}(0)$.

Po drugi strani vemo, da je $\Delta^2 F_S(x, 2h) = 4h^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2$ (glej dokaz izreka 1). Ker pri $h > 0$ vrsta enakomerno konvergira, jo lahko členoma integriramo in dobimo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^2 F_S(x, 2h) dx = 4h^2 c_0$, za $k \neq 0$ pa $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^2 F_S(x, 2h) e^{-ikx} dx = 4 \frac{c_k}{k^2} \sin^2 kh$. Sledi $c_k = \widehat{f}(k)$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ in velja $S = S(f)$.

Posledica 1 (Izrek du Bois-Reymonda). Če trigonometrična vrsta S povsod na \mathbb{R} konvergira proti omejeni merljivi funkciji $f \in L^\infty$, je S Fourierova vrsta za funkcijo f .

V posebnem primeru je S Fourierova vrsta za zvezno funkcijo f , če povsod velja $S \rightarrow f$. To je posplošitev Cantorjevega izreka, ki ga dobimo v primeru $f = 0$.

Posledica 2. Sinusna in kosinusna vrsta z monotonimi, proti 0 konvergirajočimi koeficienti, sta Fourierovi natanko takrat, ko sta njuni vsoti integrabilni funkciji.

Dokaz. Vemo, da sinusna vrsta (S) v vsaki točki konvergira k funkciji f , ki je zvezna povsod, razen morda v točkah $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, kosinusna vrsta (C) pa konvergira proti funkciji f povsod razen v prejšnjih točkah (glej razdelek 9). Če je vrsta (S) oziroma (C) Fourierova, je po Fejér-Lebesguovem izreku Fourierova ravno za funkcijo f , torej je $f \in L^1$. Če pa je $f \in L^1$, uporabimo de la Vallée-Poussinov izrek (z izjemnimi točkami $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$) in vrsta (S) ali (C) je Fourierova.

De la Vallée Poussinov izrek dopušča kvečjemu števno mnogo izjem. Po drugi strani ni dovolj, da bi privzeli samo, da trigonometrična vrsta konvergira skoraj povsod. Pač pa bi bil rezultat tudi v tem primeru isti, če bi dodatno zahtevali, da je zaporedje delnih vsot trigonometrične vrste povsod, razen v števno mnogo točkah, omejeno.

Izrek 5. Če trigonometrična vrsta $S(x)$ konvergira proti funkciji $f \in L^1$ skoraj za vsak $x \in \mathbb{R}$ in je za vsak x , z izjemo števno mnogo točk, zaporedje delnih vsot $(S_n(x))$ omejeno (tj. obstaja konstanta $K(x)$, tako da je $|S_n(x)| \leq K(x)$ za vsak $n = 1, 2, \dots$), je $S = S(f)$, Fourierova vrsta za f .

Dokaz. Naj bo E taka množica, da $S(x) \rightarrow f(x)$ za $x \notin E$ in je $m(E) = 0$. Po Cantor-Lebesguovem izreku koeficienti vrste S konvergirajo k 0 in Riemannova funkcija F_S obstaja. Ker lahko privzamemo, da so členi trigonometrične vrste S in funkcija f realni (sicer posebej gledamo realni in posebej imaginarni del), smemo predpostaviti, da je tudi F_S realna funkcija.

Ker je $\frac{\Delta^2 F_S(x, 2h)}{4h^2} = \sum_k c_k e^{ikx} \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2$ in je zaporedje delnih vsot $(S_n(x))$ za vsak x , razen za števno mnogo izjem v E , omejeno s konstanto $K(x)$, sledi iz regularnosti Riemannove metode, da je za vsak tak x tudi $|\frac{\Delta^2 F_S(x, 2h)}{4h^2}| \leq M(x)$ za vsak h in za neko konstanto $M(x) > 0$ (glej opombo na koncu dodatka B). Torej sta z isto konstanto omejena tudi zgornji in spodnji drugi Schwarzov odvod v točki x : $|\overline{D}^2 F_S(x)| \leq M(x)$, $|\underline{D}^2 F_S(x)| \leq M(x)$. Poleg tega je $D^2 F_S(x) = f(x)$ za $x \notin E$, za $x \in E$ pa lahko spremenimo f tako, da velja npr. $f(x) = \underline{D}^2 F_S(x)$. Zdaj lahko uporabimo lemo I.6.5 in dobimo $F_S(x) = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t f(s) ds + Ax + B$ za $x \in \mathbb{R}$. Tako kot v dokazu de la Vallée Poussinovega izreka potem sklepamo, da je $S = S(f)$, torej Fourierova vrsta za f .

Posledica. Če velja $S(x) \rightarrow 0$ skoraj za vsak $x \in \mathbb{R}$ in je za vsak x , z izjemo števno mnogo točk, zaporedje delnih vsot $(S_n(x))$ omejeno, je $S = 0$.

Ta rezultat bomo potrebovali v 3. razdelku pri izreku Barijeve, da je vsaka števna unija zaprtih množic enoličnosti spet množica enoličnosti.

Pri pogojih de la Vallée-Poussinovega izreka smemo trigonometrično vrsto členoma integrirati na poljubnem podintervalu, saj je tedaj vrsta Fourierova za neko funkcijo $f \in L^1$ in lahko uporabimo izrek II.8.5. Integrirana vrsta konvergira k integralu funkcije f .

Dokažimo to še na drug način.

Izrek 6 (o integriranju trigonometričnih vrst). Če trigonometrična vrsta S povsod na intervalu (a, b) , razen morda v števno mnogo točkah, konvergira (ali je po Riemannu sumabilna) h končni funkciji $f \in L^1$, smemo vrsto S členoma integrirati na poljubnem zaprtem podintervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ in integrirana vrsta konvergira proti $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$.

Dokaz. Po Cantor-Lebesguovem izreku konvergirajo koeficienti c_n proti 0, zato Riemannova funkcija obstaja in je povsod gladka na \mathbb{R} . Povsod na intervalu (a, b) , razen morda v števno mnogo točkah, je $D^2 F_S = f$, torej po lemi I.6.6 velja $F_S(x) = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t f(s) ds + Ax + B$ za $x, x_0 \in (a, b)$. Se pravi, da je $F'_S(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + A$, kjer je $A = F'_S(x_0)$, in F'_S je absolutno zvezna funkcija na (a, b) .

Po drugi strani je vrsta $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$ po Riesz-Fischerjevem izreku Fourierova za neko funkcijo $g \in L^2$ (saj je $\sum_{n \neq 0} |c_n|^2/n^2 \leq M \sum_{n \neq 0} 1/n^2 < \infty$ za neko konstanto $M > 0$). Po izreku o integraciji Fourierovih vrst (izrek 8.5) je

$$\int_0^x g(t) dt = - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{n^2} e^{inx} + C = F_S(x) - c_0 x^2/2 + C$$

za neko konstanto C , se pravi $g(x) = F'_S(x) - c_0 x$ s.p. na \mathbb{R} , tako da je g skoraj povsod na (a, b) enaka absolutno zvezni funkciji. Vrsta $\sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$ je potem Fourierova tudi za to funkcijo in po Jordanovem izreku na vsakem zaprtem podintervalu $[\alpha, \beta]$ enakomerno konvergira proti njej. Torej imamo na $[\alpha, \beta]$ enakomerno konvergenco $\int_{x_0}^x f(t) dt + A = F'_S(x) = c_0 x + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$, od koder sledi

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = c_0(\beta - \alpha) + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} (e^{in\beta} - e^{in\alpha}).$$

2. Množice enoličnosti in ordinalna števila

V tem razdelku bomo pozornost posvetili množici izjemnih točk, ko rezultat Cantorjevega izreka o enoličnem razvoju funkcije v trigonometrično vrsto še vedno velja. Čeprav nekaj o tem že vemo, bomo deloma sledili zgodovinskemu razvoju, ki je Cantorja pripeljal do odkritja ordinalnih števil.

Če trigonometrična vrsta konvergira (divergira) v točki x , konvergira (divergira) tudi v vseh homolognih točkah $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zato zadošča opazovati točke po modulu 2π . Vsaj kar se konvergence ali divergence trigonometričnih vrst tiče, bomo torej odslej vse množice imeli za podmnožice intervala $[0, 2\pi)$, četudi tega ne bomo kar naprej ponavljali.

Definicija 1. Podmnožica $E \subset [0, 2\pi)$ je *množica enoličnosti*, če iz konvergence trigonometrične vrste $S(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ proti 0 za vsak $x \notin E$ sledi $c_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Na kratko: če iz konvergence $S(x) \rightarrow 0$ za vsak $x \notin E$ sledi $S = 0$. Množice, ki niso množice enoličnosti, imenujemo množice *večličnosti*.

Množica enoličnosti je torej nekakšna izjemna množica. Ne more se zgoditi, da bi od 0 različna trigonometrična vrsta povsod drugje konvergirala. Pri množicah večličnosti pa se to lahko zgodi. Očitno je vsaka podmnožica množice enoličnosti tudi množica enoličnosti in obratno, vsaka množica, ki vsebuje množico večličnosti, je tudi sama množica večličnosti.

Klasični Cantorjev izrek (izrek 1.3) pove, da je prazna množica množica enoličnosti, njegova posplošitev (posledica trditve 1.2) pa, da isto velja za vsako števno neskončno množico. Slednje je prvi dokazal Young. V 3. razdelku bomo spoznali, da je števna unija *zaprtih* množic enoličnosti spet množica enoličnosti, od koder ponovno sledi Youngov rezultat. Zdaj pa se najprej prepričajmo, da nobena množica enoličnosti ne more biti prav obsežna, saj mora imeti mero nič.

Trditev 1. Če je $m(E) > 0$, je E množica večličnosti.

Dokaz. Ker je E omejena množica (vsebovana v $[0, 2\pi)$) s pozitivno mero, obstaja zaprta omejena podmnožica $F \subset E$, ki ima prav tako pozitivno mero $m(F) > 0$. Naj bo $f = \chi_F$ karakteristična funkcija množice F in $S = S(f)$ njena Fourierova vrsta. Ta vrsta ni identično enaka 0, saj je npr. $c_0 = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{m(F)}{2\pi} > 0$. Po drugi strani za vsak $x \notin F$ velja $S(f, x) \rightarrow 0$ po Riemannovem principu lokalizacije (glej izrek II.8.2). Torej je F , in s tem tudi E , množica večličnosti.

Naravno se postavi po eni strani vprašanje, ali ni morda že vsaka neštevna množica množica večličnosti, in po drugi strani, ali ni morda vsaka množica z mero 0 množica enoličnosti. To pa ni res, obstajajo tudi neštevne množice enoličnosti (seveda pa morajo imeti mero 0) in obstajajo množice večličnosti z mero 0. Prvi tak primer je odkril Menšov 1916 (glej [2] str. 804). V zadnjem poglavju bomo za simetrične perfektne množice s konstantnim delilnim razmerjem (glej razdelek I.2) znali natanko povedati, kdaj so množice enoličnosti in kdaj večličnosti.

Glavno sredstvo v dokazu Cantorjevega izreka je bila trditev 1.1, ki je v primeru konvergence trigonometrične vrste S v vseh točkah intervala (a, b) zagotavljala, da je Riemannova funkcija F_S na (a, b) linearne. Kasneje smo ugotovili, da je možno imeti končno ali kvečjemu števno neskončno mnogo izjemnih točk, v katerih konvergenca ne velja (glej trditev 1.2). Končno izjem je poznal že Cantor, ki se je tudi vprašal, kaj se zgodi, če je izjem števno neskončno. Čeprav rezultat že poznamo, zaradi zanimive povezave z ordinalnimi števili sledimo Cantorjevemu razmišljanju.

Če ima zaporedje izjemnih točk eno samo stekališče, lahko sklepamo takole: Riemannova funkcija je po trditvi 1.1. linearna na vsakem odprtem intervalu, ki ga določajo izolirane točke zaporedja. Zaradi izreka o gladkosti (izrek 1.2) je linearna povsod, razen morda v stekališču. Ker je to stekališče edino, tudi v njem ne more imeti kolena, torej je Riemannova funkcija linearna povsod. Enako lahko sklepamo, če ima zaporedje izjemnih točk končno mnogo stekališč. Kaj pa če je stekališč števno neskončno, imajo pa ta stekališča končno mnogo stekališč? Tedaj najprej odstranimo vse izolirane točke (v njih mora biti Riemannova funkcija gledka). Ostane neskončno mnogo stekališč, med katerimi odstranimo vsa izolirana stekališča, tako da dobimo končno mnogo točk, v katerih imamo spet gladkost in smo na koncu. Ta metoda deluje, dokler lahko v končno mnogo korakov postopoma odstranimo izolirane točke, izolirana stekališča, izolirana stekališča stekališč itd. in pridemo do končne množice oziroma, na koncu, do prazne množice.

Vse take števne množice so zaprte. Če jih lahko v končno korakovh reduciramo na prazno množico, rečemo, da imajo končen *Cantor-Bendixsonov rang*. V resnici je to vedel že Cantor, ko je proučeval konvergenco trigonometričnih vrst in se preko njih dokopal do pojma ordinalnega oziroma kardinalnega števila.

Naredimo še korak dalje in si oglejmo nekatere topološke lastnosti zaprtih števnih množic. Naj bo $E \neq \emptyset$ neprazna zaprta omejena, torej kompaktna, števno neskončna množica in E' množica vseh njenih stekališč (neizoliranih točk, ki so limite nestacionarnih podzaporedij točk iz E). Potem je E' tudi neprazna zaprta števna podmnožica v E . Da je zaprta in vsebovana v E , je znano iz splošne topologije, števna pa je kot podmnožica števne množice E . Če bi bila prazna, bi imela množica E same izolirane točke in kompaktno množico E bi lahko zapisali kot (števno) neskončno unijo (relativno) odprtih množic (singletonov), kar ni možno. Velja pa tudi $E' \neq E$. Če bi namreč tu imeli enakost, bi bila množica E brez izoliranih točk, zato nobena enotočkasta množica ne bi bila (relativno) odprta v E . Toda $E = \cup_{x \in E} \{x\}$ je števna unija, E pa kot kompaktna podmnožica v \mathbb{R} poln metrični prostor. To nasprotuje Baireovemu izreku (glej dodatek A).

Zdaj si ogledamo podmnožico $E'' = (E')' \subset E'$. Lahko je prazna (če je bila E' končna), sicer pa velja zanjo isto, kot je veljalo za E' . Tako lahko nadaljujemo in dobimo vloženo zaporedje zaprtih števnih množic $E^{(0)} \supset E^{(1)} \supset \dots$, definiranih rekurzivno z $E^{(0)} = E$, $E^{(n+1)} = (E^{(n)})'$. Če na nobenem koraku ne dobimo prazne množice, so vse množice $E^{(n)}$ med seboj različne. Vendar tudi tedaj še nismo končali. Definiramo $E^{(\omega)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E^{(n)}$. Tudi to je omejena zaprta števna podmnožica v E . Ker je $E^{(n)} \neq \emptyset$ za vsak n , je tudi $E^{(\omega)} \neq \emptyset$ in lahko nadaljujemo $E^{(\omega+1)} = E^{(\omega)'}$, $E^{(\omega+2)} = E^{(\omega+1)'}$ itd., dokler ne končamo s prazno množico ali dokler ne definiramo $E^{(2\omega)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E^{(\omega+n)}$. Kar se tu dogaja, je nekaj novega. Ta postopek nas naravno pripelje do pojma *ordinalnega števila*.

Teorija ordinalnih števil je danes dobro znana (glej dodatek D), zato lahko marsikateri njen rezultat koristno uporabimo pri dokazovanju v analizi, algebri in na drugih področjih matematike. Dobro je vedeti, da so ordinalna števila z neko (naravno) relacijo $<$ dobro urejena, da imajo nekatera od njih (ti. navadna ordinalna števila) svojega neposrednega predhodnika, druga, limitna, pa ne. Prvo limitno ordinalno število ω je hkrati prvo neskončno ordinalno število, obstaja tudi prvo neštevno ordinalno število Ω itd. (glej dodatek D). Posebno učinkovito sredstvo pri dokazovanju izrekov je ti. *princip transfinitne indukcije*, s katerim lahko dokažemo, da velja neka lastnost L za vse elemente dane množice, indeksirane z ordinalnimi števili, manjšimi od danega ordinalnega števila γ . Dovolj je dokazati, da za $\beta < \gamma$ velja $L(\beta)$, če velja $L(\alpha)$ za vse $\alpha < \beta$ (glej konec dodatka D). Navadno to dokažemo posebej za navadna in posebej za limitna ordinalna števila.

Kot zgled uporabe transfinitne indukcije si oglejmo naslednjo posplošitev Cantorjevega izreka, ki pove, da je vsaka *zaprta* števna množica množica enoličnosti.

Izrek 1. Če trigonometrična vrsta S konvergira k 0 povsod razen na zaprti števnici množici E , je $S = 0$.

Dokaz. Naj bo $E^{(0)} = E$, $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha-1)'}$ za vsako navadno ordinalno število α in $E^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha < \beta} E^{(\alpha)}$ za vsako limitno ordinalno število β . Posebej označimo z Ω najmanjše neštevno ordinalno število.

S transfinitno indukcijo bomo pokazali, da je za poljubno ordinalno število $\alpha < \Omega$ Riemannova funkcija F_S , pripadajoča trigonometrični vrsti S , linearna na vsaki komponenti komplementa množice $E^{(\alpha)}$. Denimo, da to že velja za vsa ordinalna števila $\alpha < \beta$, pri čemer je $\beta < \Omega$, in dokažimo indukcijski korak (da velja zgornja lastnost tudi za ordinalno število β). Ločimo dva primera:

1. Ordinalno število β ima neposrednega predhodnika $\alpha = \beta - 1$. Naj bo (a, b) ena od komponent komplementa množice $E^{(\beta)}$ in naj bo $[c, d] \subset (a, b)$. Ker je $[c, d]$ kompaktna množica, je v njej le končno mnogo točk x_i iz množice $E^{(\alpha)}$, sicer bi v $[c, d]$ obstajalo vsaj eno stekališče množice $E^{(\alpha)}$, torej točka iz $E^{(\beta)}$, kar pa vemo, da ni res. Med točkami x_i je F_S linearna funkcija, v točkah x_i pa gladka. Torej je F_S linearna povsod na $[c, d]$. Ker to velja za poljuben zaprt podinterval $[c, d] \subset (a, b)$, je F_S linearna povsod na (a, b) .

2. Ordinalno število β je limitno število. Torej je $E^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha < \beta} E^{(\alpha)}$. Spet izberimo poljuben zaprt podinterval $[c, d] \subset (a, b)$, kjer je (a, b) komponenta komplementa množice $E^{(\beta)}$. Torej je kompakten interval $[c, d]$ pokrit s komplementi množic $E^{(\alpha)}$, $\alpha < \beta$. Zaradi kompaktnosti množice $[c, d]$ in naraščajoče družine teh komplementov, obstaja že eno samo ordinalno število $\alpha_1 < \beta$, tako da je $[c, d]$ vsebovan v komplementu množice $E^{(\alpha_1)}$. Po indukcijski predpostavki je zato F_S linearna funkcija na $[c, d]$, se pravi na intervalu (a, b) .

Dokazali smo, da je Riemannova funkcija F_S linearna na vsaki komponenti komplementa vsake od množic $E^{(\alpha)}$, $\alpha < \Omega$. Če so vse množice $E^{(\alpha)}$ neprazne, so med seboj tudi različne (glej komentar pred uvedbo ordinalnih števil). Po drugi strani pa vse ne morejo biti neprazne, sicer bi imeli več kot števno mnogo (toliko je vseh ordinalnih števil $\alpha < \Omega$) različnih padajočih podmnožic v števnici množici E . Obstaja torej ordinalno število $\alpha < \Omega$ z lastnostjo $E^{(\alpha)} = \emptyset$. Tedaj pa je Riemannova funkcija F_S linearna na komplementu prazne množice, torej na \mathbb{R} in zato je (tako kot v dokazu Cantorjevega izreka) $S = 0$.

Vemo, da je v resnici vsaka števna množica množica enoličnosti. Zgornji dokaz s transfinitno indukcijo pa deluje le za zaprte števne množice.

3. Rajchmanova teorija trigonometričnih vrst

Pri nadaljnji obravnavi splošnih trigonometričnih vrst se bomo naslonili na integrabilne funkcije z absolutno (in enakomerno) konvergentno Fourierovo vrsto.

Definicija 1. $A = \{f \in L^1; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty\} = \{f \in L^1; \hat{f} \in l^1(\mathbb{Z})\}$.

Zaradi absolutne in enakomerne konvergence za vsak $f \in A$ velja $f(x) = \sum_n \hat{f}(n)e^{inx}$ in f je zvezna funkcija.

Množica A je vektorski prostor in celo algebra. Absolutno konvergentni vrsti namreč smemo zmnožiti. Dobljena vrsta konvergira k produktu vsot in je spet absolutno konvergentna. Algebra A je normirana, če uvedemo normo $\|f\|_A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. V tej normi je celo polna, torej Banachova algebra.

Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ definiramo konvolucija zaporedij \hat{f} in \hat{g} s predpisom

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) = (\hat{f} * \hat{g})(n).$$

Ker je

$$\begin{aligned} \sum_n |c_n| &= \sum_n \left| \sum_k \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) \right| \leq \sum_n \sum_k |\hat{f}(k)| |\hat{g}(n-k)| = \\ &= \sum_k |\hat{f}(k)| \sum_n |\hat{g}(n-k)| = \|f\|_A \|g\|_A < \infty, \end{aligned}$$

je konvolucija zaporedij dobro definirana in vrsta iz členov absolutno konvergira. Torej tudi trigonometrična vrsta $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ konvergira absolutno in enakomerno in definira zvezno funkcijo h , pri čemer je $c_n = \hat{h}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Torej je h funkcija z absolutno konvergentno Fourierovo vrsto, se pravi $h \in A$. Poleg tega je (po Fubiniju)

$$h(x) = \sum_n c_n e^{inx} = \sum_n \sum_k \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) e^{inx} = \sum_k \hat{f}(k) e^{ikx} \sum_n \hat{g}(n-k) e^{i(n-k)x} = f(x)g(x).$$

Torej je produkt funkcij $f, g \in A$ spet v A .

Definicija 2. Naj bo $f \in A$, $S(f)$ njena (absolutno konvergentna) Fourierova vrsta in $S(x) \sim \sum_n c_n e^{inx}$ poljubna trigonometrična vrsta z omejenimi koeficienti c_n . Tedaj definiramo ti. *Rajchmanov produkt* vrst $S(f)$ in S s predpisom

$$(S(f) \cdot S)(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{inx},$$

kjer je $C_n = (c * \hat{f})(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \hat{f}(n-k)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, tj. konvolucija zaporedij c in \hat{f} .

Zaradi omejenosti zaporedja c je konvolucija zaporedij dobro definirana, saj velja $|C_n| \leq \sum_k |c_k \hat{f}(n-k)| \leq \sup_k |c_k| \sum_k |\hat{f}(n-k)| = \|f\|_A \sup_k |c_k| < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Trditev 1. Če je zaporedje $c = (c_n)$ omejeno, je omejeno tudi zaporedje $C = (C_n)$. Če velja $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$), velja tudi $C_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$).

Dokaz. Ravnokar smo videli, da je zaporedje C omejeno. Za dokaz drugega dela trditve pa pišimo

$$\begin{aligned} |C_n| &\leq \sum_k |c_k \hat{f}(n-k)| = \sum_{|k| \leq |n|/2} |c_k| |\hat{f}(n-k)| + \sum_{|k| > |n|/2} |c_k| |\hat{f}(n-k)| \leq \\ &\leq \sup_k |c_k| \sum_{|m| \geq |n|/2} |\hat{f}(m)| + \sup_{|k| > |n|/2} |c_k| \sum_m |\hat{f}(m)| \rightarrow 0 \quad (|n| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Poleg algebre A definirajmo še podalgebro A_0 tistih funkcij iz A , ki imajo hitro proti 0 konvergirajoče Fourierove koeficiente.

Definicija 3. $A_0 = \{\phi \in L^1; \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{|n| \geq k} |\hat{\phi}(n)|) < \infty\}$.

Očitno velja $A_0 \subset A$ in očitno je A_0 podprostor v A .

Trditev 2. $A_0 = \{\phi \in L^1; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n \hat{\phi}(n)| < \infty\}$.

Dokaz. Trditve sledi iz enakosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|n| \geq k} |\widehat{\phi}(n)| \right) = \sum_n \sum_{k=0}^{|n|} |\widehat{\phi}(n)| = \sum_n (|n| + 1) |\widehat{\phi}(n)|,$$

kar je po eni strani večje od $\sum_n |n\widehat{\phi}(n)|$ in po drugi strani manjše od $2\sum_n |n\widehat{\phi}(n)|$.

Iz trditve 2 tudi takoj izpeljemo, da je A_0 podalgebra, saj je

$$\begin{aligned} \sum_n |n\widehat{\phi}\widehat{\psi}(n)| &= \sum_n |n \sum_k \widehat{\phi}(k)\widehat{\psi}(n-k)| \leq \\ &\leq \sum_n (|\sum_k k\widehat{\phi}(k)\widehat{\psi}(n-k)| + |\sum_k \widehat{\phi}(k)(n-k)\widehat{\psi}(n-k)|) \leq \\ &\leq \sum_k |k\widehat{\phi}(k)| \sum_n |\widehat{\psi}(n-k)| + \sum_k |\widehat{\phi}(k)| \sum_n |(n-k)\widehat{\psi}(n-k)| < \infty. \end{aligned}$$

Zadosten pogoj za pripadnost funkcije ϕ podalgebri A_0 je pogoj $\widehat{\phi}(n) = O(1/|n|^3)$ ($|n| \rightarrow \infty$). Tedaj namreč velja $\sum_n |n\widehat{\phi}(n)| \leq M \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty$. V posebnem primeru je to res, če je funkcija $\phi \in C^3$, vsaj trikrat zvezno odvedljiva. Tedaj ima ϕ''' Fourierove koeficiente enake $-in^3\widehat{\phi}(n) \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$) in je zato $\widehat{\phi}(n) = O(1/|n|^3)$ ($|n| \rightarrow \infty$). Gotovo je torej $\phi \in A_0$, če je $\phi \in C^\infty$, neskončnokrat odvedljiva funkcija.

Pomožna trditev. Naj bo $E \subset [0, 2\pi]$, $\phi \in A_0$ in $\phi(x) = 0$ za $x \in E$. Naj bo S trigonometrična vrsta s koeficienti $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$) in $C_n = \sum_k c_k \widehat{\phi}(n-k)$ koeficienti Rajchmanovega produkta $S(\phi) \cdot S$. Potem velja $\sum_{|n| \leq N} C_n e^{inx} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po $x \in E$.

Dokaz. Izberimo $x \in E$, $N \in \mathbb{N}$ in zapišimo:

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq N} C_n e^{inx} &= \sum_{|n| \leq N} \sum_k c_k e^{ikx} \widehat{\phi}(n-k) e^{i(n-k)x} = \\ &= \sum_k c_k e^{ikx} \sum_{|n| \leq N} \widehat{\phi}(n-k) e^{i(n-k)x} = \sum_k c_k e^{ikx} \sum_{m=-N-k}^{N-k} \widehat{\phi}(m) e^{imx} = \\ &= \sum_{|k| \leq N/2} c_k e^{ikx} \sum_{m=-N-k}^{N-k} \widehat{\phi}(m) e^{imx} + \sum_{|k| > N/2} c_k e^{ikx} \sum_{m=-N-k}^{N-k} \widehat{\phi}(m) e^{imx} = S_1(x) + S_2(x). \end{aligned}$$

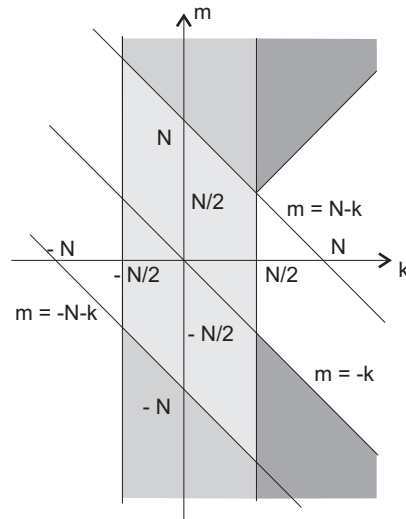
Upoštevajmo, da je za $x \in E$ res $\sum_m \widehat{\phi}(m) e^{imx} = \phi(x) = 0$ in zato npr.

$$\sum_{m=-N-k}^{N-k} \widehat{\phi}(m) e^{imx} = - \sum_{m=-\infty}^{-N-k-1} \widehat{\phi}(m) e^{imx} - \sum_{m=N-k+1}^{\infty} \widehat{\phi}(m) e^{imx}.$$

Podobno velja za druge podmnožice $M \subset \mathbb{Z}$: $\sum_{m \in M} \widehat{\phi}(m) e^{imx} = - \sum_{m \notin M} \widehat{\phi}(m) e^{imx}$. Z zamenjavo vrstnega reda sumiranja dobimo:

$$\begin{aligned} |S_1(x)| &\leq \sum_{|k| \leq N/2} |c_k| \sum_{m=-N-k}^{N-k} |\widehat{\phi}(m) e^{imx}| \leq \sup_k |c_k| \sum_{|k| \leq N/2} \sum_{|m+k| > N} |\widehat{\phi}(m) e^{imx}| \leq \\ &\leq \sup_k |c_k| \sum_{|k| \leq N/2} \sum_{|m+k| > N} |\widehat{\phi}(m)| \leq \sup_k |c_k| \sum_{j \geq N/2} \left(\sum_{|m| > j} |\widehat{\phi}(m)| \right) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

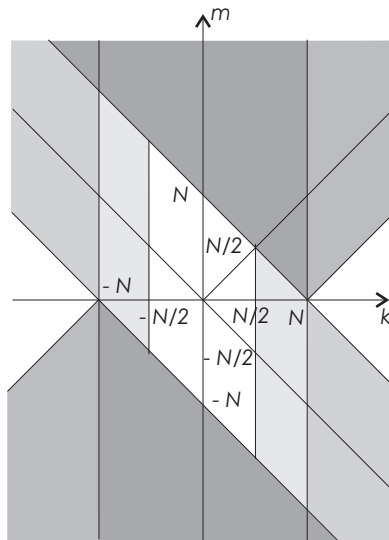
kjer smo na koncu uvedli $j = N - |k|$ (glej skico).



Drugo vrsto pa ocenimo z:

$$\begin{aligned}
 |S_2(x)| &\leq \sum_{|k| > N/2} |c_k| \left| \sum_{m=-N-k}^{N-k} \hat{\phi}(m) e^{imx} \right| \leq \\
 &\leq \sup_{|k| > N/2} |c_k| \sum_k \left| \sum_{|m+k| \leq N} \hat{\phi}(m) e^{imx} \right| \leq \\
 &\sup_{|k| > N/2} |c_k| \left(\sum_{|k| \geq N} \sum_{|m+k| \leq N} |\hat{\phi}(m)| + \sum_{|k| < N} \sum_{|m+k| > N} |\hat{\phi}(m)| \right) \leq \\
 &\leq \sup_{|k| > N/2} |c_k| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|m| \geq j} |\hat{\phi}(m)| \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|m| \geq j} |\hat{\phi}(m)| \right) \right) = \\
 &= 2 \sup_{|k| > N/2} |c_k| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|m| \geq j} |\hat{\phi}(m)| \right) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji vrstici v prvi vsoti pisali $j = |k| - N$, v drugi vsoti pa $j = N - |k|$ (glej skico).



Dodatek. Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ naj bo $x \mapsto \tilde{\phi}(n, x)$ zvezna funkcija na $[0, 2\pi]$ z lastnostjo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|n| \geq k} |\tilde{\phi}(n, x)| \right) < \infty,$$

kjer je konvergenca enakomerna po $x \in [0, 2\pi]$. Postavimo

$$\phi^*(x) = \sum_n \tilde{\phi}(n, x) e^{inx}$$

(vrsta enakomerno in absolutno konvergira ter definira zvezno funkcijo ϕ^*). Za vsako trigonometrično vrsto S s koeficienti $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$) definirajmo tudi v tem primeru "koeficiente Rajchmanovega produkta" $S(\phi^*) \cdot S$ s predpisom

$$\tilde{C}_n(x) = \sum_k c_k \tilde{\phi}(n - k, x)$$

(ti "koeficienti" so zaradi pogoja glede $\tilde{\phi}$ dobro definirani). Če je $E \subset [0, 2\pi]$ taka podmnožica, da je $\phi^*(x) = 0$ za $x \in E$, potem velja enakomerno po $x \in E$:

$$\sum_{|n| \leq N} \tilde{C}_n(x) e^{inx} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Dokaz. Dokaz poteka enako kot v pomožni trditvi, le da je zdaj $C_n = \tilde{C}_n(x)$ in $\hat{\phi}(m) = \tilde{\phi}(m, x)$, tako da sta obe količini še odvisni od x . Zdaj dobimo oceni (glej dokaz pomožne trditve): $|S_1(x)| \leq \sup_k |c_k| \sum_{j \geq N/2} (\sum_{|m| \geq j} |\tilde{\phi}(m, x)|) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po $x \in E$ in $|S_2(x)| \leq 2 \sup_{|k| > N/2} |c_k| \sum_{k \geq 0} (\sum_{|m| \geq k} |\tilde{\phi}(m, x)|) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po $x \in E$. Torej je $\sum_{|n| \leq N} \tilde{C}_n(x) e^{inx} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po $x \in E$.

Trditev 3 (Osnovna trditev Rajchmanove teorije). Naj bo $\phi \in A_0$, S trigonometrična vrsta s koeficienti $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$) in $C_n = \sum_k c_k \hat{\phi}(n - k)$ koeficienti Rajchmanovega produkta $S(\phi) \cdot S$. Tedaj velja enakomerno po vseh $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{|n| \leq N} C_n e^{inx} - \phi(x) \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} (C_n - \phi(x) c_n) e^{inx} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Dokaz. Definirajmo $\tilde{\phi}(n, x) = \hat{\phi}(n)$, če je $n \neq 0$, in $\tilde{\phi}(n, x) = \hat{\phi}(0) - \phi(x)$, če je $n = 0$. Za vsak n je to zvezna funkcija in velja

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|n| \geq k} |\tilde{\phi}(n, x)| \right) &= \sum_n |\tilde{\phi}(n, x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|n| \geq k} |\tilde{\phi}(n, x)| = \\ |\hat{\phi}(0) - \phi(x)| + \sum_{n \neq 0} |\hat{\phi}(n)| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|n| \geq k} |\hat{\phi}(n)| &\leq |\phi(x)| + \sum_n |\hat{\phi}(n)| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|n| \geq k} |\hat{\phi}(n)| = \\ |\phi(x)| + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|n| \geq k} |\hat{\phi}(n)| &\leq M + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|n| \geq k} |\hat{\phi}(n)| < \infty, \end{aligned}$$

ker je ϕ zvezna funkcija in zato omejena z neko konstanto $M > 0$. S predpisom $\phi^*(x) = \sum_n \tilde{\phi}(n, x) e^{inx}$ je dobro definirana zvezna funkcija ϕ^* . Upošteva je definicijo funkcije $\tilde{\phi}$ se lahko prepričamo, da za vsak $x \in [0, 2\pi]$ velja $\phi^*(x) = \hat{\phi}(0) - \phi(x) + \sum_{n \neq 0} \hat{\phi}(n) e^{inx} = \phi(x) - \phi(x) = 0$. Po dodatku k pomožni trditvi tedaj velja tudi $\sum_{|n| \leq N} \tilde{C}_n(x) e^{inx} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po vseh $x \in [0, 2\pi]$. Toda po drugi strani je za vsak n res

$$\tilde{C}_n(x) = \sum_k c_k \tilde{\phi}(n - k, x) = c_n (\hat{\phi}(0) - \phi(x)) + \sum_{k \neq n} c_k \hat{\phi}(n - k) =$$

$$= \sum_k c_k \widehat{\phi}(n-k) - \phi(x)c_n = C_n - \phi(x)c_n.$$

Torej velja $\sum_{|n| \leq N} (C_n - \phi(x)c_n)e^{inx} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) enakomerno po $x \in \mathbb{R}$.

Videli smo, da je $C^\infty \subset A_0$. V nadaljevanju bomo potrebovali nekatere neskončnokrat odvedljive funkcije s posebnimi lastnostmi (glej dodatek E). Nosilec take funkcije, tj. zaprtje množice točk, v katerih ima funkcija $\phi \in C^\infty$ od 0 različno vrednost, označimo s $\text{supp } \phi$. Za nas bo pomembno, da obstajajo funkcije $\phi \in C^\infty$ s predpisanim nosilcem, npr. enakim danemu zaprtemu intervalu. Ali: za vsako kompaktno podmnožico K , ki je vsebovana v odprti množici V na realni osi, obstaja $\phi \in C^\infty$, tako da je $\text{supp } \phi \subset V$ in je $\phi(x) = 1$ za $x \in K$ (glej trditev E1). Kasneje bomo potrebovali še druge podobne rezultate, zbrane v dodatku E, npr. izrek o razčlenitvi enote.

Izrek 1 (Riemannov princip lokalizacije za trigonometrične vrste). *Naj bo S trigonometrična vrsta s koeficienti $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$). Če je Riemannova funkcija F_S linearna na odprtem intervalu (a, b) , konvergira S na intervalu (a, b) proti 0 in sicer enakomerno na vsakem zaprtem podintervalu $[c, d] \subset (a, b)$.*

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je interval (a, b) dolžine kvečjemu 2π in celo vsebovan v intervalu $[0, 2\pi]$. Sicer izrek dokažemo za vsak podinterval krajše dolžine.

Naj bo $[c, d] \subset (a, b)$ in $\phi \in C^\infty$ taka funkcija, da je $\phi(x) = 1$ za $x \in [c, d]$ in $\text{supp } \phi \subset (a, b)$. Ker je $\phi \in C^\infty$, je $\phi \in A_0$. Naj bo $T = S(\phi) \cdot S$ Rajchmanov produkt s koeficienti $C_n = \sum_k c_k \widehat{\phi}(n-k)$. Po osnovni trditvi 3 velja $\sum_n (C_n - \phi(x)c_n)e^{inx} = 0$ enakomerno po vseh x . Torej ta vrsta konvergira enakomerno po vseh x tudi v Riemannovem smislu:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_n (C_n - \phi(x)c_n)e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 0.$$

Ker je funkcija F_S linearna na (a, b) , za vsak $x \in (a, b)$ in dovolj majhen $h > 0$ velja $\Delta^2 F_S(x, 2h) = 0$, zato je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_n c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 F_S(x, 2h)}{4h^2} = 0.$$

Potem pa je za vsak x tudi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_n \phi(x)c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 0$$

in zato

$$D^2 F_T(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 F_T(x, 2h)}{4h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_n C_n e^{inx} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 0.$$

Torej je Riemannova funkcija F_T vrste T linearna povsod na \mathbb{R} in tako kot v dokazu Cantorjevega izreka sledi $C_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Po osnovni trditvi Rajchmanove teorije (trditev 3) je zato $\sum_n \phi(x)c_n e^{inx} = 0$ enakomerno na \mathbb{R} . To velja tudi enakomerno na $[c, d]$, kjer pa je $\phi(x) = 1$. Torej velja $\sum_n c_n e^{inx} = 0$ oziroma $S \rightarrow 0$ enakomerno na $[c, d]$.

Opomba. Če je $S = S(f)$ Fourierova vrsta za funkcijo $f \in L^1$ in je $f = 0$ na (a, b) , lahko Fourierovo vrsto na vsakem zaprtem podintervalu $[c, d] \subset (a, b)$ členoma integriramo dvakrat; dobljena vrsta konvergira proti $\int_c^x dt \int_c^t f(s) ds = 0$. Torej je Riemannova funkcija $F_{S(f)}$ na (a, b) linearna. Po izreku 1 na (a, b) velja $S(f) \rightarrow 0$ enakomerno na zaprtih podintervalih. Torej je izrek 1 posplošitev Riemannovega principa lokalizacije za Fourierove vrste (izrek II.8.2).

Rajchmanovo teorijo lahko izkoristimo tudi za dokaz naslednje lastnosti množic enoličnosti.

Izrek 2 (Bari). *Naj bo $(E_n)_{n \geq 1}$ zaporedje zaprtih množic enoličnosti in $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Tedaj je tudi E množica enoličnosti.*

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja trigonometrična vrsta $S \neq 0$ z lastnostjo $S(x) \rightarrow 0$ za vsak $x \notin E$. Ker je $m(E) = 0$, saj imajo vse množice enoličnosti E_i po trditvi 2.1 mero 0, velja po Cantor-Lebesguovem izreku (posledica trditve II.5.1) $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$).

Naj bo G množica tistih $x \in \mathbb{R}$, pri katerih zaporedje $(S_n(x))$ ni omejeno. Očitno je $G \subset E$, saj zunaj množice E trigonometrična vrsta S konvergira in je zato tam zaporedje delnih vsot $S_n(x)$ omejeno. Prav tako G ni prazna množica. V nasprotnem primeru bi namreč bilo zaporedje delnih vsot povsod omejeno, vrsta S pa bi konvergirala k 0 zunaj množice E , torej skoraj povsod, od koder bi po izreku 1.5 dobili $S = 0$, kar ni res.

Ker lahko zapišemo $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} \{x; |S_n(x)| > k\}$, je G števen presek odprtih množic. Znano pa je, da lahko tedaj napravimo G za poln metrični prostor v metriki, ki je ekvivalentna običajni (glej opombo za izrekom A1). Za vsak $i = 1, 2, \dots$ definirajmo množice $F_i = E_i \cap G$, ki so zaprte množice v polnem metričnem prostoru G . Njihova unija je vse: $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap G) = G \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G \cap E = G$. Po Baireovem izreku (izrek A1) mora imeti vsaj ena od množic F_i neprazno (relativno) notranjost, se pravi, obstaja tak i in tak odprti interval I , da je $\emptyset \neq G \cap I \subset F_i$. Ker je $G \cap I \subset F_i \cap I \subset G \cap I$, velja celo $G \cap I = F_i \cap I$.

Pokazali bomo, da vrsta S konvergira k 0 povsod na intervalu I . Odtod bo sledilo, da je $G \cap I = \emptyset$, saj na G vrsta S ne konvergira. To pa bo v neposrednem nasprotju s prejšnjo ugotovitvijo, da je $G \cap I \neq \emptyset$, in dokaz bo končan.

Izberimo tako funkcijo $\phi \in C^\infty$, da bo $\phi(x) > 0$ za vsak $x \in I$ in $\phi(x) = 0$ za $x \notin I$. Nadalje definirajmo Rajchmanov produkt $T = S(\phi) \cdot S$. Pokazali bomo, da je $T = 0$, od koder bo po osnovni trditvi 3 ($T - \phi(x)S \rightarrow 0$) sledilo $S \rightarrow 0$ za vsak $x \in I$. Za dokaz dejstva $T = 0$ pa je dovolj videti, da $T \rightarrow 0$ zunaj množice enoličnosti E_i , kjer je i izbrani indeks.

Če $x \notin I$, je $\phi(x) = 0$, zato iz $T - \phi(x)S \rightarrow 0$ sledi $T \rightarrow 0$. Če $x \notin E$, velja $S \rightarrow 0$, zato iz $T - \phi(x)S \rightarrow 0$ spet sledi $T \rightarrow 0$. Preostane še primer, ko je $x \in E \cap I$, vendar pa $x \notin E_i$. Izberimo eno tako točko $x_0 \in (E \cap I) \setminus E_i$. Ker je množica E_i zaprta, obstaja podinterval $J \subset I$ z lastnostjo $x_0 \in J \subset \bar{J} \subset I$ in $\bar{J} \cap E_i = \emptyset$. Izberimo novo funkcijo $\tilde{\phi} \in C^\infty$, tako da je $\tilde{\phi}(x_0) = 1$ in $\text{supp } \tilde{\phi} \subset \bar{J}$, ter definirajmo Rajchmanov produkt $\tilde{T} = S(\tilde{\phi}) \cdot T$ s koeficienti \tilde{C}_n . Pokazali bomo, da je zaporedje delnih vsot za \tilde{T} omejeno povsod in da $\tilde{T} \rightarrow 0$ s.p.

Za $x \notin \bar{J}$, je $\tilde{\phi}(x) = 0$, zato iz enakomerne konvergenca $\tilde{T} - \tilde{\phi}(x)T \rightarrow 0$ sledi enakomerna konvergenca $\tilde{T} \rightarrow 0$. Torej je zaporedje delnih vsot trigonometrične vrste \tilde{T} v točki $x \notin \bar{J}$ omejeno. Za $x \notin G$ je po definiciji množice G omejeno zaporedje delnih vsot vrste S , torej velja zaradi $T - \phi(x)S \rightarrow 0$ isto tudi za zaporedje delnih vsot vrste T in zaradi $\tilde{T} - \tilde{\phi}(x)T \rightarrow 0$ tudi za zaporedje delnih vsot vrste \tilde{T} . Ker je $G \cap \bar{J} \subset G \cap I \subset F_i \subset E_i$ in $G \cap \bar{J} \subset E_i \cap \bar{J} = \emptyset$, je torej zaporedje delnih vsot za \tilde{T} omejeno povsod. Poleg tega $\tilde{T} \rightarrow 0$ zunaj E (ker velja isto za S in zato tudi za T). Velja torej $\tilde{T} \rightarrow 0$ s.p. na \mathbb{R} . Po izreku 1.5 dobimo odtod $\tilde{T} = 0$, zato iz enakomerne konvergenca $\tilde{T} - \tilde{\phi}(x)T \rightarrow 0$ sledi v točki x_0 tudi $T \rightarrow 0$. Ta točka je bila poljubna točka iz $(E \cap I) \setminus E_i$. Druge primere smo spoznali že prej, zato velja $T \rightarrow 0$ povsod zunaj E_i . Ker pa je E_i množica enoličnosti, sledi odtod $T = 0$. To pomeni, da velja $S \rightarrow 0$ na intervalu I . Dokaz je končan.

Posledica (Young). *Vsaka števna množica je množica enoličnosti.*

Dokaz. Sledi takoj iz izreka 2, ker je vsaka množica z eno točko zaprta množica in hkrati množica enoličnosti.

Kako pa je z unijo poljubnih (ne nujno zaprtih) množic enoličnosti? Z uporabo aksioma izbire se da konstruirati primer dveh množic enoličnosti, katerih unija ima pozitivno mero in zato ni množica enolinosti (glej [16], str. 46). Ne ve pa se npr., ali je unija dveh Borelovih množic, ki nista zaprti, spet množica enoličnosti.

4. Množice razreda $H^{(n)}$

Obpravnavo množic enoličnosti nadaljujmo s posebnim razredom takih množic. Če je E podmnožica v $[0, 2\pi]$ in m naravno število, naj pomeni mE množico $\{mx, x \in E\}$, reducirano po modulu 2π , tj.

$$mE = \{mx - 2\pi \left\lfloor \frac{mx}{2\pi} \right\rfloor; x \in E\}.$$

Definicija 1 (Rajchman). Množica $E \subset [0, 2\pi]$ je v razredu H , če obstaja tak interval $I \subset [0, 2\pi]$ in tako naraščajoče zaporedje naravnih števil (n_k) (tj. $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$), da za vsak k velja $n_k E \cap I = \emptyset$.

Trditev 1. Če je množica E iz razreda H , je tudi njeno zaprtje \overline{E} tudi iz razreda H .

Dokaz. Za vsako naravno število m velja $m\overline{E} \subset \overline{mE}$, saj je množenje z od 0 različnim realnim številom ($x \rightarrow mx$) homeomorfizem na \mathbb{R} , redukcija po modulu 2π pa (kot kvocientna preslikava) zvezna; torej preslika zaprtje v zaprtje. Če torej $n_k \overline{E}$ nima praznega preseka z odprtim intervalom I , tudi $n_k E$ nima praznega preseka z I . Odtod sledi, da je tudi \overline{E} v razredu H , če velja to za množico E .

Iz $A \subset B$ in $B \in H$ pa očitno vedno sledi $A \in H$.

Zgledi. 1. Vsaka končna množica E je v razredu H . Če so $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ racionalni večkratniki števila 2π , naj bo n_0, n_1, n_2, \dots zaporedje vseh skupnih večkratnikov imenovalcev racionalnih števil x_i . Potem je $n_k x_i = 0$ po modulu 2π , se pravi $n_k x_i \in 2\pi\mathbb{Z}$, za $i = 1, 2, \dots, m$. Za vsako nadaljnjo točko $x \in E$, ki ni racionalni večkratnik števila 2π , pa je množica $\{n_k x; k = 0, 1, 2, \dots\}$ gosta po modulu 2π v intervalu $[0, 2\pi)$, zato obstaja podzaporedje (n_{k_i}) z lastnostjo $n_{k_i} x \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) po modulu 2π . Torej za vsak dovolj majhen $\epsilon > 0$ velja $n_{k_i} E \cap [\epsilon, 2\pi - \epsilon] = \emptyset$ za vsak i .

2. Cantorjeva množica na intervalu $[0, 2\pi]$, tj. množica $E = 2\pi E_{1/3} = 2\pi \{\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k / 3^k; \delta_k \in \{0, 2\}\}$ pripada razredu H . Tu lahko izberemo $I = 2\pi \{x; 1/3 < x < 2/3\}$ in $n_k = 3^k$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$. Cantorjeva množica je namreč podobna svoji prvi (ali zadnji) tretjini, zato je za vsak k množica $3^k E$ enaka E (po modulu 2π). Torej je $3^k E \cap I = \emptyset$ za vsak k .

3. Ni pa vsaka števna množica v razredu H . Konstruiramo lahko celo zaprto števno množico z enim samim stekališčem, ki ni v H . Ker je vseh odprtih intervalov oblike $2\pi(a, b)$, kjer sta $a, b \in \mathbb{Q}$ in je $0 \leq a, b \leq 1$, števno neskončno, jih lahko numeriramo z naravnimi števili: I_1, I_2, I_3, \dots . Za vsako naravno število n in za vsak $i \leq n$ naj bo $r_{n,i}$ poljubna točka iz intervala I_i/n . Tedaj zaporedje $r_{1,1}, r_{2,1}, r_{2,2}, r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}, \dots$ konvergira proti 0, saj so vsa števila $r_{n,i} < 2\pi/n$. Naj bo $E = \{r_{n,i}; n \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{0\}$. Ker za vsak n velja $nr_{n,i} \in I_i$, če je $i \leq n$, se nobeno zaporedje $n_k E$ ne more v celoti (tj. za vsak k) izogniti nobenemu podintervalu $I \subset [0, 2\pi]$. V vsakem intervalu I namreč lahko najdemo "racionalen" interval I_i in za dovolj velik indeks $n_k \geq i$ je $n_k r_{n_k, i} \in I_i \subset I$.

Množica E iz zadnjega zgleda torej ne pripada razredu H , je pa po izreku 2.1 (ali izreku 3.2) množica enoličnosti. Da je obratno vedno res, pove naslednji izrek.

Izrek 1 (Rajchman). Vsaka množica razreda H je množica enoličnosti.

Dokaz. Izrek zadošča dokazati za zaprte množice iz razreda H , saj je po trditvi 1 zaprtje vsake množice iz H spet v H , po drugi strani pa je tudi vsaka podmnožica množice enoličnosti spet množica enoličnosti.

Naj bo torej E zaprta podmnožica razreda H in $I \subset [0, 2\pi]$ tak odprt interval, (n_k) , $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, pa tako zaporedje naravnih števil, da je $n_k E \cap I = \emptyset$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$. Denimo, da je $S(x) \sim \sum_n c_n e^{inx}$ trigonometrična vrsta z lastnostjo $S(x) \rightarrow 0$ za $x \notin E$. Pokazati moramo, da je $c_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Ker je $n_0 E \cap I = \emptyset$ in zato $E \cap \frac{1}{n_0} I = \emptyset$, konvergira S proti 0 na množici s pozitivno mero, zato lahko najprej po Cantor-Lebesguovem izreku ugotovimo, da velja $c_n \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$).

Izberimo funkcijo $\phi \in C^\infty$ z lastnostjo $\text{supp } \phi \subset I$ in $\widehat{\phi}(0) = 1$ (slednje dosežemo z množenjem z ustrezno pozitivno konstanto). Za poljuben $k = 0, 1, 2, \dots$ definirajmo $\phi_k(x) = \phi(n_k x)$. Če je $x \in E$, za vsak k velja $n_k x \notin I$ in je zato $\phi_k(x) = 0$. Oglejmo si Rajchmanov produkt $T^{(k)} = S(\phi_k) \cdot S \sim \sum_n C_n^{(k)} e^{inx}$, kjer je $C_n^{(k)} = \sum_m c_m \widehat{\phi}_k(n - m) = \sum_m c_{n-m} \widehat{\phi}_k(m)$. Pokazali bomo, da velja $C_n^{(k)} \rightarrow c_n$ ($k \rightarrow \infty$) za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Fourierove koeficiente za funkcije ϕ_k znamo izračunati: $\widehat{\phi}_k(m) = \widehat{\phi}(n)$, če je $m = n \cdot n_k$ in $\widehat{\phi}_k(m) = 0$ sicer. Zato je (i) $\sum_n |\widehat{\phi}_k(m)| = \sum_n |\widehat{\phi}(n)| = \|\phi\|_A$ (saj vemo, da je $\phi \in A_0 \subset A$), (ii) $\widehat{\phi}_k(0) = \widehat{\phi}(0) = 1$ in (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\phi}_k(m) = 0$ za $m \neq 0$. Odtod je $C_n^{(k)} = \sum_m c_{n-m} \widehat{\phi}_k(m) = \sum_{|m| \leq N} c_{n-m} \widehat{\phi}_k(m) + \sum_{|m| > N} c_{n-m} \widehat{\phi}_k(m)$ za poljuben $N > |n|$. Prva vsota zaradi (ii) in (iii) konvergira k c_n , druga pa je omejena z $\sup_{|m| > N} |c_{n-m}| \sum_m |\widehat{\phi}_k(m)| \leq \|\phi\|_A \sup_{|j| > N - |n|} |c_j|$ zaradi (i). Pri dovolj velikem N je zato druga vsota poljubno majhna, ne glede na k . Torej za vsak n velja $C_n^{(k)} \rightarrow c_n$ ($k \rightarrow \infty$).

Po osnovni trditvi Rajchmanove teorije (glej trditev 3.3) za vsak k velja $T^{(k)} - \phi_k(x)S \rightarrow 0$ enakomerno po $x \in \mathbb{R}$. Za $x \in E$ je $\phi_k(x) = 0$, torej imamo tedaj $T^{(k)} \rightarrow 0$. Za $x \notin E$ pa velja $S \rightarrow 0$, torej imamo spet $T^{(k)} \rightarrow 0$. Po Cantorjevem izreku je zato $T^{(k)} = 0$, se pravi $C_n^{(k)} = 0$ za vsak n in za vsak k . Pošljimo $k \rightarrow \infty$, pa dobimo $c_n = 0$ za vsak n oziroma $S = 0$. Množica E je tako množica enoličnosti.

Posledica. Cantorjeva množica $E = 2\pi E_{1/3}$ je množica enoličnosti.

Dokaz. Prej smo spoznali, da je Cantorjeva množica E poseben primer množice iz razreda H . Torej je po izreku 1 množica enoličnosti.

Dobili smo primer neštevne množice enoličnosti (z mero nič). V zadnjem razdelku bomo spoznali tudi primer množice z mero nič, ki pa ni množica enoličnosti.

V naslednji trditvi bo treba pokazati, da velja $S(f) \cdot S = 0$ za vsak $f \in A$ s $\text{supp } f \subset V$, kjer je V odprta podmnožica v $[0, 2\pi]$. Ker je $K = \text{supp } f$ kompaktna množica, jo pokriva že končno mnogo odprtih intervalov I_i , iz katerih je sestavljena množica V , npr. $K \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$. Po trditvi E2 (o razčlenitvi enote) obstajajo funkcije $h_i \in C^\infty$ z nosilci v I_i in vsoto $\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1$ za $x \in K$. Potem je $f = \sum_{i=1}^m f h_i = \sum_{i=1}^m f_i$, kjer je $f_i = f h_i$ in $\text{supp } f_i \subset \text{supp } h_i \subset I_i$ za vsak i . Če pokažemo $S(f_i) \cdot S = 0$ za vsak $i = 1, 2, \dots, m$, bo veljalo tudi $S(f) \cdot S = 0$.

Trditev 2. Naj bo S poljubna trigonometrična vrsta z omejenimi koeficienti c_n in $V \subset [0, 2\pi]$ odprta množica. Če je $S(\phi) \cdot S = 0$ za vsak $\phi \in C^\infty$ s $\text{supp } \phi \subset V$, velja tudi $S(f) \cdot S = 0$ za vsak $f \in A$ s $\text{supp } f \subset V$.

Dokaz. Zaradi komentarja pred formulacijo trditve je dovolj dokazati $S(f) \cdot S = 0$ za vsak $f \in A$ s $\text{supp } f \subset I$, kjer je $I \subset V$ odprt interval. Izberimo $\epsilon > 0$ in $\phi \in C^\infty$ z lastnostjo $\phi(x) = 1$ za $x \in \text{supp } f$ in $\text{supp } \phi \subset I$. Ker Fourierova vrsta za f enakomerno

in absolutno konvergira proti f , konvergirajo njene delne vsote, ki so trigonometrični polinomi, v normi algebre A proti f . Obstaja torej tak trigonometrični polinom P , da je $\|f - P\|_A < \epsilon/\|\phi\|_A$. Tedaaj (ob upoštevanju, da je $\phi(x) = 1$ za $x \in \text{supp } f$) velja

$$\begin{aligned} \|f - P\phi\|_A &= \sum_n |\widehat{f}(n) - \widehat{P\phi}(n)| = \sum_n \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [f(x) - P(x)\phi(x)]e^{inx} dx \right| = \\ &= \sum_n \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [f(x)\phi(x) - P(x)\phi(x)]e^{inx} dx \right| = \sum_n |\widehat{f\phi}(n) - \widehat{P\phi}(n)| = \\ &= \|f\phi - P\phi\|_A \leq \|f - P\|_A \|\phi\|_A < \epsilon. \end{aligned}$$

Torej lahko vsako funkcijo $f \in A$ s $\text{supp } f \subset I$ po normi v A poljubno natančno aproksimiramo s funkcijami $P\phi \in C^\infty$, kjer je $\text{supp } P\phi \subset I$. Poleg tega je $S(P\phi) \cdot S = 0$ po predpostavki, zato velja tudi $S(f) \cdot S = S(f - P\phi) \cdot S$. Za ustrezne koeficiente C_n Rajchmanovega produkta $S(f) \cdot S$ dobimo oceno

$$\begin{aligned} |C_n| &= \left| \sum_k c_{n-k} (f - P\phi)^\wedge(k) \right| \leq \sum_k |c_{n-k}| |(f - P\phi)^\wedge(k)| \leq \\ &\leq \sup_m |c_m| \sum_k |(f - P\phi)^\wedge(k)| = \|f - P\phi\|_A \sup_m |c_m| < \epsilon \sup_m |c_m|. \end{aligned}$$

To velja za vsak n in vsak $\epsilon > 0$. Torej je $C_n = 0$ za vsak n oziroma $S(f) \cdot S = 0$.

Od tod sledi zelo uporaben kriterij za to, da je zaprta množica E množica enoličnosti. Uporabili ga bomo za dokaz, da so tudi elementi nekoliko splošnejšega razreda $H^{(n)}$ množic, ki ga bomo definirali v tem razdelku, množice enoličnosti (glej izrek 3).

Izrek 2. *Zaprta podmnožica $E \subset [0, 2\pi]$ je množica enoličnosti, če obstaja (po normi v A s konstanto $C > 0$) omejeno zaporedje funkcij $f_n \in A$ z lastnostjo $E \cap \text{supp } f_n = \emptyset$ in $\widehat{f}_n(0) \rightarrow 1$, $\widehat{f}_n(k) \rightarrow 0$ za $k \neq 0$ ($n \rightarrow \infty$).*

Dokaz. Denimo, da tako zaporedje funkcij $f_n \in A$ obstaja. Naj bo S trigonometrična vrsta z lastnostjo $S(x) \rightarrow 0$ za $x \notin E$. Na množici $\text{supp } f_0 \subset E^c$, ki ima zaradi zveznosti funkcije f_0 pozitivno mero, vrsta konvergira, zato njeni koeficienti po Cantor-Lebesguovem izreku konvergirajo proti 0. Za vsako funkcijo $\phi \in C^\infty$ velja osnovna trditev 3.3, se pravi $S(\phi) \cdot S - \phi(x)S \rightarrow 0$, iz nje pa sledi $S(\phi) \cdot S = 0$, če je $\text{supp } \phi \subset E^c$. Po trditvi 2 velja za vsak n tudi $S(f_n) \cdot S = 0$. Torej je $\sum_k \widehat{f}_n(k)c_{m-k} = 0$ za vsak n in vsak $m \in \mathbb{Z}$. Izberimo $N \in \mathbb{N}$ in pišimo

$$\sum_{|k| \leq N} \widehat{f}_n(k)c_{m-k} + \sum_{|k| > N} \widehat{f}_n(k)c_{m-k} = 0.$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Zaradi $\widehat{f}_n(0) \rightarrow 1$ in $\widehat{f}_n(k) \rightarrow 0$ za $k \neq 0$, ko $n \rightarrow \infty$, prva vsota konvergira proti c_m . Za drugo vsoto pa pri dovolj velikem N , takem da je $\sup_{|k| > N} |c_{m-k}| < \epsilon$, velja

$$\left| \sum_{|k| > N} \widehat{f}_n(k)c_{m-k} \right| \leq \sup_{|k| > N} |c_{m-k}| \sum_k |\widehat{f}_n(k)| = \|f_n\|_A \sup_{|k| > N} |c_{m-k}| < C\epsilon.$$

Torej je $\left| \sum_{|k| \leq N} \widehat{f}_n(k)c_{m-k} \right| < C\epsilon$ za vsak m in n , v limiti $|c_m| \leq C\epsilon$ za vsak m . Ker je bil ϵ poljuben, dobimo $c_m = 0$ za vsak m . Torej je $S = 0$ in E množica enoličnosti.

Predno definiramo še druge razrede množic enoličnosti, potrebujemo definicijo hiperravnine v \mathbb{Z}^n .

Definicija 2. Hiperravnina $H_n(p, q)$ v \mathbb{Z}^n je dana z od 0 različnim celoštevilskim vektorjem $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ in celim številom q . Po definiciji je

$$H_n(p, q) = \{m \in \mathbb{Z}^n; m \cdot p = q\}.$$

Tu je seveda tudi $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ in $m \cdot p = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n$ skalarni produkt.

Podobno kot v primeru $n = 1$ za poljubno podmnožico $E \subset [0, 2\pi]$ in za poljuben celoštevilski vektor $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ definirajmo $mE \in [0, 2\pi]^n$ kot množico vektorjev oblike $(m_1 x, m_2 x, \dots, m_n x)$; $x \in E$, reducirano po modulu 2π glede na vsako komponento, torej na kratko $mE = \{(m_1 x, m_2 x, \dots, m_n x); x \in E\}$.

Definicija 3 (Piatetskij-Shapiro). Množica $E \subset [0, 2\pi]$ je v razredu $H^{(n)}$ za $n \in \mathbb{N}$, če obstaja tak n -razsežen kvader $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, kjer so I_i intervali v $[0, 2\pi]$, da množica $\{m \in \mathbb{Z}^n; mE \cap I = \emptyset\}$ ni vsebovana v nobeni končni uniji hiperravnin v \mathbb{Z}^n .

Trditev 3. Za razrede $H^{(n)}$ veljajo naslednje lastnosti:

- (i) $H^{(1)} = H$,
- (i) $H^{(n)} \subset H^{(n+1)}$ za vsak n ,
- (ii) iz $E \in H^{(n)}$ sledi $\overline{E} \in H^{(n)}$.

Dokaz. (i) Pri $n = 1$ je vsaka hiperravnina v \mathbb{Z} sestavljena iz ene same točke in množica $\{m; mE \cap I = \emptyset\}$ leži na neskončno mnogo hiperravninah natanko takrat, ko je neskončna, se pravi, ko obstaja neskončno naraščajoče zaporedje naravnih števil n_k z lastnostjo $n_k E \cap I = \emptyset$.

(ii) Če $(m_1 x, m_2 x, \dots, m_n x) \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, tudi $(m_1 x, m_2 x, \dots, m_n x, m_n x) \notin I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times I_n$. Če je $(m_1, m_2, \dots, m_n, m_n) \in H_{n+1}((p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}), q)$, je $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in H_n((p_1, p_2, \dots, p_n), q)$. Obakrat je potrebno končno ali neskončno mnogo hiperravnin.

(iii) Če velja $mE \cap I = \emptyset$ in je I odprt kvader, je tudi $m\overline{E} \cap I = \emptyset$ in obratno. Obe množici vektorjev sta enaki.

Naj omenimo, da iz $A \subset B$ in $B \in H^{(n)}$ vedno sledi $A \in H^{(n)}$.

Izrek 3 (Piatetskij-Shapiro). Vsaka množica razreda $H^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, je množica enoličnosti.

Dokaz. Dovolj je dokazati izrek za zaprte množice razreda $H^{(n)}$. Naj bo torej E taka množica, $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ pa tak odprt kvader in $(m^{(k)})$ tako zaporedje v \mathbb{Z}^n , da je $m^{(k)} E \cap I = \emptyset$ in da člen $m^{(k)}$ ne leži v prvih k hiperravninah v \mathbb{Z}^n (vseh hiperravnin v \mathbb{Z}^n je števno neskončno in jih lahko uredimo po vrsti).

Za vsak $j = 1, 2, \dots, n$ izberimo $g_j \in A$, tako da je $\text{supp} g_j \subset I_j$ in $\widehat{g}_j(0) = 1$. Če označimo $c = \prod_{j=1}^n \|g_j\|_A$, je $c \geq 1$. Za vsak k naj bo $m^{(k)} = (m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, \dots, m_n^{(k)})$ in za vsak k in x definirajmo

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^n g_j(m_j^{(k)} x).$$

Potem velja: (i) $f_k \in A$, $\|f_k\|_A \leq c$. Za vsak j je namreč funkcija $g_j^{(k)}$, definirana z $g_j^{(k)}(x) = g_j(m_j^{(k)} x)$, v A , saj je $\|g_j^{(k)}\|_A = \|g_j\|_A < \infty$, in je zato tudi $\|f_k\|_A \leq \prod_{j=1}^n \|g_j^{(k)}\|_A = \prod_{j=1}^n \|g_j\|_A = c < \infty$ in je torej $f_k \in A$.

(ii) $E \cap \text{supp} f_k = \emptyset$. Če je namreč $x \in E$, za vsak k obstaja tak j , da $m_j^{(k)} x \notin I_j$. Zato je $g_j(m_j^{(k)} x) = 0$ in torej $f_k(x) = 0$.

(iii) $\widehat{f}_k(0) \rightarrow 1$ in $\widehat{f}_k(q) \rightarrow 0$ za $q \neq 0$, če $k \rightarrow \infty$. Ko bomo to pokazali, po po izreku 2 množica E množica enoličnosti.

Izračunajmo $\widehat{f}_k(q)$. To je koeficient pri e^{iqx} v trigonometrični vrsti $f_k(x) = \sum_q \widehat{f}_k(q) e^{iqx}$, ki je produkt trigonometričnih vrst za funkcije $g_j^{(k)}$, torej

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^n g_j^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^n g_j(m_j^{(k)}x) = \prod_{j=1}^n \sum_{p_j} \widehat{g}_j(p_j) e^{im_j^{(k)}p_jx} = \sum_q \sum_{m \cdot p = q} \prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(p_j) e^{iqx}.$$

To pomeni, da je

$$\widehat{f}_k(q) = \sum_{m \cdot p = q} \prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(p_j) = \sum_{m \cdot p = q, (\forall j) |p_j| \leq N} \prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(p_j) + \sum_{m \cdot p = q, (\exists j) |p_j| > N} \prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(p_j).$$

Za vsak $\epsilon > 0$ izberimo N tako velik, da je $\sum_{|m| > N} |\widehat{g}_j(m)| < \epsilon$ za vsak $j = 1, 2, \dots, n$. Tedaj lahko drugo vsoto pri vsakem k ocenimo z

$$\begin{aligned} \sum_{m \cdot p = q, (\exists j) |p_j| > N} \prod_{j=1}^n |\widehat{g}_j(p_j)| &\leq \sum_{m \cdot p = q, |p_1| > N} \prod_{j=1}^n |\widehat{g}_j(p_j)| + \dots + \sum_{m \cdot p = q, |p_n| > N} \prod_{j=1}^n |\widehat{g}_j(p_j)| \leq \\ &\leq n \sum_{|p_1| > N} |\widehat{g}_1(p_1)| \prod_{j \neq 1} \sum_{p_j} |\widehat{g}_j(p_j)| \leq n c \epsilon. \end{aligned}$$

Izberimo k_0 tako velik, da $m^{(k_0)}, m^{(k_0+1)}, \dots$ ne ležijo v nobeni hiperravnini oblike $\{x; p \cdot x = q\}$ z lastnostjo $p \neq 0$ in $|p_j| \leq N$ za $j = 1, 2, \dots, n$. To lahko storimo, ker je takih hiperravnin le končno mnogo, saj je q izbrano celo število, različnih vrednosti za p_j pa je le $(2N+1)^n$. Ločimo dva primera:

(a) $q \neq 0$. Tedaj je za $k \geq k_0$ množica indeksov, po katerih seštevamo v prvi vsoti, prazna, zato je $|\widehat{f}_k(q)| \leq n c \epsilon$. Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$ in $k_0 \in \mathbb{N}$, da velja ta ocena za vsak $k \geq k_0$. To pomeni, da $\widehat{f}_k(q) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

(b) $q = 0$. Tedaj je v prvi vsoti možen le člen s $p = 0$ (sicer bi za $k \geq k_0$ vektor $m^{(k)}$ ležal na "prepovedani" hiperravnini v skladu z izbiro k_0). prva vsota je torej pri $k \geq k_0$ enaka $\prod_{j=1}^n \widehat{g}_j(0) = 1$, druga pa je kot prej omejena z $n c \epsilon$. Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja k_0 , tako da za $k \geq k_0$ velja $|\widehat{f}_k(0) - 1| \leq n c \epsilon$. To pomeni, da velja $\widehat{f}_k(0) \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$).

5. Pisotova števila

Realna števila, ki jih bomo zdaj definirali, so posebna podmnožica celih algebraičnih števil (glej dodatek F) in bodo imela kasneje pomembno vlogo pri odgovoru na vprašanje, kdaj je simetrična perfektna množica nad intervalom $[0, 2\pi]$ s konstantnim delilnim razmerjem množica enoličnosti.

Definicija 1. Realno število $\alpha > 1$ je *Pisotovo število*, če je α celo algebraično število, za konjugirana števila α_i pa velja $|\alpha_i| < 1$. Množico vseh Pisotovih števil bomo označili z S .

Zgledi. 1. Vsako naravno število $m > 1$ je Pisotovo. Minimalni polinom $f(x) = x - m$ je stopnje 1, zato konjugiranih števil ni.

2. Pravi ulomki m/n , $n \neq 1$, niso niti cela algebraična števila, zato tudi ne Pisotova.

3. Število $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ je Pisotovo. Njegov minimalni polinom je $f(x) = x^2 - x - 1$, edino konjugirano število je $(1 - \sqrt{5})/2$ in je po absolutni vrednosti manjše od 1.

4. Število $\alpha = \sqrt{2}$ ni Pisotovo, čeprav je celo algebraično število z minimalnim polinomom $f(x) = x^2 - 2$. Konjugirano število je namreč $-\sqrt{2}$, ki pa po absolutni vrednosti ni manjše od 1. Pač pa sta npr. števili $1 + \sqrt{2}$ in $1 + \sqrt{3}$ Pisotovi, število $1 + \sqrt{5}$ pa ne.

Opombe. 1. Charles Pisot (1910 - 1984), ki je ta števila podrobneje obravnaval, je pokazal, da je v vsaki realni algebraični razširitvi stopnje n obsega \mathbb{Q} neskončno mnogo Pisotovih števil iste stopnje.

Poiščimo npr. vsa Pisotova števila v $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, torej vsa števila oblike $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, ki so Pisotova. Minimalni polinom je $x^2 - 2ax + a^2 - 2b^2$. Ker iščemo cela algebraična števila, mora biti $2a \in \mathbb{Z}$ in $a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$. Oboje hkrati je možno le v primeru $a, b \in \mathbb{Z}$, saj dobimo za $a = a_1/2$ in a_1 liho število protislovje z drugo zahtevo $a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$. Torej so vsa cela algebraična števila v $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oblike $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Za Pisotova števila mora veljati $a + b\sqrt{2} > 1$ in $|a - b\sqrt{2}| < 1$. Lahko se prepričamo, da morata biti obe celi števili a in b pozitivni in da za vsak $b \geq 1$ obstaja vsaj en tak $a \geq 1$, da par (a, b) zadošča obema zahtevama. Torej je v $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ neskončno mnogo Pisotovih števil.

2. Kasneje bomo spoznali, da je množica vseh Pisotovih števil zaprta in ima zato najmanjši element. To minimalno Pisotovo število je enako realnemu korenu α_0 kubične enačbe $x^3 - x - 1 = 0$ in sicer je približno $\alpha_0 \approx 1.3247\dots$ Množica vseh Pisotovih števil S je števna, tako kot množica vseh algebraičnih števil. Ugotovili so, da množica S' vseh njenih stekališč ni prazna in vsebuje npr. vsa naravna števila, večja od 1, vse potence α^m , $m \geq 2$ in $\alpha \in S$ itd. Najmanjše število v S' je število $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, ki nastopa pri zlatem rezu. Tudi višje izpeljane množice S'', S''' itd. niso prazne, velja npr. $\min S'' = 2$.

Definicija 1. $Z\{x\}$ označimo razdaljo realnega števila x do najbližjega celega števila, torej $\{x\} = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$.

Za vsak $x \in \mathbb{R}$ seveda velja $0 \leq \{x\} \leq 1/2$.

Trditev 1 (Pisot). Naj bo α Pisotovo število in γ realno celo algebraično število v $\mathbb{Q}(\alpha)$. Tedaj konvergira $\{\gamma\alpha^k\} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) vsaj geometrijsko.

Dokaz. Naj bo f minimalni polinom števila α stopnje n . Kot običajno označimo $\alpha_0 = \alpha$, števila $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ pa naj bodo k α konjugirana števila. Ker je $\gamma \in \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$, obstaja tak polinom h z racionalnimi koeficienti, da je $\gamma = h(\alpha)$ (glej trditev F6). Označimo $\gamma_0 = \gamma$ in $\gamma_i = h(\alpha_i)$ za $i = 1, 2, \dots, n-1$. Potem so po trditvi F7 tudi γ_i cela algebraična števila.

Za vsak $k \in \mathbb{N}$ je izraz $\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \alpha_i^k = \sum_{i=0}^{n-1} h(\alpha_i) \alpha_i^k$ simetrični polinom v spremenljivkah $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ z racionalnimi koeficienti, torej tudi sam racionalno število, ker se izraža z elementarnimi simetričnimi funkcijami v teh spremenljivkah, ki so ravno koeficienti minimalnega polinoma f , torej cela števila (glej [23], str. 174). Ker cela algebraična števila sestavljajo kolobar (trditev F4), je tudi izraz $\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \alpha_i^k$ celo algebraično število. Ker je hkrati racionalno število, je navadno celo število (trditev F3), torej v \mathbb{Z} . To pomeni, da je $\{\gamma\alpha^k\} = \{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \alpha_i^k\}$. Zaradi ocene $|\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \alpha_i^k| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| |\alpha_i|^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) (saj je $|\alpha_i| < 1$ za vsak $i \geq 1$) velja tudi

$$\{\gamma\alpha^k\} = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \alpha_i^k \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \right) \left(\max_{1 \leq i \leq n-1} |\alpha_i| \right)^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Konvergenca je torej vsaj geometrijska.

Pisot je pokazal, da velja tudi obrat zgornje trditve. V ta namen potrebujemo dve lemi o tem, kdaj predstavlja dana potenčna vrsta racionalno funkcijo. Tu bomo ti dve lemi samo navedli, njun dokaz najde bralec v dodatku G.

Lema 1 (Kronecker). Potenčna vrsta $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ predstavlja racionalno funkcijo natanko takrat, ko obstaja tako naravno število n , da so za $k \geq n$ enake 0 vse determinante:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{k+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{2k} \end{vmatrix}$$

Dokaz. Glej dodatek G.

Lema 2 (Fatou). Če ima vrsta $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ cele koeficiente c_k in predstavlja racionalno funkcijo, lahko zapišemo $f(z)$ v obliki $f(z) = P(z)/Q(z)$, kjer sta P in Q polinoma s celimi koeficienti brez skupnega faktorja in je $Q(0) = 1$.

Dokaz. Glej dodatek G.

Izrek 1 (Pisot). Realno število $\alpha > 1$ je Pisotovo natanko takrat, ko obstaja tako realno število $\gamma \neq 0$, da velja $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < \infty$.

Dokaz. Potrebnost pogoja smo v resnici videli že v trditvi 1. Če je namreč α Pisotovo število, lahko vzamemo za γ katerokoli realno celo algebraično število iz $\mathbb{Q}(\alpha)$, npr. $\gamma = 1$. Videli smo, da tedaj konvergira $\{\gamma \alpha^k\} \rightarrow 0$ geometrijsko, torej vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma \alpha^k\}^2 < \infty$ konvergira in zato toliko bolj konvergira tudi vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \{\gamma \alpha^k\} \leq \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \{\gamma \alpha^k\}^2 < \infty.$$

Obratno, naj bo $\alpha > 1$ tako realno število, da za neko število $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, velja $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < \infty$. Pišimo $\gamma \alpha^k = a_k + \epsilon_k$, kjer je $a_k \in \mathbb{Z}$ in $\epsilon_k = \pm \{\gamma \alpha^k\}$, torej $|\epsilon_k| \leq 1/2$. Po predpostavki je $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < \infty$, saj je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \epsilon_k = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi (a_k + \epsilon_k) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < \infty.$$

Pokazati moramo, da je število α Pisotovo. Najprej se prepričajmo, da predstavlja vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ s celimi koeficienti a_k racionalno funkcijo. V ta namen si oglejmo determinanto

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{k+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{2k} \end{vmatrix}$$

in pokažimo, da je $\Delta_k = 0$ za vsak dovolj velik k . Pišimo $b_k = a_k - \alpha a_{k-1} = \alpha \epsilon_{k-1} - \epsilon_k$. Torej je po Cauchy-Schwarzovi oceni $b_k^2 \leq (\alpha^2 + 1)(\epsilon_{k-1}^2 + \epsilon_k^2)$ in vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ je konvergentna. Potem lahko zapišemo (s transformacijo stolpcev od zadaj):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{k+1} \\ a_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{2k} \end{vmatrix}$$

in po Hadamardovi lemi (lema G1) velja ocena

$$\Delta_k^2 \leq \left(\sum_{i=0}^k a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 \right) \left(\sum_{i=2}^{k+2} b_i^2 \right) \dots \left(\sum_{i=k}^{2k} b_i^2 \right) \leq \left(\sum_{i=0}^k a_i^2 \right) R_1 R_2 \dots R_k,$$

kjer smo označili $R_j = \sum_{i=j}^{\infty} b_i^2$ za vsak $j = 1, 2, \dots, k$. Upoštevajmo še definicijo celih števil a_i , pa dobimo še oceno

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i^2 &= \sum_{i=0}^k (\gamma \alpha^i - \epsilon_i)^2 = \sum_{i=0}^k (\gamma^2 \alpha^{2i} - 2\gamma \epsilon_i \alpha^i + \epsilon_i^2) = \\ &= \alpha^{2k} \left(\gamma^2 \sum_{i=0}^k \alpha^{2i-2k} - 2\gamma \sum_{i=0}^k \epsilon_i \alpha^{i-k} \alpha^{-k} + \left(\sum_{i=0}^k \epsilon_i^2 \right) \alpha^{-2k} \right) \leq \alpha^{2k} \left(\gamma^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \gamma \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{4}{3} \right) = c \alpha^{2k}, \end{aligned}$$

kjer je $c = c(\gamma, \alpha)$ konstanta, neodvisna od k . Torej je

$$\Delta_k^2 \leq c \alpha^{2k} R_1 R_2 \dots R_k = c (\alpha^2 R_1) (\alpha^2 R_2) \dots (\alpha^2 R_k).$$

Zaradi konvergence vrste $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ velja $\alpha^2 R_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), zato je za dovolj velik j , npr. $j > j_0$, izpolnjena neenakost $(\alpha^2 R_j) < 1/2$. Torej za $k > j_0$ velja

$$\Delta_k^2 \leq c (\alpha^2 R_1) (\alpha^2 R_2) \dots (\alpha^2 R_{j_0}) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-j_0} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Ker je Δ_k^2 celo število, mora biti $\Delta_k = 0$ za vsak dovolj velik k in po Kroneckerjevi lemi 1 predstavlja vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ racionalno funkcijo.

Po Fatoujevi lemi 2 lahko potemtakem pišemo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = P(z)/Q(z)$, kjer sta P in Q polinoma s celimi koeficienti brez skupnega faktorja in je $Q(0) = 1$. Naj bo $Q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_n z^n$. Tedaj je

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma \alpha^k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{\gamma}{1 - \alpha z} - \frac{P(z)}{1 + q_1 z + \dots + q_n z^n}.$$

Ker za $|z| < 1$ vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k z^k$ absolutno konvergira, saj je $|\epsilon_k| \leq 1/2$ za vsak k , je konvergenčni polmer za to vrsto vsaj 1, zato je f racionalna funkcija, ki v točki $z = 1/\alpha$ ne sme imeti pola. Torej mora biti $1/\alpha$ enostavna ničla polinoma Q (da se pol v P/Q pokrajša s polom v $\gamma/(1 - \alpha z)$). Možnost, da bi bila $1/\alpha$ večkratna ničla za Q , ne pride v poštev, ker bi tedaj morala biti $1/\alpha$ ničla tudi za P in bi bila tako P kot Q deljiva z minimalnim polinomom za $1/\alpha$. To pa ni mogoče, ker P in Q nimata skupnega faktorja. Drugih ničel, različnih od $1/\alpha$, pa v območju $|z| < 1$ polinom Q ne sme imeti, ker je f tam analitična funkcija.

Po drugi strani vemo, da $\epsilon_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), saj vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2$ konvergira. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in tako velik m , da je $\sup_{k>m} |\epsilon_k| < \epsilon$. Za $|z| < 1$ imamo tedaj oceno:

$$\begin{aligned} (1 - |z|) |f(z)| &\leq (1 - |z|) \sum_{k=0}^{\infty} |\epsilon_k| |z|^k = (1 - |z|) \sum_{k=0}^m |\epsilon_k| |z|^k + (1 - |z|) \sum_{k=m+1}^{\infty} |\epsilon_k| |z|^k \leq \\ &(1 - |z|) \sum_{k=0}^m |\epsilon_k| |z|^k + \sup_{k>m} |\epsilon_k| |z|^{m+1} < (1 - |z|) \sum_{k=0}^m |\epsilon_k| |z|^k + \epsilon. \end{aligned}$$

Torej velja $(1 - |z|) |f(z)| \rightarrow 0$ ($|z| \nearrow 1$), kar pomeni, da pri $|z| = 1$ funkcija f nima pola, se pravi, da so vse druge ničle polinoma Q , razen $1/\alpha$, po absolutni vrednosti večje od 1.

Polinom $g(z) = z^n Q(1/z) = z^n + q_1 z^{n-1} + q_2 z^{n-2} + \dots + q_n$ ima za koeficiente cela števila, vodilni koeficient pa je 1. Ena njegova ničla je α , torej je α celo algebraično število. Konjugirana števila k α pa so po absolutni vrednosti vsa manjša od 1, saj velja to za vse druge ničle polinoma g . Torej je α Pisotovo število.

Opomba. Iz dokaza izreka 1 vidimo, da je $(1 - \alpha z) f(z) = \gamma - (1 - \alpha z) P(z)/Q(z) = \gamma - P(z)/Q_1(z)$, kjer je Q_1 okrajšan polinom Q . Vstavimo $z = 1/\alpha$ in dobimo $\gamma = P(1/\alpha)/Q_1(1/\alpha) = -\alpha P(1/\alpha)/Q'(1/\alpha)$, saj je $Q(z) = (1 - \alpha z) Q_1(z)$ in $Q'(z) = -\alpha Q_1(z) + (1 - \alpha z) Q_1'(z)$, se pravi, $Q'(1/\alpha) = -\alpha Q_1(1/\alpha)$. Torej je $\gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Posledica. Vsaka potenca Pisotovega števila je tudi Pisotovo število.

Dokaz. Če je α Pisotovo število, velja $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < \infty$ za $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$. Potem pa velja pri istem γ tudi $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^{kp} < \infty$ za vsak $p \in \mathbb{N}$. Torej je tudi α^p Pisotovo število.

Izrek 2. Vsakemu Pisotovemu številu α pripada realno število γ z lastnostjo $1 \leq \gamma < \alpha$ in $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < 9\pi^2$.

Dokaz. Naj bo $P(z) = z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_n$ minimalni polinom za α in Q recipročni polinom: $Q(z) = z^n P(1/z) = 1 + q_1 z + \dots + q_n z^n$. Razvoj racionalne funkcije $P(z)/Q(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ v potenčno vrsto ima cele koeficiente, ker so tudi q_i cela števila po trditvi F5, in je regularen za $|z| < 1/\alpha$.

Če ima polinom P tudi število $1/\alpha$ za ničlo, velja

$$P(z) = (z - \alpha)(z - 1/\alpha)P_1(z) = (z^2 - (\alpha + 1/\alpha)z + 1)P_1(z).$$

Ker so koeficienti za P cela števila, produkt vseh morebitnih ničel polinoma P_1 pa po absolutni vrednosti manjši od 1, mora biti $P_1(z) = 1$ za vsak z . Torej je

$$P(z) = z^2 - (\alpha + 1/\alpha)z + 1,$$

kjer je $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{N}$. Potem pa je tudi $\alpha^k + 1/\alpha^k \in \mathbb{N}$ za vsak k , kot lahko hitro preverimo z indukcijo. V tem primeru pa je $\sin^2 \pi \alpha^k = \sin^2(\pi/\alpha^k) \leq \pi^2/\alpha^{2k}$. Iz $\alpha > 1$ sledi $\alpha + 1/\alpha > 2$, torej celo $\alpha + 1/\alpha \geq 3$, kar pomeni, da je $\alpha > 2$ in zato $\alpha^2/(\alpha^2 - 1) < 4/3$. Tako vidimo, da izrek v tem primeru velja (pri $\gamma = 1$), saj imamo oceno

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \alpha^k \leq \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2k}} = \frac{\pi^2 \alpha^2}{\alpha^2 - 1} < \frac{4\pi^2}{3} < 9\pi^2.$$

Oglejmo si še primer, ko $1/\alpha$ ni ničla polinoma P . Tedaj prav gotovo velja $P \neq Q$ in polinom P ni simetričen. Lahko izberemo tako realno število β , da je funkcija $f(z) = \beta/(1 - \alpha z) - P(z)/Q(z)$ regularna na vsem enotskem disku $|z| \geq 1$. Pišimo $P(z) = (z - \alpha)P_1(z)$ in $Q(z) = (1 - \alpha z)Q_1(z)$. Potem sta tudi P_1 in Q_1 med seboj recipročna polinoma in velja $\beta = (1/\alpha - \alpha)P_1(1/\alpha)/Q_1(1/\alpha)$. Ker je $|P_1(z)/Q_1(z)| = 1$ za $|z| = 1$, saj je $Q_1(z) = z^{n-1}P_1(1/z) = z^{n-1}P_1(\bar{z}) = z^{n-1}\overline{P_1(z)}$, je po principu maksima za analitične funkcije $|P_1(1/\alpha)/Q_1(1/\alpha)| < 1$. Torej je $|\beta| < \alpha - 1/\alpha < \alpha$. Lahko izberemo celo $\beta > 0$, sicer v definiciji funkcije f ulomku P/Q spremenimo predznak. (Primer $\beta = 0$ ne more nastopiti, ker bi to pomenilo, da je $1/\alpha$ ničla za P .)

Poleg tega lahko izrazimo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta \alpha^k - a_k) z^k$, kjer vrsta konvergira tudi za $|z| = 1$. Ker je zaradi recipročnosti polinomov

$$|f(z)| \leq \beta/(\alpha - 1) + |P(z)/Q(z)| = \beta/(\alpha - 1) + 1 < (\alpha - 1/\alpha)/(\alpha - 1) + 1 = 2 + 1/\alpha < 3,$$

dobimo po Parsevalovi enakosti

$$2\pi \sum_{k=0}^{\infty} (\beta \alpha^k - a_k)^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt < 18\pi.$$

Torej je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \beta \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi (\beta \alpha^k - a_k) \leq \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\beta \alpha^k - a_k)^2 < 9\pi^2.$$

Če je $\beta \geq 1$, lahko izberemo $\gamma = \beta$. Če pa je $\beta < 1$, obstaja tako naravno število m , da je $1/\alpha^m \leq \beta < 1/\alpha^{m-1}$, torej $1 \leq \alpha^m \beta < \alpha$. Tedaj izberemo $\gamma = \alpha^m \beta$ in imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \beta \alpha^{m+k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \beta \alpha^k < 9\pi^2.$$

Posledica 1. Če zaporedje Pisotovih števil α_n konvergira proti številu $\alpha > 1$, je tudi α Pisotovo število.

Dokaz. Vsakemu številu α_n pripada po izreku 2 število γ_n z lastnostjo $1 \leq \gamma_n < \alpha_n$ in $\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2 \pi \gamma_n \alpha_n^k < 9\pi^2$. Ker je zaporedje števil γ_n omejeno, lahko iz njega izberemo konvergentno podzaporedje. Predpostavimo, da velja $\gamma_n \rightarrow \gamma$, $\gamma \geq 1$. Tedaj velja za vsak N v limiti ($n \rightarrow \infty$) tudi $\sum_{k=0}^N \sin^2 \pi \gamma \alpha^k < 9\pi^2$ in to ostane v veljavi, ko pošljemo $N \rightarrow \infty$. Torej je po izreku 1 število α Pisotovo.

Posledica 2. Število 1 ni limita Pisotovih števil.

Dokaz. Denimo, da $\epsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in da so vsa števila $1 + \epsilon_n$ Pisotova in naj bo $\beta > 0$ poljubno realno število. Potem so po posledici izreka 1 Pisotova tudi vsa števila $\alpha_n = (1 + \epsilon_n)^{\lfloor \beta/\epsilon_n \rfloor}$. Toda hitro vidimo, da $\alpha_n \rightarrow e^\beta$ ($n \rightarrow \infty$). Ker je $e^\beta > 1$, je po posledici 1 e^β Pisotovo število. To velja za poljuben $\beta > 0$, se pravi, da je Pisotovo vsako število, večje od 1, kar pa vemo, da ni res.

Izrek 3. Množica S vseh Pisotovih števil je zaprta.

Dokaz. Sledi iz posledic 1 in 2.

Opombe. 1. Ni znano, ali je število $\alpha > 1$ Pisotovo, če obstaja realen $\gamma \neq 0$, tako da velja $\{\gamma \alpha^n\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) brez dodatnega pogoja glede hitrosti konvergence (primerjaj izrek 1). Znano pa je, da to velja, če je npr. (a) $\sqrt{n}\{\gamma \alpha^n\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ali pa je (b) število $\alpha > 1$ algebraično in velja $\{\gamma \alpha^n\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (Pisot). Glede na točko (b) se torej zastavlja vprašanje, ali obstaja transcendentno število $\alpha > 1$ z lastnostjo $\{\gamma \alpha^n\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) za $\gamma \neq 0$.

2. Namesto pogoja $\{\gamma \alpha^n\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) zadošča v točki 1(a) poleg algebraičnosti števila $\alpha > 1$ zahtevati, da ima zaporedje $(\gamma \alpha^n)$ le končno mnogo stekališč po modulu 1 (glej [5], Theorem 5.6.2).

3. Posledica Pisotovega rezultata (a) iz točke 1 je naslednja: Ker pri pogoju $1 < q < p$ okrajšani ulomek p/q ni Pisotovo število, velja $(p/q)^n \not\rightarrow 0 \pmod{1}$. Znano je, da ima v tem primeru zaporedje $(p/q)^n$ po modulu 1 neskončno mnogo stekališč, ni pa znano, če je gosto oziroma morda celo enakomerno porazdeljeno na intervalu $[0,1]$. Problem predstavlja npr. že tako preprost ulomek kot $3/2$ (računalniška simulacija kaže, da bi zaporedje $(3/2)^n$ lahko bilo enakomerno porazdeljeno po modulu 1).

4. Leta 1935 je J.F. Koksma pokazal, da je za vsak realen $\gamma \neq 0$ (npr. za $\gamma = 1$) skoraj za vsak $\alpha > 1$ zaporedje $(\gamma \alpha^n)$ enakomerno porazdeljeno po modulu 1. Kljub temu pa ne poznajo nobenega konkretnega števila $\alpha > 1$ s to lastnostjo. Znan je le konkreten $\alpha > 1$, da je zaporedje (α^n) gosto po modulu 1. Koksma je prav tako pokazal, da je zaporedje $(\gamma \alpha^n)$ enakomerno porazdeljeno po modulu 1 tudi za vsak $\alpha > 1$ in skoraj za vsak $\gamma \neq 0$.

5. Podobno kot Pisotovo število lahko definiramo tudi ti. *Salemovo število*. To je tako celo algebraično število $\alpha > 1$, katerega konjugirana števila zadoščajo neenakosti $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, pri čemer vsaj za eno od njih velja enakost. Tako celo algebraično število je nujno sode stopnje, enake vsaj 4. Znotraj enotskega kroga leži natanko eno konjugirano število, ostala pa so vsa na enotski krožnici. Poleg tega imajo še druge lepe algebraične lastnosti. Za vsako Salemovo število α je zaporedje (α^n) gosto po modulu 1, ni pa enakomerno porazdeljeno po modulu 1 (glej npr. [5], Chapter 5).

V izreku 1 smo karakterizirali Pisotova števila s konvergenco vrste, lahko pa jih karakteriziramo tudi z neskončnim produktom. To bomo storili na začetku naslednjega razdelka.

6. Salem-Zygmundov izrek

V tem razdelku bomo za simetrične perfektne množice s konstantnim delilnim razmerjem ugotovili, kdaj so množice enoličnosti. Pri tem bomo povezali Rajchmanovo teorijo s teorijo algebraičnih (Pisotovih) števil. Prej pa potrebujemo še eno karakterizacijo Pisotovih števil, to pot z neskončnimi produkti.

Trditev 1. *Naj bo $0 < \xi < 1$. Tedaj za vsak $u \in \mathbb{R}$ konvergira neskončni produkt $\Gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos u\xi^k$.*

Dokaz. Znano je (glej npr. [24], str. 384) da pri pogoju $0 \leq a_k < 1$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$ neskončni produkt $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_k)$ konvergira (proti od 0 različnemu številu) natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. V produktu $\Gamma(u)$ je

$$a_k = 1 - \cos u\xi^k = 2 \sin^2(u/2)\xi^k,$$

torej vedno $a_k \geq 0$ in $a_k < 1$ za vsak tako velik k , da velja $|u|\xi^k < \pi/2$, saj je tedaj $\sin^2(u/2)\xi^k < 1/2$. Poleg tega je

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \sin^2(u/2)\xi^k \leq (u^2/2) \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k} < \infty.$$

Torej produkt $\prod_{k=0}^{\infty} \cos u\xi^k$ konvergira proti številu $\Gamma(u)$, ki je različno od 0 natanko takrat, ko so vsi faktorji različni od 0.

Izrek 1. *Naj bo $0 < \xi < 1$, $\xi \neq 1/2$, $u \in \mathbb{R}$ in $\Gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos u\xi^k$. Tedaj je število $\theta = 1/\xi$ Pisotovo natanko takrat, ko $\Gamma(u) \not\rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$).*

Dokaz. Denimo, da $\Gamma(u) \not\rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$). Tedaj obstaja tako naraščajoče zaporedje realnih števil u_k , $u_k \rightarrow \infty$, in tako število $\delta > 0$, da je $|\Gamma(u_k)| \geq \delta$ za vsak k . Naj bo m_k največje naravno število, za katerega velja $\pi\theta^{m_k} < u_k$. Potem lahko zapišemo $u_k = \pi\lambda_k\theta^{m_k}$, kjer je $1 < \lambda_k \leq \theta$. S prehodom na podzaporedje lahko brez škode predpostavimo, da zaporedje (λ_k) konvergira, npr. $\lambda_k \rightarrow \lambda$ ($k \rightarrow \infty$), pri čemer je $1 \leq \lambda \leq \theta$.

Za vsak k imamo zaradi $|\Gamma(u_k)| \leq |\cos \pi\lambda_k\theta^{m_k} \cos \pi\lambda_k\theta^{m_k-1} \dots \cos \pi\lambda_k\theta \cos \pi\lambda_k|$ oceno

$$\delta^2 \leq \prod_{j=0}^{m_k} \cos^2 \pi\lambda_k\theta^j = \prod_{j=0}^{m_k} (1 - \sin^2 \pi\lambda_k\theta^j) \leq e^{-\sum_{j=0}^{m_k} \sin^2 \pi\lambda_k\theta^j}.$$

Od tod dobimo $\sum_{j=0}^{m_k} \sin^2 \pi\lambda_k\theta^j \leq \ln(1/\delta^2)$, se pravi za $i < k$ tudi

$$\sum_{j=0}^{m_i} \sin^2 \pi\lambda_k\theta^j \leq \sum_{j=0}^{m_k} \sin^2 \pi\lambda_k\theta^j \leq \ln(1/\delta^2).$$

Če pošljemo $k \rightarrow \infty$, dobimo $\sum_{j=0}^{m_i} \sin^2 \pi\lambda\theta^j \leq \ln(1/\delta^2)$. To velja za vsak i , torej imamo v limiti $i \rightarrow \infty$ oceno

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sin^2 \pi\lambda\theta^j \leq \ln(1/\delta^2) < \infty,$$

saj tudi $m_i \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$). Po izreku 1 je zato $\theta = 1/\xi$ Pisotovo število.

Obratno, naj bo $\theta = 1/\xi$ od 2 različno Pisotovo število, se pravi $0 < \xi < 1$ in $\xi \neq 1/2$. Tedaj pa imamo

$$|\Gamma(\pi\theta^k)| = |\cos \pi\theta^k \cos \pi\theta^{k-1} \dots \cos \pi\theta| |\cos \pi/\theta \cos \pi/\theta^2 \cos \pi/\theta^3 \dots|$$

za vsak k . Ker je θ Pisotovo število, so vsi faktorji $\cos \pi\theta^j$ različni od 0. Če bi bil kakšen faktor enak 0, bi veljalo $\theta^j = m_j + 1/2$, kjer je $m_j \in \mathbb{Z}$. Toda to ni mogoče, saj

ima nerazcepni polinom $x^j - m_j - 1/2$ z racionalnimi koeficienti vse ničle po absolutni vrednosti enako velike, θ pa je Pisotovo število, zato ne more biti ničla tega polinoma.

Poleg tega je $\sum_{j=0}^{\infty} \sin^2 \pi \theta^j < \infty$, torej konvergira proti številu C^2 , $C > 0$, tudi neskončni produkt $\prod_{j=0}^{\infty} \cos^2 \pi \theta^j$, zato za vsak k velja

$$|\cos \pi \theta^k \cos \pi \theta^{k-1} \dots \cos \pi \theta| \geq \prod_{j=0}^{\infty} |\cos \pi \theta^j| = C.$$

Prav tako konvergira proti nekemu pozitivnemu številu $D > 0$ tudi neskončni produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\cos \pi / \theta^j|,$$

ker $\theta \neq 2$ in je θ Pisotovo število, zato (kot prej) enakost $\theta^j = 2$ ni možna za noben $j > 1$. Torej imamo skupaj $|\Gamma(\pi \theta^k)| \geq CD > 0$ in zato za $u_k = \pi \theta^k$, $k \geq 0$, velja $\Gamma(u_k) \not\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Opomba. Če je $\xi = 1/2$, izrek ne velja. V tem primeru je namreč število $\theta = 1/\xi = 2$ Pisotovo, kljub temu pa velja

$$\Gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos u \xi^k = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(u/2^k) = \sin 2u/2u,$$

saj je $2^{n+1} \sin(u/2^n) \prod_{k=0}^n \cos(u/2^k) = \sin 2u$ za vsak n , in zato $\Gamma(u) \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$).

Spomnimo se zdaj definicije simetrične perfektne množice s konstantnim delilnim razmerjem ξ , kjer je $0 < \xi < 1/2$: $E_\xi = \cap_{n=0}^{\infty} E_\xi^{(n)}$. Tu so $E_\xi^{(0)} = [0, 1]$, $E_\xi^{(1)} = [0, \xi] \cup [1 - \xi, 1]$, itd. množice, ki jih zaporedoma konstruiramo z odstranitvijo srednjega dela vsakega od prejšnjih intervalov v danem razmerju (glej razdelek I.3). Množico E_ξ smo zapisali tudi v obliki

$$E_\xi = \{(1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi^{k-1}; \epsilon_k \in \{0, 1\}\},$$

in ji priredili Lebesguovo singularno funkcijo L_ξ . Tu bomo sicer potrebovali nebstveno spremenjeno funkcijo, definirano nad množico $2\pi E_\xi$ namesto nad E_ξ :

$$L_\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k / 2^k,$$

če je $x = 2\pi(1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \xi^{k-1}$, in je L_ξ linearna in zvezna sicer.

Trditev 2. Naj bo $0 < \xi < 1/2$ in E_ξ simetrična perfektna množica s konstantnim delilnim razmerjem ξ . Nadalje naj bo L_ξ Lebesguova singularna funkcija nad množico $2\pi E_\xi$. Če za vsak $m \in \mathbb{Z}$ definiramo $c_m = \int_0^{2\pi} e^{-imx} dL_\xi(x)$ kot Riemann-Stieltjesov integral funkcije $e_m(x) = e^{-imx}$ po funkciji L_ξ , velja:

(a) $c_m = (-1)^m \Gamma(\pi m(1 - \xi))$, kjer je $\Gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos u \xi^k$ za vsak $u \in \mathbb{R}$.

(b) Če je S trigonometrična vrsta s koeficienti c_m , je Rajchmanov produkt $S(f) \cdot S = 0$ za vsak $f \in C^\infty$ z nosilcem $\text{supp } f \subset (2\pi E_\xi)^c$.

Dokaz. Ker je e_m zvezna funkcija, L_ξ pa ima kot naraščajoča funkcija omejeno variacijo, Riemann-Stieltjesov integral, ki definira c_m , obstaja. Lahko ga aproksimiramo z Riemann-Stieltjesovo vsoto, kjer so delilne in izbrane točke ravno leva krajišča intervalov, ki sestavljajo množico $2\pi E_\xi^{(n)}$. Dobimo:

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^{2\pi} e^{-imx} dL_\xi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\epsilon_i) \in \{0,1\}^n} \frac{1}{2^n} e^{-im2\pi(1-\xi) \sum_{k=1}^n \epsilon_k \xi^{k-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_i) \in \{0,1\}^n} \prod_{k=1}^n e^{-2\pi im(1-\xi) \epsilon_k \xi^{k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n (1 + e^{-2\pi im(1-\xi) \xi^{k-1}}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{-\pi im(1-\xi) \xi^{k-1}} \cdot (e^{\pi im(1-\xi) \xi^{k-1}} + e^{-\pi im(1-\xi) \xi^{k-1}}) / 2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\pi im(1-\xi) \sum_{k=1}^n \xi^{k-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \pi m(1-\xi) \xi^{k-1} = \\ &= e^{-\pi im} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi m(1-\xi) \xi^{k-1} = (-1)^m \Gamma(\pi m(1-\xi)). \end{aligned}$$

Dokazali smo točko (a), zdaj pa se lotimo še točke (b). Očitno je $|c_m| \leq 1$ za vsak m , zato Rajchmanov produkt $S(f) \cdot S$ obstaja za vsako funkcijo $f \in C^\infty$. Njegovi koeficienti so zaradi enakomerne konvergence vrste enaki

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_m \widehat{f}(n-m) c_m = \sum_m \widehat{f}(n-m) \int_0^{2\pi} e^{-imx} dL_\xi(x) = \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_m \widehat{f}(n-m) e^{-imx} dL_\xi(x) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dL_\xi(x). \end{aligned}$$

Če ima funkcija f svoj nosilec $\text{supp } f$ vsebovan v $(2\pi E_\xi)^c$, je zadnji integral očitno enak 0. Torej je $C_n = 0$ za vsak n in zato $S(f) \cdot S = 0$.

Izrek 2 (Salem). Če je $0 < \xi < 1/2$ in $1/\xi$ ni Pisotovo število, množica $2\pi E_\xi$ ni množica enoličnosti.

Dokaz. Za vsak $m \in \mathbb{Z}$ naj bo c_m definiran tako kot v trditvi 2 in S trigonometrična vrsta s koeficienti c_m . Potem $S \neq 0$, saj je npr. $c_0 = 1$. Po izreku 1 velja $\Gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos u \xi^k \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$), ker $1/\xi$ ni Pisotovo število. Torej velja po trditvi 2(a) tudi $c_m = (-1)^m \Gamma(\pi m(1-\xi)) \rightarrow 0$ ($|m| \rightarrow \infty$). Zato lahko uporabimo osnovno trditev Rajchmanove teorije, ki pravi, da $S(f) \cdot S - f(x)S \rightarrow 0$ enakomerno po $x \in \mathbb{R}$ za $f \in C^\infty$. Ker pa je $S(f) \cdot S = 0$, če je $\text{supp } f \subset (2\pi E_\xi)^c$ (trditev 2(b)), sledi, da $S \rightarrow 0$ za vsak $x \notin 2\pi E_\xi$. Torej $2\pi E_\xi$ ni množica enoličnosti.

Izrek 3 (Zygmund). Naj bo $0 < \xi < 1/2$ in $\theta = 1/\xi$ Pisotovo število stopnje n . Tedaj pripada množica $2\pi E_\xi$ razredu $H^{(n)}$.

Dokaz. Dokažimo najprej poseben primer $n = 1$, ko je $\theta = 1/\xi$ naravno število večje od 2. Tedaj je dokaz lažji in iz njega lepše vidimo idejo za dokaz splošnega primera. Pokazati moramo, da je množica $E = 2\pi E_\xi$ v razredu $H^{(1)} = H$, se pravi, poiskati odprt interval I in tako neskončno zaporedje naravnih števil n_p , da je $n_p E \cap I = \emptyset$ za vsak p .

Naj bo $x \in E_\xi$. Tedaj obstaja zaporedje (ϵ_k) , kjer je $\epsilon_k \in \{0, 1\}$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$, tako da lahko zapišemo

$$x = (1 - \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \xi^k = \frac{\theta - 1}{\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \theta^{-k}.$$

Za vsak $p \in \mathbb{N}$ in $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} \theta^{p+1}x &= (\theta - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \theta^{p-k} = (\theta - 1) \sum_{k=0}^p \epsilon_k \theta^{p-k} + (\theta - 1) \sum_{k=p+1}^{p+N} \epsilon_k \theta^{p-k} + (\theta - 1) \sum_{k=p+N+1}^{\infty} \epsilon_k \theta^{p-k} \\ &= (\theta - 1) \sum_{k=0}^p \epsilon_k \theta^{p-k} + (\theta - 1) \sum_{j=1}^N \epsilon_{p+j} \theta^{-j} + (\theta - 1) \sum_{j>N} \epsilon_{p+j} \theta^{-j} = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Tu je $S_1 = (\theta - 1) \sum_{k=0}^p \epsilon_k \theta^{p-k} \in \mathbb{N}$ in $S_3 = (\theta - 1) \sum_{j>N} \epsilon_{p+j} \theta^{-j} \leq (\theta - 1) \sum_{j=N+1}^{\infty} \theta^{-j} = \theta^{-N}$. Srednja vsota $S_2 = (\theta - 1) \sum_{j=1}^N \epsilon_{p+j} \theta^{-j}$ pa ima 2^N možnih vrednosti: x_1, x_2, \dots, x_{2^N} , za vsak nabor $(\epsilon_{p+1}, \epsilon_{p+2}, \dots, \epsilon_{p+N})$, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, eno. Vrednosti x_i ležijo na intervalu $[0, 1]$.

Definirajmo množico

$$F_N = \{x \in [0, 1]; \text{ obstaja } i \in \{1, 2, \dots, 2^N\}, |x - x_i| \leq \theta^{-N}\}.$$

Tedaj za vsak $p \in \mathbb{N}$ in vsak $N \in \mathbb{N}$ velja $\theta^{p+1}E_\xi \subset F_N$ po modulu 1 oziroma $\theta^{p+1}E = 2\pi\theta^{p+1}E_\xi \subset 2\pi F_N$ po modulu 2π . Ker je F_N končna unija intervalov, sestavljena iz kvečjemu 2^N intervalov dolžine $2\theta^{-N}$, je mera množice F_N največ $2^N \cdot 2\theta^{-N} = 2(2/\theta)^N$, mera množice $2\pi F_N$ pa največ $4\pi(2/\theta)^N$ in konvergira pri pogoju $N \rightarrow \infty$ proti 0. Za dovolj velik N obstaja torej tak odprti interval I , da je $2\pi F_N \cap I = \emptyset$. Tedaj za vsak $p \in \mathbb{N}$ velja tudi $\theta^{p+1}E \cap I = \emptyset$. Če v definiciji 4.1 izberemo $n_p = \theta^{p+1} \in \mathbb{N}$, vidimo, da množica E pripada razredu H .

Lotimo se zdaj splošnega primera, ko je $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Število $1 - \xi = (\theta - 1)/\theta$ je algebraično, saj je v $\mathbb{Q}(\theta)$. Obstaja tak polinom P_1 z racionalnimi koeficienti, da je $(\theta - 1)/\theta = P_1(\theta)$. Za primerno naravno število K je potem $K(\theta - 1)/\theta = P(\theta)$, kjer je P polinom s celimi koeficienti. Ker cela števila algebraična števila tvorijo kolobar, je $K(\theta - 1)/\theta$ celo algebraično število v $\mathbb{Q}(\theta)$. Izberimo še poljuben polinom R s celimi koeficienti, ki števila θ nima za ničlo, in postavimo $\gamma = R(\theta)$. Potem je $\gamma \neq 0$ celo algebraično število v $\mathbb{Q}(\theta)$.

Za vsak $x \in E_\xi$ in vsak par naravnih števil $p, N \in \mathbb{N}$ imamo, podobno kot prej:

$$\begin{aligned} K\theta^p\gamma x &= K \frac{\theta - 1}{\theta} \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \theta^{p-k} = \\ &= K \frac{\theta - 1}{\theta} \gamma \sum_{k=0}^p \epsilon_k \theta^{p-k} + K \frac{\theta - 1}{\theta} \gamma \sum_{j=1}^N \epsilon_{p+j} \theta^{-j} + K \frac{\theta - 1}{\theta} \gamma \sum_{j>N} \epsilon_{p+j} \theta^{-j} = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Tu je (kot prej) $|S_3| = K \frac{\theta - 1}{\theta} |\gamma| \sum_{j>N} \epsilon_{p+j} \theta^{-j} \leq K \frac{\theta - 1}{\theta} |\gamma| \sum_{j>N} \theta^{-j} = K |\gamma| / \theta^{N+1}$.

Naj bodo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ konjugirana števila k θ in $\gamma_i = R(\theta_i)$ za $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Kot vemo so to k γ konjugirana števila. Potem je (upoštevaje $\theta_0 = \theta, \gamma_0 = \gamma$)

$$S'_1 = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} K \frac{\theta_i - 1}{\theta_i} \gamma_i \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j} = \sum_{i=0}^{n-1} K \frac{\theta_i - 1}{\theta_i} \gamma_i \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j} = \sum_{i=0}^{n-1} P(\theta_i) R(\theta_i) \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j}$$

simetrični polinom s celimi koeficienti v spremenljivkah $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$. Ker ga lahko izrazimo kot polinom s celimi koeficienti v elementarnih simetričnih funkcijah istih spremenljivk, je njegova vrednost celo število.

Naj bo $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} |(\theta_i - 1)/\theta_i|$. Za vsak $i = 1, 2, \dots, n-1$ dobimo oceno

$$\left| K \frac{\theta_i - 1}{\theta_i} \gamma_i \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j} \right| \leq KM |\gamma_i| \sum_{j=0}^p |\theta_i|^{p-j} \leq KM \frac{|\gamma_i|}{1 - |\theta_i|},$$

saj je $|\theta_i| < 1$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n-1$. Zdaj bomo izbrali γ in N v skladu z naslednjo trditvijo:

Pomožna trditev. Števili $\gamma = R(\theta) \neq 0$, kjer je R polinom s celimi koeficienti, in $N \in \mathbb{N}$ lahko izberemo tako, da bo za vsak $i = 1, 2, \dots, n-1$ veljalo

$$\frac{K|\gamma|}{\theta^{N+1}} \leq \frac{1}{n2^{N/n+2}}, \quad KM \frac{|\gamma_i|}{1 - |\theta_i|} \leq \frac{1}{n2^{N/n+2}}.$$

Dokaz. Definirajmo kompleksno matriko A reda n , kjer vrstice nastopajo v konjugiranih parih:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{K}{\theta^{N+1}} & \frac{K}{\theta^{N+1}}\theta & \frac{K}{\theta^{N+1}}\theta^2 & \dots & \frac{K}{\theta^{N+1}}\theta^{n-1} \\ \frac{KM}{1-|\theta_1|} & \frac{KM}{1-|\theta_1|}\theta_1 & \frac{KM}{1-|\theta_1|}\theta_1^2 & \dots & \frac{KM}{1-|\theta_1|}\theta_1^{n-1} \\ \frac{KM}{1-|\theta_2|} & \frac{KM}{1-|\theta_2|}\theta_2 & \frac{KM}{1-|\theta_2|}\theta_2^2 & \dots & \frac{KM}{1-|\theta_2|}\theta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{KM}{1-|\theta_{n-1}|} & \frac{KM}{1-|\theta_{n-1|}}\theta_{n-1} & \frac{KM}{1-|\theta_{n-1|}}\theta_{n-1}^2 & \dots & \frac{KM}{1-|\theta_{n-1|}}\theta_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo determinanto matrike A . Ker je $\theta_i \neq \theta_j$ za $i < j$, dobimo večkratnik Vandermondove determinante, ki je različna od 0, namreč

$$\det A = \frac{K}{\theta^{N+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{KM}{1 - |\theta_i|} \begin{vmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \dots & \theta^{n-1} \\ 1 & \theta_1 & \theta_1^2 & \dots & \theta_1^{n-1} \\ 1 & \theta_2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \theta_{n-1} & \theta_{n-1}^2 & \dots & \theta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Torej je $\det A = C/\theta^N \neq 0$, kjer je C konstanta, neodvisna od N . Izberimo $\delta_i = \delta = 1/(n2^{N/n+2})$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Tedaj je

$$|\det A| = |C|/\theta^N \leq \frac{1}{n2^{N/n+2}} = \delta^n$$

za dovolj velik N , ker je $\theta > 2$ oziroma $2/\theta < 1$. Po izreku Minkowskega za kompleksni primer s konjugiranimi vrsticami (izrek II.7.1) potem obstaja celoštevilski od 0 različen vektor $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^\top \in \mathbb{Z}^n$ z lastnostjo, da je $|(Ac)_i| \leq \delta$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ oziroma

$$\begin{aligned} \left| \frac{K}{\theta^{N+1}} (c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1}) \right| &\leq \frac{1}{2n2^{N/n+1}}, \\ \left| \frac{KM}{1 - |\theta_i|} (c_0 + c_1\theta_i + c_2\theta_i^2 + \dots + c_{n-1}\theta_i^{n-1}) \right| &\leq \frac{1}{2n2^{N/n+1}} \end{aligned}$$

za $i = 1, 2, \dots, n-1$. Torej lahko izberemo $\gamma = c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1} = R(\theta) \in \mathbb{Q}(\theta)$ in $\gamma_i = c_0 + c_1\theta_i + c_2\theta_i^2 + \dots + c_{n-1}\theta_i^{n-1} = R(\theta_i) \in \mathbb{Q}(\theta)$ za $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Upoštevajmo pravkar dokazano pomožno trditev in oceno, ki smo jo izpeljali pred tem, pa dobimo

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} K \frac{\theta_i - 1}{\theta_i} \gamma_i \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j} \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} KM \frac{|\gamma_i|}{1 - |\theta_i|} \leq (n-1) \frac{1}{n2^{N/n+2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2^{N/n+2}}.$$

Potem je za $S'_3 = S_3 - \sum_{i=1}^{n-1} K \frac{\theta_i - 1}{\theta_i} \gamma_i \sum_{j=0}^p \epsilon_j \theta_i^{p-j}$ tudi

$$|S'_3| \leq \frac{K|\gamma|}{\theta^{N+1}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2^{N/n+2}} \leq \frac{1}{2^{N/n+2}}.$$

Torej imamo $K\theta^p \gamma x = S_1 + S_2 + S_3 = S'_1 + S_2 + S'_3$. Tu je $S'_1 \in \mathbb{Z}$ in $|S'_3| \leq 1/2^{N/n+2}$, vsota S_2 pa lahko zavzame le končno mnogo različnih vrednosti x_1, x_2, \dots, x_{2^N} (pri različnih izbirah $\epsilon_{p+j} \in \{0, 1\}$). Torej je število $K\theta^p \gamma x$ po modulu 1 oddaljeno od končne množice $\{x_1, x_2, \dots, x_{2^N}\}$ kvečjemu za $1/2^{N/n+2}$.

Oglejmo si cel vektor takih točk $(K\theta^{p+1}\gamma x, K\theta^{p+2}\gamma x, \dots, K\theta^{p+n}\gamma x)$, kjer je $x \in E_\xi$. Za vsako komponento izračunajmo ustrezno vsoto S_2 ; v njej nastopajo $(\epsilon_{p+2}, \dots, \epsilon_{p+N+1})$ za prvo, $(\epsilon_{p+3}, \dots, \epsilon_{p+N+2})$ za drugo, ..., $(\epsilon_{p+n+1}, \dots, \epsilon_{p+N+n})$ za zadnjo komponento. Vseh različnih indeksov za cel vektor je torej $N + n - 1$, vsak ϵ_i zavzame vrednost 0 ali 1, cel vektor zato zavzame 2^{N+n-1} vrednosti v $[0, 1]^n$ po modulu 1. Označimo te vrednosti $z_1, z_2, \dots, z_{2^{N+n-1}}$. Vsaka točka $z = (K\theta^{p+1}\gamma x, K\theta^{p+2}\gamma x, \dots, K\theta^{p+n}\gamma x)$ je torej po modulu 1 neki točki z_k bliže kot $1/2^{N/n+2}$, se pravi, $\|z - z_k\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z(i) - z_k(i)| \leq 1/2^{N/n+2}$.

Naj bo F_N množica tistih točk $y \in [0, 1]^n$, pri katerih obstaja $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{N+n-1}\}$, da velja $\|y - z_k\| \leq 1/2^{N/n+2}$. Ker je n -razsežna prostornina množice F_N enaka največ $2^{N+n-1} (2/2^{N/n+2})^n = 1/2$, množice $2\pi F_N$ pa največ $(2\pi)^n/2$ in je $E \subset 2\pi F_N$, obstaja tak odprt kvader $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \neq \emptyset$, da je $((K\gamma\theta^{p+1}, K\gamma\theta^{p+2}, \dots, K\gamma\theta^{p+n})E \cap I = \emptyset$ za vsak $p = 1, 2, \dots$.

Nasploh $K\theta^{p+j}\gamma$, $j = 1, 2, \dots, n$ niso cela števila. Velja pa $\{K\gamma\theta^{p+j}\} \rightarrow 0$ ($p \rightarrow \infty$), ker je θ Pisotovo število in je $K\gamma$ celo algebraično število v $\mathbb{Q}(\theta)$. Zato lahko izberemo dovolj velik indeks p_0 in kvader $I' = I'_1 \times I'_2 \times \dots \times I'_n \subset I$, $I' \neq \emptyset$, tako da velja za $p > p_0$ tudi $m^{(p)}E \cap I' = \emptyset$, kjer je m_{p+j} najbližje celo število k številu $K\gamma\theta^{p+j}$ za vsak j , torej $m_{p+j} = K\gamma\theta^{p+j} \pm \{K\gamma\theta^{p+j}\}$, in $m^{(p)} = (m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_{p+n})$.

Preostane še pokazati, da lahko izberemo $p > p_0$ tako velik, da $m^{(p)}$ ne leži v nobeni izmed končno mnogo vnaprej izbranih hiperravnin, npr. v prvih l hiperravninah (glede na neko ureditev), danih z enačbami $m \cdot v^{(k)} = q_k$, $0 \neq v^{(k)} \in \mathbb{Z}^n$ in $q_k \in \mathbb{Z}$ za $k = 1, 2, \dots, l$. To vidimo takole. Če je $0 \neq v \in \mathbb{Z}^n$, je

$$m^{(p)} \cdot v = \sum_{j=1}^n K\gamma v_j \theta^{p+j} - \sum_{j=1}^n (\pm \{K\gamma\theta^{p+j}\}) v_j = K\gamma\theta^{p+1} \sum_{j=1}^n v_j \theta^{j-1} - \sum_{j=1}^n (\pm \{K\gamma\theta^{p+j}\}) v_j.$$

Tu je $\sum_{j=1}^n v_j \theta^{j-1} \neq 0$, ker je stopnja Pisotovega števila enaka n . Zato velja konvergenca $|K\gamma\theta^{p+1} \sum_{j=1}^n v_j \theta^{j-1}| \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$). Po drugi strani pa velja $|\sum_{j=1}^n (\pm \{K\gamma\theta^{p+j}\}) v_j| \rightarrow 0$ ($p \rightarrow \infty$), ker je θ Pisotovo število (trditev 5.1). To pomeni, da velja tudi $|m^{(p)} \cdot v| \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$). Torej vsi vektorji $m^{(p)}$, $p > p_0$ ne morejo ležati na končno mnogo hiperravninah, ker bi bile tedaj vrednosti skalarnih produktov $m^{(p)} \cdot v^{(k)}$ za $k = 1, 2, \dots, l$ omejene.

Izreka 2 in 3 dasta osnovni izrek tega poglavja, ki karakterizira množice enoličnosti med simetričnimi perfektnimi množicami na $[0, 2\pi]$ s konstantnim delilnim razmerjem.

Izrek 4 (Salem-Zygmund). *Naj bo $0 < \xi < 1/2$. Množica $2\pi E_\xi$ je množica enoličnosti natanko takrat, ko je $\theta = 1/\xi$ Pisotovo število.*

Opombe. 1. Tako je npr. množica $2\pi E_{1/3}$ množica enoličnosti, množica $2\pi E_{3/10}$ pa ne, čeprav ima manjše delilno razmerje in je v tem pogledu drobnejša od prejšnje (seveda pa ni njena podmnožica). Ker se da pokazati, da razteg tudi ohranja lastnost enoličnosti (glej [2], str. 801), je množica enoličnosti tudi klasična Cantorjeva množica $E_{1/3}$.

2. Salem - Zygmundov izrek karakterizira množice enoličnosti med vsemi simetričnimi perfektnimi množicami s *konstantnim* delilnim razmerjem ξ . Za sorodne množice $2\pi E_{(\xi_i)}$, $0 < \xi_i < 1/2$ za $i = 0, 1, 2, \dots$, ki smo jih tudi obravnavali v razdelku I.3, karakterizacija enoličnosti ni znana in le v posebnih primerih lahko o tem kaj povemo. Če je $\sum_i (1 - 2\xi_i) < \infty$, ima seveda taka množica pozitivno mero in je zato po trditvi 2.1 množica večličnosti. V nasprotnem primeru pa je npr. zadosten pogoj za enoličnost naslednji: $\sum_i \xi_i^2 < \infty$ (glej [16], str. 103). Ta pogoj ni ne aritmetični ne algebrajski, ampak analitični. Še zelo daleč pa je do karakterizacije enoličnosti za splošne perfektne množice.

DODATEK

A. Bairov izrek in posledice

Naj bo A podmnožica metričnega prostora X , \bar{A} njeno zaprtje in \bar{A}° notranjost tega zaprtja. Spomnimo se, da je podmnožica A *gosta* v X , če je $\bar{A} = X$ (oziroma $\bar{A}^\circ = X$). Lahko bi tudi rekli, da je podmnožica A *povsod gosta*.

Sorodna pojma sta *nekje gosta* množica (ko je $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$) in njegovo nasprotje *nikjer gosta* množica (ko je $\bar{A}^\circ = \emptyset$). Očitno zaprtje nikjer goste množice ni nikjer gosto. Isto velja za podmnožico nikjer goste množice. Zaradi $\bar{A}^\circ = \overline{\bar{A}^\circ}^c$ je za nikjer gosto množico A komplement zaprtja \bar{A}^c povsod gosta množica in obratno.

Izrek A1 (Baire). *Naj bo X poln metrični prostor.*

- (a) *Če so G_n , $n = 1, 2, \dots$ odprte goste podmnožice v X , je podmnožica $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ gosta v X .*
 (b) *Prostor X ni števna unija nikjer gostih množic.*

Dokaz. (a) Najprej pokažimo, da $\bigcap_{n=1}^\infty G_n \neq \emptyset$. Ker je G_1 odprta množica, obstaja v njej zaprta krogla B_1 . Lahko privzamemo, da je njen polmer $r_1 \leq 1$. Ker je tudi $G_2 \cap B_1^\circ$ odprta množica, obstaja v njej zaprta krogla B_2 s polmerom $r_2 \leq 1/2$ itd. Zaporedje vloženih zaprtih krogel $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ je tako, da za njihove polmere velja $r_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Potem $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \neq \emptyset$ in seveda $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \subset B_k \subset G_k$ za vsak k ; torej $\bigcap_{k=1}^\infty G_k \neq \emptyset$.

Naj bo zdaj B poljubna zaprta krogla v X in zato tudi sama poln metrični prostor. Za vsak n je $B \cap G_n$ relativno odprta gosta podmnožica v B . Po prvem delu dokaza je potem $\bigcap_{n=1}^\infty (B \cap G_n) \neq \emptyset$, torej $B \cap (\bigcap_{n=1}^\infty G_n) \neq \emptyset$. Ker je to res za vsako zaprto kroglo $B \subset X$, je $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ gosta podmnožica v X .

(b) Iz $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, $\bar{A}^\circ \neq \emptyset$, bi sledilo tudi $X = \bigcup_{n=1}^\infty \bar{A}_n$ oziroma $\bigcap_{n=1}^\infty \bar{A}_n^c = \emptyset$. To pa po točki (a) ni mogoče, ker so vse množice \bar{A}_n^c povsod goste in odprte.

Posledica. Če je X poln metrični prostor in $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, je vsaj ena od množic A_n nekje gosta, torej $\bar{A}_n^\circ \neq \emptyset$.

Opomba. Enostavno vidimo, da je vsaka zaprta podmnožica polnega metričnega prostora polna v relativni topologiji. Zanimivo pa je, da lahko tudi vsako odprto podmnožico G v polnem metričnem prostoru (X, ρ) napravimo za poln metrični prostor v ekvivalentni metriki. Naj bo $\text{dist}(x, G^c) = \inf\{\rho(x, y); y \in G^c\}$ razdalja točke $x \in G$ do komplementa G^c in $f(x) = \frac{1}{\text{dist}(x, G^c)}$ za $x \in G$. Potem je s predpisom

$$d(x, y) = \rho(x, y) + |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in G,$$

podana na množici G ekvivalentna metrika (tj. določa isto topologijo), v kateri postane G poln metrični prostor.

Še več, isto lahko storimo na vsaki G_δ množici $G = \bigcap_{k=1}^\infty G_k$, kjer so G_k odprte podmnožice v polnem metričnem prostoru (X, ρ) (lahko vzamemo, da padajo). V tem primeru definiramo za vsak k na G_k tako kot prej novo metriko d_k in pišemo

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)}, \quad x, y \in G.$$

Tudi ta metrika je ekvivalentna izhodni metriki ρ in lahko se prepičamo, da je v njej množica G poln metrični prostor.

Pomemben primer metričnega prostora je normiran vektorski prostor X (če je poln, ga imenujemo Banachov prostor). Zaprto kroglo s središčem v točki x_0 in polmerom r_0 običajno označimo z $B(x_0, r_0)$. Če bo središče v 0, bomo pisali krajše B_{r_0} . Prostor vseh omejenih linearnih operatorjev iz normiranega prostora X v normiran prostor Y označimo z $B(X, Y)$. Vsak tak operator je zvezna preslikava.

Naslednji dve trditvi potrebujemo pri dokazu izreka o odprti preslikavi. Dokaz prve uporablja Bairov izrek oziroma njegovo posledico.

Trditev A1. *Naj bo X normiran, Y Banachov prostor in $T: X \rightarrow Y$ linearen surjektivni operator. Potem obstaja tak $r_1 > 0$, da je $B_1 \subset \overline{TB}_{r_1}$.*

Dokaz. Ker je T surjektivni linearen operator, je $Y = \cup_{n=1}^{\infty} TB_n$. Ker je Y poln prostor, obstaja po posledici Baireovega izreka tak indeks m , da je $\overline{TB}_{r_1} \neq \emptyset$. Torej obstajata $y_0 \in Y$, $r_0 > 0$, tako da je $B(y_0, r_0) \subset \overline{TB}_m$. Pokažimo, da je tudi $B_{r_0} \subset \overline{TB}_m$. Če je $\|y\| \leq r_0$, je $y_0 + y, y_0 - y \in B(y_0, r_0) \subset \overline{TB}_m$ in zaradi simetričnosti tudi $y - y_0 \in \overline{TB}_m$. Odtod zaradi konveksnosti množice \overline{TB}_m sledi $y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(y_0 - y) \in \overline{TB}_m$. Ker je torej $B_{r_0} \subset \overline{TB}_m$, je $B_1 \subset \overline{TB}_{m/r_0}$ in lahko vzamemo $r_1 = m/r_0$.

Trditev A2. *Naj bo X Banachov, Y normiran prostor in $T \in B(X, Y)$. Če obstaja tak $r_1 > 0$, da velja $B_1 \subset \overline{TB}_{r_1}$, obstaja tudi tak $r > 0$, da je $B_1 \subset TB_r$.*

Dokaz. Naj bo $\|y\| \leq 1$. Ker je $y \in B_1$, obstaja $y_1 \in TB_{r_1}$, da je $\|y - y_1\| \leq 1/2$. Potem je $2(y - y_1) \in B_1$ in obstaja $y_2 \in TB_{r_1}$, da je $\|2(y - y_1) - y_2\| \leq 1/2$, torej $\|y - (y_1 + y_2/2)\| \leq 1/2^2$ itd. Če smo že našli y_1, y_2, \dots, y_n z lastnostjo

$$\|y - \sum_{k=1}^n y_k/2^{k-1}\| \leq 1/2^n,$$

je spet neka točka $y_{n+1} \in TB_{r_1}$, tako da je

$$\|2^n(y - \sum_{k=1}^n y_k/2^{k-1}) - y_{n+1}\| \leq 1/2$$

oziroma

$$\|y - \sum_{k=1}^{n+1} y_k/2^{k-1}\| \leq 1/2^{n+1}.$$

Zaradi te zveze, ki velja za vsak n , je $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k/2^{k-1}$. Toda za vsak k je $y_k = Tx_k$, $x_k \in B_{r_1}$, zato je

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} Tx_k/2^{k-1} = T(\sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^{k-1}).$$

Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^{k-1}$ pa v X konvergira, saj je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|/2^{k-1} \leq r_1 \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k-1} = 2r_1 = r$. Torej je $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^{k-1} \in B_r$ in $y = Tx$.

Preslikava topološkega prostora X v topološki prostor Y je odprta, če preslika odprte množice iz X v odprte množice iz Y . Denimo, da sta X in Y Banachova prostora in $T: X \rightarrow Y$ linearna zvezna surjektivna. Iz trditve A1 in A2 sledi, da obstaja tak $r > 0$, da je $B_1 \subset TB_r$. Potem velja tudi $B_{1/r} \subset TB_1$ in za vsak $r_0 > 0$ tudi $B_{r_0/r} \subset TB_{r_0}$.

Izrek A2 (o odprti preslikavi). Če sta X, Y Banachova prostora in $T \in B(X, Y)$ surjektiven operator, je T odprta preslikava.

Dokaz. Naj bo G odprta množica v X , tako da obstaja zaprta krogla $B(x_0, r_0) \subset G$. Torej velja $TB(x_0, r_0) \subset TG$ oziroma $TB_{r_0} = TB(x_0, r_0) - x_0 \subset TG - x_0$. Po prejšnji opombi obstaja tak $r > 0$, da je $B_{r_0/r} \subset TB_{r_0} \subset TG - x_0$ oziroma $B(x_0, r_0/r) = B_{r_0/r} + x_0 \subset TG$. Torej je TG odprta množica v Y .

Posledica. Če je $T : X \rightarrow Y$ zvezna linearna bijekcija med Banachovima prostoroma, je zvezna tudi inverzna preslikava T^{-1} ; torej je T izomorfizem Banachovih prostorov.

Dokaz. Po izreku o odprti preslikavi je T odprta, zato obstaja tak $r > 0$, da je $B_1 \subset TB_r$. Torej je $T^{-1}B_1 \subset B_r$ oziroma $\|T^{-1}x\| \leq r$ za vsak x z normo 1. Se pravi, da je $\|T^{-1}\| \leq r$ in zato $T^{-1} \in B(Y, X)$.

Odtod npr. sledi, da sta dve normi, v katerih je X Banachov prostor, med seboj ekvivalentni (tj. obstajata konstanti $m, M > 0$, da za vsaka $x \in X$ velja $m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1$), če je za neko konstanto $M > 0$ in vsak x res $\|x\| \leq M\|x\|_1$.

Bairov izrek potrebujemo tudi za dokaz principa enakomerne omejenosti.

Izrek A3 (Princip enakomerne omejenosti). Naj bo X Banachov, Y normiran prostor in $\mathcal{A} \subset B(X, Y)$ poljubna množica (družina) omejenih linearnih operatorjev z lastnostjo $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$. Potem velja tudi $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| < \infty$.

Dokaz. Za vsako naravno število n naj bo $X_n = \{x \in X; \|Tx\| \leq n \text{ za vsak } T \in \mathcal{A}\}$. Množice X_n so zaprte in zanje velja $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Ker je X poln metrični prostor, obstaja tak m , da je $X_m^\circ \neq \emptyset$. Torej obstaja zaprta krogla $B(x_0, r_0) \subset X_m$, se pravi da za vsak y , $\|y\| \leq r_0$, velja $y + x_0 \in B(x_0, r_0) \subset X_m$ in zato tudi

$$\|Ty\| = \|T(y + x_0) - Tx_0\| \leq \|T(y + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq 2m$$

za vsak $T \in \mathcal{A}$. Izberimo $\|x\| \leq 1$. Tedaj je $y = r_0x$ vektor z normo manjšo ali enako 1 in velja $\|Tx\| = \|Ty\|/r_0 \leq 2m/r_0$ za vsak $x \in B_1$. Torej za vsak $T \in \mathcal{A}$ velja $\|T\| \leq 2m/r_0$.

Trditev A3. Naj bosta X, Y Banachova prostora, $X_0 \subset X$ gosta podmnožica in (T_n) tako zaporedje omejenih linearnih operatorjev iz X v Y , da $T_n x$ konvergira v X za vsak $x \in X_0$, ko $n \rightarrow \infty$. Potem konvergira $T_n x$ v X za vsak $x \in X$ natanko takrat, ko obstaja taka konstanta $M > 0$, da je $\|T_n\| \leq M$ za vsak n .

Dokaz. Če $T_n x$ konvergira za vsak $x \in X$, je omejeno v Y za vsak $x \in X$. Torej za vsak x obstaja konstanta $M_x > 0$, tako da je $\|T_n x\| \leq M_x$ za vsak n . Po principu enakomerne omejenosti potem obstaja taka konstanta $M > 0$, da je $\|T_n\| \leq M$ za vsak n . Obratno, naj bo to res. Ker za vsak $x \in X$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja $x_0 \in X_0$, da velja $\|x - x_0\| < \epsilon$, dobimo za vsak $m, n \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in X$

$$\begin{aligned} \|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m x_0\| + \|T_m x_0 - T_n x_0\| + \|T_n x_0 - T_n x\| \leq \\ &2M\|x - x_0\| + \|T_m x_0 - T_n x_0\| \leq 2M\epsilon + \|T_m x_0 - T_n x_0\|. \end{aligned}$$

Ker zadnji člen konvergira proti 0, ko $m, n \rightarrow \infty$ in je ϵ poljuben, sledi odtod pri poljubnem $x \in X$ Cauchyjeva lastnost zaporedja $(T_n x)$, kar pomeni, da to zaporedje konvergira v Y .

Za konec razdelka si oglejmo še definicijo integrala zvezne funkcije, definirane na končnem intervalu $[a, b]$ in z vrednostmi v danem Banachovem prostoru X .

Trditvev A4. Naj bo X Banachov prostor in $f : [a, b] \rightarrow X$ poljubna zvezna funkcija. Za vsako delitev $D = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ naj bo kot običajno $|D| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$. Potem obstaja limita

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

To limito imenujemo Riemannov integral funkcije f z vrednostmi v Banachovem prostoru na intervalu $[a, b]$ in zapišemo na običajen način z $\int_a^b f(t)dt$. Če obstaja, je ta integral, se pravi limita zgornjih (integralskih) vsot, element Banachovega prostora X . Konvergenca je v smislu norme prostora X , $|D| \rightarrow 0$ pa pomeni, da delitev gostimo z dodajanjem novih delilnih točk, tako da velja tudi $n \rightarrow \infty$.

Dokaz trditve. Pokažimo, da se pri poljubnih dveh dovolj drobnih delitvah D in D' ustrezni integralski vsoti razlikujeta med seboj poljubno malo. Lahko predpostavimo, da je npr. delitev D' nadaljevanje delitve D (sicer obe primerjamo s skupnim nadaljevanjem). Naj bo $\epsilon > 0$ poljuben, $\delta > 0$ tako majhen, da je $\|f(t) - f(t')\| < \epsilon$, če je $|t - t'| < \delta$ in $|D| < \delta$. Za vsak delni interval $[t_{k-1}, t_k]$ iz delitve D naj bodo $t_{k-1} = t_{k,0}, t_{k,1}, \dots, t_{k,j_k} = t_k$ delilne točke iz D' , ki pripadajo omenjenemu intervalu. Potem je

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{j_k} f(t_{k,j})(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \right\| = \\ & \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{j_k} (f(t_k) - f(t_{k,j}))(t_{k,j} - t_{k,j-1}) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{j_k} \|f(t_k) - f(t_{k,j})\| (t_{k,j} - t_{k,j-1}) < \epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Ker je bil ϵ poljuben, to pomeni, da tvorijo integralske vsote Cauchyjevo (posplošeno) zaporedje, ki v Banachovem prostoru konvergira.

Iz trikotniške neenakosti za vsote sledi limitna neenakost za integrale:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt. \quad (\text{A1})$$

Naj bo še $T : X \rightarrow X$ omejen linearen operator na Banachovem prostoru X . Potem velja

$$T \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Tf(t)dt,$$

kar sledi iz zveznosti in linearnosti operatorja T . V posebnem primeru velja to za vsak omejen linearen funkcional ϕ na X , torej

$$\phi\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \phi(f(t))dt.$$

B. Linearne sumacijske metode

Eden od načinov, kako spremeniti eno neskončno zaporedje v drugo, je linearna metoda, določena z neskončno kompleksno (ali realno) matriko $S = (s_{ik})$. Če sta $(x_k)_{k \geq 0}$ in $(y_i)_{i \geq 0}$ zaporedji (neskončna stolpca), je transformacija $S : (x_k) \mapsto (y_i)$ podana z matričnim množenjem $y_i = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik}x_k$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Matrika $S = (s_{ik})$ mora biti seveda taka, da je za vsak i vrsta konvergentna.

Definicija. Linearna metoda (matrika) S je *regularna*, če iz $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) sledi $(Sx)_i \rightarrow x$ ($i \rightarrow \infty$).

Naslednji izrek podaja potreben in zadosten pogoj za regularnost linearne metode.

Izrek B1 (Töplitz). Linearna sumacijska metoda, dana z neskončno matriko $S = (s_{ik})$, je regularna natanko takrat, ko so izpolnjeni naslednji pogoji:

- (i) $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{ik} = 0$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) Obstaja $C > 0$, da velja $\sum_{k=0}^{\infty} |s_{ik}| \leq C < \infty$ za vsak $i = 0, 1, 2, \dots$
- (iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} = 1$.

Dokaz. Naj bodo vsi trije pogoji (i), (ii) in (iii) izpolnjeni in naj velja $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$). Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja N , da iz $k > N$ sledi $|x_k - x| < \epsilon$. Zaradi konvergence obstaja tudi konstanta $M > 0$, da je $|x_k - x| \leq M$ za vsak k . Pišimo

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik}x_k = x \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} + \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik}(x_k - x).$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} |y_i - x| &\leq |x| \left| \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} - 1 \right| + \sum_{k=0}^N |s_{ik}| |x_k - x| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_{ik}| |x_k - x| \leq \\ &\leq |x| \left| \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} - 1 \right| + M \sum_{k=0}^N |s_{ik}| + C\epsilon \end{aligned}$$

oziroma $\limsup_{i \rightarrow \infty} |y_i - x| \leq C\epsilon$. To velja za vsak $\epsilon > 0$, torej je $\lim_{i \rightarrow \infty} |y_i - x| = 0$, se pravi, da velja $y_i \rightarrow x$ ($i \rightarrow \infty$).

Naj bo zdaj metoda S regularna. Če je $(x_k) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, kjer je enka na m -tem mestu, je $y_i = s_{im}$ za vsak i , se pravi (y_i) ravno m -ti stolpec matrike S . Ker členi zaporedja (x_k) konvergirajo k 0 in je metoda regularna, velja tudi $s_{im} = y_i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$), torej točka (i). Če izberemo zaporedje samih enk, $e = (1, 1, 1, \dots)$, dobimo zaradi regularnosti $\sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} \rightarrow 1$ ($i \rightarrow \infty$), torej točko (iii). Nazadnje lahko ugotovimo, da je s predpisom $f_i^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n s_{ik}x_k$, $x = (x_k)$, dano zaporedje omejenih linearnih funkcionalov na prostoru c_0 vseh kompleksnih zaporedij, ki konvergirajo proti 0. Znano je, da je dualni prostor k c_0 ravno prostor l^1 vseh absolutno sumabilnih kompleksnih zaporedij in da je torej norma funkcionalov $f_i^{(n)}$ dana z $\|f_i^{(n)}\| = \sum_{k=0}^n |s_{ik}|$. Ker za vsak $x \in c_0$ obstaja $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_i^{(n)}(x)$, obstaja za vsak $x \in c_0$ konstanta $M_x > 0$, tako da je $|f_i^{(n)}(x)| \leq M_x$ za vsak n, i . Po principu enakomerne omejenosti (izrek A3) potem obstaja taka konstanta $M > 0$, da je tudi $\|f_i^{(n)}\| \leq M$ oziroma $\sum_{k=0}^n |s_{ik}| \leq M$ za vsak n, i . To

pomeni, da za vsak i velja $\sum_{k=0}^{\infty} |s_{ik}| \leq M$ oziroma točka (ii).

Opombe. 1. Če je $x = 0$, točke (iii) ne potrebujemo, kar se vidi iz dokaza zadostnosti v zgornjem izreku.

2. Če je $s_{ik} \geq 0$ za vsak i, k , točka (ii) sledi iz točke (iii), saj so vsote $\sum_{k=0}^{\infty} |s_{ik}| = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik}$ omejene, ker konvergirajo k 1 pri pogoju $i \rightarrow \infty$.

3. Če so $x_k = x_k(t)$ omejene funkcije na nekem intervalu $[a, b]$, lahko v dokazu zadostnosti Töplitzovih pogojev namesto absolutne vrednosti vzamemo supremum normo $\|x\|_{\infty} = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ in iz enakomerne konvergence zaporedja funkcij (x_k) , torej iz $\|x_k - x\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), tako kot prej izpeljemo $\|y_i - x\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), torej enakomerno konvergenco zaporedja (y_i) .

4. Iz točke (ii) Töplitzovega izreka takoj sledi, da vsaka regularna linearna sumacijska metoda preslika omejena zaporedja v omejena.

Zgledi. 1. *Metoda podzaporedja.* Naj bo $(n_i)_{i \geq 0}$ poljubno podzaporedje naravnih števil. Izberemo $S = (s_{ik})$, kjer je $s_{ik} = 0$ za $k \neq n_i$ in $s_{in_i} = 1$ (v vsaki vrstici je le en od 0 različen element, enak 1). Potem za vsako zaporedje $x = (x_k)$ velja $(Sx)_i = x_{n_i}$ za vsak i . Toeplitzovi pogoji so izpolnjeni in metoda je regularna.

2. *Cesárova sumacijska metoda.* Zdaj izberemo matriko

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

in dobimo $(Sx)_n = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n+1}$. Spet hitro vidimo, da so Töplitzovi pogoji izpolnjeni in metoda je regularna.

Jasno je, da lahko vsako regularno sumacijsko metodo uporabimo tudi za seštevanje številskih (in funkcijskih) vrst. Zaradi pomembnosti nekaj več prostora namenimo obravnavi Cesárove sumabilnosti vrst. Ponovimo:

Definicija. Številska vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ z delnimi vsotami $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ je *Cesárovo sumabilna* k vrednosti s , če aritmetične sredine (tj. Cesárove delne vsote) $\sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n$ konvergirajo k s .

Lahko se prepričamo, da je $\sigma_n = \sum_{k=0}^n (1 - \frac{k}{n+1})c_k$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ oziroma $S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n kc_k$. Iz izreka B1 sledi, da je Cesárova metoda regularna. Lahko pa to dokažemo neposredno brez sklicavanja na Töplitzov izrek.

Trditev B1. *Cesárova metoda je regularna.*

Dokaz. Pokazati moramo, da iz $S_n \rightarrow s$ sledi $\sigma_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$). Ker je metoda linearna, zadošča pokazati, da iz $S_n \rightarrow 0$ sledi $\sigma_n \rightarrow 0$. Ker delne vsote S_n konvergirajo, so omejene, zato obstaja konstanta $M > 0$, da je $|S_n| \leq M$ za vsak n . Poleg tega za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da za $n > k$ velja $|S_n| < \epsilon$. Izberimo $N > k$. Tedaj je

$$|\sigma_N| \leq \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^k S_n \right| + \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=k+1}^N S_n \right| \leq \frac{k+1}{N+1} M + \frac{N-k}{N+1} \epsilon.$$

To velja za vsak $N > k$. Pošljimo $N \rightarrow \infty$, pa je $\limsup_{N \rightarrow \infty} |\sigma_N| \leq \epsilon$. Ker je $\epsilon > 0$ poljuben in $|\sigma_N| \geq 0$, sledi $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 0$.

Obratno nasploh ne velja, kot pokaže zgled nekonvergentne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$. Tu je $S_n = 1$, če je n sodo število, in 0, če je n liho število. Po drugi strani pa $\sigma_N \rightarrow 1/2$, saj je

$$\sigma_{2N} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} S_n = \frac{N+1}{2N+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma_{2N+1} = \frac{1}{2N+2} \sum_{n=0}^{2N+1} S_n = \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2}.$$

Včasih iz $\sigma_N \rightarrow s$ sledi $S_n \rightarrow s$ pri nekaterih dodatnih pogojih glede prvotne vrste oziroma glede njenih koeficientov. Takim dodatnim pogojem pravimo *Tauberjevi pogoji*, ustreznim trditvam pa *Tauberjevi pogoji* (po avstrijskem matematiku Tauberju). Oglejmo si nekaj preprostih Tauberjevih pogojev.

Zgledi. Naj bo $(c_k)_{k \geq 0}$ poljubno zaporedje kompleksnih števil in $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ za vsak $n \geq 0$. Naslednji pogoji so Tauberjevi.

1. *Pogoj* $c_k \geq 0$ za vsak k . Tedaj so vse delne vsote S_n pozitivne in naraščajo. Velja

$$\sigma_{2N} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} S_n \geq \frac{1}{2N+1} \sum_{n=N}^{2N} S_n \geq \frac{N+1}{2N+1} S_N \geq \frac{1}{2} S_N.$$

Če zaporedje σ_{2N} konvergira, je omejeno, npr. $\sigma_{2N} \leq M$ za vsak N , zato velja tudi $S_N \leq 2M$ za vsak N in zaporedje S_N konvergira.

2. *Pogoj* $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k c_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Ker je $S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k c_k$, velja $S_n - \sigma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Zaporedji S_n in σ_n istočasno konvergirata ali divergirata.

3. *Pogoj* $c_k = o(1/k)$ ($k \rightarrow \infty$). V tem primeru velja $k c_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Ker je metoda aritmetičnih sredin regularna (trditev 1), velja tudi $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k c_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Torej po točki 2 zaporedje S_n konvergira natanko takrat, ko konvergira zaporedje σ_n .

4. *Pogoj* $c_k = O(1/k)$ ($k \rightarrow \infty$) (Hardy). To pomeni $k|c_k| \leq M$ za vsak n in za primerno konstanto $M > 0$. Izberimo $N, k = 1, 2, \dots$ in definirajmo

$$\sigma_{N,k} = \frac{1}{k} \sum_{j=N}^{N+k-1} S_j = \left(1 + \frac{N}{k}\right) \sigma_{N+k-1} - \frac{N}{k} \sigma_{N-1}.$$

Pošljimo $N, k \rightarrow \infty$ tako, da ostane N/k omejeno. Če tedaj $\sigma_N \rightarrow s$, potem odtod sledi tudi $\sigma_{N,k} \rightarrow s$. Izračunajmo

$$\sigma_{N,k} - S_N = \frac{1}{k} \sum_{j=N}^{N+k-1} S_j - S_N = \frac{1}{k} \sum_{j=N+1}^{N+k-1} (S_j - S_N) = \frac{1}{k} \sum_{j=N+1}^{N+k} (N+k-j) c_j = \sum_{j=N+1}^{N+k} \left(1 - \frac{j-N}{k}\right) c_j.$$

Torej je

$$|\sigma_{N,k} - S_N| \leq \sum_{j=N+1}^{N+k} |c_j| \leq M \sum_{j=N+1}^{N+k} \frac{1}{j} \leq \frac{Mk}{N+1}.$$

Izberimo tak $k = k_N$, da je izpolnjena neenakost $k_N \leq N\epsilon/M < k_N + 1$ za vsak N . Tedaj je $|\sigma_{N,k} - S_N| \leq N\epsilon/(N+1) < \epsilon$. Poleg tega iz $N \rightarrow \infty$ sledi $k_N \rightarrow \infty$, pri čemer je $N/k_N \leq M(k_N + 1)/(\epsilon k_N) < 2M/\epsilon$ omejeno zaporedje. Torej iz $\sigma_N \rightarrow s$ ($N \rightarrow \infty$) sledi $\sigma_{N,k_N} \rightarrow s$. Dobimo

$$|S_N - s| \leq |S_N - \sigma_{N,k_N}| + |\sigma_{N,k_N} - s| < |\sigma_{N,k_N} - s| + \epsilon$$

oziroma $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N - s| \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} |\sigma_{N,k_N} - s| + \epsilon = \epsilon$ za vsak $\epsilon > 0$, se pravi $S_N \rightarrow s$ ($N \rightarrow \infty$).

Opombe. 1. V točki 4 bi dobili isto oceno $|\sigma_{N,k} - S_N| \leq Mk/(N+1)$, če bi namesto $j|c_j| \leq M$ za vsak j imeli pogoj $\tau_{N,k} = \frac{1}{k} \sum_{j=N+1}^{N+k} j|c_j| \leq M$ za vsak N in k .

2. Če bi bili koeficienti zvezne funkcije, se pravi, če bi obravnavali funkcijske vrste na danem intervalu, in bi Tauberjevi pogoji veljali enakomerno na tem intervalu, bi iz enakomerne Cesárove konvergence dobili enakomerno konvergenco. Včasih bi tako lahko sklepali tudi na konvergenco v določeni normi itd.

Za teorijo Fourierovih oziroma splošnih trigonometričnih vrst so pomembne tudi druge sumacijske metode. Definirajmo še eno tako metodo.

Definicija (Riemannova sumacijska metoda). Vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ naj ima omejene koeficiente. Za vsak dovolj majhen $h > 0$ definirajmo

$$S(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2, \quad \frac{\sin 0}{0} = 0.$$

Rečemo, da vrsta *Riemannovo konvergira* k vrednosti s , če velja $\lim_{h \rightarrow 0} S(h) = s$.

Opombe. 1. Zgornja funkcija $S(h)$ obstaja, ker je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| c_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \right| \leq \sup_k |c_k| \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6h^2} \sup_k |c_k| < \infty.$$

2. Če so koeficienti vrste omejene funkcije na intervalu $[a, b]$ in velja $\sup_{a \leq x \leq b} |c_k(x)| \leq M$ za neko konstanto M , vrsta pri vsakem $h > 0$ enakomerno konvergira in določa zvezno funkcijo $S(h) = S(h, x)$ na $[a, b]$.

Trditev B2. *Riemannova metoda je regularna.*

Dokaz. Predpostavimo, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, se pravi tudi zaporedje delnih vsot $S_k = \sum_{j=0}^k c_j$, $k = 0, 1, 2, \dots$, konvergira proti vrednosti s . Z Abelovo sumacijsko formulo (glej dodatek C) lahko zapišemo

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} S_k \left[\left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(k+1)h}{(k+1)h} \right)^2 \right] + S_n \frac{\sin nh}{nh}.$$

Zadnji člen konvergira pri pogoju $n \rightarrow \infty$ proti 0, ker so delne vsote S_n zaradi konvergence omejene. Torej imamo v limiti

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \left[\left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(k+1)h}{(k+1)h} \right)^2 \right].$$

Definirajmo funkcijo $u(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$. Ker je njen odvod $u'(x) = 2 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ v točki 0 zvezen, sicer pa velja ocena

$$|u'(x)| \leq \left| \frac{\sin 2x}{x^2} \right| + 2 \left| \frac{\sin x}{x} \right| \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{3}{x^2},$$

je $u' \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Torej za funkcijo u velja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u((k+1)h) - u(kh)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} |u'(x)| dx = \int_0^{\infty} |u'(x)| dx = \|u'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < \infty,$$

pri čemer je celo $\sum_{k=0}^{\infty} [u(kh) - u((k+1)h)] = 1$ za vsak h .

Tako lahko $S(h)$ izrazimo s funkcijo u v obliki $S(h) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k[u(kh) - u((k+1)h)]$. Za $s = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ torej imamo

$$S(h) - s = \sum_{k=0}^{\infty} (S_k - s)[u(kh) - u((k+1)h)].$$

Izberimo poljubno zaporedje $h_i > 0$ z lastnostjo $h_i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) in pišimo $s_{ik} = u(kh_i) - u((k+1)h_i)$. Potem je $S(h_i) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} S_k$ in sumacijska metoda $(S_k) \mapsto (S(h_i))$ je linearna. Pokažimo, da matrika (s_{ik}) zadošča vsem pogojem Töplitzovega izreka. Točka (i) pomeni, da $s_{ik} = \left(\frac{\sin kh_i}{kh_i}\right)^2 - \left(\frac{\sin(k+1)h_i}{(k+1)h_i}\right)^2 \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$), kar je res. Točko (ii) smo v resnici že spoznali, ko smo ocenili $\sum_{k=0}^{\infty} |s_{ik}| = \sum_{k=0}^{\infty} |u((k+1)h_i) - u(kh_i)| \leq \|u'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < \infty$, točka (iii) pa je tudi izpolnjena, saj je $\sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} [u(kh_i) - u((k+1)h_i)] = 1$. Po Töplitzovem izreku velja $S(h_i) \rightarrow s$ ($i \rightarrow \infty$) za vsako zaporedje $h_i > 0$, $h_i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Potem pa velja tudi $S(h) \rightarrow s$ ($h \rightarrow 0$) in Riemannova metoda je regularna.

Opomba. Tako kot vsaka regularna linearna metoda tudi Riemannova metoda prevede omejena zaporedja v omejena zaporedja. Če so torej delne vsote S_k prvotne vrste omejene, je omejena tudi funkcija $S(h)$. To se vidi tudi direktno iz zapisa

$$S(h) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k[u(kh) - u((k+1)h)].$$

C. Monotona in konveksna zaporedja

Imejmo dve zaporedji kompleksnih števil $(a_k), (b_k)$, pri čemer naj teče indeks k od 0 naprej. Če uvedemo oznaki $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ za $k = 0, 1, 2, \dots$ in $B_k = \sum_{j=0}^k b_j$, lahko (pri poljubnem $n \geq 1$ oziroma pri poljubnem paru m, n , $0 \leq m < n$) napišemo naslednje Abelove formule za delno sumacijo:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k B_k + a_n B_n,$$

$$(b) \quad \sum_{k=m+1}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k B_k + a_n B_n - a_m B_m,$$

$$(c) \quad \sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k B_k + a_n B_n - a_m B_{m-1},$$

Dokaz teh formul je preprost, npr. za (a): $\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} = \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k B_k + a_n B_n$ (vzamemo $b_{-1} = 0$ in zato $B_{-1} = 0$). Druga formula sledi z odštevanjem prve pri vrednostih n in m , zadnja je le varianta druge. Abelove formule za parcialno sumacijo so analogija znanim formulam za integracijo po delih.

V naslednjih trditvah obdržimo oznake, ki smo jih vpeljali na začetku za dani dve zaporedji (a_k) in (b_k) , B pa naj bo dana konstanta.

Trditev C1. Če je $a_k \geq 0$, $\Delta a_k \geq 0$ in $|B_k| \leq B$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$, velja za $0 < m < n$ ocena

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2a_m B.$$

Dokaz. Po formuli (c) je $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k |B_k| + a_n |B_n| + a_m |B_{m-1}| \leq B \left(\sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k + a_n + a_m \right) = 2a_m B$.

Definicija C1. Realno zaporedje (a_k) je *padajoče*, če je $\Delta a_k \geq 0$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$, in *naraščajoče*, če je $\Delta a_k \leq 0$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$

Dejstvo, da je zaporedje (a_k) padajoče in konvergira k 0, bomo pogosto označili kar z $a_k \searrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Trditev C2. Če je $a_k \searrow 0$ in $|B_k| \leq B$ za vsak k , vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ konvergira.

Dokaz. Po trditvi C1 je $\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq 2a_m B$. Ker desna stran po predpostavki konvergira k 0, je to Cauchyjev kriterij za konvergenco vrste.

Posledica. Pri pogojih $a_k \searrow 0$ in $|B_k| \leq B$ za vsak $k = 0, 1, 2, \dots$ velja za vsak $m > 0$ ocena

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k b_k \right| \leq 2a_m B.$$

Opomba. Če so členi $b_k = b_k(x)$ funkcije, definirane na pomnožici $E \subset \mathbb{R}$, in je konstanta B neodvisna od $x \in E$, je konvergenca vrste enakomerna na E .

Zgled. 1. Potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, kjer velja $a_k \searrow 0$, konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$ z lastnostjo $|z| \leq 1$, razen morda za $z = 1$. Za $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ imamo namreč oceno $|B_n| = \left| \sum_{k=0}^n z^k \right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$ in lahko uporabimo lemo 2.

2. V posebnem primeru dobimo Leibnitzov kriterij za alternirajoče vrste: če $a_k \searrow 0$, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergira.

3. Če predpostavke trditve 2 niso izpolnjene, tudi sklep ne velja. Kot zgled lahko vzamemo npr. naslednje pare zaporedij: (i) $a_k = 1$, $b_k = (-1)^k$, (ii) $a_k = (-1)^k/k$, $b_k = (-1)^k$, (iii) $a_k = 1/k$, $b_k = 1$.

Definicija C2. Kompleksno zaporedje (a_k) ima *omejeno variacijo*, če je naslednja vrsta konvergentna: $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty$.

Zaporedje z omejeno variacijo nujno konvergira. Iz $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty$ namreč sledi, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k$ konvergira, torej konvergira zaporedje (a_n) .

Trditev C3. Če ima zaporedje (a_k) omejeno variacijo, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ pa konvergira, konvergira tudi vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

Dokaz. V tem primeru je $a_m - a_n = \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k$ in zato $|a_m - a_n| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k|$. Poleg tega obstaja konstanta $M > 0$, tako da je $|a_n| \leq |a_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta a_k| \leq M$. Torej imamo po formuli (b) oceno

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| &\leq B \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| + |a_n(B_n - B_m) + (a_n - a_m)B_m| \leq \\ &\leq B \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| + |a_n| |B_n - B_m| + |a_n - a_m| B \leq 2B \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| + M |B_n - B_m| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Opomba. Tudi ta trditev ne velja, če predpostavke niso izpolnjene. Zgled: (i) $a_k = (-1)^k$, $b_k = (-1)^k/k$ ali (ii) $a_k = 1 + 1/k$, $b_k = (-1)^k$. Če pa je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ funkcijska in konvergira enakomerno na množici E , poleg tega pa je konstanta B neodvisna od $x \in E$, je tudi vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ enakomerno konvergentna.

Trditev C4. Realno zaporedje (a_n) , ki je monotono in omejeno, ima omejeno variacijo. Realno zaporedje z omejeno variacijo lahko zapišemo kot razliko dveh padajočih omejenih zaporedij.

Dokaz. Če je zaporedje (a_k) monotono in omejeno, konvergira, zato je $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| = \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k = \pm(a_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$.

Obratno, naj bo (a_k) realno zaporedje z omejeno variacijo. Če pišemo $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|$, je zaporedje (u_n) padajoče, omejeno in velja $\Delta u_n = |\Delta a_n| \geq \Delta a_n$. Pišimo še $v_n = u_n - a_n$ za vsak $n = 0, 1, 2, \dots$. Potem je $\Delta v_n = \Delta u_n - \Delta a_n \geq 0$ za vsak $n = 0, 1, 2, \dots$. Zaradi $|a_n| \leq |a_0| + \sum_{k=0}^n |\Delta a_k| \leq M$ za neko konstanto M , je zaporedje (a_n) omejeno, zato je omejeno tudi zaporedje (v_n) . Očitno je $a_n = u_n - v_n$ in $\Delta u_n \geq 0$, $\Delta v_n \geq 0$.

Iz trditve C4 ponovno vidimo, da vsako zaporedje z omejeno variacijo konvergira.

Izraz Δa_k imenujemo včasih *prvo diferenco* zaporedja (a_k) . Uvedimo še oznako za *drugo diferenco*: $\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$. Definirajmo še dva koristna pojma o realnih zaporedjih.

Definicija C3. Realno zaporedje (a_n) je *konveksno*, če je $\Delta^2 a_k \geq 0$ za vsak $n = 0, 1, 2, \dots$. Realno zaporedje (a_n) je *kvazikonveksno*, če velja $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty$.

Zgled. Konveksni zaporedji sta npr. $a_n = 1/n$ ali $a_n = 1/\ln n$. Glede prvega se takoj prepričamo, da je $\Delta^2 a_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} > 0$. Pri drugem pa upoštevajmo, da iz $n^2 > n^2 - 1$ sledi $n/(n-1) > (n+1)/n$ oziroma $\ln n - \ln(n-1) > \ln(n+1) - \ln n$. Torej zaradi $\ln(n+1) > \ln(n-1)$ dobimo $1/\ln(n-1) - 1/\ln n > 1/\ln n - 1/\ln(n+1)$ oziroma $\Delta^2 a_n > 0$.

Trditev C5. Naj bo (a_n) konveksno zaporedje, ki konvergira k 0. Potem velja:

- (i) $a_n \geq 0$, $\Delta a_n \geq 0$ za vsak n ,
- (ii) $n\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
- (iii) $\sum_{n=m}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = m\Delta a_m + a_m$ za vsak m in zaporedje (a_n) je tudi kvazikonveksno.

Dokaz. (i) Iz $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sledi $\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), zato ne more za noben n_0 veljati $\Delta a_{n_0} < 0$. Odtod bi namreč za $n \geq n_0$ sledilo $\Delta a_n \leq \Delta a_{n_0} < 0$ in Δa_n ne bi moglo konvergirati proti 0. Torej za vsak n velja $\Delta a_n \geq 0$. Na povsem enak način pa odtod spoznamo, da je tudi $a_n \geq 0$ za vsak n .

(ii) Kot običajno označimo z $[x]$ celi del števila x . Potem je $\frac{n}{2}\Delta a_n \leq (n - [n/2])\Delta a_n \leq \Delta a_{[n/2]+1} + \Delta a_{[n/2]+2} + \dots + \Delta a_n = a_{[n/2]+1} - a_{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Torej velja $n\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(iii) Nazadnje še izračunajmo naslednjo vsoto: $\sum_{n=m}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^n \Delta^2 a_n = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=m}^{\infty} \Delta^2 a_n + \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^2 a_n = m\Delta a_m + \sum_{k=m}^{\infty} \Delta a_k = m\Delta a_m + a_m$. Zdaj namreč že vemo, da $a_n \rightarrow 0$ in $\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) in zato npr. $\sum_{k=m}^{\infty} \Delta a_k = a_m$. Pri zgornjem izračunu bi lahko uporabili tudi formulo (c) z začetka razdelka.

Iz (iii) v limiti ($m \rightarrow \infty$) takoj sledi, da je zaporedje (a_n) kvazikonveksno.

Trditev C6. Vsako kvazikonveksno zaporedje, ki konvergira k 0, ima omejeno variacijo.

Dokaz. Iz $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty$ sledi $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^2 a_n| < \infty$. Torej konvergira vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n$ in s tem tudi zaporedje (Δa_n) . Ker $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), velja tudi $\Delta a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Odtod dobimo $\Delta a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 a_k$ za vsak n in zato $|\Delta a_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta^2 a_k|$. Seštejmo še po n in imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta^2 a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k |\Delta^2 a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty.$$

Eden od načinov, kako konstruirati konveksno zaporedje, ki konvergira proti 0, je prikazan v naslednji trditvi.

Trditev C7. Naj bo $a > 1$ in (n_k) strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil z lastnostjo

$$n_2 \geq \left(1 + \frac{1}{2(a-1)}\right)n_1, \quad (k+1)n_{k+1} \geq 2kn_k - (k-1)n_{n-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Če je (a_n) zaporedje, definirano z $a_0 = a$, $a_n = 1/k$ za $n = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$) in linearno pri vmesnih indeksih, je zaporedje (a_n) padajoče, konvergentno k 0 in konveksno.

Dokaz. Očitno je po konstrukciji $a_n > 0$ in $a_n \searrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Lastnost zaporedje (n_k) zagotavlja, da absolutna vrednost naklonov poligonske črte, ki povezuje zaporedne točke $(0, a)$, $(n_1, 1)$, $(n_2, 1/2)$, ..., pada. Prva od zgornjih neenakosti neenakosti namreč pove, da je $(a-1)/n_1 \geq (1-\frac{1}{2})/(n_2-n_1)$, druga pa $(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})/(n_k-n_{k-1}) \geq (\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})/(n_{k+1}-n_k)$ za vsak $k \geq 2$.

Ta rezultat lahko izkoristimo za konstrukcijo konveksnega zaporedja padajočih števil, ki poljubno počasi konvergira proti 0.

Trditvev C8. Naj bo (c_n) poljubno zaporedje z lastnostjo $c_n > 0$ za vsak n in $c_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Tedaj obstaja konveksno zaporedje (a_n) , tako da velja $a_n \geq c_n$ za vsak n in $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dokaz. Izberimo najprej tak n_1 , da je $c_n \geq 1/2$ za vsak $n \geq n_1$, nato pa tako velik $a > 1$, da so vse točke $(0, c_0)$, $(1, c_1)$, ..., (n_1-1, c_{n_1-1}) pod daljico, ki povezuje točki $(0, a)$ in $(n_1, 1)$. Induktivno lahko izberemo tako strogo naraščajoče zaporedje naravni števil n_2, n_3, \dots , da veljajo poleg pogoja za konveksnost poligonske črte iz trditve C7 tudi neenakosti $c_n \leq 1/(k+1)$ za $n \geq n_k$ ($k \geq 1$). Potem poligonska črta majorizira vse točke (n, c_n) in za iskano konveksno zaporedje lahko vzamemo zaporedje (a_n) iz trditve C7.

D. Ordinalna števila in transfinitna indukcija

Pojem ordinalnega števila je v tesni zvezi z dobro urejenostjo množic, zato si najprej ogledimo nekaj osnovnih dejstev o linearno urejenih množicah.

Definicija D1. Neprazna množica M je *linearno urejena* z relacijo \leq , če za elemente $x, y, z \in M$ velja

- (i) $x \leq x$ (refleksivnost),
- (ii) $x \leq y$ in $y \leq x \implies x = y$ (simetričnost),
- (iii) $x \leq y$ in $y \leq z \implies x \leq z$ (tranzitivnost),
- (iv) $x \leq y$ ali $y \leq x$ (trihotomija).

Definicija D2. Definiramo še druge relacije med elementoma $x, y \in M$: (1) $x < y$, če $x \leq y$ in $x \neq y$, (2) $x \geq y$, če $y \leq x$, (3) $x > y$, če $y < x$.

Definicija D3. Množica M je *dobro urejena* z relacijo \leq , če je z njo linearno urejena in ima vsaka neprazna podmnožica $A \subset M$ najmanjši element, tj. obstaja tak $a \in A$, da je $a \leq x$ za vsak $x \in A$.

Iz teorije množic je znano, da se da vsako neprazno množico M dobro urediti z neko relacijo \leq . To dejstvo je ekvivalentno aksiomu izbire.

Definicija D4. Naj bo množica $W \neq \emptyset$ z relacijo \leq dobro urejena in naj bo $a \in W$. Tedaj imenujemo podmnožico $W_a = \{x \in W; x < a\}$ *začetni odsek* množice W , določen z elementom a .

Izrek D1 (Princip transfinitne indukcije). Če je $W \neq \emptyset$ dobro urejena množica z relacijo \leq in je podmnožica $A \subset W$ taka, da iz $W_a \subset A$ sledi $a \in A$, je $A = W$

Dokaz. Denimo, da $A \neq W$. Potem je $W \setminus A \neq \emptyset$ in zaradi dobre urejenosti množice W obstaja najmanjši element $a \in W \setminus A$. Tedaj je $W_a \subset A$, vendar $a \notin A$.

Definicija D5. Linearno urejeni množici A in B sta *urejenostno izomorfni* ($A \approx B$), če obstaja med njima *urejenostni izomorfizem*, tj. bijektivna funkcija f iz A na B , tako da iz $x \leq y$ sledi $f(x) \leq f(y)$.

Opomba. Ker iz $y < x$ zaradi bijekcije sledi $f(y) < f(x)$, je res tudi obratno, da iz $f(x) \leq f(y)$ sledi $x \leq y$.

Hitro se lahko prepričamo, da je relacija \approx refleksivna, simetrična in tranzitivna, torej ekvivalenčna. Vsaki linearno urejeni množici A priredimo določeni simbol $\text{ord } A$ (*tip urejenosti*) tako, da imata linearno urejeni množici A in B isti simbol natanko takrat, ko sta urejenostno izomorfni: $\text{ord } A = \text{ord } B \iff A \approx B$. Če je A dobro urejena množica, imenujemo $\text{ord } A$ *ordinalno število*, pripadajoče (dobro urejeni) množici A .

Zgledi. (a) $\text{ord } \emptyset = 0$. (b) Množica $\{1, 2, \dots, n\}$ je z naravno urejenostjo dobro urejena in velja $\text{ord } \{1, 2, \dots, n\} = n$. (c) $\text{ord } \mathbb{N} = \omega$. (d) Množica \mathbb{Q} z naravno urejenostjo ima $\text{ord } \mathbb{Q} = \eta$, ki pa ni ordinalno število, ker \mathbb{Q} z naravno urejenostjo ni dobro urejena množica.

Definicija D6. Bodita α, β ordinalni števili, se pravi $\alpha = \text{ord } A$ in $\beta = \text{ord } B$, kjer sta A in B dobro urejeni množici. Tedaj definiramo urejenost ordinalnih števil:

- (i) $\alpha < \beta$, če obstaja tak $x \in B$, da je $A \approx B_x = \{y \in B; y < x\}$ in
- (ii) $\alpha \leq \beta$, če je $\alpha < \beta$ ali $\alpha = \beta$.

Trditev D1. Definicija urejenosti ordinalnih števil ni odvisna od tega, kateri predstavnic med dobro urejenimi množicami izberemo za A in B : Če je $A' \approx A$, $B' \approx B$ in obstaja tak $x \in B$, da je $A \approx B_x$, potem obstaja tudi tak $x' \in B'$, da je $A' \approx B'_{x'}$.

Dokaz. Naj bosta $f : A' \rightarrow A$ in $g : B \rightarrow B'$ urejenostna izomorfizma in pišimo $x' = g(x)$. Tedaj preslika g začetni odsek B_x na začetni odsek $B'_{x'}$. Če je $h : A \rightarrow B_x$ urejenostni izomorfizem, je $g \circ h \circ f : A' \rightarrow B'_{x'}$ tudi urejenostni izomorfizem.

Trditev D2. Če je A dobro urejena množica in je f urejenostni izomorfizem iz A na neko podmnožico v A , je $x \leq f(x)$ za vsak $x \in A$.

Dokaz. Denimo, da obstaja tak $x \in A$, da je $f(x) < x$. Naj bo a najmanjši x s to lastnostjo (tak a obstaja zaradi dobre urejenosti množice A). Ker je f urejenostni izomorfizem, iz $f(a) < a$ sledi $f(f(a)) < f(a) < a$. Toda to je v nasprotju z minimalnostjo elementa a .

Izrek D2. Naj bosta A in B dobro urejeni množici. Tedaj velja:

- (i) Množica A ni urejenostno izomorfna nobenemu svojemu začetnemu odseku.
- (ii) Če je $A_x \approx A_y$ za $x, y \in A$, je $x = y$.
- (iii) Če je $A \approx B$, obstaja natanko en urejenostni izomorfizem iz A na B .

Dokaz. (i) Denimo, da bi obstajal $x \in A$ in urejenostni izomorfizem $f : A \rightarrow A_x$. Potem je po trditvi 2 $x \leq f(x)$, kar ni mogoče, ker je $f(x) \in A_x$ in zato $f(x) < x$.

(ii) Denimo, da je $A_x \approx A_y$ in da $x \neq y$. Lahko vzamemo, da je $x < y$. Tedaj je A_x začetni odsek dobro urejene množice $A_y \approx A_x$, kar po točki (i) ni mogoče.

(iii) Naj bosta f, g urejenostna izomorfizma iz A na B . Potem je $h = f^{-1} \circ g$ urejenostni izomorfizem iz A na A . Po trditvi 2 je $x \leq h(x)$ za vsak $x \in A$, torej tudi $f(x) \leq f(h(x)) = g(x)$ za vsak $x \in A$. Zamenjajmo vlogi izomorfizmov f in g , pa dobimo še $g(x) \leq f(x)$ za vsak $x \in A$. Torej velja $f = g$.

Izrek D3. Za ordinalni števili α, β velja natanko ena od naslednjih treh možnosti: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.

Dokaz. Iz izreka D2(i) sledi, da se opisane možnosti med seboj izključujejo. Iz $A \approx B_x \subset B$ in $B \approx A_y \subset A$ bi npr. sledilo, da je množica B_x , torej tudi A , urejenostno izomorfna nekemu začetnemu odseku v A_y , kar ni možno. Pokažimo, da vsaj ena od možnosti res velja.

Upoštevajmo, da je poljubna unija začetnih odsekov, če ne izcrpa vse množice, spet začetni odsek v dani dobro urejeni množici (v komplementu unije namreč obstaja najmanjši element, ki določa začetni odsek).

Bodi $\alpha = \text{ord } A$, $\beta = \text{ord } B$, kjer sta A in B neprazni dobro urejeni množici. Naj bo \mathcal{F} družina vseh preslikav f , ki so urejenostni izomorfizmi iz A ali iz začetnega odseka v A na B ali na začetni odsek v B . Družina \mathcal{F} ni prazna, saj npr. vsebuje urejenostni izomorfizem $f : \{a\} \rightarrow \{b\}$, kjer sta a in b najmanjša elementa v A oziroma v B . Družino $\text{cal } \mathcal{F}$ delno

uredimo z relacijo \leq , definirano z: $f \leq g$, če je $D_f \subset D_g$ in je g razširitev izomorfizma f . Vse verige, tj. vse linearno urejene podmnožice v \mathcal{F} pa so delno urejene z inkluzijo. Vsaka linearno urejena družina verig ima svojo unijo za zgornjo mejo v družini vseh verig \mathcal{V} , zato po Zornovi lemi obstaja v \mathcal{V} maksimalna veriga \mathcal{C} . \mathcal{C} je linearno urejena podmnožica v \mathcal{F} . Če je h taka preslikava, da je $D_h = \cup_{f \in \mathcal{C}} D_f$ in je $h|_{D_f} = f$ za vsak $f \in \mathcal{C}$, je tudi $h \in \mathcal{F}$, saj je D_h enak A ali začetni odsek v A in je h urejenostni izomorfizem na B ali na začetni odsek R_h v B (iz $x \leq y$ sledi $h(x) = f_y(x) \leq f_y(y) = h(y)$). Če bi bila D_h in R_h začetna odseka, npr. $D_h = A_x$ in $D_h = B_y$, bi preslikavo h lahko razširili z $x \mapsto y$ do novega urejenostnega izomorfizma $\tilde{h} \in \mathcal{F}$, pri čemer $\tilde{h} \notin \mathcal{C}$ in \mathcal{C} ne bi bila maksimalna veriga v \mathcal{F} . Torej mora biti $D_h = A$ ali $R_h = B$. Če je $D_h = A$, dobimo $\alpha = \beta$ ali $\alpha < \beta$. Če $D_h \neq A$, mora biti $R_h = B$ in tedaj je $\beta < \alpha$.

Izrek D4. *Z relacijo \leq je vsaka neprazna množica S ordinalnih števil dobro urejena.*

Dokaz. Najprej je \leq relacija linearne urejenosti v S . Da je reflektivna, je jasno iz definicije. Antisimetričnost sledi iz izreka D3, v katerem je dokazana tudi trihotomija. Tranzitivnost je tudi očitna, saj iz $A \approx B_x$ in $B \approx C_y$ takoj sledi $A \approx C_z$ za ustrezen z (primer $A \approx B$ ali $B \approx C$ je še lažji).

Dokažimo še dobro urejenost. Izberimo $\gamma = \text{ord } C \in S$. Če velja $\gamma \leq \beta$ za vsak $\beta \in S$ je dobra urejenost dokazana. Če pa obstaja tak $\beta \in S$, da je $\beta < \gamma$, množica $R = \{x \in C; \text{obstaja } \alpha \in S, \alpha = \text{ord } C_x\}$ ni prazna in je kot podmnožica dobro urejene množice tudi sama dobro urejena. Naj bo a najmanjši element v R in $\alpha = \text{ord } C_a$. Pokažimo, da je $\alpha \leq \beta$ za vsak $\beta \in S$. Res: če je $\gamma \leq \beta$, je $\alpha < \gamma \leq \beta$. Če pa je $\beta < \gamma$, obstaja $b \in C$, tako da je $\beta = \text{ord } C_b$. Torej je celo $b \in R$ in zato $a \leq b$. Sledi $\alpha = \text{ord } C_a \leq \text{ord } C_b$ in množica S je dobro urejena.

Definicija D7. Za poljubno ordinalno število $\alpha > 0$ označimo P_α množico vseh ordinalnih števil $\beta < \alpha$.

Izrek D5. (i) *Za vsako ordinalno število α je množica P_α z relacijo \leq dobro urejena, pri čemer je $\alpha = \text{ord } P_\alpha$.*

(ii) *Za vsako kardinalno število a obstaja ordinalno število α , da je $\text{card } P_\alpha = a$.*

Dokaz. (i) Po izreku D4 je tudi množica P_α dobro urejena. Naj bo $\alpha = \text{ord } A$ in $\beta < \alpha$. Potem obstaja $x \in A$, tako da je $\beta = \text{ord } A_x$. Po izreku D2(ii) je ta x z β natanko določen. Pišimo $\phi(\beta) = x$, pa je ϕ , kot se hitro vidi, urejenostni izomorfizem iz P_α na množico A . Torej je $\alpha = \text{ord } P_\alpha$.

(ii) Naj bo A taka množica, da je $a = \text{card } A$. Po aksiomu izbire lahko A dobro uredimo, pripada naj ji ordinalno število $\alpha = \text{ord } A$. Potem je po točki (i) $\text{ord } P_\alpha = \alpha = \text{ord } A$. Torej sta množici P_α in A urejenostno izomorfni, $P_\alpha \approx A$. Ker je med P_α in A bijekcija, jima pripada isto kardinalno število $a = \text{card } A = \text{card } P_\alpha$.

Posledica (paradoks Burali-Forti). *Množica vseh ordinalnih števil ne obstaja.*

Dokaz. Denimo, da bi taka množica W obstajala. Potem bi bila po izreku D4 dobro urejena z relacijo \leq . Označimo $\gamma = \text{ord } W$. Po izreku D5(i) je tudi $\gamma = \text{ord } P_\gamma = \text{ord } W_\gamma$. Torej bi bilo $\text{ord } W = \text{ord } W_\gamma$ oziroma $W \approx W_\gamma$, kar pa je po izreku D2 nemogoče.

Izrek D6. *Obstaja tako ordinalno število Ω , da ima množica P_Ω naslednje lastnosti:*

(i) *Če je $\alpha \in P_\Omega$, je P_α števna množica.*

(ii) *P_Ω ni števna množica.*

(iii) *Če je C števna podmnožica v P_Ω , obstaja tak $\beta \in P_\Omega$, da je $\alpha \leq \beta$ za vsak $\alpha \in C$.*

Dokaz. Naj bo c kardinalno število, ki je moč kontinuuma in po izreku D5 izberimo ordinalno število γ , tako da je $\text{card } P_\gamma = c$. Možno je dvoje: (1) Vsak element v P_γ ima kvečjemu števno mnogo predhodnikov, tj. ordinalnih števil, manjših od njega. Tedaj postavimo $\Omega = \gamma$. (2) Množica elementov v P_γ , ki imajo neštevno mnogo predhodnikov, ni prazna. Tedaj vzamemo za Ω najmanjšega od njih. Množica P_ω je z Ω dobro definirana. V obeh primerih je za vsak $\alpha \in P_\Omega$ množica P_α števna (točka (i)), sama množica P_Ω pa gotovo ni števna (točka (ii)). Dokažimo še (iii). Naj bo $C \subset P_\Omega$ poljubna števna podmnožica in $D = \cup_{\alpha \in C} P_\alpha$. Potem je D števna unija števnih množic, torej tudi sama števna množica in zato različna od P_Ω . Izberimo $\beta \in P_\Omega \setminus D$. Če bi bil $\beta < \alpha$ za neko ordinalno število $\alpha \in C$, bi bil $\beta \in D$, kar pa ni res. Torej velja $\alpha \leq \beta$ za vsak $\alpha \in C$.

Opomba. Ordinalno število Ω iz izreka D6 imenujemo *najmanjše neštevno ordinalno število*. Kardinalno število množice P_Ω običajno označimo z \aleph_1 , torej $\aleph_1 = \text{card } P_\Omega$. Znamenita *hipoteza kontinuuma* trdi, da je $\aleph_1 = c$ (kontinuum). To je ekvivalentno trditvi, da je vsaka neskončna podmnožica v \mathbb{R} bodisi števna bodisi ima kardinalnost c kontinuuma. Znano je, da je ta hipoteza neodvisna od Zermelo-Fraenkelovega sistema aksiomov teorije števil (kar je dokazal P.J. Cohen).

Ker je vsaka množica ordinalnih števil dobro urejena, ima najmanjši element. Nima pa vsaka množica ordinalnih števil največjega elementa. Množica $P_\alpha = \{\eta; \beta < \alpha\}$ lahko ima največji element (kadar je npr. α končno ordinalno število), lahko pa ne (kadar je npr. $\alpha = \omega$, najmanjše neskončno ordinalno število, ali $\alpha = \Omega$, najmanjše nesštevno ordinalno število). Če je $\beta_0 \in P_\alpha$ največji element, velja $\beta \leq \beta_0 < \alpha$ za vsak $\beta \in P_\alpha$ in rečemo, da je β_0 *neposredni predhodnik* ordinalnega števila α . Če pa največjega elementa v P_α ni, število α nima neposrednega predhodnika in rečemo, da je tedaj α *limitno* ordinalno število.

Tudi transfinitno indukcijo, ki velja, kot smo videli za dobro omejene množice (glej izrek D1), lahko izrazimo v jeziku ordinalnih števil. Radi bi npr. pokazali, da velja neka lastnost za vse elemente dane (neskončne, morda celo neštevne) množice M . To množico dobro uredimo in ji pripišemo neko ordinalno število $\gamma = \text{ord } M$. Ker je po izreku D5 tudi $\text{ord } P_\gamma = \gamma$, sta M in P_γ urejenostno izomorfni množici. Namesto za elemente množice M lahko dano lastnost dokazujemo kar za elemente množice P_γ .

Princip transfinitne (oziroma ordinalne) indukcije se potem glasi:

Naj bo L lastnost, smiselna za neko množico elementov, indeksiranih z vsemi ordinalnimi števili, manjšimi od γ , torej z ordinalnimi števili iz množice P_γ . Če za vsak $\beta < \gamma$ iz veljavnosti $L(\alpha)$ za vsak $\alpha < \beta$ sledi veljavnost $L(\beta)$, velja $L(\alpha)$ za vsak $\alpha < \gamma$.

Dokaz je isti kot za izrek D1, le prepisemo ga v jezik ordinalnih števil. Indukcijski korak dokažemo posebej za navadna ordinalna števila (taka, ki imajo neposrednega predhodnika) in posebej za limitna ordinalna števila. Zgled za uporabo transfinitne indukcije je dokaz izreka III.2.1.

E. Neskončnokrat odvedljive funkcije

Označimo s $C^\infty(\mathbb{R})$ množico vseh neskončnokrat odvedljivih kompleksnih funkcij na realni osi. Pravzaprav bomo obravnavali le realne funkcije iz $C^\infty(\mathbb{R})$.

Naj bo

$$\theta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{x^2-1}} & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases} ,$$

kjer je c pozitivna konstanta. Lahko se prepričimo (in tudi sicer je dobro znano), da je $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ (problem je odvedljivost pri $x = \pm 1$). Ker je $\theta(x) > 0$ za $|x| < 1$ in $\theta(x) = 0$ za $|x| \geq 1$, je nosilec funkcije θ enak intervalu $[-1, 1]$, torej $\text{supp } \theta = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}^- = [-1, 1]$. Poleg tega je $\theta(0) = c > 0$. Konstanto c določimo tako, da je $\int_{\mathbb{R}} \theta(x) dx = \int_{-1}^1 \theta(x) dx = 1$.

Za vsak $\epsilon > 0$ definirajmo še

$$\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \begin{cases} \frac{c}{\epsilon} e^{\frac{\epsilon^2}{x^2-\epsilon^2}} & , \quad |x| \leq \epsilon \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

potem je $\text{supp } \theta_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]$, sicer pa ima funkcija θ_ϵ iste lastnosti kot θ .

Za vsak $\epsilon > 0$ in za vsak zaprt interval $[c, d] \subset \mathbb{R}$ naj bo ϕ konvolucija med θ_ϵ in $\chi_{[c,d]}$, se pravi

$$\phi(x) = \chi_{[c,d]} * \theta_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[c,d]}(t) \theta_\epsilon(x-t) dt = \int_c^d \theta_\epsilon(x-t) dt.$$

Ta funkcija tudi pripada množici $C^\infty(\mathbb{R})$ in zanjo velja $0 \leq \phi(x) \leq 1$ za vsak x . Njen nosilec je $\text{supp } \phi = [c - \epsilon, d + \epsilon]$, poleg tega pa je $\phi(x) = 1$ za $x \in [c + \epsilon, d - \epsilon]$, če je ϵ dovolj majhen, manjši od $(d - c)/2$.

Trditev E1. (a) Naj bo $[c, d] \subset (a, b)$. Tedaj obstaja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ z lastnostjo $\phi(x) = 1$ za $x \in [c, d]$ in $\phi(x) = 0$ za $x \notin (a, b)$ (celo $\text{supp } \phi \subset (a, b)$).

(b) Naj bo $K \subset V$, kjer je K kompaktna in V odprta podmnožica v \mathbb{R} . Tedaj obstaja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ z lastnostjo $\phi(x) = 1$ za $x \in K$ in $\phi(x) = 0$ za $x \notin V$ (celo $\text{supp } \phi \subset V$).

Dokaz. (a) Izberimo tako majhno število $\epsilon > 0$, da bo tudi $[c - 2\epsilon, d + 2\epsilon] \subset (a, b)$. Potem lahko za funkcijo ϕ izberemo konvolucijo $\phi = \chi_{[c-\epsilon, d+\epsilon]} * \theta_\epsilon$ in dobimo $\phi(x) = 1$ za $x \in [c, d]$ in $\text{supp } \phi \subset [c - 2\epsilon, d + 2\epsilon] \subset (a, b)$, torej $\phi(x) = 0$ za $x \notin (a, b)$.

(b) Kompaktna množica K je pokrita z disjunktnimi odprtimi intervali, iz katerih je sestavljena odprta množica V . Iz njih lahko izberemo končno mnogo podintervalov; naj bodo I_1, I_2, \dots, I_n zaprti intervali, ki so vsebovani v V in katerih unija vsebuje K . Za vsakega od njih lahko najdemo funkcijo $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, tako da je $\phi_i(x) = 1$ za $x \in I_i$ in $\phi_i(x) = 0$ zunaj neke okolice intervala I_i , ki se ne seka z drugimi intervali I_j , $j \neq i$, in ki v celoti pripada odprti množici V . Lahko dosežemo, da so tudi nosilci $\text{supp } \phi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ med seboj disjunktni. Potem vzamemo $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$.

Trditev E2 (Razčlenitev enote). Naj bo K kompaktna podmnožica v \mathbb{R} in V_1, V_2, \dots, V_n končno pokritje množice K z odprtimi množicami V_i , se pravi $K \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$. Tedaj obstajajo funkcije $h_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, tako da je $\text{supp } h_i \subset V_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$ in je $\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1$ za vsak $x \in K$.

Dokaz. Za vsak $x \in K$ obstaja tak indeks $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ in tak odprt interval I_x , da je $x \in I_x \subset \bar{I}_x \subset V_i$. Zaradi kompaktnosti množice K končno mnogo takih intervalov pokrije K , torej $K \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Naj bo $K_i = \cup\{\bar{I}_{x_j}; \bar{I}_{x_j} \subset V_i\}$ kompaktna množica, vsebovana v V_i . Po trditvi $E_1(b)$ obstaja $g_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, tako da je $g_i(x) = 1$ za $x \in K_i$ in $\text{supp } g_i \subset V_i$.

Naj bo $h_1 = g_1$, $h_2 = (1 - g_1)g_2$, $h_3 = (1 - g_1)(1 - g_2)g_3$, ... in splošno

$$h_n = (1 - g_1)(1 - g_2)\dots(1 - g_{n-1})g_n.$$

Tedaj za vsak i velja $\text{supp } h_i \subset \text{supp } g_i \subset V_i$ in $\sum_{i=1}^n h_i = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2)\dots(1 - g_n)$. Ker je $K \subset \cup_{i=1}^n K_i$, za $x \in K$ velja tudi $\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1$.

F. Algebraična števila

V tem kratkem razdelku si bomo ogledali nekaj splošnih lastnosti algebraičnih števil.

Definicija F1. *Algebraično število* je kompleksno število, ki reši polinomsko enačbo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ s celimi koeficienti $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ekvivalento lahko rečemo, da algebraično število reši polinomsko enačbo oblike $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ z racionalnimi koeficienti $a_k \in \mathbb{Q}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ in vodilnim koeficientom 1.

Polinom f najnižje stopnje z racionalnimi koeficienti in z vodilnim koeficientom 1, katerega koren je dano algebraično število α , se imenuje *minimalni polinom* števila α . Ta polinom je nerazcepen nad \mathbb{Q} , se pravi, da ga ne moremo zapisati v obliki $f = gh$, kjer sta g in h tudi polinoma z racionalnimi koeficienti. Njegovo stopnjo imenujemo *stopnja algebraičnega števila* α . Drugim korenom minimalnega polinoma f rečemo *konjugirana števila*. Korene minimalnega polinoma za algebraično število α , ki je stopnje n , bomo zapisali v obliki $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, kjer je $\alpha_0 = \alpha$ in so $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ k α konjugirana števila.

Trditev F1. *Naj bo f minimalen polinom algebraičnega števila α stopnje $n > 1$ in naj bodo $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ vsi njegovi koreni. Potem so ti koreni med seboj različni, polinom f pa je minimalen tudi za vsakega od njih.*

Dokaz. Naj bo f_i minimalni polinom za število α_i , $1 \leq i \leq n-1$. Ker je tudi $f(\alpha_i) = 0$ in je $\{f \in \mathbb{Q}[X]; f(\alpha_i) = 0\}$ glavni ideal, generiran s f_i , je polinom f deljiv s f_i , torej $f = f_i g$ za polinom $g \in \mathbb{Q}[X]$. Če bi bil g stopnje več kot 0, bi bil polinom f razcepen, kar ni res, ker je minimalni za α . Torej je $g = 1$ (konstanten polinom) in $f = f_i$ minimalen tudi za i .

Denimo, da bi bilo število α_i večkratni koren minimalnega polinoma f . Tedaj bi veljalo tudi $f'(\alpha_i) = 0$, kjer je $f' \in \mathbb{Q}[X]$ odvod polinoma f , torej polinom z nižjo stopnjo od stopnje polinoma f , in polinom f ne bi bil minimalen za α .

Definicija F2. Število α je *celo algebraično število*, če je koren polinomske enačbe $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ s celimi koeficienti $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Trditev F2. *Če je α algebraično število, obstaja tako naravno število m , da je $m\alpha$ celo algebraično število.*

Dokaz. Naj bo m naravno število, ki je enako vodilnemu koeficientu a_n polinomske enačbe $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ s celimi koeficienti a_k , ki ji zadošča število α (vedno lahko privzamemo, da je $a_n > 0$). Potem zadošča število $m\alpha$ polinomske enačbi $x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = 0$, kjer so $b_k = m^{n-k-1} a_k$ cela števila. Torej je $m\alpha$ celo algebraično število.

Trditev F3. *Celo algebraično število, ki je racionalno, je navadno celo število.*

Dokaz. Če racionalno število $\alpha = p/q$ zadošča enačbi $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ s celimi koeficienti $a_k \in \mathbb{Z}$, velja $p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_0q^n = 0$ in potenca p^n mora biti deljiva s q . Če sta si p in q tuji števili, sledi odtod $q = 1$ in $\alpha = p \in \mathbb{Z}$.

Trditev F4. *Množica celih algebraičnih števil je kolobar za seštevanje in množenje.*

Dokaz. Bodita α in β celi algebraični števili in naj velja $P(\alpha) = 0$, kjer je $P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$, $a_k \in \mathbb{Z}$ za vsak k . Ničle polinoma P naj bodo $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$. Podobno naj bo $Q(\beta) = 0$, kjer je $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$, $b_k \in \mathbb{Z}$ za vsak k , polinom z ničlami $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Sestavimo polinom $F(x) = P(x - \beta_0)P(x - \beta_1)\dots P(x - \beta_{n-1})$, ki ima za koeficiente simetrične polinome ničel $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ s celimi koeficienti, vodilni koeficient pa je 1. Vsak tak simetrični polinom se da izraziti kot polinom v elementarnih simetričnih funkcijah spremenljivk $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ s prav tako celimi koeficienti (glej npr. [23], str. 174). Ker so elementarne simetrične funkcije v $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ ravno koeficienti b_{n-1}, \dots, b_0 , ki so cela števila, so tudi koeficienti polinoma F cela števila. Očitno velja $F(\alpha + \beta) = P(\alpha)P(\alpha + \beta - \beta_0)\dots P(\alpha + \beta - \beta_{n-1}) = 0$, zato je $\alpha + \beta$ ničla polinoma F s celimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, se pravi tudi celo algebraično število.

Prav tako naj bo $G_k(x) = x^m + a_{m-1}\beta_k x^{m-1} + \dots + a_0\beta_k^m$ za $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ in $G(x) = G_0(x)G_1(x)\dots G_{m-1}(x)$. Kot prej vidimo, da je G polinom s celimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, ki ima število $\alpha\beta = \alpha_0\beta_0$ za ničlo. Torej je tudi $\alpha\beta$ celo algebraično število.

Trditev F5. *Minimalni polinom celega algebraičnega števila ima cele koeficiente.*

Dokaz. Naj bo P tak polinom s celimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, da je $P(\alpha) = 0$, in naj bo f minimalni polinom za α . Tedaj je polinom P deljiv s polinomom f , se pravi $P = fQ$, kjer je Q polinom z racionalnimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1. Koeficienti polinoma f so elementarne simetrične funkcije njegovih ničel $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Ker je $P(\alpha_i) = 0$ za vsak i , so tudi konjugirana števila cela algebraična števila. Po trditvi F4 tvorijo taka števila kolobar, torej so tudi koeficienti polinoma f cela algebraična števila. Ker so hkrati racionalna števila, so po trditvi F3 navadna cela števila.

Definicija F3. $\mathbb{Q}[\alpha] = \{p(\alpha); p \in \mathbb{Q}[X]\}$, $\mathbb{Q}(\alpha) = \{\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}; p, q \in \mathbb{Q}[X], q(\alpha) \neq 0\}$.

Hitro se lahko prepričamo, da je $\mathbb{Q}[\alpha]$ najmanjši kolobar, $\mathbb{Q}(\alpha)$ pa najmanjši obseg, ki vsebuje \mathbb{Q} in število α . Poleg tega očitno velja $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{Q}(\alpha)$.

Trditev F6. *Če je α algebraično število, je $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$ (enostavna algebraična razširitev obsega \mathbb{Q}).*

Dokaz. Preslikava $p \mapsto p(\alpha)$ je algebraični homomorfizem iz $\mathbb{Q}[X]$ v \mathbb{C} z zalogo vrednosti $\mathbb{Q}[\alpha]$ in jedrom $J = \{p \in \mathbb{Q}[X]; p(\alpha) = 0\}$. Jedro je ideal v glavnem kolobarju $\mathbb{Q}[X]$, torej generiran z minimalnim polinomom f števila α . Velja $\mathbb{Q}[X]/J \cong \mathbb{Q}[\alpha]$. Ker je f nerazcepen, je $J = (f)$ maksimalen ideal in zato $\mathbb{Q}[X]/J$ obseg. Torej je $\mathbb{Q}[\alpha]$ obseg, vsebovan v $\mathbb{Q}(\alpha)$. Ker pa je $\mathbb{Q}(\alpha)$ najmanjši obseg, ki vsebuje \mathbb{Q} in α , je $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Trditev F7. *Naj bo α algebraično število in α_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, njemu konjugirana števila. Če je $\gamma = p(\alpha)$, kjer je $p \in \mathbb{Q}[X]$, celo algebraično število, vsebovano v $\mathbb{Q}[\alpha]$, so tudi $\gamma_i = p(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, cela algebraična števila, konjugirana številu γ .*

Dokaz. Ker je γ celo algebraično število, ima po trditvi F5 njegov minimalni polinom h cele koeficiente. Naj bo $F(x) = h(p(x))$, torej $F \in \mathbb{Q}[X]$. Potem je $F(\alpha) = h(p(\alpha)) = h(\gamma) = 0$, zato je polinom F deljiv z minimalnim polinomom f števila α . Se pravi, da je $F = fg$, kjer je $g \in \mathbb{Q}[X]$. Potem velja tudi $F(\alpha_i) = f(\alpha_i)g(\alpha_i) = 0$ in $h(\gamma_i) = h(p(\alpha_i)) = F(\alpha_i) = 0$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Števila γ_i torej zadoščajo isti enačbi $h(x) = 0$ kot γ . Torej so tudi cela algebraična števila in konjugirana številu γ .

G. Potenčne vrste racionalnih funkcij

V tem dodatku bomo raziskali vprašanje, kdaj predstavlja dana potenčna vrsta racionalno funkcijo in si ogledali nekaj lastnosti takih vrst s celimi koeficienti.

Trditve G1. *Potenčna vrsta $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ predstavlja racionalno funkcijo natanko takrat, ko obstajajo konstante q_0, q_1, \dots, q_n , ki niso vse enake 0, tako da za vsak $k \geq n$ velja relacija:*

$$q_0 c_k + q_1 c_{k-1} + \dots + q_n c_{k-n} = 0.$$

Dokaz. Naj bo $f(z) = p(z)/q(z)$ racionalna funkcija, kjer je p polinom stopnje m in $q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n$. Lahko predpostavimo, da je $m < n$, kjer pa n ni več nujno stopnja polinoma q . Če namreč to ni res, lahko neničelne člene v q dopolnimo z ničelnimi, dokler s potenco ne presežemo m . Iz $p(z) = q(z)f(z) = (q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)$ dobimo $p(z) = q_0 c_0 + (q_0 c_1 + q_1 c_0)z + \dots + (q_0 c_n + q_1 c_{n-1} + \dots + q_n c_0)z^n + \dots$. Ker je p polinom stopnje m , je za $k > m$ ustrezní koeficient pri potenci z^k enak 0. Torej velja zelena relacija tudi za $k \geq n > m$.

Obratno, če obstajajo konstante q_0, q_1, \dots, q_n , ki niso vse enake 0, tako da velja $q_0 c_k + q_1 c_{k-1} + \dots + q_n c_{k-n} = 0$ za $k \geq n$, takoj vidimo, da je potenčna vrsta, definirana z enačbo $p(z) = (q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n)f(z)$ polinom stopnje $m < n$. Torej je $f = p/q$ racionalna funkcija.

Trditve G2 (Kronecker). *Potenčna vrsta $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ predstavlja racionalno funkcijo natanko takrat, ko obstaja tako naravno število n , da so za $k \geq n$ enake 0 vse determinante:*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{k+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k} \end{vmatrix}$$

Dokaz. Če je f racionalna funkcija, obstaja po trditvi G1 naravno število n in take konstante q_0, q_1, \dots, q_n , ki niso vse enake 0, da je $q_0 c_k + q_1 c_{k-1} + \dots + q_n c_{k-n} = 0$ za vsak $k \geq n$. Za $k \geq n$ je torej v determinanti Δ_k zadnjih $n+1$ stolpcev (z indeksi $k-n, k-n+1, \dots, k$) linearno odvisnih, se pravi, da je $\Delta_k = 0$.

Obratno, naj bo $\Delta_k = 0$ za $k \geq n$ in $\Delta_k \neq 0$ za $k < n$ (tako da je n najmanjši indeks, pri katerem je ustrezna determinanta enaka 0). Pokažimo, da velja med koeficienti c_j taka relacija kot v trditvi G1.

Zadnji stolpec v Δ_n je linearna kombinacija prvih n stolpcev, npr. $c_{n+j} = -q_1 c_{n+j-1} - q_2 c_{n+j-2} - \dots - q_n c_j$ za $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Označimo $q_0 = 1$ in $d_{n+j} = q_0 c_{n+j} + q_1 c_{n+j-1} + \dots + q_n c_j$ za vsaj $j = 0, 1, 2, \dots$. Pravkar smo videli, da je $d_{n+j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \dots, n$, pokazati pa želimo, da velja $d_{n+j} = 0$ za vsak $j \geq 0$. Potem bo za vsak $k \geq n$ izpolnjena relacija iz trditve G1 in zato f racionalna funkcija.

Dokazujemo z indukcijo. Denimo, da je $k > n$ in da velja $d_{n+j} = 0$ za $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Determinanto Δ_k zapišimo v obliki:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} & & & c_n & \dots & c_k \\ & \Delta_{n-1} & & : & \dots & : \\ & & & c_{2n-1} & \dots & c_{k+n-1} \\ c_n & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} & \dots & c_{k+n} \\ : & \dots & : & : & \dots & : \\ c_k & \dots & c_{k+n-1} & c_{k+n} & \dots & c_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & d_n & \dots & d_k \\ & \Delta_{n-1} & & : & \dots & : \\ & & & d_{2n-1} & \dots & d_{k+n-1} \\ c_n & \dots & c_{2n-1} & d_{2n} & \dots & d_{k+n} \\ : & \dots & : & : & \dots & : \\ c_k & \dots & c_{k+n-1} & d_{k+n} & \dots & d_{2k} \end{vmatrix}$$

Vsakemu stolpcu z indeksom vsaj n smo prišteli linearno kombinacijo n prejšnjih stolpcev (s koeficienti q_1, q_2, \dots, q_n), začeni od zadaj. Ker je $d_{n+j} = 0$ za $j < k$, so v zadnji determinanti vsi koeficienti v zadnjih $k - n + 1$ stolpcih nad kodiagonalo desnega spodnjega kvadrata enaki 0. Torej je $\Delta_k = (-1)^{k+n} \Delta_{n-1} d_{k+n}^{k-n+1}$. Zaradi $\Delta_{n-1} \neq 0$ in $\Delta_k = 0$ (ker $k \geq n$), je odtod $d_{k+n} = 0$. Z indukcijo je potem $d_{n+j} = 0$ za vsak $j \geq 0$.

Pomožna trditev. Če so koeficienti a_j v potenčni vrsti $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ cela števila brez skupnega faktorja in velja isto tudi za koeficiente b_j v potenčni vrsti $\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, potem so brez skupnega faktorja tudi koeficienti v formalnem produktu teh dveh vrst, torej v potenčni vrsti $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, kjer je $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$ za vsak $k \geq 0$.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da niso vsi koeficienti c_k deljivi z istim praštevilom p . Pa denimo, da je res nasprotno, da je torej vsak c_k , $k \geq 0$, deljiv s praštevilom p . Naj bo a_k prvi koeficient v vrsti $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, ki ni deljiv s p . Torej iz zgornje formule za c_k sledi $c_k \equiv a_k b_0 \pmod{p}$. Ker a_k ni deljiv s p , mora biti b_0 deljiv s p in zato velja tudi $c_{k+1} \equiv a_k b_1 \pmod{p}$. Zdaj dobimo, da mora biti b_1 deljiv s p in zato $c_{k+2} \equiv a_k b_2 \pmod{p}$ in b_2 deljiv s p . Induktivno tako izpeljemo, da je b_j deljiv s p za vsak j , kar je v nasprotju s predpostavko.

Trditev G3 (Fatou). Če ima vrsta $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ cele koeficiente c_k in predstavlja racionalno funkcijo, lahko zapišemo f v obliki $f = P/Q$, kjer sta P in Q polinoma s celimi koeficienti brez skupnega faktorja in je $Q(0) = 1$.

Dokaz. Naj bo $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, kjer so $c_k \in \mathbb{Z}$ za vsak k , racionalna funkcija. Zapišemo jo lahko v obliki okrajšanega ulomka (tj. kvocienta polinomov, ki sta si tuja nad \mathbb{R}):

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n},$$

kjer lahko predpostavimo, da je $m \leq n$ in vsa števila q_0, q_1, \dots, q_n niso enaka 0. S primerjanjem koeficientov dobimo naslednje relacije: $q_0 c_0 = p_0$, $q_0 c_1 + q_1 c_0 = p_1$, ..., $q_0 c_m + q_1 c_{m-1} + \dots + q_m c_0 = p_m$, $q_0 c_k + q_1 c_{k-1} + \dots + q_k c_0 = 0$ za $m < k < n$ in $q_0 c_k + q_1 c_{k-1} + \dots + q_n c_{k-n} = 0$ za $k \geq n$. Homogeni sistem enačb za $n \leq k \leq 2n - 1$ je torej netrivialno (in neenolično) rešljiv. Komponente rešitve q_j so odvisne samo od celih števil c_j in poljubnih parametrov, zato lahko te parametre izberemo tako, da so q_j cela števila. Potem pa iz prvih $m + 1$ zgornjih relacij vidimo, da so tudi p_j cela števila.

Poleg tega lahko predpostavimo, da cela števila q_0, q_1, \dots, q_n nimajo skupnega faktorja. V nasprotnem primeru bi namreč tudi števila p_0, p_1, \dots, p_m imela isti skupni faktor, saj se enolično izražajo s prejšnjimi kot linearne kombinacije s celimi koeficienti. Ta skupni faktor bi lahko v ulomku P/Q pokrajšali.

Ker sta si polinoma P in Q tuja nad obsegom \mathbb{R} , sta si tuja tudi kot elementa kolo-barja $\mathbb{Q}[X]$, zato obstajata po znanem izreku iz algebre (glej [23], str. 152) taka polinoma $U_1, V_1 \in \mathbb{Q}[X]$, da je $PU_1 + QV_1 = 1$. Pomnožimo to enakost z najmanjšim skupnim imenovalcem m vseh koeficientov v U_1 in V_1 , pa najdemo polinoma U in V s celimi koeficienti, za katera velja $PU + QV = m$. Torej lahko naravno število m zapišemo v obliki $m = Q(fU + V) = QR$, kjer je $R = r_0 + r_1z + \dots$ potenčna vrsta c celimi koeficienti. Ker koeficienti v Q niso vsi deljivi z m (sicer bi imeli skupni faktor, to možnost pa smo predhodno izločili), morajo biti po pomožni trditvi vsi koeficienti v R deljivi z m . Torej je $m = q_0r_0 = q_0r'_0m$ oziroma $q_0r'_0 = 1$. Ker sta q_0 in r'_0 celi števili, je to možno le, če je $q_0 = \pm 1$. Če po potrebi pomnožimo vse koeficiente p_j z -1 , lahko dosežemo, da je $Q(0) = q_0 = 1$.

Pri ocenjevanju determinant Δ_k iz Kroneckerjeve trditve G2 večkrat potrebujemo naslednjo Hadamardovo neenakost iz vektorske geometrije, ki primerja prostornino večrazsežnega paralepipeda s kvadrom z enakimi robovi:

Lema G1 (Hadamard). Za determinanto D realne matrike s stolpci $(a_1, a_2, \dots, a_k)^\top, (b_1, b_2, \dots, b_k)^\top, \dots, (r_1, r_2, \dots, r_k)^\top$ velja ocena

$$D^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2\right) \dots \left(\sum_{i=1}^k r_i^2\right).$$

Geometrijski dokaz je nemara očiten, algebraični pa ne, zato lemo v celoti dokažimo, čeprav njen dokaz spada v linearno algebro.

Dokaz leme. Neenakost je dovolj pokazati za primer, ko so stolpci $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)^\top, b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^\top, \dots, r = (r_1, r_2, \dots, r_k)^\top$ linearno neodvisni, sicer je neenakost trivialna. Pišimo

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & r_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & b_k & \dots & r_k \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \sum_i a_i^2 & \sum_i a_i b_i & \dots & \sum_i a_i r_i \\ \sum_i b_i a_i & \sum_i b_i^2 & \dots & \sum_i b_i r_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i r_i a_i & \sum_i r_i b_i & \dots & \sum_i r_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot a & a \cdot b & \dots & a \cdot r \\ b \cdot a & b \cdot b & \dots & b \cdot r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r \cdot a & r \cdot b & \dots & r \cdot r \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kjer so $a \cdot a = \sum_i a_i^2, a \cdot b = \sum_i a_i b_i, \dots$ skalarni produkti. To je determinanta Grammove matrike na stolpcih a, b, \dots, r , zato je dovolj pokazati, da velja za determinante Grammovih matrik nad neodvisnimi stolpci za vsak n naslednja neenakost:

$$\det\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n, x) \leq \det\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \det\Gamma(x).$$

Iz te relacije bo potem z indukcijo za vsak n sledilo

$$\det\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \det\Gamma(x_1) \det\Gamma(x_2) \dots \det\Gamma(x_n),$$

kar je v bistvu iskana neenakost v Hadamardovi lemi, saj je $\det\Gamma(x) = x \cdot x$.

Naj bo $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, $c_i \in \mathbb{R}$ pravokotna projekcija vektorja $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ na podprostor \mathbb{R}^n , ki ga razpenjajo vektorji x_1, x_2, \dots, x_n . Tedaj zaradi pravokotnosti vektorja $y - x$ na \mathbb{R}^n velja $(y - x) \cdot x_i = 0$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ in $(y - x) \cdot y$, torej

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_1)c_1 + (x_2 \cdot x_1)c_2 + \dots + (x_n \cdot x_1)c_n + (x \cdot x_1)(-1) &= 0 \\ (x_1 \cdot x_2)c_1 + (x_2 \cdot x_2)c_2 + \dots + (x_n \cdot x_2)c_n + (x \cdot x_2)(-1) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ (x_1 \cdot x_n)c_1 + (x_2 \cdot x_n)c_2 + \dots + (x_n \cdot x_n)c_n + (x \cdot x_n)(-1) &= 0 \\ (x_1 \cdot x)x_1 + (x_2 \cdot x)x_2 + \dots + (x_n \cdot x)x_n + (x \cdot y)(-1) &= 0 \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb je netrivialno rešljiv, zato je determinanta (transponirane) matrike sistema enaka 0, torej

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 \cdot x_1 & x_1 \cdot x_2 & \dots & x_1 \cdot x_n & x_1 \cdot x \\ x_2 \cdot x_1 & x_2 \cdot x_2 & \dots & x_2 \cdot x_n & x_2 \cdot x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n \cdot x_1 & x_n \cdot x_2 & \dots & x_n \cdot x_n & x_n \cdot x \\ x \cdot x_1 & x \cdot x_2 & \dots & x \cdot x_n & x \cdot y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_n) & x_1 \cdot x \\ \dots & \vdots \\ x \cdot x_1 & \dots & x \cdot x_n & x \cdot y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_n) & 0 \\ \dots & \vdots \\ x \cdot x_1 & \dots & x \cdot x_n & x \cdot y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_n) & x_1 \cdot x \\ \dots & \vdots \\ x \cdot x_1 & \dots & x \cdot x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Dobimo torej

$$(x \cdot y)\det\Gamma(x_1, \dots, x_n) + \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_n) & x_1 \cdot x \\ \dots & \vdots \\ x \cdot x_1 & \dots & x \cdot x_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Upoštevajmo, da je $\det\Gamma(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ in $x \cdot y = x \cdot x - (x - y) \cdot (x - y) = y \cdot y \geq 0$, pa dobimo

$$\begin{aligned} (x \cdot x)\det\Gamma(x_1, \dots, x_n) + \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, \dots, x_n) & x_1 \cdot x \\ \dots & \vdots \\ x \cdot x_1 & \dots & x \cdot x_n & 0 \end{vmatrix} &= \\ = [(x - y) \cdot (x - y)]\det\Gamma(x_1, \dots, x_n) &\leq (x \cdot x)\det\Gamma(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

oziroma $\det\Gamma(x_1, \dots, x_n, x) \leq \det\Gamma(x)\det\Gamma(x_1, \dots, x_n)$.

LITERATURA

- [1] J.M. Ash, *Multiple Fourier series*, Studies in Harmonic Analysis, MAA Studies in Mathematics, Washington, D.C. 1976.
- [2] N. Bari, *Trigonometričeskie rjadi*, Moskva 1961.
- [3] N. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series I,II*, Pergamon Press, New York 1964.
- [4] R. Bhatia, *Fourier Series*, Hindustan Book Agency, 1993.
- [5] M.J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.P.Schreiber, *Pisot and Salem Numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992.
- [6] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, Universitext, Springer 2005.
- [7] R.A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics 4, Amer. Math. Soc. 1994.
- [8] O.G. Jorsboe, L. Mejlbro, *The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series*, Lecture Notes in Mathematics 911, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1982.
- [9] Soo Bong Chae, *Lebesgue Integration*, M. Dekker, Inc., New York-Basel 1980.
- [10] R.E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction, vol. I*, Graduate Texts in Mathematics 64, Springer-Verlag, 1979
- [11] G.B. Folland, *Real Analysis*, Wiley-Interscience, 1999.
- [12] H. Helson, *Harmonic Analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont 1991.
- [13] E. Hewit, K. Stromberg *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
- [14] J.-P. Kahane, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris 1963.
- [15] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publ, New York 1973.
- [16] A.S. Kechris, A. Louveau, *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness*, London Math. Soc. Lect. Note Series **128**, Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [17] R. Lasser, *Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker, New York - Basel - Hong Kong, 1996.
- [18] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, 1972.
- [19] I.P. Natanson, *Teorija funkcij vešestvenoj peremenoj*, Moskva 1957.
- [20] Ch.S. Rees, S.M. Shah, C.V. Stanojević, *Theory and Applications of Fourier Analysis*, M. Dekker, New York 1981.
- [21] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill, New York 1987.
- [22] B.S. Thomson, *Symmetric properties of real functions*, M. Dekker 1994.
- [23] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.
- [24] I. Vidav, *Višja matematika I*, 3. izdaja, DZS Ljubljana 1968.
- [25] F.S. Van Vleck, *A remark concerning absolutely continuous functions*, The Amer. Math. Monthly (1973), 286-287.
- [26] R.Wheeden, A. Zygmund, *Measure and integral*, PAA 43, M. Dekker 1977.