Pravilni mrežni večkotniki

Milan Hladnik

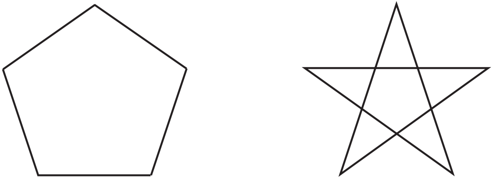
Moderni izzivi poučevanja matematike
24. september 2010

Namen seminarja

Opozoriti na košček matematike, ki

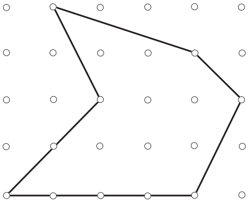
- povezuje elementarno geometrijo in elementarno teorijo števil in
- je dostopen tudi učencem in dijakom ter zato primeren za delo v šoli

Pravilni večkotnik



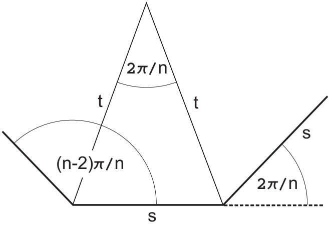
Slika: Enostavni in neenostavni enakostranični in enakokotni petkotnik

Mrežni večkotnik



Slika: Enostavni mrežni večkotnik

Notranji in zunanji koti

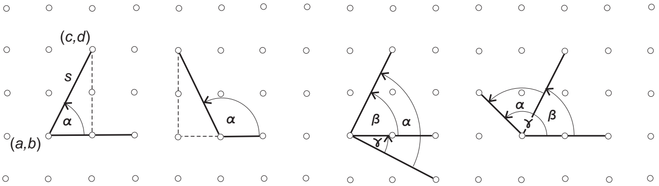


Slika: Notranji in zunanji koti v pravilnem večkotniku

Mrežne daljice in mrežni koti

Osnovna dejstva:

1. Kvadrat dolžine mrežne daljice je celo število.
2. Naklon mrežne daljice je racionalen.
3. Tangens mrežnega kota je racionalen.



Slika: Dolžina in naklon mrežne daljice, tangens mrežnega kota

$s^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$
$\operatorname{tg}\alpha = (d-b)/(c-a)$
$\operatorname{tg}\alpha = (\operatorname{tg}\gamma \pm \operatorname{tg}\beta)/(1 \mp \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta)$

Enakostranični trikotnik

Trditev (1)

Noben enakostranični trikotnik ni mrežni.

Prvi dokaz (s kotom): $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, ni racionalen

Drugi dokaz (s ploščino): $A = s^2\sqrt{3}/4$, ni racionalna,

kot bi morala biti po formuli $A = \pm\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$

ali po Pickovem izreku $A = I + B/2 - 1$,

kjer je I število notranjih in B število robnih mrežnih točk.

Številsko-teoretični dokaz

Naj bodo $(0,0)$, (x,y), (u,v) oglišča najmanjšega mrežnega trikotnika.
Pogoj enakostraničnosti $x^2+y^2=u^2+v^2=(x-u)^2+(y-v)^2$ oziroma $x^2+y^2=u^2+v^2=2(xu+yv)$.

Odtod
$$x^2+y^2+u^2+v^2=4(xu+yv).$$

Števila x,y,u,v niso vsa soda, vsota njihovih kvadratov je deljiva s 4, zato morajo biti vsa liha.

V tem primeru diofantska enačba $x^2+y^2=(x-u)^2+(y-v)^2$ nima rešitev, saj je na levi strani število, ki je deljivo z 2, ne pa s 4, na desni strani pa število, ki je deljivo s 4.

Pravilni mk-kotnik

Trditev (2)

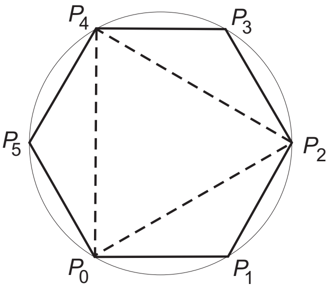
Če ni pravilnega mrežnega m-kotnika, tudi ni pravilnega mrežnega mk-kotnika ($k \in \mathbb{N}$).

Dokaz. V vsakem mk-kotniku najdemo vpeti m-kotnik.

Posledica (1)

Noben pravilni šestkotnik ni mrežni.

Pravilni šestkotnik

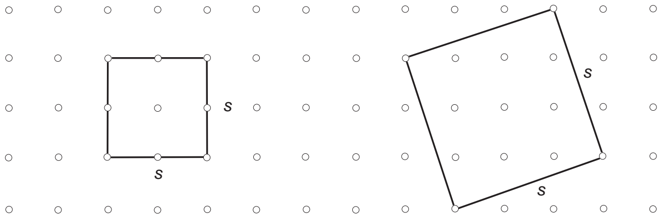


Slika: Pravilni šestkotnik z vpetim enakostraničnim trikotnikom

Mrežni kvadrati

- Če $s^2 \notin \mathbb{N}$, kvadrat ne more biti mrežni.
- Če je $s^2 \in \mathbb{N}$, je kvadrat lahko mrežni, in sicer v dveh primerih
  - $s \in \mathbb{N}$;
    tedaj je ploščina kvadrata popoln kvadrat, mrežni kvadrat ima vodoravne in navpične stranice.
  - $s \notin \mathbb{N}$.
    Tedaj je $s = \sqrt{n}$, $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$. Kvadrat ima zdaj poševne stranice; poljubni mrežni točki sta lahko krajišči ene od stranic kvadrata.

Mrežni kvadrat-nadaljevanje



Slika: Dva mrežna kvadrata

Vsota dveh kvadratov

Trditev (3)

Naravno število n je vsota dveh kvadratov natanko takrat, ko vsak prafaktor oblike $p = 4m + 3$ nastopa v praštevilskem razcepu števila n le na sodo potenco.

Dokaz. Zadostnost sledi iz naslednjih dejstev:

(1) $2 = 1^2 + 1^2$, praštevilo oblike $p = 4m + 1$ je vsota dveh kvadratov.

(2) Če je $m = x^2 + y^2$ in $n = u^2 + v^2$, je $mn = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (yu - xv)^2$.

(3) Če je $n = x^2 + y^2$, je $nz^2 = (xz)^2 + (yz)^2$.

Nadaljevanje dokaza

Potrebnost sledi iz naslednjega premisleka:

Če praštevilo p deli $n = x^2 + y^2$ in ne deli x obstajata celi števili a in b, da je $ap + bx = 1$, in zato

$$b^2 n = (bx)^2 + (by)^2 = (1 - ap)^2 + (by)^2,$$

tako da je -1 kvadrat po praštevilskem modulu p, kar je mogoče le v primeru, ko je p oblike $p = 4m + 1$.

Če je torej $n = x^2 + y^2$ in $p = 4m + 3$ praštevilo, ki deli n, potem p deli x in p deli y, tako da p^2 deli n in je $n/p^2 = u^2 + v^2$ (vsota dveh kvadratov). Tako praštevilo p lahko nastopa le na sodo potenco.

Kosinus mrežnega kota

Trditev (4)

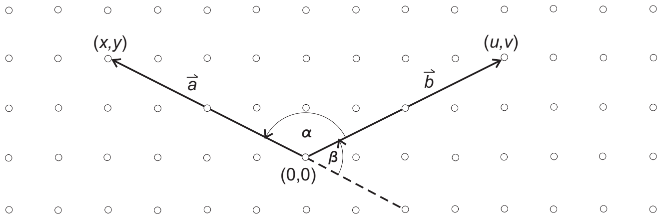
V poljubnem mrežnem n-kotniku je kosinus vsakega notranjega in vsakega zunanjega kota z enako dolgima priležnima stranicama racionalen.

Dokaz. Če je notranji kot α, je zunanji $\beta = \pi - \alpha$ in zato $\cos\beta = -\cos\alpha$, kosinus kota med enako dolgima vektorjema $\vec{a} = (x, y)$ in $\vec{b} = (u, v)$ s celimi koordinatami pa je

$$\cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{v} / |\vec{a}||\vec{b}| = (xu + yv)/(x^2 + y^2),$$

torej racionalen.

Kosinus mrežnega kota - nadaljevanje



Slika: Kot med enako dolgima mrežnima vektorjema

Pravilni osemkotnik

Posledica (2)

Noben pravilni osemkotnik ni mrežni.

Dokaz. Zunanji kot pri pravilnem osemkotniku je $2\pi/8 = \pi/4$, zato njegov kosinus $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ni racionalen.

Posledica (3)

Če je $n = 2^k$, $k \geq 3$, ni pravilnega mrežnega n-kotnika.

Dokaz. Sledi iz prejšnje posledice in trditve 2.

Tangens večkratnega kota

Lema (1)

Naj bo $X = \operatorname{tg}\theta$ in n liho celo število. Potem obstajajo cela števila c_n^i in d_n^i, tako da velja

$$tg\, n\theta = \frac{c_n^1 X - c_n^3 X^3 + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} X^n}{1 - d_n^2 X^2 + \ldots + (-1)^{(n-1)/2} d_n^{n-1} X^{n-1}}.$$

Dokaz. V de Moivreovi formuli

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

uporabimo binomski obrazec, izenačimo realna in imaginarna dela na levi in desni strani enakosti, izračunamo $\sin n\theta$ in $\cos n\theta$ kot polinoma v $\cos\theta$ in $\sin\theta$ ter $\operatorname{tg} n\theta$ kot racionalno funkcijo v $X = \operatorname{tg}\theta$.

Koeficienti $c_n^i = \binom{n}{i}$ so lihi, $d_n^i = \binom{n}{i}$ pa sodi binomski koeficienti.

Posledica (4)

Pravilni petkotnik in pravilni sedemkotnik nista mrežna večkotnika.

Dokaz. Če je $\theta = 2\pi/5$, je $\operatorname{tg} 5\theta = 0$; po formuli iz leme 1 velja $X^5 - 10X^3 + 5X = 0$. Iz bikvadratne enačbe $X^4 - 10X^2 + 5 = 0$ dobimo $X^2 = 5 \pm 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Potem tudi $X \notin \mathbb{Q}$, torej $\operatorname{tg} \theta \notin \mathbb{Q}$.

Če pa je $\theta = 2\pi/7$, imamo po formuli iz leme 1 podobno kot prej $X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 7X = 0$ oziroma $X^6 - 21X^4 + 35X^2 - 7 = 0$ ali $Y^3 - 21Y^2 + 35Y - 7 = 0$, odkoder spet takoj vidimo, da $Y = X^2$ in torej tudi $X = \operatorname{tg} \theta$ ni racionalno število.

Glavni izrek

Izrek (1)

Pravilen n-kotnik je lahko mrežni večkotnik, če in samo če je $n = 4$.

Dokaz. Kako je v primeru $n = 3, 4, 5, 6, 7$ in 8, že vemo. Denimo torej, da je $n \geq 9$ in $X = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(2\pi/n)$.

Naj bo n liho število. Po formuli iz leme 1 imamo za X enačbo

$$0 = \operatorname{tg} n\theta = X(c_n^1 - c_n^3 X^2 + \dots + (-1)^{(n-1)/2} X^{n-1}).$$

Pozitivne racionalne rešitve te enačbe morajo torej biti cele in deliti koeficient c_n^1, ki je celo število. Toda zaradi $n \geq 9$ je zdaj $0 < \operatorname{tg}(2\pi/n) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ in racionalnih rešitev ni.

Nadaljevanje dokaza

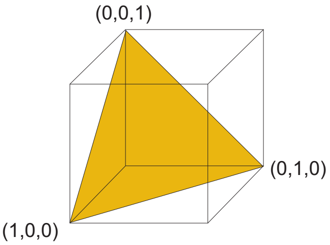
Naj bo zdaj n sodo število, npr. $n = 2^r m$, kjer je m liho število.

Če je $m > 1$, obstaja v pravilnem mrežnem n-kotniku S lihi pravilni mrežni m-kotnik, kar po prvem delu dokaza ni mogoče.

Ostane možnost $m = 1$ in $n = 2^r$, kjer je $r > 3$. Tedaj pa bi lahko našli v S pravilen mrežni osemkotnik, kar tudi vemo, da ni mogoče (posledica 2).

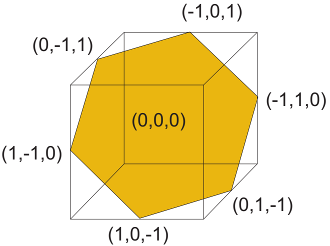
Opomba. Na prostorski mreži so poleg kvadratov od pravilnih večkotnikov lahko samo še enakostranični trikotniki in pravilni šestkotniki. Dokaz je čisto podoben zgornjemu.

Enakostranični trikotnik na prostorski mreži



Slika: Enakostranični trikotnik na prostorski mreži

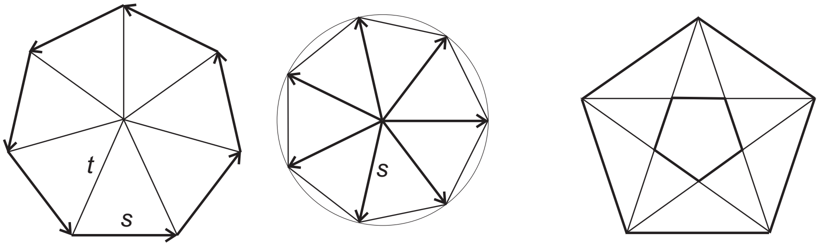
Pravilni šestkotnik na prostorski mreži



Slika: Pravilni šestkotnik na prostorski mreži

Preprost geometrijski dokaz glavnega izreka

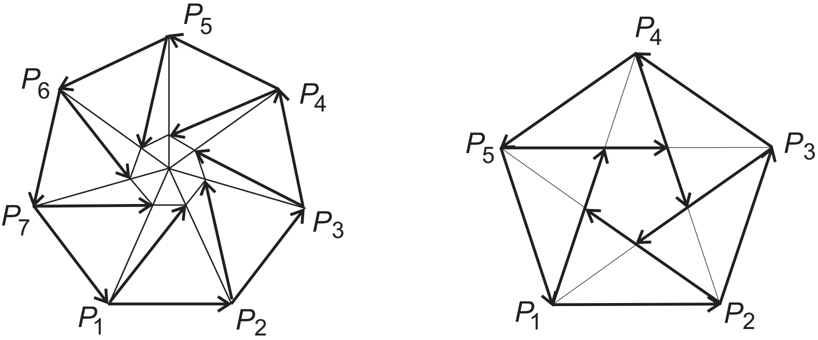
Predpostavimo, da obstajajo pravilni mrežni n-kotniki v primeru $n \geq 5$ in $n \neq 6$. Med njimi izberemo minimalnega. Če je $n \geq 7$, je na sliki $t > s$, zato zamenjajmo t z s, tj. s premikom nanesimo zaporedne stranice pravilnega n-kotnika iz izhodišča, pa dobimo manjši pravilni mrežni večkotnik. Za $n = 5$ pa vrišemo diagnale, ki tvorij manjši pravilni mrežni večkotnik.



Slika: Geometrijski dokaz, da mrežni n-kotnik za $n \geq 5$ in $n \neq 6$ ni možen

Alternativni geometrijski dokaz glavnega izreka

Za vsak $n \geq 5$, razen za $n = 6$, premaknemo vsako oglišče P_i za vektor $P_{i+1}P_{i+2}$ in ponovno najdemo manjši pravilni n-kotnik). To deluje za vse $n \geq 5$, razen za $n = 6$, ko vsa premaknjena oglišča sovpadajo.



Slika: Drugi dokaz, da mrežni n-kotnik za $n \geq 5$ in $n \neq 6$ ni možen

Enakostranični mrežni večkotniki

Trditev (5)

Če je n liho število, ne obstaja enakostranični mrežni n-kotnik.

Dokaz. Denimo, da taki n-kotniki obstajajo. Med njimi izberimo minimalnega.

Na zaporednih stranicah konstruirajmo vektorje $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, ..., $\vec{v}_n = (x_n, y_n)$, tako da je $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + ... + \vec{v}_n = 0$ in torej tudi $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ ter $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$.

Ker so vse stranice enake, npr. s, je

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = ... = x_n^2 + y_n^2 = s^2 \in \mathbb{N}.$$

Enakostranični mrežni večkotniki - nadaljevanje

Potem imamo

$$0 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_n)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + ... + (x_n^2 + y_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + ... + y_{n-1}y_n) = ns^2 + 2t,$$

kjer je $t = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + ... + y_{n-1}y_n$ očitno sodo število.

Torej je $ns^2 = -2t$.

Ker je n liho število, je s^2 sodo število, deljivo s 4; torej sta zaradi enakosti $x_i^2 + y_i^2 = s^2$ za vsak i koordinati x_i in y_i obe sodi. To pa je v nasprotju z minimalnostjo n-kotnika.

Številsko-teoretični dokaz glavnega izreka

Posledica (5)

Če ima n lihi delitelj, ni pravilnega mrežnega n-kotnika.

Posledica (6)

Pravilni mrežni n-kotnik obstaja samo v primeru $n = 4$.

Dokaz. Pravilni mrežni n-kotnik je enakostranični mrežni n-kotnik, kar je po zgornji posledici možno samo v primeru $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Toda za $k \geq 3$ to preprečuje posledica 3, zato preostane samo še primer $n = 4$, ko pa res obstaja veliko mrežnih kvadratov.

Ideja še enega dokaza glavnega izreka

Ker se da vsak mrežni večkotnik triangulirati z mrežnimi trikotniki, ima racionalno ploščino.

Za pravilni n-kotnik s stranico s je ploščina enaka

$$A = \frac{ns^2}{4\operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Če pokažemo, da je $\operatorname{tg}(\pi/n)$ racionalno število samo v primeru $n = 4$, je dokaz končan. (To pa je nekoliko težje, spet moramo uporabiti teorijo števil.)