# ANALIZA 1

Zapiski predavanj

**Milan Hladnik**

**Fakulteta za matematiko in fiziko**
**Ljubljana 2012**

# KAZALO

# I. ŠTEVILA, PROSTORI, ZAPOREDJA

## 1. Algebrska struktura številskih množic

Iz srednje šole poznamo različne sisteme števil: naravna $\mathbb{N}$, cela $\mathbb{Z}$, racionalna $\mathbb{Q}$, tudi realna $\mathbb{R}$ in kompleksna $\mathbb{C}$, na katerih temelji klasična matematična analiza. V splošnem bomo kar privzeli, da znamo s števili računati, kljub temu pa na začetku ponovimo nekaj osnovnih dejstev.

### Naravna števila in matematična indukcija

Najpreprostejša so naravna števila, s katerimi štejemo. Vse njihove lastnosti izhajajo iz t.i. *Peanovih aksiomov*:

(1) 1 je naravno število.
(2) Vsakemu naravnemu številu pripada natanko določen *naslednik*.
(3) Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
(4) Različni naravni števili imata različna naslednika.
(5) Če neka podmnožica naravnih števil vsebuje 1 in z vsakim številom tudi njegovega naslednika, je enaka množici vseh naravnih števil.

Označimo naslednika naravnega števila $n$ z $n'$. Tedaj točka 2 pove, da je predpis $n \mapsto n'$ funkcija iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{N}$, točka 3, da ta funkcija ni surjektivna (1 ni v zalogi vrednosti), točka 4 pa, da je injektivna.

OPOMBA. Na tem mestu bi bilo dobro poznati nekaj osnovnih dejstev o preslikavah (funkcijah) med množicami: npr. kaj je to predpis, domena, kodomena, zaloga vrednosti, surjektivnost, injektivnost, bijektivnost, inverzna preslikava, kompozitum. Te pojme bomo v nadaljevanju pogosto uporabljali. Natančneje pa jih bomo opredelili na začetku drugega poglavja.

Točka (5) Peanovih aksiomov je znameniti *aksiom o matematični indukciji.* Z njim dokazujemo razne trditve v zvezi z naravnimi števili. Če neka lastnost $L$ velja za naravno število 1, torej $L(1)$, in če velja za naslednika, kakor hitro velja za samo število, torej $L(n) \Longrightarrow L(n')$, velja lastnost $L$ za vsa naravna števila.

Ker je vsota naravnih števil definirana tako, da je $n + 1 = n'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, običajno označimo naslednika naravnega števila $n$ kar z $n + 1$. Pri dokazovanju z matematično indukcijo se moramo torej prepričati, da velja $L(n + 1)$, če velja $L(n)$.

ZGLED (a) Z matematično indukcijo dokažimo, da za vsako naravno število velja formula:

$$1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2.$$

Če je na levi strani en sam člen, je ta enak 1, na desni pa tedaj dobimo $1(1 + 1)/2 = 1$. Denimo, da formula velja za $n$. Potem je $1 + 2 + ... + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$, kar je ista formula kot prej, le uporabljena za naslednik $n + 1$.

(b) Kot drugi primer uporabe matematične indukcije dokažimo t.i. *Bernoullijevo neenakost*:

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

ki velja za vsako realno število $x \geq -1$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$. To neenakost bomo kasneje večkrat uporabili.

Za $n = 1$ sta leva in desna stran celo enaki. Denimo, da neenakost velja pri nekem naravnem številu $n$. Levo in desno stran pomnožimo z nenegativnim številom $1 + x$, tako da dobimo oceno $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$, ki dokazuje indukcijski korak in stem veljavnost Bernoullijeve neenakosti.

(c) Bernoullijevo neenakost $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ lahko za primer $x \geq 0$ takoj izpeljemo tudi iz binomskega obrazca:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

Tu je $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ t.i. *binomski simbol*, ki ima znane lastnosti, npr.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{in} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zadnja lastnost omogoča konstrukcijo naslednjih binomskih simbolov z uporabo ti. *Pascalovega trikotnika*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... \end{array}$$

Dokažimo zdaj binomski obrazec z matematično indukcijo. Obrazec velja za $n = 1$, saj je $(1+x)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}x$. Če pa velja za $n$, imamo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n)(1+x) =$$

$$\binom{n}{0} + (\binom{n}{0} + \binom{n}{1})x + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})x^2 + ... + (\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n})x^n + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + ... + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}.$$

**Notranje operacije v številskih množicah**

Z naravnimi števili ne le štejemo objekte, ampak tudi računamo: seštevamo, množimo, včasih tudi odštevamo in delimo. V poljubni množici lahko definiramo pojem operacije.

DEFINICIJA. *Dvočlenska* (*binarna*) *notranja operacija* v množici $A$ je preslikava $f$ iz kartezičnega produkta $A \times A$ v $A$.

OPOMBA. Kartezični produkt dveh množic $A$ in $B$ je množica $A \times B = \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}$ vseh urejenih parov s prvo komponento v $A$ in drugo v $B$. Notranja operacija torej poljubnemu paru $(a, b) \in A \times A$ priredi (natanko določen) nov element $f(a, b) \in A$.

ZGLED. (a) Primer notranje dvočlenske operacije je presek dveh množic. Paru množic $(A, B)$ priredimo njun presek $A \cap B$. Podobna operacija je unija dveh množic, $(A, B) \mapsto A \cup B$.

(b) Notranja dvočlenska operacija v množici naravnih števil je seštevanje (vsota) ali množenje (produkt). Paru naravnih števil $(a, b)$ priredimo njuno vsoto $a + b$ ali njun produkt $ab = a \cdot b$.

OPOMBA. Izhajajoč iz Peanovih aksiomov definiramo vsoto in produkt dveh naravnih števil induktivno: $m+1=m'$, $m+n'=(m+n)'$ ter $m\cdot 1=m$, $m\cdot n'=m\cdot n+m$. Njune običajne lastnosti potem dokažemo z uporabo matematične indukcije.

Pač pa npr. razlika ni notranja operacija v $\mathbb{N}$. Če namreč odštejemo večje število od manjšega, rezultat ni več naravno število. Enako se nam lahko zgodi, če skušamo deliti poljubni naravni števili med seboj, npr. $1:2$. Tudi deljenje ni notranja operacija. Zato sama naravna števila ne zadoščajo. Če želimo izvajati tudi ti dve operaciji, moramo množico naravnih števil razširiti. Tako pridemo z odštevanjem naravnih števil do množice *celih števil* $\mathbb{Z}$ in z deljenjem naravnih števil do množice *racionalnih števil* $\mathbb{Q}$. Pri tem velja $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. V množici celih števil so neomejeno izvedljive operacije seštevanja, odštevanja in množenja, v množici racionalnih števil pa poleg tega tudi operacija deljenja (razen s številom 0).

OPOMBE. Za natančnejšo konstrukcijo celih števil iz naravnih ter racionalnih števil iz celih potrebujemo pojem ekvivalenčne relacije v dani množici: če sta $x,y\in A$, rečemo, da je relacija $x\sim y$ med njima *ekvivalenčna*, če je refleksivna (za vsak $x$ velja $x\sim x$), simetrična (iz $x\sim y$ sledi $y\sim x$) in tranzitivna (iz $x\sim y$ in $y\sim z$ sledi $x\sim z$), oziroma RST relacija.

1. Kako konstruiramo cela števila iz naravnih? Napravimo množico vseh (formalnih) razlik $a-b$, $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$ (razlika je pravzaprav urejen par, prva komponenta je zmanjševanec (minuend), druga odštevanec (subtrahend)) in vanjo vpeljemo ekvivalenčno relacijo, ki pove, kdaj sta dve razliki enaki: $a-b=c-d \iff a+d=b+c$. Cela števila so ekvivalenčni razredi teh razlik. Nadalje definiramo vsoto in in produkt razlik: $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(c+d)$, $(a-b)\cdot(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$ in pokažemo, da sta tako definirani operaciji neodvisni od tega, katerega predstavnika vzamemo iz ekvivalenčnega razreda, tako da lahko potem definiramo na naraven način vsoto in produkt ustreznih ekvivalenčnih razredov, torej celih števil.

2. Racionalna števila pa so ekvivalenčni razredi ulomkov $a/b$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$, (ulomek je pravzaprav urejen par, prva komponenta je števec (numerator), druga imenovalec (denominator)), med katerimi definiramo ekvivalenčno relacijo enakosti: $a/b=c/d \iff ad=bc$. Lahko tudi rečemo, da so racionalna števila okrajšani ulomki. Prav tako definiramo seštevanje ulomkov: $a/b+c/d=(ad+bc)/bd$, množenje ulomkov: $a/b\cdot c/d=ac/bd$ in deljenje ulomkov $a/b:c/d=ad/bc$. Ko se prepričamo, da so te operacije neodvisne od predstavnika ekvivalenčnega razreda, jih lahko razširimo na ekvivalenčne razrede, torej na racionalna števila.

3. Tudi v množici racionalnih števil ne moremo izvajati vsega, kar si želimo. Ne moremo npr. izračunati preprostega kvadratnega korena iz števila 2, se pravi, da korenjenje ni notranja (enočlenska) operacija. Res, $\sqrt{2}$ namreč ni več racionalno število. Če bi bilo, bi ga lahko zapisali v obliki okrajšanega ulomka: $\sqrt{2}=a/b$, kjer sta naravni števili $a$ in $b$ brez skupnega faktorja. Toda tedaj bi dobili $2=a^2/b^2$ oziroma $a^2=2b^2$. Ker je zato $a^2$ deljiv z 2, mora biti že $a$ deljiv z 2, npr. $a=2a_1$. Tedaj pa je po krajšanju tudi $b^2=2a_1^2$, torej $b$ deljiv z 2, npr. $b=2b_1$. Oboje skupaj ne gre, ker je $a/b$ že okrajšan ulomek, zato $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Če hočemo torej računati korene, moramo vpeljati še nova števila, ki jih imenujemo *iracionalna*. Skupaj z racionalnimi sestavljajo množico vseh *realnih števil*.

Realna števila lahko konstruiramo iz racionalnih števil vsaj na dva načina. Prvi uporablja posebne podmnožice (Dedekindove reze) v $\mathbb{Q}$ (glej opombo v naslednjem razdelku), drugi pa posebna (Cauchyjeva) zaporedja racionalnih števil (glej 3. razdelek). Ker je v obeh primerih konstrukcija realnih števil zahtevnejša procedura, se ji odpovejmo ter kar privzemimo obstoj realnih števil. Kot že rečeno, matematična analiza brez množice realnih števil ne more, zato si podrobneje oglejmo njeno zanimivo algebrajsko strukturo.

**Aksiomi za realna števila**

V sistemu realnih števil so izvedljive vse štiri osnovne računske operacije (razen deljenja z 0) in še nekatere druge (npr. korenjenje). Glavni notranji operaciji sta *vsota* in *produkt*. Zanju veljajo naslednje osnovne lastnosti ali aksiomi:

(1) *Asociativnost vsote*: $(a+b)+c = a+(b+c)$
(2) *Komutativnost vsote*: $a+b = b+a$
(3) *Nevtralni element za vsoto (ničla)*: $a+0 = 0+a = a$
(4) *Nasprotni element za vsoto*: $a+(-a) = (-a)+a = 0$

Množica z operacijo $+$, za katero veljajo lastnosti (1),(3) in (4), se imenuje (aditivna) *grupa*. Če velja še (2), je *komutativna grupa*. Zgled: cela števila za seštevanje, množica bijekcij iz $A$ na $A$ za komponiranje ($\circ$ namesto $+$).

(5) *Asociativnost produkta*: $(ab)c = a(bc)$
(6) *Komutativnost produkta*: $ab = ba$
(7) *Nevtralni element za produkt (enota)*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
(8) *Inverzni element za produkt*: $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ za $a \neq 0$

To so podobne lastnosti kot prej za vsoto, zato npr. tudi množica od 0 različnih realnih števil tvori (multiplikativno) grupo za množenje.

(9) *Distributivnost produkta glede na vsoto*: $a(b+c) = ab+ac$
(10) *Netrivialnost*: $1 \neq 0$

Za vajo izračunajmo, koliko je $a \cdot 0$. Označimo to (zaenkrat neznano) število z $x$. Potem iz $1+0=1$ po množenju z $a$ in z upoštevanjem distributivnosti (9) in nevtralnosti (7) dobimo $a+x = a\cdot 1 + a \cdot 0 = a(1+0) = a \cdot 1 = a$. Na obeh straneh odštejmo $a$ (tj. prištejmo $-a$), pa zaradi (1), (4) in (3) najdemo $x=0$. Torej je $a \cdot 0 = 0$.

Zadnji aksiom se zdi morda nenavaden, vendar je potreben, saj sicer ne moremo izključiti možnosti, da sta nevtralni element za vsoto in nevtralni element za produkt enaka. Aksiom (10) zagotavlja, da se sistem realnih števil ne reducira samo na število 0. Če bi namreč veljalo $1=0$, bi za vsako število $a \in \mathbb{R}$ po prejšnjem lahko ugotovili $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$.

Pravimo, da ima množica $A$ *algebraično strukturo*, če je v $A$ definirana vsaj ena dvočlenska notranja operacija z nekaterimi (morda ne vsemi) lastnostmi, ki smo jih našteli.

DEFINICIJA. Množica $A$ z operacijama $+$ in $\cdot$ je
(a) *kolobar*, če veljajo lastnosti (1),(2),(3),(4),(5) in (9),
(b) *komutativen kolobar*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (6),
(c) *kolobar z enoto*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (7),
(d) *obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(7),(8) in (9),
(e) *komutativen obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8) in (9).

V kolobarju imamo poleg seštevanja in množenja vedno tudi *odštevanje*. Razlika dveh elementov je definirana z vsoto: $a-b = a+(-b)$. V obsegu pa lahko vedno tudi *delimo* z elementom, ki je različen od 0: $a : b = ab^{-1}$.

Lahko torej rečemo, da tvorijo realna števila (netrivialen) komutativen obseg. Naravna števila ne ustrezajo nobeni od zgornjih struktur. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je komutativen kolobar z enoto, saj ustrezajo vsem lastnostim razen (8) (v $\mathbb{Z}$ sta obrnljivi edinole števili 1 in $-1$). Množica sodih celih števil $\mathbb{S}$ je komutativen kolobar brez enote. Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ pa je že komutativen obseg.

Realna števila predstavimo kot točke na premici. Od izbrane točke 0, ki predstavlja število 0 in je izhodišče koordinatnega na številski osi nanašamo naravna števila v enakih razdaljah na desno, nasprotna, tj. negativna cela števila na levo, vmes pa sorazmerno ustrezne ulomke oziroma racionalna števila.

OPOMBA. Našteti aksiomi ne določajo sistema realnih števil v celoti, ampak le njegovo algebrsko strukturo (povsem enako strukturo imajo npr. vsa racionalna števila ali vsa kompleksna števila, ki jih bomo še definirali). Kasneje bomo desetim aksiomom za realna števila dodali še tri nove, ki bodo realna števila natančno opredelili.

**Kompleksna števila**

Kompleksna števila so izrazi oblike $z = a + ib$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in $i^2 = -1$. To je njihov *kanonski zapis*. Pri tem je $a = \operatorname{Re} z$ *realni del*, $b = \operatorname{Im} z$ *imaginarni del* kompleksnega števila $z$ in $i$ *imaginarna enota*. V bistvu gre spet za urejene pare realnih števil $(a, b)$ (zdaj ni treba vpeljati posebne ekvivalenčne relacije enakosti, ker sta dva para $(a, b)$ in $(c, d)$ enaka natanko takrat, ko je $a = c$ in $b = d$). Zato si lahko vsako kompleksno število predstavimo kot točko v ravnini s koordinatama $a, b$. Množico vseh kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$, namesto o koordinatni ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pa govorimo kar o kompleksni ravnini $\mathbb{C}$; abscisno os imenujemo tedaj *realna os*, ordinatno os pa *imaginarna os*.

Vsoto dveh kompleksnih števil definiramo po komponentah, produkt pa z množenjem binomov (ob upoštevanju relacije $i^2 = -1$). Torej za kompleksni števili $z = a + ib$ in $w = c + id$ velja:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(c + d)$$

$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je množica $\mathbb{C}$ za ti dve operaciji (netrivialen) komutativen obseg, ki vsebuje $\mathbb{R}$ kot podmnožico (podobseg) tistih kompleksnih števil, ki imajo imaginarni del enak 0. Nevtralni element za vsoto je kompleksno število 0, enota za množenje pa kompleksno (realno) število 1. Nasprotno število je $-z = -a - ib$, inverzno pa $z^{-1} = a/(a^2 + b^2) - ib/(a^2 + b^2)$, če je le $a^2 + b^2 \neq 0$ oziroma $z = a + ib \neq 0$.

Vsoti (razliki) kompleksnih števil $z$ in $w$ ustreza v geometrijski interpretaciji vsota (razlika) krajevnih vektorjev od izhodišča do točk $z$ in $w$ v kompleksni ravnini.

Definiramo še *konjugirano kompleksno število* $\overline{z} = a - ib$ in *absolutno vrednost*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Torej velja $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. Točka $\overline{z}$ leži glede na točko $z$ simetrično na abscisno os, absolutna vrednost $|z|$ pa pomeni evklidsko razdaljo točke $z$ do koordinatnega izhodišča, zato je $|z|$ vedno nenegativno število in enako 0 natanko takrat, ko je $z = 0$.

OPOMBA. V definiciji absolutne vrednosti smo potrebovali kvadratni koren iz nenegativnega števila. Po definiciji je $\sqrt{y}$, kjer je $y \geq 0$, tako nenegativno število $x \geq 0$, da velja $x^2 = y$. Hitro se lahko prepričamo, da je tako definiran kvadratni koren iz $y$ en sam.

ZGLED. $(3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$, $(3 + 2i)(2 - 3i) = 12 - 5i$.

Deljenje v bistvu prevedemo na množenje kompleksnih števil $w/z = w\overline{z}/|z|^2$, če je $z \neq 0$. Potem je

$$w/z = (c+id)(a-ib)/(a^2+b^2) = [(ac+bd)+i(ad-bc)]/(a^2+b^2) = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

ZGLED. $\frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{5} = \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5} + i\frac{7}{5}$.

Za absolutno vrednost kompleksnih števil veljajo naslednja pravila, ki jih brez težav dokažemo z uporabo definicije ali geometrijsko:
(i) $|z| \geq 0$ in $|z| = 0$ natanko takrat, ko je $z = 0$;
(ii) $|z| = |-z|$, $|z| = |\overline{z}|$;
(iii) $|zw| = |z||w|$, $|z/w| = |z|/|w|$;
(iv) $|\mathrm{Re}\, w\overline{z}| \leq |z||w|$ (Cauchy-Schwarzova neenakost);
(v) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost);
(vi) $|z-w| \geq ||z| - |w||$ (ocena navzdol za razdaljo med $z$ in $w$).
Točka (iii) je npr. ekvivalentna realni identiteti $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Če v njej $b$ nadomestimo z $-b$, dobimo še $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, iz nje pa oceno $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, ki je enakovredna tisti iz točke (iv). Zaradi (iv) velja tudi trikotniška neenakost iz točke (v), saj je $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, w\overline{z} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$. Zadnja ocena, kjer pomeni $|z-w|$ razdaljo med točkama $z$ in $w$, sledi takoj iz trikotniške neenakosti.

**Polarna oblika kompleksnega števila**

Kompleksno število $z = a + ib$ lahko predstavimo v polarni obliki, tj. s polarno razdaljo $r$ od izhodišča do točke $(a,b)$ in polarnim kotom $\phi$ med pozitivnim delom realne osi in krajevnim vektorjem do točke $(a,b)$. Pri tem je seveda $r = |z|$ absolutna vrednost kompleksnega števila $z$. Polarni kot $\phi$, za katerega običajno predpostavimo, da leži med 0 in $2\pi$, pa imenujemo *argument* kompleksnega števila $z$. Ker je $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$, je *polarni zapis* kompleksnega števila $z$ enak $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, oziroma

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

V tem zapisu lahko elegantno geometrijsko interpretiramo produkt kompleksnih števil $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ in $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Velja namreč $zw =$

$$|z||w|((\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi) + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)) = |z||w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)).$$

Polarni razdalji se torej zmnožita, polarna kota seštejeta, kar si lahko predstavljamo geometrijsko. Podobno je pri deljenju, ko se polarni razdalji delita, polarna kota pa odštejeta.

Od tod sledi *de Moivreova formula*, ki jo brez težav dokažemo z matematično indukcijo:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi,$$

ki velja za vsako celo število $n$. Z njeno pomočjo lahko npr. poiščemo rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Rešitev iščimo v polarni obliki $z = \cos\phi + i\sin\phi$, saj takoj vidimo, da mora biti $|z| = 1$. Zaradi enakosti kompleksnih števil in de Moivreove formule imamo $\cos n\phi = 1$ in $\sin n\phi = 0$, kar je možno le v primeru $n\phi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se pravi $\phi = 2k\pi/n$. Ker mora biti $\phi$ med 0 in $2\pi$, dobimo od tod $0 \leq k < n$. Torej imamo natanko $n$ rešitev; to so t.i. $n$-ti koreni enote:

$$z_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Za $n \geq 3$ upodobimo ta števila na enotski krožnici $\{z;\ |z| = 1\}$ kot oglišča pravilnega $n$-kotnika z enim ogliščem v točki $z = 1$, zato enačbi $z^n = 1$ rečemo tudi enačba o delitvi kroga. Podobno rešujemo splošnejšo *binomsko enačbo*

$$z^n = w,$$

kjer je $w$ dano od nič različno kompleksno število. Če je njegov zapis v polarni obliki $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, dobimo zdaj $n\phi = \psi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oziroma $\phi = \psi/n + 2k\pi/n$, kjer je spet lahko le $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

## 2. Urejenost in polnost sistema realnih števil

Vrnimo se k realnim številom. Desetim algebrajskim aksiomom moramo dodati še dva aksioma o urejenosti in en aksiom o polnosti, če hočemo, da je sistem realnih števil z aksiomi natanko določen.

**Aksioma o urejenosti**. *Obstaja podmnožica* $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ *z lastnostjo*:

(11) *Iz* $a \neq 0$ *sledi* $a \in \mathbb{P}$ *ali* $-a \in \mathbb{P}$.
(12) *Za vsak* $a, b \in \mathbb{P}$ *je tudi* $a + b \in \mathbb{P}$ *ter* $ab \in \mathbb{P}$.

Elementi v $\mathbb{P}$ so *pozitivna* realna števila. *Negativna* števila so nasprotna pozitivnim in sestavljajo podmnožico $-\mathbb{P} = \{-x, x \in \mathbb{P}\}$.

Enajsti aksiom je t.i. *aksiom o trihotomiji*; v bistvu pove, da je vsako realno število bodisi pozitivno, bodisi negativno bodisi enako 0. Dvanajsti aksiom pa pravi, da je množica $\mathbb{P}$ pozitivnih števil zaprta za seštevanje in množenje: ko izvajamo operaciji seštevanje in množenje z elementi množice $\mathbb{P}$ je rezultat spet v množici $\mathbb{P}$.

Podmnožica $\mathbb{P}$ določa urejenost v $\mathbb{R}$. Z njo namreč lahko definiramo relacijo $>$ (*večji*) s predpisom $a > b \iff a - b \in \mathbb{P}$ in relacijo $<$ (*manjši*) s predpisom $a < b \iff b > a$. Torej lahko zapišemo $\mathbb{P} = \{x, x > 0\}$ in $-\mathbb{P} = \{x, x < 0\}$. Zaradi aksiomov (11) in (12) veljajo za uvedeni relaciji naslednje lastnosti:

(i) *Za poljubni realni števili* $a$ *in* $b$ *je bodisi* $a < b$, *bodisi* $a > b$ *bodisi* $a = b$ (trihotomija).
Res, razlika $a - b$, če ni enaka 0, je po aksiomu 11 bodisi v $\mathbb{P}$ bodisi v $-\mathbb{P}$.

(ii) *Iz* $a > b$ *in* $b > c$ *sledi* $a > c$.
Če je $a - b \in \mathbb{P}$ in $b - c \in \mathbb{P}$, je zaradi (12) tudi $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}$ (tranzitivnost).

(iii) *Iz* $a > b$ *sledi* $a + c > b + c$ *za vsak* $c \in \mathbb{R}$.
Če je $a - b \in \mathbb{P}$, je zaradi distributivnosti namreč tudi $(a + c) - (b + c) = a - b \in \mathbb{P}$.

(iv) *Iz* $a > b$ *sledi* $ac > bc$ *pri* $c > 0$ *in* $ac < bc$ *pri* $c < 0$.
Zdaj iz $a - b \in \mathbb{P}$ in $c \in \mathbb{P}$ sledi po aksiomu 12 tudi $(a - b)c \in \mathbb{P}$, se pravi $ac - bc \in \mathbb{P}$ oziroma $ac > bc$. Če pa je $c < 0$, tj. $-c \in \mathbb{P}$, dobimo $-(ac - bc) = a(-c) - b(-c) \in \mathbb{P}$, torej $ac < bc$. Drugi del točke (iv) izraža znano dejstvo, da se pri množenju z negativnim številom neenačaj obrne.

Dodatno relacijo $\leq$ (*manjši ali enak*) vpeljemo s predpisom $a \leq b \iff a < b$ ali $a = b$, relacijo $\geq$ (*večji ali enak*) pa s predpisom $a \geq b \iff a > b$ ali $a = b$. Hitro vidimo, da sta tudi novi relaviji tranzitivni.

S tema dvema relacijama sta poljubni dve realni števili $a$ in $b$ med seboj primerljivi: velja bodisi $a \leq b$ bodisi $b \leq a$ (oziroma $a \geq b$). Če velja oboje, $a \leq b$ in $b \leq a$, velja kar enakost $a = b$.

OPOMBA. Relacije $<$ in $\leq$ oziroma $>$ in $\geq$ so lepo usklajene z geometrijsko predstavo realnih števil. Pozitivna števila (iz množice $\mathbb{P}$) rišemo desno od 0 (na t.i. pozitivnem delu številske osi), negativna (iz množice $-\mathbb{P}$) pa levo od 0 (na negativnem delu številske osi). Večja števila upodabljamo bolj desno, manjša bolj levo: relacija $a < b$ npr. pomeni, da leži točka $a$ levo od točke $b$.

Z uporabo pravkar definiranih neenakosti lahko definiramo različne podmnožice v $\mathbb{R}$. Pogosto bomo npr. uporabljali *intervale*:
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (odprti interval),
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (zaprti interval),
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ (navzgor odprti interval),
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ (navzdol odprti interval),
in *poltrake*:
$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ (odprti desni poltrak),
$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ (zaprti desni poltrak),
$(\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ (odprti levi poltrak),
$(\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ (zaprti levi poltrak).

Ker je vsako realno število tudi kompleksno, ima tudi svojo absolutno vrednost. Formalno jo definiramo (brez sklicevanja na kompleksna števila) z naslednjim predpisom.

DEFINICIJA. *Absolutna vrednost* realnega števila $x$ je nenegativno realno število $|x|$, definirano z

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

Geometrijsko pomeni $|x|$ razdaljo točke, ki predstavlja realno število $x$, do točke 0. Izraz $|a-b|$ pa pomeni *razdaljo* med realnima številoma $a$ in $b$.

Za absolutno vrednost veljajo še naslednje koristne lastnosti, ki jih bomo v nadaljnjem večkrat uporabili:
(i) $|x| \geq 0$ in $|x| = 0$ natanko takrat, ko je $x = 0$;
(ii) $|xy| = |x||y|$, $|x/y| = |x|/|y|$ (za $y \neq 0$)
(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
(iv) $|x-y| \geq ||x| - |y||$.
Prvi dve točki lahko preverimo neposredno, glede na to, ali sta števili $x$ in $y$ pozitivni oziroma negativni ali enaki nič. Tretja je t.i. *trikotniška neenakost* in je poseben primer trikotniške neenakosti za absolutno vrednost pri kompleksnih številih. Tudi o njeni veljavnosti se lahko prepričamo, če pregledamo različne možnosti glede predznakov za $x$ in $y$. Četrta lastnost takoj sledi iz druge, saj je tako $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ kot $|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x|$.

Definicijo je treba poznati, če želimo rešiti kakšno neenačbo, v kateri nastopajo tudi absolutne vrednosti. Rešitveno množico običajno izrazimo kot unijo intervalov ali poltrakov.

ZGLED: Neenačbo $|x-1| \geq 2|x| - 1$ npr. reši vsak $x \in [-2, 2/3]$.

Rečemo, da so realna števila z relacijo $\leq$ *linearno urejena* oziroma z relacijo $<$ *strogo linearno urejena*, tako da je $\mathbb{R}$ (*linearno*) *urejen obseg.* Ker vseh dvanajst aksiomov za realna števila (z istimi operacijami in z isto relacijo urejenosti) velja tudi za podmnožico $\mathbb{Q}$, tvorijo racionalna števila urejen podobseg urejenega obsega $\mathbb{R}$. Da bi lahko razlikovali med realnimi in racionalnimi števili, moramo vpeljati še zadnji aksiom. Za to pa potrebujemo pojem omejene množice.

### Omejenost podmnožic v $\mathbb{R}$

Pravimo, da so intervali omejene množice, poltraki pa ne. Natančneje definiramo pojem omejenosti na naslednji način.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da velja $x \leq M$ za vsak $x \in A$. Število $M$ imenujemo *zgornja meja* množice $A$.

Navzgor omejene podmnožice so npr. vsi intervali in levi poltraki, desni poltraki in množica $\mathbb{R}$ vseh realnih števil pa niso navzgor omejene množice.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da velja $x \geq m$ za vsak $x \in A$. Število $m$ imenujemo *spodnja meja* množice $A$.

Navzdol omejene podmnožice so npr. vsi intervali in desni poltraki, prav tako npr. množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$, niso pa navzdol omejeni levi poltraki.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol, se pravi, če obstajata taki števili $m, M \in \mathbb{R}$, $(m \leq M)$, da velja $m \leq x \leq M$ za vsak $x \in A$.

V tem primeru je podmnožica $A$ vsebovana v nekem intervalu $[m, M]$. Prazno množico imamo vedno za omejeno. Če obstaja vsaj ena zgornja meja za dano podmnožico, je zgornjih mej neskončno mnogo (vsako večje število je tudi zgornja meja). Podobno je množica spodnjih mej neskončna, če le ni prazna (vsako manjše število je tudi spodnja meja). Za neprazno množico $A$ je množica njenih zgornjih mej vedno navzdol omejena (npr. s poljubnim elementom množice $A$), množica spodnjih mej pa navzgor omejena (z elementom iz $A$).

DEFINICIJA. *Supremum* $\sup A$ dane množice $A$ je najmanjša zgornja meja množice $A$, *infimum* $\inf A$ množice $A$ pa je največja spodnja meja množice $A$.

Definicijo infimuma in supremuma lahko povemo tudi takole, bolj formalno:

(i) Realno število $a$ je največja spodnja meja množice $A$, torej $a = \inf A$, natanko takrat, ko je $a \leq x$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c > a$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x < c$. Se pravi, $a$ je spodnja meja za množico $A$, nobeno število $c > a$ pa ni več spodnja meja za $A$.
(ii) Realno število $b$ je najmanjša zgornja meja množice $A$, torej $b = \sup A$, natanko takrat, ko je $x \leq b$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c < b$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x > c$. Se pravi, $b$ je zgornja meja za množico $A$, nobeno število $c < b$ pa ni več zgornja meja za $A$.

Največji spodnji (najmanjši zgornji) meji rečemo tudi natančna spodnja (zgornja) meja. Včasih natančna meja množice $A$ spada v $A$, včasih ne. Če velja $\inf A \in A$, pišemo $\inf A = \min A$ in namesto o infimumu raje govorimo o *minimumu* ali *najmanjšem elementu* množice $A$, saj je to najmanjši element v $A$. Podobno pri pogoju $\sup A \in A$ pišemo $\sup A = \max A$ in govorimo o *maksimumu* množice $A$ ali *največjem elementu* v $A$.

ZGLED. Odprti interval $(a, b)$ ne vsebuje svojih krajišč, zato je $a = \inf(a, b)$ in $b = \sup(a, b)$. Pri zaprtem intervalu $[a, b]$ pa je $a = \inf[a, b] = \min[a, b]$ in $b = \sup[a, b] = \max[a, b]$. Za množico $A = \{n/(n+1);\ n \in \mathbb{N}\}$ je $\inf A = \min A = 1/2$ in $\sup A = 1$. Maksimuma množica $A$ nima.

Sedaj lahko definiramo še zadnji, trinajsti aksiom za realna števila. To je t.i. *Dedekindov aksiom* ali *aksiom o polnosti*. Tako ime je dobil, ker zagotavlja (kot bomo videli kasneje) napolnitev sistema realnih števil z manjkajočimi (iracionalnimi) števili.

**Dedekindov aksiom (o polnosti)**

(13) *Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil ima najmanjšo zgornjo mejo* (*supremum*).

Dualna oblika aksioma se glasi:

(13′) *Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil ima največjo spodnjo mejo (infimum).*

To je v resnici posledica Dedekindovega aksioma oziroma njemu ekvivalentna trditev. Če namreč množico $A$ zamenjamo z množico $-A$ vseh njenih nasprotnih elementov, se tako kot neenakosti zamenjajo zgornje meje s spodnjimi in supremum z infimom (in obratno): $\inf A = -\sup(-A)$, $\sup A = -\inf(-A)$.

Večkrat bomo potrebovali eksistenco supremuma ali infimuma nekaterih nepraznih (navzgor ali navzdol) omejenih množic realnih števil. Eksistenca je zagotovljena ravno s tem aksiomom. Kot zgled uporabe dokažimo naslednjo trditev.

TRDITEV 1. *Množica vseh naravnih števil* $\mathbb{N}$ *ni navzgor omejena.*

**Dokaz**. Denimo, da bi obstajala kakšna zgornja meja za $\mathbb{N}$. Tedaj bi po Dedekindovem aksiomu obstajala najmanjša zgornja meja $M$. Torej bi veljalo $n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ne pa $n \leq M - 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Toda potem bi lahko našli število $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $n > M - 1$ oziroma $n + 1 > M$. Ker pa je naslednik $n + 1$ po Peanovem aksiomu tudi naravno število, je to v nasprotju z dejstvom, da je $M$ zgornja meja za $\mathbb{N}$.

Ker množica naravnih števil $\mathbb{N}$ ni navzgor omejena, pri poljubnem realnem številu $a > 0$ tudi množica $\{na; n \in \mathbb{N}\}$ ni navzgor omejena (nima zgornje meje). Iz $na \leq M$ za neko število $M \in \mathbb{R}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ bi namreč sledilo $n \leq M/a$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar ni mogoče. Torej velja naslednji izrek:

IZREK. *Naj bo* $a > 0$. *Za vsak* $b \in \mathbb{R}$ *obstaja tako naravno število* $n \in \mathbb{N}$, *da velja* $na > b$.

To je t.i. *Arhimedova lastnost* realnih števil. Po domače pomeni: "iz malega raste veliko". Velikokrat bomo v nadaljevanju uporabljali tole njeno posledico.

POSLEDICA. *Za vsak* $a > 0$ *obstaja* $n \in \mathbb{N}$ *z lastnostjo* $1/n < a$.

To pomeni, da lahko med števili 0 in $a > 0$ vedno vrinemo še eno pozitivno število. Naslednja trditev pove, da velja celo več.

TRDITEV 2. *Med poljubnima realnima številoma* $a < b$ *obstaja vsaj eno racionalno število.*

**Dokaz**. Dovolj je, če trditev dokažemo za pozitivni števili. Če sta obe negativni, si ogledamo njuni nasprotni števili $-b < -a$, ki sta pozitivni. Če je eno od njiju enako 0, uporabimo posledico Arhimedove lastnosti. Če pa je $a < 0$ in $b > 0$, je med njima racionalno število 0.

Denimo torej, da sta števili $a$ in $b$ pozitivni in npr. $a < b$. Izberimo tako velik $n$, da je $1/n < b - a$ (Arhimedova lastnost). Množica $A = \{p \in \mathbb{N};\ p(1/n) > a\}$ je zaradi posledice Arhimedove lastnosti neprazna in kot podmnožica naravnih števil navzdol omejena, zato ima infimum $m$, ki je nujno naravno število in tudi nujno pripada tej isti množici (zakaj?). Torej je $m = \min A$ in velja $m/n = m(1/n) > a$, medtem ko je $(m-1)/n = (m-1)(1/n) \leq a$. Če bi bilo $m/n \geq b$, bi imeli $1/n = m/n-(m-1)/n \geq b-a$, kar pa ni res. Torej je $a < m/n < b$.

Trditev pove, da so med realnimi števili racionalna števila povsod gosta.

Oglejmo si še nekaj koristnih zgledov za uporabo Dedekindovega aksioma:

**Kvadratni koren iz pozitivnega števila** $x = \sqrt{a}$, $a > 0$. Po definiciji je to tako pozitivno realno število, katerega kvadrat je dano število, torej $x^2 = a$. Kot bomo videli, je njegova eksistenca v okviru realnih števil zagotavljena ravno z Dedekindovim aksiomom. Podobno velja za višje korene oziroma splošno za potence s pozitivno osnovo in racionalnim eksponentom $x = a^r$, $a > 0$ in $r \in \mathbb{Q}$.

Za zgled si oglejmo kvadratni koren iz 2, ki (kot vemo iz 1. razdelka) ni racionalno število. Množica racionalnih števil $A = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0,\ x^2 < 2\}$ je neprazna (vsebuje npr. število 1) in navzgor omejena (vsa števila iz $A$ so npr. manjša od 2), zato ima po Dedekindovem aksiomu supremum $a \in \mathbb{R}$. Pokažimo, da je $a = \sqrt{2}$ oziroma, da velja $a^2 = 2$. Vsekakor je $a > 1$ oziroma $a^2 > 1$, saj je npr. $4/3 \in A$, in zato tudi $(2 - a^2)/3a < a$. Iz $a^2 < 2$ bi sledilo $(a + 1/n)^2 < 2$ za dovolj velik $n$ (tak da je $1/n < (2 - a^2)/3a$; tedaj je namreč $2a/n + 1/n^2 < 3a/n < 2 - a^2$), med $a$ in $a + 1/n$ pa obstaja po trditvi 2 racionalno število $x$. Zanj bi tudi veljalo $x^2 < 2$, tako da bi bil $x \in A$; po drugi strani pa bi bil $x > a$, kar ni mogoče, saj je $a = \sup A$. Podobno bi videli, da prav tako ne more veljati neenakost $a^2 > 2$. Zdaj bi izbrali $1/n < (a^2 - 2)/2a$, tako da bi veljalo $a^2 - 2 > 2a/n > 2a/n - 1/n^2$ oziroma $(a - 1/n)^2 > 2$. Ker je $a = \sup A$ in $a - 1/n < a$, bi obstajal $x \in A$ z lastnostjo $x > a - 1/n$. Tedaj pa bi bilo tudi $x^2 > (a - 1/n)^2 > 2$, kar je nemogoče. Preostane možnost $a^2 = 2$ oziroma $a = \sqrt{2}$.

Ker že vemo, da to število ni racionalno, množica $A$ v $\mathbb{Q}$ nima najmanjše zgornje meje. Odtod med drugim vidimo, da v obsegu racionalnih števil $\mathbb{Q}$ Dedekindov aksiom ne velja. Aksiom o polnosti torej razlikuje med urejenim obsegom $\mathbb{R}$, ki je poln, in njegovim urejenim podobsegom $\mathbb{Q}$, ki ni poln.

**Opomba**. Na podobni ideji kot v zgornjem dokazu eksistence kvadratnega korena temelji tudi ena izmed konstrukcij realnih števil iz racionalnih. *Dedekindov rez* je prava neprazna podmnožica $\alpha \subset \mathbb{Q}$, ki hkrati z racionalnim številom vsebuje tudi vsa manjša racionalna števila in nima največjega elementa, tj. velja:
(1) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$,
(2) iz $r \in \mathbb{Q}$ in $r < s$, $s \in \alpha$, sledi $r \in \alpha$,
(3) za vsak $r \in \alpha$ obstaja tak $s \in \alpha$, da je $r < s$.
V množico vseh Dedekindovih rezov potem vpeljemo relacijo urejenosti ($\alpha < \beta$, če je $\alpha \subset \beta$) ter operaciji vsote ($\alpha + \beta = \{r + s;\ r \in \alpha,\ s \in \beta\}$) in produkta (za $\alpha, \beta > 0$ naj bo $\alpha\beta = \{t \in \mathbb{Q};\ t \leq rs,$ za nek par pozitivnih racionalnih števil $r \in \alpha,\ s \in \beta\}$). Poleg tega lahko množico racionalnih števil vložimo v množico Dedekindovih rezov tako, da vsakemu racionalnemu številu $r \in \mathbb{Q}$ priredimo rez $r^* = \{s \in \mathbb{Q};\ s < r\}$. Nazadnje dokažemo (kar ni tako enostavno) vse lastnosti, kot so potrebne za urejen obseg realnih števil (z urejenim podobsegom racionalnih števil); skratka, Dedekindove reze lahko proglasimo za realna števila. Primerjajte izpeljavo v [3] ali [4].

**Decimalni zapis realnih števil**. Označimo z $[x]$ *celi del* realnega števila $x$. To je po definiciji največje celo število, ki je manjše ali enako $x$. Vedno velja $[x] \leq x < [x] + 1$. Če je $x > 0$, lahko izvedemo naslednji postopek.

Označimo $r_0 = x_0 = [x]$, postavimo $x_1 = [10(x - r_0)]$, tako da je $x_1 \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, in definiramo $r_1 = r_0 + x_1/10$. Potem je $r_1 \leq x < r_1 + 1/10$. Na drugem koraku postavimo $x_2 = [10^2(x - r_1)]$ in definiramo $r_2 = r_1 + x_2/10^2$; zdaj je $r_2 \leq x < r_2 + 1/10^2$. In tako dalje, na $n$-tem koraku dobimo $x_n = [10^n(x - r_{n-1})]$, $r_n = r_{n-1} + x_n/10^n$ in $r_n \leq x < r_n + 1/10^n$. To lahko ponavljamo v neskončnost, tako da dobimo množico $A = \{r_0, r_1, r_2, ...\}$, ki je neprazna in navzgor omejena, saj za vsak $n$ velja $r_n \leq x$.

Naj bo $b = \sup A$, se pravi $b \leq x$. Če bi veljalo $b < x$, bi obstajal $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $1/n < x - b$. Zaradi ocene $r_n \leq x < r_n + 1/10^n$ bi tedaj imeli $x - r_n < 1/10^n < 1/n < x - b$, torej $b < r_n$, kar ni mogoče, saj je $b = \sup_{n \geq 0} r_n$. Torej je $b = x$ oziroma $x = \sup A = \sup_{n \geq 0} r_n$.

Števila $r_n$ so (spodnji) decimalni približki pozitivnega števila $x$. Upoštevaje njihovo definicijo, za vsak $n \geq 0$ velja $r_n = x_0 + x_1/10 + x_2/10^2 + ... + x_n/10^n$, kar krajše zapišemo v decimalni obliki: $r_n = x_0, x_1 x_2 ... x_n$. Ker je $x$ njihov supremum, lahko $x$ formalno izrazimo z neskončnim decimalnim zapisom: $x = x_0, x_1 x_2 ...$. Tu je $x_0$ nenegativno celo število (celi del števila $x$) in $x_i$, $i = 1, 2, ...$, števila iz množice $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, tj. *decimalke* števila $x$.

Če je $x < 0$, poiščemo najprej decimalni zapis nasprotnega števila $-x$ in potem izrazimo $x = -x_0, x_1 x_2 ...$. Število 0 seveda zapišemo s samimi ničlami. Naj ob tem pripomnimo, da izražava realnega števila $x$ z neskončnim decimalnim zapisom nasploh ni enolična. Racionalno število 1/2 lahko npr. zapišemo na dva načina: $1/2 = 0.5000...$ ali $1/2 = 0.4999...$.

**Moč številskih množic**

Množice imajo lahko različno, končno ali neskončno, število elementov; pravimo, da imajo različno *moč*. Ta pojem v resnici uvedemo z vpeljavo neke ekvivalenčne relacije v dano družino množic.

DEFINICIJA. Rečemo, da ima množica $A$ *isto moč* kot množica $B$, če obstaja vsaj ena bijekcija iz množice $A$ na množico $B$.

To je neka relacija med množicami dane družine, na kratko jo označimo kar z $\sim$. Ker iz $A$ na $A$ vedno obstaja bijekcija (identična preslikava, ki ohranja elemente), je relacija $\sim$ refleksivna. Ker se da pokazati, da je hkrati z $f$ tudi inverzna funkcija $f^{-1}$ bijekcija (iz $B$ na $A$) in da je kompozitum dveh bijekcij tudi bijekcija, je relacija $\sim$ simetrična in tranzitivna. Torej je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Povezuje množice z isto močjo.

DEFINICIJA. Množica $A$ ima *manjšo moč* kot množica $B$, če ima isto moč kot neka prava podmnožica $B_1 \subset B$, ne pa kot množica $B$. V tem primeru tudi rečemo, da ima množica $B$ *večjo moč* kot množica $A$.

Množica z enim elementom ima npr. manjšo moč kot množica z dvema (ali več) elementoma. Kot bomo videli, tudi vse neskončne množice niso po moči med seboj enake.

DEFINICIJA. Množica $A$ je *končna*, če je prazna ali pa obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da ima isto moč kot množica prvih $n$ naravnih števil $\{1, 2, 3, ..., n\}$. V nasprotnem primeru je množica *neskončna*.

Rečemo, da ima prazna množica (z 0 elementi) moč 0, množica z enim elementom $\{a\}$ moč 1, množica z dvema elementoma $\{a, b\}$ moč 2 itd. Končni množici imata očitno isto moč natanko takrat, ko imata enako število elementov.

Množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ ni končna. Če bi namreč poskušali poiskati bijekcijo iz $\mathbb{N}$ na katerokoli končno množico oblike $\{1, 2, 3, ..., n\}$, bi bili vsaj po $n$ korakih prisiljeni prirediti naslednjemu naravnemu številu eno od že izbranih slik od 1 do $n$. Bijekcije torej ne moremo najti, množica $\mathbb{N}$ je neskončna in ima večjo moč od vsake končne množice. Lahko pa najdemo bijekcijo množice naravnih števil $\mathbb{N}$ na kakšno njeno pravo (neskončno) podmnožico. Preprost zgled je preslikava $f$, ki vsakemu naravnemu številu $n$ priredi njegovega naslednika $n' = n + 1$. Ta preslikava je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ brez števila 1.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & ... \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & ... \\
 & & 2 & & 3 & & 4 & & ...
\end{array}$$

Drug zgled pa je že znana preslikava $f(n) = 2n$, ki vsakemu naravnemu številu priredi njegov dvakratnik, in je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico vseh sodih naravnih števil $\mathbb{S}$.

Ker ima vsaka neskončna množica $A$ neskončno mnogo različnih elementov, lahko v njej vedno poiščemo podmnožico $B = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ (ustrezno bijekcijo določajo indeksi: $i \mapsto x_i$). Naj bo $C = A \setminus B$. Potem je $A = B \cup C$ in $B \cap C = \emptyset$ in lahko definiramo preslikavo $f : A \to A \setminus \{x_1\}$ s predpisom: za vsak $x_i \in B$ naj bo $f(x_i) = x_{i+1}$, za vsak $x \in C$ pa $f(x) = x$. Ni se težko prepričati, da je $f$ bijekcija iz $A$ na pravo podmnožico $A \setminus \{x_1\}$. Ugotovili smo torej, da ima vsaka neskončna množica isto moč kot neka njena prava podmnožica. To je ena od možnih definicij neskončnosti (uporabil jo je nemški matematik R. Dedekind).

Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ je torej najpreprostejša, najmanjša neskončna množica. Neskončno množico, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$, imenujemo *števno neskončna množica*. Zgled sta npr. množica $\mathbb{Z}$ celih števil in množica $\mathbb{Q}$ racionalnih števil, ki imata isto moč. Bijekcijo med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ oziroma med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ najdemo tako, da cela števila razvrstimo v zaporedje $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$, racionalna števila oziroma ulomke pa v zaporedje $0, 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3/1, -3/1, ...$ in opustimo tiste ulomke, ki dajo že dobljeno vrednost.

Zmotno pa je misliti, da to velja za vsako neskončno množico. Že množica vseh realnih števil $\mathbb{R}$ ima večjo moč kot množica naravnih števil $\mathbb{N}$. To spoznamo takole. Kot vemo, lahko vsako realno število $y$ med 0 in 1 zapišemo tudi v obliki decimalnega izraza $y = 0, y_1 y_2 y_3 ...$, kjer so $y_i$ decimalne cifre (od 0 do 9). Če se še dogovorimo, da na koncu samih devetic ne uporabljamo, je ta zapis enoličen. Pa denimo, da bi bilo realnih števil med 0 in 1 toliko kot naravnih. Tedaj bi jih lahko razvrstili v zaporedje $x_1 = 0, x_{11} x_{12} x_{13} ...$, $x_2 = 0, x_{21} x_{22} x_{23} ...$, $x_3 = 0, x_{31} x_{32} x_{33} ...$, ..., ki bi zajelo **vsa** realna števila med 0 in 1. Toda takoj lahko konstruiramo novo število med 0 in 1, ki ga v tem zaporedju ni, namreč število $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$, kjer postavimo $a_i = 1$, če je $x_{ii} = 0$, in $a_i = 0$, če je $x_{ii} \neq 0$. Število $a$ se razlikuje od števila $x_i$ vsaj v $i$-ti decimalki. Protislovje dokazuje, da med množicama $\mathbb{N}$ in odprtim intervalom $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$ ni bijekcije. Ker ima $\mathbb{N}$ isto moč kot neka prava podmnožica v neskončni množici $(0, 1)$, nima pa iste moči kot $(0, 1)$, je moč množice $(0, 1)$ res večja od moči množice $\mathbb{N}$, čeprav sta obe množici neskončni.

Preprosto se da pokazati, da ima množica $(0, 1)$ isto moč kot množica $\mathbb{R}$ (prepričajte se, da je npr. funkcija $f$, definirana s predpisom $f(x) = (2x - 1)/(1 - |2x - 1|)$, bijekcija iz $(0, 1)$ na $\mathbb{R}$). Prav tako ima množica vseh kompleksnih števil isto moč kot množica vseh realnih števil, kar pa je že nekoliko bolj zahtevno.

Ker tvorijo realna števila zaradi Dedekindovega aksioma številski kontinuum (kot točke na številski premici), tudi za vsako neskončno množico, ki ima isto moč kot množica $\mathbb{R}$, rečemo, da ima *moč kontinuuma*.

## 3. Zaporedja realnih števil

Eden najpomembnejših pojmov v matematični analizi je pojem neskončnega zaporedja in njegove konvergence, kar si bomo ogledali v tem razdelku. V naslednjih poglavjih bomo potem z limitnim procesom lahko analizirali vedenje funkcij v bližini izbrane točke in uvedli druge postopke t.i. infinitezimalnega računa.

### Definicija in podanost zaporedja

Opazujmo števno neskončno mnogo (ne nujno različnih) realnih števil, ki so urejena po vrsti, tako da lahko vedno povemo, katero je prvo, drugo, itd. Tej strukturi števil bomo (namesto množica) rekli zaporedje. Formalno je zaporedje podano s funkcijo.

DEFINICIJA. *Zaporedje realnih števil* je poljubna preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Sliko števila $n$ označimo z $x_n$, torej $x_n = f(n)$, in jo imenujemo *$n$-ti člen* zaporedja ali tudi *splošni člen* zaporedja. Indeks $n$ pove, na katerem mestu v zaporedju stoji člen $x_n$. Pogosto teče indeks $n$ od 0 naprej. Zaporedje bomo zapisali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ali skrajšano $(x_n)$.

Zalogo vrednosti preslikave $f$ imenujemo sedaj *zaloga vrednosti zaporedja*: $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, zožitev preslikave $f$ na neko neskončno podmnožico naravnih števil $\{n_1, n_2, ...\}$, kjer je $n_1 < n_2 < ...$, pa imenujemo *podzaporedje* $(x_{n_k})$; njegova zaloga je torej množica $\{x_{n_k}; k \in \mathbb{N}\}$. Zapomnimo si, da ima v skladu z definicijo zaporedje vedno neskončno mnogo členov, čeprav je njegova zaloga vrednosti lahko končna ali celo sestavljena samo iz enega števila (tako zaporedje imenujemo *konstantno*).

ZGLEDI. Oglejmo si naslednja zaporedja $x_n = n$, $x_n = 1/n$, $x_n = 2^n$, $x_n = (-1)^n$. Prvo je zaporedje vseh naravnih števil, njegova zaloga vrednosti je $\mathbb{N}$, drugo pa je zaporedje recipročnih vrednosti naravnih števil. Tretji zgled pomeni zaporedje vseh potenc števila 2 (tu lahko teče $n$ od 0 naprej). To je podzaporedje prvega zaporedja. Četrti zgled je zaporedje enk (pri sodih indeksih) in minus enk (pri lihih indeksih). Zaloga vrednosti je končna množica z dvema elementoma $\{1, -1\}$.

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je (*navzgor*, *navzdol*) *omejeno*, če je (navzgor, navzdol) omejena njegova zaloga vrednosti, torej če obstajata konstanti $M$ in $m$, da je $m \le x_n \le M$ za vsak $n \in N$ (oziroma le $x_n \le M$ ali $m \le x_n$).

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je *naraščajoče* (*padajoče*), če velja $x_{n+1} \ge x_n$ ($x_{n+1} \le x_n$) za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Definicija je tako široka, da imamo tudi konstantna zaporedja tako za naraščajoča kot za padajoča. Na kratko rečemo, da so taka zaporedja *monotona*. Ugotovite, katera od prej naštetih zaporedij so monotona? Katera pa so (navzgor, navzdol) omejena?

Zaporedje je lahko podano
(a) *eksplicitno*, z navedbo splošnega člena, npr. $x_n = \frac{n}{n+1}$,
(b) *rekurzivno*, z navedbo začetnega člena in rekurzivne formule, npr. $x_0 = 1, x_{n+1} = 2x_n$. To zaporedje je bilo prej podano eksplicitno s splošnim členom $x_n = 2^n$.

ZGLED. (a) *Aritmetično zaporedje* je zaporedje, pri katerem je razlika dveh zaporednih členov konstantna, torej npr. $x_{n+1} - x_n = d$, kjer je $d$ dana konstanta (t.i. diferenca zaporedja). Če je začetni člen $x_0$, je splošni člen $x_n = x_0 + nd$, vsota vseh členov do $n$-tega pa $s_n = (n+1)x_0 + dn(n+1)/2 = (n+1)(x_0 + nd/2)$. Primer takega zaporedja je zaporedje $x_n = n$ z diferenco $d = 1$.

(b) *Geometrično zaporedje* je zaporedje od 0 različnih števil, pri katerem je kvocient dveh zaporednih členov konstanten, torej npr. $x_{n+1}/x_n = k$, kjer je $k$ dana konstanta (t.i. kvocient zaporedja). Če je začetni člen $x_0$, je splošni člen $x_n = x_0 k^n$, vsota vseh členov do $n$-tega pa $s_n = x_0(1 - k^{n+1})/(1 - k)$, če je $k \ne 1$ in $s_n = (n + 1)x_0$, če je $k = 1$. Geometrično je npr. zaporedje $x_n = 2^n$ (s kvocientom $k = 2$).

### Stekališče in limita

Najpomembnejše pri neskončnih zaporedjih je vprašanje, ali se členi zaporedja približujejo kakšni vrednosti ali ne. Najprej definirajmo t.i. *epsilonsko okolico* točke $a \in \mathbb{R}$:

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \epsilon\}$$

Po definiciji absolutne vrednosti lahko zapišemo $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$. Taka okolica je torej odprt interval na realni osi s središčem v $a$ in polmerom $\epsilon > 0$.

Za vsak člen zaporedja lahko vedno ugotovimo, ali spada v okolico ali ne.

ZGLED. Kateri členi zaporedja $x_n = n/(n+1)$ ležijo v okolicah $V_{1/2}(0)$, $V_{1/2}(1)$, $V_\epsilon(1)$? V okolici $V_{1/2}(0)$ ležijo členi $x_n$ z lastnostjo $n/(n+1) < 1/2$ oziroma $n < 1$, torej le člen $x_0$, če teče indeks $n$ od 0 naprej. V okolici $V_{1/2}(1)$ so členi $x_n$ z lastnostjo $|n/(n+1)-1| < 1/2$ oziroma $n > 1$, torej vsi razen prvega. V okolici $V_\epsilon(1)$ pa so členi $x_n$ z lastnostjo $|n/(n+1) - 1| < \epsilon$ oziroma $n + 1 > 1/\epsilon$, torej neskončno mnogo členov oziroma vsi členi z dovolj velikim indeksom.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja $(x_n)$, če je za vsak $\epsilon > 0$ v okolici $V_\epsilon(a)$ neskončno mnogo členov zaporedja $(x_n)$.

ZGLED. Kaj so stekališča naslednjih zaporedij: (a) $x_n = n$, (b) $x_n = n/(n + 1)$, (c) $x_n = 1/n$, (d) $x_n = (-1)^n$ ? Prvo zaporedje nima stekališč, drugo ima eno samo stekališče, točko 1, tretje tudi eno stekališče, točko 0, zadnje pa ima dve stekališči, 1 in -1.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *limita* zaporedja $(x_n)$, če je za vsak $\epsilon > 0$ zunaj okolice $V_\epsilon(a)$ le končno mnogo členov členov zaporedja $(x_n)$ .

Iz obeh definicij se vidi, da je vsaka limita tudi stekališče. Če je namreč zunaj epsilonske okolice samo končno mnogo členov, jih mora biti neskončno v sami okolici.

Ekvivalentno bi za limito $a$ lahko rekli, da so od nekega člena dalje **vsi** členi zaporedja v $V_\epsilon(a)$, ali bolj formalno: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, da iz $n \geq n_\epsilon$ sledi $|x_n - a| < \epsilon$. Dejstvo, da je $a$ limita zaporedja $(x_n)$, zapišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ali } x_n \to a \ (n \to \infty).$$

ZGLED. Zaporedje $x_n = 1/n$ ima limito 0, ker je pri poljubnem $\epsilon > 0$ (po Arhimedu) $1/n < \epsilon$ za vsak dovolj velik $n$. Zaporedje $x_n = n/(n + 1)$ pa ima limito 1, saj smo že videli, da so v vsaki epsilonski okolici $V_\epsilon(1)$ vsi členi z indeksom $n > 1/\epsilon - 1$.

Z limito lahko definiramo pomemben pojem konvergence (oziroma divergence).

DEFINICIJA. Če limita obstaja, rečemo, da je zaporedje *konvergentno* oziroma, da konvergira proti svoji limiti. Če limita ne obstaja, pravimo, da je zaporedje *divergentno*.

V predprejšnjem zgledu sta konvergentni samo zaporedji (b) in (c); zaporedje (a) nima niti stekališč, zaporedje (d) pa jih ima preveč (glej spodnjo trditev 1).

### Lastnosti v zvezi z limitami in stekališči

TRDITEV 1. *Konvergentno zaporedje je omejeno in ima eno samo limito, ki je hkrati edino stekališče zaporedja.*

**Dokaz**. Pri konvergentnem zaporedju zunaj vsake epsilonske okolice limite obstaja samo končno mnogo členov, ki jih lahko zajamemo v povečano okolico.

Denimo, da bi bilo poleg limite $a$ tudi število $b \neq a$ stekališče zaporedja. Pri dovolj majhnem $\epsilon > 0$ bi potem lahko našli disjunktni okolici $V_\epsilon(a)$ in $V_\epsilon(b)$, ki bi obe vsebovali neskončno členov. To pa je v nasprotju s tem, da je $a$ limita in je zato zunaj okolice $V_\epsilon(a)$ le končno mnogo členov.

Divergentno zaporedje ima lahko več stekališč (npr. zaporedje $x_n = (-1)^n$) ali pa nobenega (npr. zaporedje $x_n = n$). Prvo je omejeno, drugo ne.

TRDITEV 2. *Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in konvergira k limiti zaporedja. Vsako stekališče poljubnega zaporedja je limita nekega konvergentnega podzaporedja.*

**Dokaz**. Prvi del je očiten: če so od nekega indeksa dalje vsi členi celotnega zaporedja v epsilonski okolici limite, velja isto za člene vsakega podzaporedja.

Za dokaz drugega dela izbiramo iz zaporedja samo člene, ki so blizu stekališča $a$: najprej obstaja v okolici $V_1(a)$ vsaj en člen $x_{n_1}$, nato obstaja v okolici $V_{1/2}(a)$ vsaj en od $x_{n_1}$ različen člen $x_{n_2}$, itd., za vsak $k$ obstaja v okolici $V_{1/k}(a)$ vsaj en člen $x_{n_k}$, različen od vseh prejšnjih členov (zakaj?). Ker polmeri okolic padajo, so v vsaki okolici $V_\epsilon(a)$ vsi členi tako konstruiranega zaporedja od indeksa $k > 1/\epsilon$ dalje.

ZGLED. V konvergentnem zaporedju $(x_n)$ konvergirajo npr. podzaporedja $y_n = x_{2n}$ (sodi členi), $y_n = x_{2n+1}$ (lihi členi) in $y_n = x_{n+k}$ (premaknjeno zaporedje) proti isti limiti kot zaporedje $x_n$. Zaporedje $x_n = (-1)^n n/(n+1)$ pa ima dve stekališči, 1 in -1 in ni konvergentno. Podzaporedje sodih členov $y_n = x_{2n}$ konvergira k številu 1, podzaporedje lihih členov pa k številu $-1$.

TRDITEV 3. *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

**Dokaz**. Dokaz poteka z razpolovitvijo intervala, na katerem ležijo vsi členi zaporedja. Vsaj na eni polovici leži neskončno členov zaporedja, zato v naslednjem koraku razpolovimo ta podinterval, itd. Ideja je, da krajišča izbranih zaprtih podintervalov določajo z uporabo aksioma o polnosti realno število $a$, ki je stekališče celotnega zaporedja. Za $a$ npr. vzamemo supremum množice vseh levih krajišč tako dobljenih podintervalov. Ker se dolžine izbranih podintervalov manjšajo in konvergirajo prosti 0, leži v vsaki okolici $V_\epsilon(a)$ poleg levega krajišča tudi celoten dovolj pozen podinterval in z njim neskončno mnogo členov prvotnega zaporedja. Torej je točka $a$ njegovo stekališče.

Formalno to storimo takole: naj bo $[m, M]$ interval, na katerem ležijo vsi členi zaporedja, in $d = M - m$ njegova dolžina. Nadalje naj bodo $[a_n, b_n]$, $n \geq 1$, izbrani podintervali z neskončno mnogo členi zaporedja $(x_n)$ in naj bo $a = \sup_{n\geq 1} a_n$. Za vsak $\epsilon > 0$ izberimo tako velik $k$, da bo $1/k < \epsilon/d$. Potem obstaja vsaj en indeks $n_k$, da velja $a - d/2^k < a_{n_k} \leq a$ in $b_{n_k} = a_{n_k} + d/2^{n_k} < a_{n_k} + d/2^k < a_{n_k} + d/k < a_{n_k} + \epsilon$. Torej leži v vsaki epsilonski okolici točke $a$ celoten dovolj pozen delilni interval $[a_{n_k}, b_{n_k}]$ in z njim neskončno mnogo členov zaporedja $(x_n)$.

TRDITEV 4. *Če ima omejeno zaporedje eno samo stekališče, je konvergentno.*

**Dokaz**. Zunaj epsilonske okolice edinega stekališča ima lahko omejeno zaporedje samo končno mnogo členov.

Brez pogoja omejenosti to ni res, zgled je npr. divergentno zaporedje $x_n = n^{(-1)^n}$ z edinim stekališčem 0.

**Cauchyjeva zaporedja**

DEFINICIJA (Cauchyjev pogoj). Zaporedje $(x_n)$ je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, da iz $m, n \geq n_\epsilon$ sledi $|x_m - x_n| < \epsilon$.

TRDITEV 5. *Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno in ima kvečjemu eno stekališče.*

**Dokaz**. Sicer bi lahko našli neskončno mnogo členov, ki so zaporedoma drug od drugega oddaljeni vsaj za nek $\delta > 0$.

TRDITEV 6. *Cauchyjev pogoj je potreben in zadosten za konvergenco zaporedja.*

**Dokaz**. Potrebnost dokažemo takoj, saj za limito $a$ pri pogoju $|x_n - a| < \epsilon/2$ za $n \geq n_\epsilon$ velja $|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \epsilon$, če je $m, n \geq n_\epsilon$. Za zadostnost upoštevamo, da je po trditvi 5 Cauchyjevo zaporedje omejeno in ima samo eno stekališče. Tako zaporedje pa je po trditvi 4 konvergentno.

Cauchyjeva zaporedja so torej ista kot konvergentna zaporedja, je pa pogosto lažje preveriti Cauchyjevo lastnost kot poiskati limito. Pomembna so tudi teoretično (glej spodaj).

**Konvergenca realnega zaporedja**

Naslednji dve trditvi sta pomožna, vendar uporabna rezultata. Skupaj z izreki o primerjanju zaporedij ju bomo potrebovali pri izpeljavi pravil za računanje limit.

TRDITEV 7. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ *velja natanko takrat, ko je* $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

**Dokaz**. Relacija $|x_n - a| < \epsilon$ velja natanko takrat, ko je $x_n \in V_\epsilon(a)$, oziroma natanko takrat, ko je $|x_n - a| \in V_\epsilon(0)$.

TRDITEV 8. *Naj bo* $a_n, b_n > 0$ *za vsak* $n$ *in* $c > 0$. *Če velja* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, *velja tudi* $a_n + b_n \to 0$ *in* $ca_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

**Dokaz**. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_\epsilon$, tako da za $n \geq n_\epsilon$ velja tako $a_n < \epsilon/2$ kot $b_n < \epsilon/2$. Potem velja za $n \geq n_\epsilon$ tudi $a_n + b_n < \epsilon$. Podobno je $ca_n < \epsilon$, če je $a_n < \epsilon/c$ za $n \geq n_\epsilon$.

**Primerjanje realnih zaporedij**

Ena najpreprostejih metod za obravnavo konvergence je primerjanje dveh (ali treh) zaporedij.

IZREK (o primerjanju zaporedij). *Naj bosta zaporedji* $(x_n)$ *in* $(y_n)$ *konvergentni. Potem velja naslednje*:
(a) *Če je* $x_n \leq y_n$ *za vsak* $n$, *je tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.
(b) *Če imata zaporedji* $(x_n)$ *in* $(y_n)$ *isto limito in je* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *za vsak* $n$, *je tudi zaporedje* $(z_n)$ *konvergentno in velja* $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

**Dokaz**. Dokaz točke (a) je preprost, s protislovjem: če bi bilo $b < a$, kjer sta $a$ in $b$ limiti zaporedij $x_n$ oziroma $y_n$, bi za dovolj velik $n$ veljalo $|x_n - a| < (a - b)/2$ in $|y_n - b| < (a - b)/2$, torej $y_n < b + (a - b)/2 = a - (a - b)/2 < x_n$, kar ni mogoče.

Za točko (b) upoštevajmo, da je za vsak $\epsilon > 0$ pri dovolj velikem $n$ res $z_n - a \leq y_n - a < \epsilon$ in $a - z_n \leq a - x_n < \epsilon$, torej tudi $|z_n - a| < \epsilon$. (Z $a$ smo označili skupno limito zaporedij $x_n$ in $y_n$.)

Točko (a) zgornjega izreka imenujemo popularno "izrek o ohranjanju neenakosti", točko (b) pa "izrek o sendviču".

POSLEDICA. *Če za konvergentni zaporedji* $(x_n)$ *in* $(y_n)$ *velja za vsak* $n$ *enakost* $x_n = y_n$, *velja tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

ZGLEDI. (a) Od prej vemo, da je $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Ker je $0 < 1/(2n + 1) < 1/n$ za vsak $n$, je $\lim 1/(2n + 1) = 0$. Podobno bi videli, da je $\lim 1/(1 + bn) = 0$ za poljuben $b > 0$. Prav tako je zaradi ocene $1 < \sqrt{1 + 1/n} < 1 + 1/n$ res $\lim \sqrt{1 + 1/n} = 1$.
(b) Zaradi neenakosti $0 \leq ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ iz $x_n \to x$ sledi $|x_n| \to |x|$.

(c) Za geometrijsko zaporedje $x_n = a^n$ pri $|a| < 1$ velja $0 < |a|^n < 1/(1+nb)$, kjer je $b = 1/|a| - 1 > 0$. Torej za $|a| < 1$ velja $\lim |a|^n = 0$. Pri $a = 1$ zaporedje konvergira k številu 1 (je konstantno), pri $a = -1$ nikamor ne konvergira (oscilira), pri $|a| > 1$ pa neomejeno divergira.
(d) Pokažimo, da pri pozitivnem $c > 0$ zaporedje s členi $x_n = \sqrt[n]{c}$ konvergira k 1. Za $c = 1$ je to jasno. Naj bo zdaj $c > 1$. Ker je zaradi Bernoullijeve neenakosti $c = (1 + (\sqrt[n]{c} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{c} - 1)$, je $0 < x_n - 1 < (c-1)/n$, je po izreku o sendviču $\lim_n x_n = 1$. Če pa je $c < 1$, je $b = 1/c > 1$ in zato $0 < 1 - x_n = (\sqrt[n]{b} - 1)/\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{b} - 1$ in zato spet $\lim_n x_n = 1$.
(e) Izpeljimo še limito $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. Zdaj je $n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n > 1 + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n})^2 = 1 + n(n-1)(\sqrt[n]{n} - 1)^2/2$ in zato $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{2/n}$. Ker desna stran konvergira proti 0, dobimo rezultat spet po izreku o sendviču.

**Računanje limit**

**1. Vsota in produkt**. Če sta zaporedji $(x_n)$ in $(y_n)$ konvergentni, sta konvergentni tudi zaporedji $(x_n + y_n)$ in $(x_n y_n)$ ter velja $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$. Tudi limita razlike je enaka razliki limit.

**Dokaz**. Oboje dokažemo s trikotniško neenakostjo, pri produktu še upoštevamo, da je vsako konvergentno zaporedje omejeno. Če je $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ in $|x_n| \leq M$ za vsak $n$, imamo $|(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$ in za dovolj velik $n$ je desna stran poljubno majhna. Podobno je $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq M|x_n - a| + |a||y_n - b|$ in desna stran poljubno majhna pri velikem $n$. Razliko obravnavamo podobno.

2. **Inverz in kvocient**. Če je zaporedje $(y_n)$ z od 0 različnimi členi konvergentno in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(1/y_n)$ in velja $\lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/\lim_{n\to\infty} y_n$. Če sta zaporedji $(x_n)$ in $(y_n)$ konvergentni in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $x_n/y_n$ in velja $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n$.

**Dokaz**. Spet naj bo $a = \lim x_n$ in $b = \lim y_n$, poleg tega pa še $|y_n| \geq m > 0$ za vsak $n$. Tedaj je $|1/y_n - 1/b| = |b - y_n|/|y_n b| \leq |b - y_n|/(m|b|)$ in desna stran poljubno majhna, če je $n$ dovolj velik. Za dokaz drugega dela upoštevamo točko 1 v zvezi s produktom.

ZGLED. Izračunajmo limiti: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$. Pri prvi limiti vsak člen v števcu in imenovalcu ulomka delimo z $n^2$ in z upoštevanjem zgornjih pravil dobimo limito 2. Pri drugi števec in imenovalec najprej delimo s $\sqrt{n}$. Limita je $2/(\sqrt{2}+1)$.

**Opomba**. Tu smo morali limito spraviti pod koren, kar nam je omogoila npr. ocena $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = |x_n - x|/(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}) < |x_n - x|/\sqrt{x}$, če je $x_n, x > 0$. Kasneje bomo videli, da je to res zaradi zveznosti funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$, ki je inverzna k zvezni funkciji $x \mapsto x^2$ za $x \geq 0$.

**Drugačna konstrukcija realnih števil iz racionalnih**.

V množico vseh Cauchyjevih zaporedij racionalnih števil uvedemo ekvivalenčno relacijo s predpisom $(x_n) \sim (y_n)$, če velja $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Realna števila so potem ekvivalenčni razredi $[(x_n)]$ Cauchyjevih zaporedij v $\mathbb{Q}$ glede na to relacijo. Smiselno uvedemo urejenost ($[(x_n)] > 0$, če obstajata taki naravni števili $N$ in $m$, da je $x_n \geq 1/N$ za vsak $n \geq m$), seštevanje ($[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$) in množenje ($[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n y_n)]$) ekvivalenčnih razredov. Pokažemo, da so te operacije dobro definirane (neodvisno od predstavnikov ekvivalenčnega razreda) in dokažemo ustrezne algebrajske lastnosti, značilne za urejen obseg realnih števil (podrobnosti glej v [5], Chapter 2).

**Monotona zaporedja**

IZREK (o monotonih zaporedjih).
(a) *Vsako naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\sup\{x_n\}$.
(b) *Vsako padajoče navdol omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\inf\{x_n\}$.

**Dokaz**. Je geometrijsko precej nazoren, saj v okolici supremuma $s$ leže vsi členi, razen končno mnogo. Za vsak $\epsilon > 0$ namreč obstaja člen $x_m$, za katerega velja $s - \epsilon < x_m \leq s$. Potem pa isti neenakosti zadoščajo tudi vsi nadaljnji členi. Točko (b) dokažemo podobno.

TRDITEV (o vloženih intervalih). *Imejmo padajoče zaporedje zaprtih intervalov, katerih dolžine konvergirajo proti 0, torej* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *in* $\lim_n (b_n - a_n) = 0$. *Potem vsebuje njihov presek* $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ *natanko eno točko.*

**Dokaz**. Iz pogoja padanja vidimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$ in $b_n \geq b_{n+1}$, tako da je zaporedje $(a_n)$ navzgor omejeno z $b_1$ in monotono naraščajoče, zaporedje $(b_n)$ pa navzdol omejeno z $a_1$ in monotono padajoče. Torej sta obe zaporedji konvergentni. Naj bo $\lim_n a_n = a$ in $\lim_n b_n = b$, tako da je $b - a = \lim_n(b_n - a_n) = 0$. Točka $c = a = b$ potem edini element preseka $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Ker je namreč $a = \sup a_n$ in $b = \inf b_n$, velja $a_n \leq c \leq b_n$ za vsak $n$, tako da je $c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Druge točke $d$ pa v tem preseku ne more biti zaradi ocene $0 \leq d - a_n \leq b_n - a_n$, ki v limiti da $d = \lim_n a_n = c$.

Primer takega padajočega zaporedja zaprtih intervalov smo že spoznali pri bisekciji intervala. Analogna trditev za odprte intervale ne velja, zgled: $\cap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n) = \emptyset$.

ZGLED (OBSTOJ ŠTEVILA e). Pokazali bomo obstoj števila e, ki pomeni osnovo naravnih logaritmov. To število bomo izrazili kot limito različnih zaporedij realnih števil, pri čemer bomo uorabili trditev o vloženih intervalih oziroma izrek o monotonih zaporedjih.

(a) Zaprti interval $I_1 = [2, 3]$ razpolovimo, izberemo drugo polovico, tj. interval $I_2 = [5/2, 3] = [5/2!, 6/2!]$, le-tega razdelimo na tri enake dele, spet izberemo drugo tretjino, tj. interval $I_3 = [8/3, 17/6] = [16/3!, 17/3!]$, ga razdelimo na štiri enake dele itd. Na $n$-tem koraku razdelimo interval $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ na $n$ enakih delov in izberemo drugega od teh delov, da dobimo naslednji interval $I_n = [a_n, b_n]$. Hitro ugotovimo, da je $a_1 = 2$, $a_2 = 2+1/2$, $a_3 = 2+1/2+1/6$, itd.; splošno je $a_n = 2+1/2+1/6+...+1/n!$. Prav tako vidimo, da za vsak $n$ velja $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ in $b_n - a_n = 1/n!$, torej $b_n - a_n \to 0$, $(n \to \infty)$. Po trditvi o vloženih intervalih obstaja v preseku $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ natanko eno realno število $c$. Iz dokaza trditve vemo, da je $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2 + 1/2 + 1/6 + ... + 1/n!)$.
Še nekaj vidimo iz te konstrukcije. Za vsak $n > 1$ leži interval $I_{n+1}$ strogo med krajišči intervala $I_n$, ki sta oblike $m/n!$ in $(m + 1)/n!$, tako da tudi limitno število $c$ ne more biti ulomek z imenovalcem $n!$ in to za noben $n > 1$. Če bi bil $c$ racionalno število, npr. $c = p/q$, bi lahko zapisali $c = p(q - 1)!/q!$. Torej $c$ ni racionalno število.

(b) Z indukcijo lahko dokažemo, da za $0 < x < 1$ za vsak $n \geq 2$ velja $(1 - x)^n > 1 - nx$. Ker je tedaj tudi $(1-x)^{-n} > (1+x)^n > 1+nx$, velja še $(1-x)^{-n} > 1+nx$. Potem veljajo naslednje trditve:

(i) *Zaporedje* $x_n = (1 + 1/n)^n$ *je naraščajoče, zaporedje* $y_n = (1 - 1/n)^{-n}$ *padajoče.*

Dokaz: Če vstavimo $x = 1/n^2$ v neenakost $(1 - x)^n > 1 - nx$, dobimo oceno
$(1 - 1/n)^n(1 + 1/n)^n = (1 - 1/n^2)^n > 1 - 1/n$ oziroma $x_n = (1 + 1/n)^n > (1 - 1/n)^{1-n} = ((n - 1)/n)^{1-n} = (n/(n - 1))^{n-1} = (1 + 1/(n - 1))^{n-1} = x_{n-1}$.
Če pa vstavimo $x = 1/n^2$ v neenakost $(1-x)^{-n} > 1+nx$, dobimo $(1-1/n)^{-n}(1+1/n)^{-n} = (1 - 1/n^2)^{-n} > 1 + 1/n$ oziroma $y_n = (1 - 1/n)^{-n} > (1 + 1/n)^{n+1} = ((n + 1)/n)^{n+1} = (n/(n + 1))^{-(n+1)} = (1 - 1/(n + 1))^{-(n+1)} = y_{n+1}$.

(ii) *Med njima je zveza* $y_{n+1} = x_n(1 + 1/n) > x_n$ *in* $x_n < x_{n+m} < y_{n+m+1} < y_m$ *za poljubna indeksa* $m$ *in* $n$.

Dokaz: Pravkar smo videli, da je $y_{n+1} = (1 + 1/n)^{n+1} = x_n(1 + 1/n)$; odtod sledi ocena $y_{n+1} > x_n$. Zaradi naraščanja zaporedja $(x_n)$ in padanja zaporedja $(y_n)$ dobimo še drugo oceno.

(iii) *Zaporedje* $(x_n)$ *je navzgor, zaporedje* $(y_n)$ *pa navzdol omejeno in obe zaporedji imata isto limito.*

Dokaz: Zaporedje $(x_n)$ je navzgor omejeno z vsakim členom zaporedja $(y_n)$, npr. z $y_1$; podobno je zaporedje $(y_n)$ navzdol omejeno z vsakim členom zaporedja $(x_n)$, npr. z $x_1$. Torej obstajata limiti $a = \lim_n x_n$ in $b = \lim y_n$. Iz prve zveze v točki (ii) pa dobimo, da tudi v limiti velja enakost, torej $a = b$.

Pokažimo, da je tudi število $c$ iz točke (a) enako številu $a$ (oziroma $b$). Za vsak $n \geq 1$ je po binomskem obrazcu

$$(1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$2 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{n-1}{n}) \cdot \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Odtod dobimo v limiti $(n \to \infty)$ oceno

$$a = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n \leq \lim_{n\to\infty}(2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/n!) = c.$$

Nadalje pri poljubnem $m$ za vsak $n > m$ velja

$$2 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{m-1}{n}) \cdot \frac{1}{m!} \leq$$

$$2 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{n-1}{n}) \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$(1 + 1/n)^n$$

in zato tudi v limiti, ko pošljemo $n$ v neskončnost, dobimo

$$2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/m! \leq \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = a.$$

Pošljimo še $m \to \infty$, pa najdemo še oceno $c = \lim_{m\to\infty}(2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/m!) \leq a$, se pravi $c = a$.

Skupno limito vseh treh zaporedij označimo z e in preprosto imenujemo število e. Torej je $e = a = b = c$ oziroma

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = \lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^{-n} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ... + 1/n!).$$

Število e je torej iracionalno, približno enako 2,71828... in je v matematiki zelo pomembno, saj predstavlja osnovo naravne rasti, osnovo naravnih logaritmov, nastopa pri Gaussovi ali normalni porazdelitvi v teoriji verjetnosti in statistiki itd.

### Zgornja in spodnja limita

Če je zaporedje $(x_n)$ omejeno, se pravi vsebovano v dovolj velikem intervalu $[m, M]$, je množica $S$ njegovih stekališč neprazna in tudi sama vsebovana v $[m, M]$, torej omejena. Po Dedekindovem aksiomu obstajata tako $a = \inf S$ kot $b = \sup S$. Prvo število imenujemo *spodnja limita*, drugo pa *zgornja limita* zaporedja $(x_n)$.

TRDITEV. *Naj bo* $(x_n)$ *omejeno zaporedje realnih števila,* $S$ *množica njegovih stekališč in kot prej* $a = \inf S$, $b = \sup S$. *Potem velja*:
(a) $a \in S$ *in za vsak* $\epsilon > 0$ *je neskončno mnogo členov zaporedja* $(x_n)$ *manjših od* $a + \epsilon$ *in samo končno mnogo manjših od* $a - \epsilon$.
(b) $b \in S$ *in za vsak* $\epsilon > 0$ *je neskončno mnogo členov zaporedja* $(x_n)$ *večjih od* $a - \epsilon$ *in samo končno mnogo večjih od* $a + \epsilon$.

**Dokaz**. Dokažimo samo točko (a), saj poteka dokaz druge točke podobno. Ker je $a = \inf S$, obstaja za vsak $k \in \mathbb{N}$ tak $s_k \in S$, da je $a \leq s_k < a + 1/k$. Ker pa je $s_k$ stekališče zaporedja $(x_n)$, obstaja vsaj en indeks $n_k$, da velja

$$a - 1/k \leq s_k - 1/k < x_{n_k} < s_k + 1/k < a + 2/k.$$

Po izreku o sendviču sklepamo, da tudi podzaporedje $(x_{n_k})$ konvergira proti $a$. Torej je $a$ stekališče zaporedja $(x_n)$, se pravi $a \in S$ oziroma $a = \min S$.

Ker je $a$ najmanjše stekališče zaporedja $(x_n)$, je za vsak $\epsilon$ neskončno členov zaporedja v okolici $V_\epsilon(a)$, torej manjših od $a + \epsilon$, hkrati jih je samo končno mnogo manjših od $a - \epsilon$, sicer bi lahko našli še manjše stekališče.

TRDITEV. *Pri istih pogojih in z istimi oznakami kot v prejšnji trditvi velja*:
(a) $a = \sup\{\inf\{x_n;\ n \geq k\};\ k \geq 1\} = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n;\ n \geq k\}$;
(b) $b = \inf\{\sup\{x_n;\ n \geq k\};\ k \geq 1\} = \lim_{m\to\infty} \sup\{x_n;\ n \geq k\}$.

**Dokaz**. Spet dokažimo samo točko (a). Označimo $c_k = \inf\{x_n;\ n \geq k\}$ in $c = \sup\, c_k$. Pokazati moramo, da je $c = a$. Zaporedje $(c_k)$ je očitno naraščajoče in navzgor omejeno, torej konvergentno z limito enako $c = \sup\, c_k$. Ker je $c_k = \inf\{x_n;\ n \geq k\}$, za vsak $k$ obstaja $n_k \geq k$, da je $c_k \leq x_{n_k} < c_k + 1/k$. Ker $c_k \to c$, dobimo po izreku o sendviču tudi konvergenco $x_{n_k} \to c$. Torej je $c$ stekališče zaporedja $(x_n)$ oziroma $c \in S$. Za vsako stekališče $d \in S$ pa obstaja podzaporedje $y_{n_k}$, ki konvergira proti $d$. Ker je $n_k \geq k$, velja za vsak $k$ tudi $y_{n_k} \geq c_k$ in v limiti $d \geq c$. To pomeni, da je $c$ najmanjše stekališče v $S$, se pravi $c = \min\, S = \inf\, S = a$.

Zaradi zgornje trditve uvedemo standardni oznaki: $a = \liminf\, x_n$ (spodnja limita) in $b = \limsup\, x_n$ (zgornja limita).

Brez težav se lahko prepričamo, da za spodnjo in zgornjo limito omejenih zaporedij $(x_n)$ in $(y_n)$ veljajo naslednje lastnosti:
(i) *Če je zaporedje* $(x_n)$ *konvergentno, je* $\liminf\, x_n = \limsup\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$;
(ii) $\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$, $\limsup x_n = -\liminf(-x_n)$;
(iii) $\inf x_n \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq \sup_n x_n$;
(iv) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.

ZGLED. Za zaporedji $x_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ in $y_n = (-1)^{n+1}(1 - 1/n)$ je $\inf x_n = -2$, $\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$, $\sup x_n = 3/2$, $\inf y_n = \liminf y_n = -1$, $\limsup y_n = \sup y_n = 1$ in $\inf(x_y + y_n) = -2$, $\liminf(x_y + y_n) = \limsup(x_n + y_n) = 0$, $\sup(x_y + y_n) = 1$.

### Rekurzivna zaporedja in dinamični sistemi

Rekli smo, da je zaporedje podano rekurzivno, če je podan začetni člen zaporedja in rekurzivna formula, ki nam omogoča, da iz prejšnjega člena (ali iz več prejšnjih členov) izračunamo naslednjega. Ločimo:
(i) *enostopenjske rekurzije*: $x_{n+1} = f(x_n)$, kjer je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija ene spremenljivke;
(ii) *dvostopenjske rekurzije*: $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, kjer je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk; itd.

Včasih (bolj redko) lahko prevedemo zaporedje iz rekurzivne v eksplicitno obliko. Npr. če je $x_{n+1} = kx_n$ in je začetni člen $x_0$ znan, brez težav ugotovimo, da je to zaporedje geometrijsko in podano eksplicitno s formulo $x_n = x_0 k^n$.

Rekurzivna formula je nekakšen zakon, ki določa vedenje zaporedja, seveda v odvisnosti od začetnega člena (pri enostopenjski) ali več začetnih členov (pri več stopenjskih rekurzijah). Rekurzivnim enačbam, ki povezujejo več členov zaporedja, rečemo tudi *diferenčne enačbe.* Ni potrebno, da je naslednji člen eksplicitno izražen s prejšnjimi. *Red* diferenčne enačbe je razlika med največjim in najmanjšim indeksom členov, ki nastopajo v dani enačbi. Tako je npr. enačba $x_{n+1} = kx_n$ prvega reda, enačba $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pa drugega reda. Rešitev diferenčne enačbe je potem vsako zaporedje, ki ji zadošča. Različni začetni členi dajo različne rešitve.

Poseben primer so *linearne diferenčne enačbe*, kjer členi nastopajo linearno, npr. drugega reda:

$$a_0(n)x_{n+2} + a_1(n)x_{n+1} + a_2(n)x_n = b(n),$$

kjer so $a_i(n)$ in $b(n)$ znani koeficienti, odvisni v splošnem še od $n$. Če je $b(n) = 0$, se linearna diferenčna enačba imenuje *homogena*, sicer pa je *nehomogena.* Še bolj poseben primer dobimo, ko so vsi koeficienti $a_i$ konstante (tj. neodvisni od indeksa $n$); tedaj govorimo o linearnih diferenčnih enačbah *s konstantnimi koeficienti.*

V tem primeru je precej enostavno poiskati njeno rešitev oziroma eksplicitno obliko ustreznega zaporedja. Pri homogenih linearnih diferenčnih enačbah drugega reda (s konstantnimi koeficienti) tvegamo z nastavkom $x_n = \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$. Za $\lambda$ dobimo kvadratno enačbo

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

ki ima v splošnem dva korena $\lambda_1$ in $\lambda_2$ (lahko sta konjugirano kompleksna ali enaka). Splošna rešitev je potem

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, in

$$x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n,$$

če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kjer pa konstanti $C_1$ in $C_2$ določimo iz začetnih pogojev $x_0$ in $x_1$.

ZGLED. Rekurzivna formula $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ je homogena linearna diferenčna enačba drugega reda. Nastavek $x_n = \lambda^n$ da kvadratno enačbo $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ z dvema realnima korenoma $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ in $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2$, tako da je rešitev za $n \geq 0$ oblike

$$x_n = C_1[(1 + \sqrt{5})/2]^n + C_2[(1 - \sqrt{5})/2]^n.$$

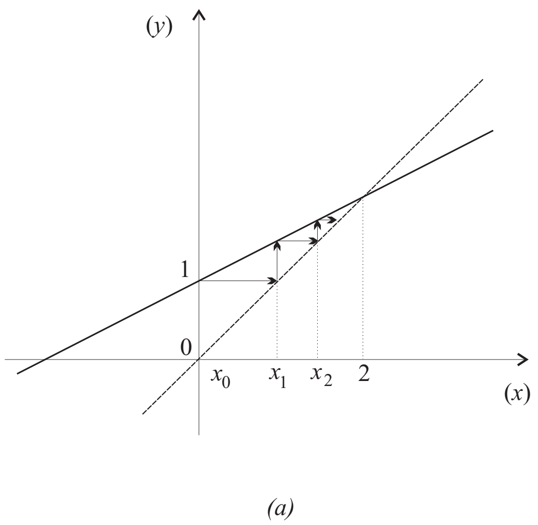
Če izberemo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, dobimo

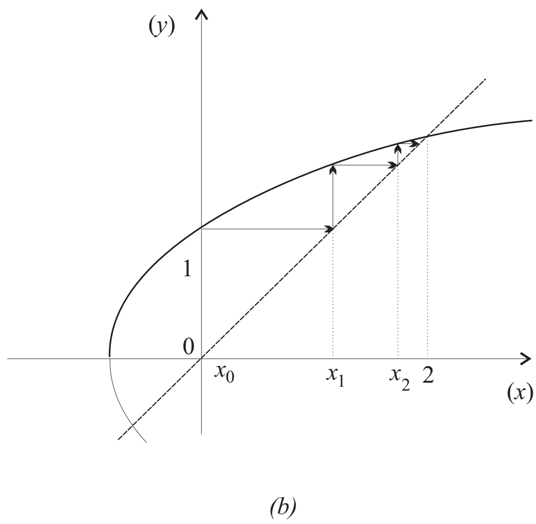
$$x_n = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$$

oziroma znamenito Fibonaccijevo zaporedje 0,1,1,2,3,5,8,13,... Opazimo, da je število $(1 + \sqrt{5})/2$ ravno *razmerje zlatega reza.*

Lastnosti rekurzivno podanega zaporedja (omejenost, monotonost, konvergenco) ponavadi hitreje dobimo direktno iz rekurzijske formule kot iz eksplitne oblike, saj lahko uporabimo matematično indukcijo. Kadar že vemo, da je zaporedje $(x_n)$ konvergentno in ima limito $x$, lahko enostavno limitiramo enostopenjsko rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$, tako da v limiti dobimo $x = f(x)$ (limito in funkcijski predpis lahko zamenjamo pri zveznih funkcijah, kar bomo opravičili kasneje). Taka točka $x$ se imenuje *negibna* ali *fiksna točka* preslikave $f$. Limita zaporedja je torej ena izmed negibnih točk funkcije $f$; katera je prava, moramo ugotoviti z analizo vedenja zaporedja. Z uporabo grafa funkcije $f$, presečišča grafa s premico $y = x$ in z ustreznim *mrežnim diagramom*, ki opisuje dinamiko zaporedja, damo obravnavi še dodaten nazoren geometrični pomen (glej sliko 1).

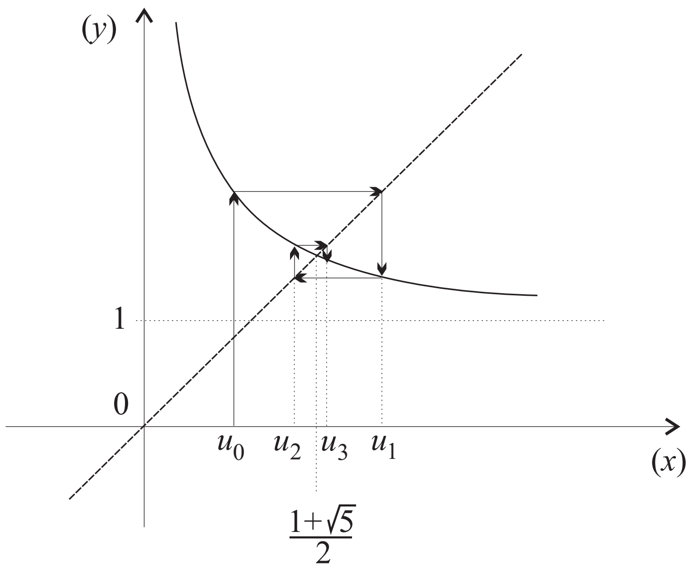
ZGLEDI. (a) Pokažimo, da je zaporedje, podano rekurzivno s predpisom $x_0 = 1$ in $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$, konvergentno in da ima limito $\lim x_n = 2$. Najprej se z matematično indukcijo prepričamo, da je zgornja meja zaporedja enaka 2. Za člen $x_0$ je to res; če velja za $x_n$, velja potem tudi za $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$. Ker je razlika zaporednih členov $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n + 1 - x_n = \frac{1}{2}(2 - x_n) > 0$, je zaporedje tudi naraščajoče. Izrek o monotonih zaporedjih pove, da je konvergentno. Limito označimo z $x$. Ker mora biti $x$ negibna točka funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, dobimo $x = \frac{1}{2}x + 1$ oziroma $x = 2$ (slika 1(a)).




Slika 1. Zlati rez

(b) Podobno lahko obravnavamo zaporedje $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$, kjer nastopa $n$ kvadratnih korenov. Hitro vidimo, da lahko to zaporedje rekurzivno podamo s predpisom $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, $x_0 = 0$, kar je veliko lažje obravnavati. Z matematično indukcijo, se lahko takoj prepričamo, da je $x_n < 2$ za vsak $n$ in da je $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 2} - x_n = (2 + x_n - x_n^2)/(\sqrt{x_n + 2} + x_n) = (2 - x_n)(1 + x_n)/(\sqrt{x_n + 2} + x_n) > 0$. Torej je zaporedje navzgor omejeno in naraščajoče, se pravi konvergentno. Limita $x$ mora zadoščati enačbi $x = \sqrt{x + 2}$, odkoder dobimo edino pozitivno možnost $x = 2$ (slika 1(b)).




Slika 2. Zlati rez

(c) Za $n \geq 1$ naj bo $u_n = x_{n+1}/x_n$, kjer $(x_n)$ Fibonaccijevo zaporedje iz točke 1. Če rekurzivno formulo $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ delimo z $x_{n+1}$, dobimo za $(u_n)$ rekurzijo

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n,\ u_1 = 1.$$

To zaporedje ni monotono, ampak oscilirajoče konvergira k pozitivni negibni točki $u$ funkcije $f(u) = 1 + 1/u$ (pomagajmo si z mrežnim diagramom, glej sliko 2). Ker ta $u$ zadošča enačbi $u^2 - u - 1 = 0$, dobimo kot prej $u = (1 + \sqrt{5})/2$, kar je edina pozitivna rešitev. Tako vidimo, da kvocienti zaporednih Fibonaccijevih števil konvergirajo proti razmerju zlatega reza.

## 4. Evklidski prostori

Kartezični produkt $n$ kopij množice $\mathbb{R}$, se pravi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ ($n$-krat), imenujemo $n$-razsežni *evklidski prostor*. Njegovi elementi so urejene $n$-terice realnih števil $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ki jih imenujemo *točke prostora* s koordinatami $x_1, x_2, ..., x_n$. Tako je npr. $\mathbb{R}^2$ evklidska ravnina, opremljena s kartezičnim (pravokotnim) koordinatnim sistemom, $\mathbb{R}^3$ običajen trirazsežni prostor itd.

V $\mathbb{R}^n$ uvedemo notranjo operacijo *vsota* in zunanjo operacijo *produkt s skalarjem*, tako da $n$-terice seštevamo in množimo s skalarjem po komponentah ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \quad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Poleg tega definiramo tudi *skalarni produkt*:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n,$$

ki je simetričen ($\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$) ter aditiven in homogen v vsakem faktorju. Aditivnost v prvem faktorju pomeni $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$, homogenost pa $\lambda\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$. Aditivnost in homogenost v drugem faktorju potem sledi iz simetričnosti. Velja tudi

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

kjer je $\|\boldsymbol{x}\|$ *norma* $n$-terice $\boldsymbol{x}$, ki ima naslednje lastnosti:
(a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ in $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$,
(b) $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
(c) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (Cauchy-Schwarzova neenakost),
(d) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (trikotniška neenakost).
(e) $\|\boldsymbol{x}\|/\sqrt{n} \leq \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq \|\boldsymbol{x}\|$.
Točke (a), (b) in (e) so skoraj očitne. Cauchy-Schwarzovo neenakosti iz točke (c) izpeljemo iz relacije $(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ...y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + ... + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2 \geq 0$, trikotniško neenakost iz točke (d) pa dobimo z upoštevanjem Cauchy-Schwarzove neenakosti: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$.

Urejenosti običajno ne vpeljemo, pač pa lahko merimo razdaljo med dvema točkama prostora. Razdaljo (metriko) definiramo s pomočjo norme ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Kakor hitro pa imamo razdaljo, lahko (tako kot pri realnih številih) vpeljemo pojem epsilonske okolice točke $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$V_\epsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \epsilon\}\ ,\quad \epsilon > 0.$$

Na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. taka okolica naša stara znanka $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < \epsilon\}$, tj. simetrični interval okrog točke $a$, v $\mathbb{R}^2$ je $V_\epsilon(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - a)^2 + (y - b)^2 < \epsilon^2\}$, torej odprti krog s središčem v točki $(a, b)$ in polmerom $\epsilon$ itd.

Z okolicami pa lahko definiramo limite in stekališča zaporedij točk v $\mathbb{R}^n$. Definicija je ista kot pri realnih številih.

DEFINICIJA. Točka $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je *limita* zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks $m$, da je $\boldsymbol{x}_k \in V_\epsilon(\boldsymbol{a})$ oziroma $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak indeks $k \geq m$.

Točka $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je *stekališče* zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$, če za vsak $\epsilon > 0$ velja $\boldsymbol{x}_k \in V_\epsilon(\boldsymbol{a})$ za neskončno mnogo indeksov $k$ ali ekvivalentno, če je $\boldsymbol{a}$ limita vsaj enega podzaporedja $(\boldsymbol{x}_{k_j})$ v $(\boldsymbol{x}_k)$.

Če je $\boldsymbol{a}$ limita zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$, rečemo, da je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergentno in da konvergira proti $\boldsymbol{a}$. Kot običajno to zapišemo v obliki $\boldsymbol{a} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$ ali $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| = 0$. Iz trikotniške neenakosti seveda sledi $|\,\|\boldsymbol{x}_k\| - \|\boldsymbol{a}\|\,| \le \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\|$. Če torej $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, velja tudi $\|\boldsymbol{x}_k\| \to \|\boldsymbol{a}\|$. Hitro se lahko tudi prepričamo o veljavnosti naslednje trditve.

TRDITEV. *Zaporedje točk* $\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ *konvergira proti točki* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *natanko takrat, ko konvergira po komponentah, tj. ko za vsak* $i = 1, 2, ..., n$ *velja* $\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i$.

**Dokaz**. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $m$, tako da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak $k \ge m$, velja po točki (e) zgoraj za vsak $i$ tudi $|x_{k,i} - a_i| \le \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak $k \ge m$.
Obratno, če za vsak $i$ in $\epsilon > 0$ obstaja $m_i$, tako da je $|x_{k,i} - a_i| < \epsilon/\sqrt{n}$ za vsak $k \ge m_i$, naj bo $m = \max_{1\le i\le n} m_i$. Potem za vsak $k \ge m$ veljajo vse te enakosti in zato po točki (e) zgoraj tudi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \le \sqrt{n} \max_{1\le i\le n} |x_{k,i} - a_i| < \epsilon$.

POSLEDICA. *Če je* $\lambda \in \mathbb{R}$ *in sta* $(\boldsymbol{x}_k)$ *in* $(\boldsymbol{y}_k)$ *konvergentni zaporedji točk v* $\mathbb{R}^n$, *velja*
(a) $\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k \pm \boldsymbol{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \pm \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k$,
(b) $\lim_{k\to\infty}(\lambda \boldsymbol{x}_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$,
(c) $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{y}_k = (\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k) \cdot (\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k)$.

**Dokaz**. Vse troje spoznamo, če opazujemo konvergenco po komponentah in upoštevamo lastnosti limit za realna števila.

DEFINICIJA. Zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$ je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks $m$, da velja $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| < \epsilon$ za $k, l \ge m$.

TRDITEV. *Zaporedje točk v* $\mathbb{R}^n$ *je konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo.*

**Dokaz**. V eno smer je dokaz preprost: če je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergentno proti $\boldsymbol{a}$, za vsak par dovolj poznih indeksov $k$ in $l$ velja $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon/2$ in $\|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{a}\| < \epsilon/2$. Potem pa po trikotniški neenakosti velja tudi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| < \epsilon$.
Obratno, če je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ Cauchyjevo, je za vsak indeks $i$ po točki (e) Cauchyjevo tudi zaporedje komponent $(x_{k,i})$ v $\mathbb{R}$. Od prej vemo, da je tako zaporedje konvergentno, torej obstaja limita $a_i = \lim_{k\to\infty} x_{k,i}$. Potem pa po prejšnji trditvi vidimo, da mora veljati tudi $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, kjer je $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

### Zaprte in odprte množice

Z limitami podzaporedij lahko definiramo posebne podmnožice v prostoru $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIJA. Rečemo, da je točka $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *limitna točka* podmnožice $A \subset \mathbb{R}^n$, če obstaja zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in A$, tako da je $\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$.

Vsaka točka $\boldsymbol{a} \in A$ je limitna za $A$, saj konstantno zaporedje ($\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ za vsak $k$) konvergira proti $\boldsymbol{a}$. Lahko pa so limitne točke še druge, npr. za množico $A = (a, b)$ (odprti interval) sta obe krajišči, $a$ in $b$, limitni točki, nista pa elementa množice $A$.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ je *zaprta*, če vsebuje vse svoje limitne točke.

Zaprte podmnožice so npr. poljuben zaprt interval $[a, b]$ na reali osi $\mathbb{R}$ (ne pa odprti interval $(a, b)$), poljubna zaprta krogla $K_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x};\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \le r\}$ v $\mathbb{R}^n$, množica $\{(x, y);\ xy \ge 1\}$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ itd. Vsaka končna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je zaprta, prazna množica in cel prostor $\mathbb{R}^n$ sta zaprti množici.

TRDITEV. *Naj bodo $A, B$ in $A_i$, $i \in I$ (poljubna indeksna množica) zaprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Potem sta zaprti množici tudi $A \cup B$ in $\cap_{i \in I} A_i$.*

**Dokaz**. Naj bo $\boldsymbol{x}_k$ zaporedje točk v $A \cup B$ z limito $\boldsymbol{x}$. V eni od množic $A$ ali $B$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $\boldsymbol{x}_k$; denimo, da v $A$. Ti členi tvorijo podzaporedje točk iz $A$, ki tudi konvergira proti $\boldsymbol{x}$, torej je $\boldsymbol{x}$ limitna točka za $A$. Ker pa je množica $A$ zaprta, je $\boldsymbol{x} \in A$, torej v $A \cup B$.

Zdaj pa naj bo $\boldsymbol{x}_k$ zaporedje točk v $\cap_{i \in I} A_i$ z limito $\boldsymbol{x}$. Za vsak indeks $i$ so vsi členi $\boldsymbol{x}_k$ v $A_i$, ki je zprta množica in je zato tudi $\boldsymbol{x} \in A_i$. Torej je $\boldsymbol{x} \in \cap_{i \in I} A_i$.

DEFINICIJA. *Zaprtje* $\overline{A}$ podmnožice $A \subset \mathbb{R}^n$, je množica vseh njenih limitnih točk.

TRDITEV. *Zaprtje $\overline{A}$ množice $A$ je najmanjša zaprta množica v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje množico $A$. V posebnem primeru je $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

**Dokaz**. Vedno je $A \subset \overline{A}$, saj je vsaka točka $\boldsymbol{a} \in A$ sama že limitna točka za $A$ (zakaj?). Pokažimo najprej, da je $\overline{A}$ zaprta množica. Če je $\boldsymbol{x}_k \in \overline{A}$ in je $\boldsymbol{x} = \lim_k \boldsymbol{x}_k$, obstaja za vsak $k$ zaporedje točk $\boldsymbol{a}_{k,j} \in A$, ki konvergira proti $\boldsymbol{x}_k$. Lahko torej izberemo tak $\boldsymbol{a}_k \in A$, da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k\| < 1/k$ za vsak $k$, od koder sledi $0 \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_k\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\| + \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k\| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\| + 1/k$ za vsak $k$. Po izreku o sendviču je potem $\lim_k \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_k\| = 0$ oziroma $\boldsymbol{x} = \lim_k \boldsymbol{a}_k \in \overline{A}$.

Če je $C$ poljubna zaprta množica, ki vsebuje $A$, vsebuje tudi vse limitne točke za $A$, se pravi ves $\overline{A}$. To pomeni, da je $\overline{A}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje $A$. Ker je torej $\overline{\overline{A}}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje $\overline{A}$, le-ta pa je sama zaprta po prvem delu dokaza, mora veljati $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

DEFINICIJA. Podmnožica $U \subset \mathbb{R}^n$ je *odprta*, če za vsak $\boldsymbol{a} \in U$ obstaja $r = r(\boldsymbol{a})$, da je odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$ vsebovana v $U$.

Odprte množice so npr.: odprti interval $(a, b)$ na realni osi $\mathbb{R}$, sama odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$ v $\mathbb{R}^n$, množica $\{(x, y);\ xy > 1\}$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ itd. Odprti sta tudi prazna množica in cel prostor $\mathbb{R}^n$.

TRDITEV. *Podmnožica $U \subset \mathbb{R}^n$ je odprta natanko takrat, ko je njen komplement $U^c = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{x} \notin U\}$ zaprta množica.*

**Dokaz**. Naj bo $U$ odprta množica in $(\boldsymbol{x}_k)$ zaporedje v $U^c$, ki konvergira proti $\boldsymbol{x}$. Pokazati moramo, da je $\boldsymbol{x} \in U^c$. Če je $\boldsymbol{a}$ katerakoli točka iz $U$, obstaja zaradi odprtosti te množice tak $r > 0$, da je $B_r(\boldsymbol{a}) \subset U$. Odtod sledi, da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \ge r$ za vsak $k$, torej tudi $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \lim_k \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \ge r$. Med drugim to pomeni, da $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{a}$. Ker velja to za vsako točko $\boldsymbol{a} \in U$, je $\boldsymbol{x} \in U^c$.

Obratno, če $U$ ni odprta, obstaja taka točka $\boldsymbol{a} \in U$, da za vsak $r$ odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a})$ seka komplement $U^c$. To pomeni, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $\boldsymbol{x}_k \in U^c$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < 1/k$. Po izreku o sendviču sledi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \to 0$ oziroma $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$. Torej je $\boldsymbol{a}$ limitna točka za $U^c$ in hkrati $\boldsymbol{a} \notin U^c$, tako da $U^c$ ni zaprta množica.

TRDITEV. *Naj bodo $U, V$ in $U_i$, $i \in I$ (poljubna indeksna množica) odprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Potem sta odprti množici tudi $U \cap V$ in $\cup_{i \in I} U_i$.*

**Dokaz**. Sledi iz zgornje trditve in analogne (dualne) trditve za zaprte množice.

**Kompaktnost**

Za podmnožice v $\mathbb{R}^n$ bomo definirali pojem kompaktnosti, ki je posebno koristna lastnost, zlasti v zvezi z vedenjem zveznih funkcij, definiranih na takih podmnožicah.

DEFINICIJA. Podmnožica $K \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in K$ konvergentno podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$ z limito $\boldsymbol{x} = \lim_j \boldsymbol{x}_{k_j} \in K$.

ZGLED. Vsak zaprti interval $[a, b]$ na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. kompaktna množica. Poljubno zaporedje točk $x_k \in [a, b]$ je namreč omejeno, vsako omejeno zaporedje pa ima, kot vemo vsaj eno stekališče $x \in \mathbb{R}$. Torej obstaja podzaporedje $x_{k_j}$, ki konvergira k $x$. Ker je zaradi $a \leq x_{k_j} \leq b$ za vsak $j$ tudi $a \leq x \leq b$, je $x \in [a, b]$ in ta interval je kompaktna množica.

Kompaktnost ni isto kot zaprtost. Na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. poltrak $[0, \infty)$ zaprta množica, saj je limita poljubnega zaporedja nenegativnih števil tudi sama nenegativna. Ni pa to kompaktna množica, ker npr. zaporedje vseh naravnih števil $x_n = n$ nima nobenega konvergentnega podzaporedja.

V $\mathbb{R}$ ima vsako omejeno zaporedje konvergentno podzaporedje, zato je vsaka omejena in zaprta podmnožica kompaktna. Kot bomo takoj videli, velja podobno v $\mathbb{R}^n$.

Rečemo, da je podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ *omejena*, če je vsebovana v neki dovolj veliki odprti krogli $B_r(0)$ s središčem v izhodišču (namesto odprte krogle $B_r(0)$ bi lahko vzeli tudi zaprto kroglo $K_r(0)$). Ekvivalentna zahteva se glasi $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$. Na realni osi $\mathbb{R}$ je omejena množica vsebovana v nekem zaprtem inetervalu $[m, M]$.

TRDITEV. *Vsaka kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je zaprta in omejena.*

**Dokaz**. Naj bo $K$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$ in $\boldsymbol{x}$ limitna točka za $K$. Če je $\boldsymbol{x} = \lim \boldsymbol{x}_k$, kjer je $\boldsymbol{x}_k \in K$ za vsak $k$, obstaja zaradi kompaktnosti podzaporedje točk $\boldsymbol{x}_{k_j}$, ki konvergirajo proti neki točki $\boldsymbol{y} \in K$. Po drugi strani mora tudi podzaporedje konvergirati k $\boldsymbol{x}$, torej je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in K$. Množica $K$ je zaprta.
Če množica $K$ ne bi bila omejena, bi našli zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in K$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x}_k\| \geq k$ za vsak $k$. Zaradi kompaktnosti množice $K$ bi obstajalo podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$, ki bi konvergiralo proti neki točki $\boldsymbol{x} \in K$. Toda tudi za to podzaporedje bi veljalo $\|\boldsymbol{x}_{k_j}\| \geq k_j \geq j$ za vsak $j$, kar bi bilo v nasprotju z njegovo konvergenco. Kompaktna množica $K$ mora biti omejena.

Videli smo, da je vsaka kompaktna množica zaprta in omejena. Heine-Borelov izrek bo povedal, da v $\mathbb{R}^n$ velja tudi obratno. V ta namen potrebujemo naslednji dve trditvi.

TRDITEV. *Vsaka zaprta podmnožica kompaktne množice je kompaktna.*

**Dokaz**. Naj bo $K$ kompaktna množica in $C \subset K$ poljubna njena zaprta podmnožica. Če je $(\boldsymbol{x}_k)$ poljubno zaporedje v $C$, je to tudi zaporedje v množici $K$ zaradi kompaktnosti slednje obstaja podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$, ki konvergira proti neki točki $\boldsymbol{x} \in K$. Ker pa je $C$ zaprta množica in so vi členi tega podzaporedja v $C$, je tudi njihova limita $\boldsymbol{x}$ v $C$. To pomeni, da je $C$ sama kompaktna množica.

TRDITEV. *Kocka $[a, b]^n$ v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna množica.*

**Dokaz**. Imejmo zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n})$ iz kocke, tako da je $a \leq x_{k,i} \leq b$ za vsak $i$. Ker je $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktna množica, obstaja v zaporedju prvih koordinat $(x_{k,1})$ podzaporedje $(x_{k_j,1})$, ki konvergira proti $z_1 \in [a, b]$. Iz zaporedja števil $y_j = x_{k_j,2}$ lahko na isti način izberemo podzaporedje števil $y_{j_l} = x_{k_{j_l},2}$, ki konvergira proti $z_2 \in [a, b]$. Pri tem še vedno $x_{k_{j_l},1}$ konvergira proti $z_1$. In tako naprej; z diagonalnim procesom izberemo podzaporedje indeksov $p_1 < p_2 < ...$, tako da $x_{p_j,i}$ konvergira proti $z_i$ za vsak $i = 1, 2, ..., n$. Torej je tudi $\lim \boldsymbol{x}_{p_j} = \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \in [a, b]^n$ in ta kocka je kompaktna množica.

IZREK (Heine-Borel). *Podmnožica $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko takrat, ko je $K$ zaprta in omejena.*

**Dokaz**. V eno smer smo videli v eni od prejšnjih trditev. Naj bo zdaj $K$ zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$, tako da velja $\|\boldsymbol{x}\| \leq M$ za vsak $x \in K$. Torej je $K \subset [-M, M]^n$, se pravi zaprta podmnožica kompaktne množice $[-M, M]^n$ in zato tudi sama kompaktna.

TRDITEV. *Če je $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ padajoče zaporedje nepraznih kompaktnih množic v $\mathbb{R}^n$, je tudi njihov presek $\cap_{i=1}^{\infty} K_i$ neprazna množica.*

**Dokaz**. Ker so neprazne, lahko iz vsake množice $K_m$ izberemo točko $\boldsymbol{x}_m$. Zaporedje teh točk pripada največji množici $K_1$, tako da zaradi njene kompaktnosti obstaja podzaporedje $\boldsymbol{x}_{m_j}$, ki konvergira proti svoji limiti $\boldsymbol{x}$. Ker je pri poljubnem indeksu $i$ za $j \geq i$ tudi $m_j \geq m_i \geq i$ in so zato vse točke $\boldsymbol{x}_{m_j}$ v množici $K_i$, pripada tej množici tudi njihova limita $\boldsymbol{x}$. Torej je $\boldsymbol{x} \in K_i$ za vsak $i$, se pravi $\boldsymbol{x} \in \cap_{i=1}^{\infty} K_i$.

ZGLED. Primer padajočega zaporedja nepraznih kompaktnih množic v $\mathbb{R}$ je zaporedje vloženih zaprtih intervalov na realni osi, torej $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ za vsak $n \geq 0$. Ker so vsi ti vloženi intervali kompaktni, je po zgornji trditvi njihov presek neprazen. Če še privzamemo, da konvergirajo njihove dolžine proti nič, je v preseku natanko ena točka. To pove trditev o vloženih intervalih, ki nam za vsako omejeno zaporedje realnih števil v bistvu zagotavlja eksistenco vsaj enega stekališča.

Na podoben način bi z razpolavljanjem stranice dovolj velike kocke $[-M, M]^n$ videli, da ima tudi v $\mathbb{R}^n$ vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče.

# II. LIMITA IN ZVEZNOST FUNKCIJ

## 1. Preslikave med množicami

*Funkcija* ali *preslikava* med dvema množicama $A$ in $B$ je predpis $f$, ki vsakemu elementu $x$ množice $A$ priredi natanko določen element $y$ množice $B$. Važno je, da je predpis nedvoumen, se pravi, da je z njim element $y$, ki pripada elementu $x$, natanko določen. Rečemo, da $f$ preslika $x$ v $y$. V tem primeru je $x$ original, $y$ pa njegova slika pri preslikavi $f$. Včasih tudi rečemo, da je $y$ vrednost funkcije $f$ pri argumentu $x$. To dejstvo zapišemo na različne načine, npr. $f : x \mapsto y$ ali $y = f(x)$. Torej gre za posebno relacijo med elementi $x$ in $y$ v množici $A \cup B$. Včasih rečemo, da je funkcija *enolična* relacija, saj se ne more zgoditi, da bi pri nekem originalu $x$ veljalo $y_1 = f(x)$ in $y_2 = f(x)$ za različna $y_1$ in $y_2$. Graf te relacije imenujemo *graf funkcije* $f$ in je podmnožica v $A \times B$, namreč $G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in A\}$. Kadar sta $A$ in $B$ množici realnih števil, je to običajni graf funkcije, kot ga poznamo iz srednje šole. V ravnini, opremljeni s kartezičnim koordinatnim sistemom, si ga lahko narišemo kot krivuljo.

Kadar deluje med množicama $A$ in $B$ preslikava $f$, zapišemo to v krajši obliki $f :\ A \to B$. Vsi originali pri preslikavi $f$ sestavljajo množico $A$; pravimo, da je množica $A$ *domena* ali *definicijsko območje* funkcije $f$, kar zapišemo $A = D_f$. Vse slike pa sestavljajo neko podmnožico v množici $B$, *kodomeni* funkcije $f$. Množico vseh slik pogosto označimo z $Z_f$, torej $Z_f = \{f(x); x \in A\}$ in imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije $f$. V splošnem je to prava podmnožica v $B$, zgodi pa se tudi, da je enaka vsej množici $B$, torej $Z_f = B$. Tedaj rečemo, da je preslikava $f$ *surjektivna* oziroma, da je $f$ *surjekcija* in da $f$ preslika množico $A$ *na* množico $B$.

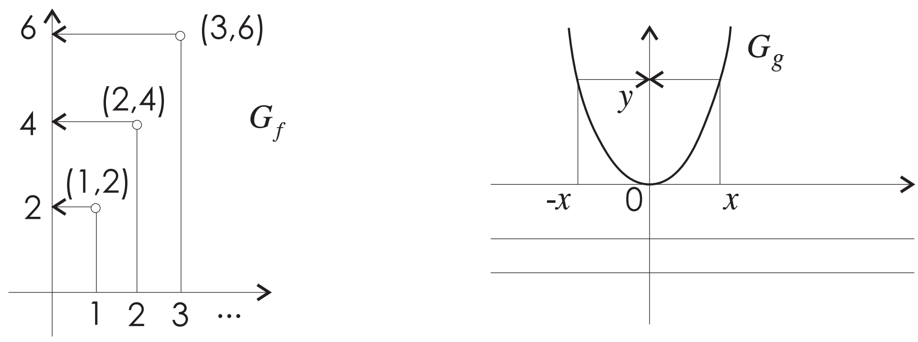
ZGLED. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definirana s predpisom $f(n) = 2n$, ima za zalogo vrednosti podmnožico vseh sodih naravnih števil $S = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$ in ni surjektivna. Tudi preslikava $g(x) = x^2$ iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ ni surjektivna. Njena zaloga vrednosti je enaka množici vseh nenegativnih realnih števil $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

Vsak original iz domene $A$ ima seveda samo eno sliko v $Z_f \subset B$. Lahko pa se primeri, da imata dva ali še več različnih originalov skupno sliko. (Lahko se npr. vsi elementi iz $A$ preslikajo v isti element v $B$, preslikava je torej lahko konstantna, spomnimo se konstantnega zaporedja.) Če to *ni* res, če imata torej različna originala vedno različni sliki, se pravi, če iz $x_1 \neq x_2$ sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$, potem rečemo, da je preslikava $f$ *injektivna* oziroma, da je $f$ *injekcija*.

ZGLED. Identična preslikava na množici $A$ je funkcija, označimo jo z $id_A$, ki vsakemu elementu $x \in A$ priredi spet element $x \in A$. Taka preslikava je seveda injektivna (in surjektivna). Prav tako je injektivna preslikava $f$ iz prejšnjega zgleda ($f(n) = 2n$). Ni pa injektivna druga preslikava $g$, saj je $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $-x \neq x$ za $x \neq 0$.

Iz grafa lahko enostavno razberemo, kdaj je funkcija $f$ surjektivna oziroma injektivna. Za realne funkcije realne spremenljivke, katerih graf lahko narišemo v ravnini, je to še posebej preprosto in nazorno. Funkcija $f$ je surjektivna, če vsaka vodoravna premica skozi točko kodomene (na ordinatni osi) vsaj enkrat preseka graf (originali so abscise teh presečišč). Funkcija $f$ je injektivna, če vsaka vodoravna premica preseka graf kvečjemu enkrat. Funkcija $f$ iz zadnjega zgleda je npr. injektivna, ni pa surjektivna (slika 3a).

Kvadratna funkcija $g$ pa ni ne eno ne drugo (slika 3b).




SLIKA 3. Diskretna in zvezna funkcija

Funkcija, ki je hkrati injektivna in surjektivna, se imenuje *bijekcija* ali *bijektivna preslikava.* Zanjo je značilno, da vsakemu elementu domene $A$ pripada natanko določen element kodomene $B$ (tako kot pri vsaki preslikavi) ter da je tudi vsak element kodomene $B$ slika natanko enega elementa iz domene $A$. Zato lahko za vsako bijekcijo $f$ definiramo novo preslikavo, ki vsakemu elementu $y$ kodomene $B$ priredi tisti natanko določeni original $x$ iz domene $A$, ki se z $f$ preslika v $y$. Tej novi preslikavi rečemo *inverzna funkcija* (k funkciji $f$) in jo označimo z $f^{-1}$. Zanjo očitno velja $y = f(x)$ natanko takrat, ko je $x = f^{-1}(y)$.

ZGLED. Preslikava $f$, ki elemente množice $A = \{1, 2, 3\}$ preslika v elemente množice $B = \{a, b, c\}$ (v istem - naravnem vrstnem redu), je seveda bijekcija. Bijekcija je npr. tudi preslikava $g$, ki preslika 1 v $b$, 2 v $a$ in 3 v $c$. Funkcija, določena z $1 \mapsto a,\ 2 \mapsto b$ in $3 \mapsto b$, pa ni niti injektivna niti surjektivna. K $f$ inverzna preslikava $f^{-1}$ preslika $a$ v 1, $b$ v 2 in $c$ v 3, medtem ko $g^{-1}$ preslika $a$ v 2, $b$ v 1 in $c$ v 3.

Funkcija je povsem določena, če poznamo njeno domeno in če vemo, kam se posamezen element preslika. To pomeni, da sta funkciji $f$ in $g$ enaki, če delujeta na isti domeni $A$ in velja $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in A$. Funkciji $f$ in $g$ iz prejšnjega zgleda npr. nista enaki.

Funkcije lahko včasih sestavljamo: iz dveh ali več napravimo nove, sestavljene funkcije ali kompozite. Če je npr. $f : A \to B$ in $g : B \to C$, obstaja *kompozitum* $g \circ f : A \to C$, definiran s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ za vsak $x \in A$.

ZGLED. Naj bo npr. $f$ preslikava iz množice $\{1, 2, 3, 4\}$ v množico $\{1, 2, 3, 4\}$, definirana s predpisom $1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2$ ter $g$ preslikava med istima množicama, določena z $1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 4$. Tedaj za $g \circ f$ velja $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 2$, za $f \circ g$ pa $1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2$. Od tod tudi vidimo, da sta kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ lahko različna, četudi oba obstajata.

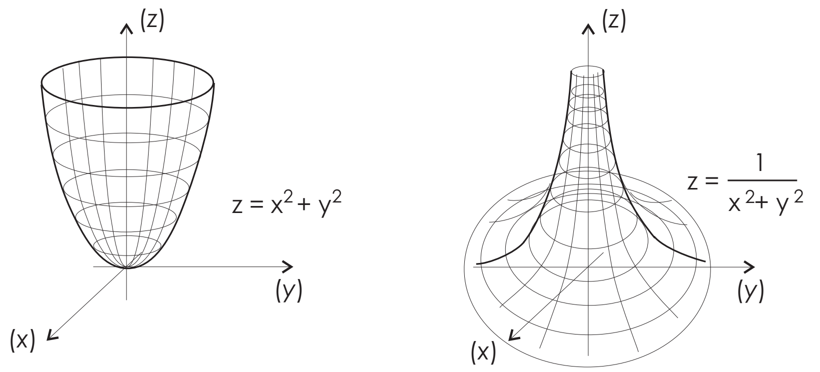
Kompozitum dveh bijektivnih preslikav je spet bijektivna preslikava, o čemer se zlahka prepričamo. Če je $f$ bijekcija in $f^{-1}$ njej inverzna preslikava, je $f^{-1} \circ f = id_A$ in $f \circ f^{-1} = id_B$. Tu smo z $id_a$ in $id_B$ označili posebno preprosti preslikavi iz $A$ na $A$ oziroma iz $B$ na $B$: $id_A$ je identična preslikava na množici $A$, ki pusti vsak element iz $A$ pri miru, se pravi, $id_A(x) = x$; podobno je $id_B$ identična preslikava na množici $B$.

**Funkcije ene ali več realnih spremenljivk**

V nadaljevanju bomo obravnavali samo funkcije $f$, katerih definicijsko območje (domena) $D_f$ bo neka podmnožica v $\mathbb{R}^n$, zaloga vrednosti $Z_f$ pa podmnožica v $\mathbb{R}$. Kadar je $n = 1$ govorimo o (realnih) *funkcijah ene realne spremenljivke* in zapišemo kar $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kadar je $n > 1$ pa o (realnih) *funkcijah več spremenljivk* oziroma v simboličnem zapisu $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Če domeno zamolčimo, se razume, da je $D_f$ množica tistih vrednosti v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{R}^n$, kjer je se da dani predpis izvršiti oziroma vrednost funkcije izračunati.

Kot ponavadi je $G_f = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}));\ \boldsymbol{x} \in D_f\}$ graf funkcije $f$, le da je to pot graf podmnožica v $D_f \times \mathbb{R}$, torej podmnožica v $(n+1)$-razsežnem prostoru $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. Pri funkciji ene realne spremenljivke je to neka krivulja v ravnini $\mathbb{R}^2$, pri funkciji dveh spremenljivk pa neka *ploskev* v prostoru $\mathbb{R}^3$.

ZGLED. $f(x) = x^2$ (glej sliko 1b), $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)$ (glej sliki 4 a in b).




SLIKA 4. Funkciji dveh spremenljivk

V definicijskem območju so zanimive podmnožice tistih realnih števil, pri katerih je funkcijska vrednost enaka 0. Taka števila imenujemo *ničle* funkcije, ki so lahko izolirane točke ali pa ne. Sestavljajo *ničelno množico.* Nadalje nas npr. zanima, kdaj so funkcijske vrednosti pozitivne ali negativne, kdaj naraščajo hkrati z argumentom, kdaj padajo, kdaj se periodično ponavljajo, kdaj so enake ali nasprotno predznačene pri nasprotnih argumentih (sodost, lihost) itd. Pri risanju grafov funkcij si pomagamo tudi z *nivojnicami* ali *izohipsami* (tj. s preseki z vodoravnimi ravninami) in z *meridiani* pri osno simetričnih ploskvah (tj. s preseki z navpičnimi ravninami skozi os $z$) oziroma v splošnem primeru s preseki z navpičnimi ravninami, pravokotnimi na os $x$ ali os $y$. Vse te lastnosti se zrcalijo na grafu funkcije, zato je prav, da jih poznamo.

Splošne funkcije so lahko zelo nenavadne, vendar se bomo v bodoče ukvarjali le z bolj preprostimi med njimi. Pri funkcijah ene realne spremenljivke bomo npr. obravnavali le elementarne funkcije, ki jih že poznamo iz srednje šole. To so npr. potence in polinomi, racionalne funkcije, korenske funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije, kotne (trigonometrične) in krožne (ciklometrične) funkcije. Tem funkcijam bomo računali limite, ugotavljali, ali so zvezne, jih odvajali in iskali njihove ekstreme. Kasneje pri analizi 2 jih bomo integrirali, jih razvijali v vrsto in uporabljali pri opisovanju ali (kot pogosto rečemo) modeliranju marsikaterega naravnega (in umetnega) pojava.

## 2. Limita funkcije

O funkciji dostikrat razmišljamo dinamično. Vprašamo se npr., kaj se dogaja z njenimi funkcijskimi vrednostmi, ko se argument bliža neki točki z roba definicijskega območja. To tendenco, kadar obstaja, opišemo s pojmom limita funkcije. Formalna definicija je naslednja:

DEFINICIJA. Število $b \in \mathbb{R}$ je *limita* funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, če za vsako zaporedje $(\boldsymbol{x}_n)$, katerega členi $\boldsymbol{x}_n$ pripadajo definicijskemu območju $D_f$, so različni od $\boldsymbol{a}$ in konvergirajo proti $\boldsymbol{a}$, ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(\boldsymbol{x}_n)$ konvergira proti številu $b$.

Iz definicije vidimo, da mora biti točka $\boldsymbol{a}$ limitna točka množice $D_f \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ sicer v bližnjih točkah $\boldsymbol{x}_n$ ne bi mogli računati funkcijskih vrednosti.

Dejstvo, da je število $b$ limita funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a}$, zapišemo z znakom limite:

$$b = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}).$$

ZGLED. Pokažimo $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Če poljubno zaporedje $(x_n)$ konvergira k 0, velja (po pravilih za računanje limit zaporedij realnih števil) $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = (\lim_{x_n\to\infty} x_n)^2 = 0$.

Podobno je npr. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$, saj za vsako zaporedje $(x_n)$ z lastnostjo $x_n \to 0$ velja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x_n} = 1$.

**Računanje limit funkcij ene spremenljivke**

Računanje limit poteka podobno kot pri zaporedjih, saj smo limito tudi definirali z zaporedji. Pri tem upoštevamo, da velja:
1. Limita vsote (razlike) funkcij je vsota (razlika) limit.
2. Limita produkta je produkt limit.
3. Limita kvocienta je kvocient limit pod pogojem, da je limita imenovalca različna od 0.

ZGLEDI. (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$,
(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$.
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$.

Limite ulomka ne moremo vedno izračunati kot kvocient limit. Pogosto pri tem dobimo nedoločen izraz oblike $0/0$ ali $\infty/\infty$. V takem primeru moramo najprej pokrajšati faktor, ki povzroča nedoločenost (kot smo to storili v zgledu (a)), včasih pa tudi odpraviti razlike korenov (kot v zgledu (b)), upoštevati že znane limite (v zgledu (c) smo potrebovali $\lim_{x\to 0} \sin x/x$, ki jo bomo še izpeljali) itd. Na koncu računanja običajno upoštevamo, da je za zvezne funkcije, ki jih bomo definirali v naslednjem razdelku, limita enaka funkcijski vrednosti.

TRDITEV. *Naj za funkcije $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v okolice točke $\boldsymbol{a}$ velja $f(\boldsymbol{x}) \le h(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$. Če obstajata limiti funkcije $f$ in $g$ v točki $\boldsymbol{a}$ in sta enaki, obstaja tudi limita funkcije $h$ v točki $\boldsymbol{a}$ in velja* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.

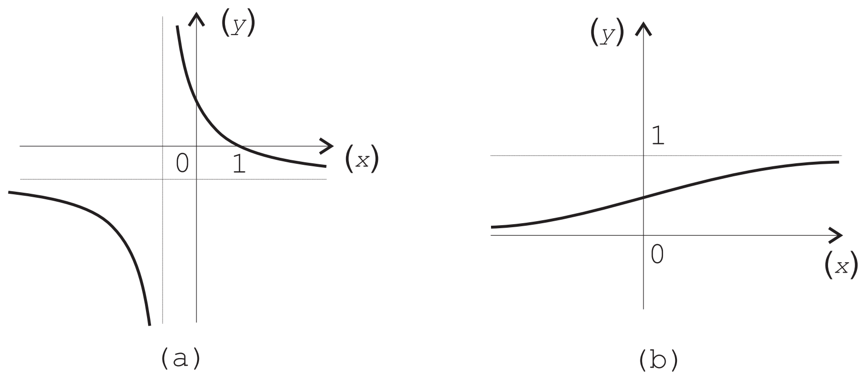
**Dokaz**. Takoj sledi iz izreka o sendviču za zaporedja.

**Limita v neskončnosti**

Pri funkcijah ene realne spremenljivke nas včasih zanima, kako se vedejo funkcijske vrednosti, kadar argument $x$ narašča (ali pada) preko vsake meje. Tedaj rečemo, da nas zanima limita funkcije v neskončnosti.

ZGLED. (a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$. Premica $y = -1$ je tedaj vodoravna asimptota funkcije $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (slika 5a).

(b) Zgodi se, da sta leva in desna asimptota (pri pogojih $x \to -\infty$ in $x \to \infty$) različni. Tako je npr. pri funkciji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ali npr. pri funkciji $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ (slika 5b). V tem primeru je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.



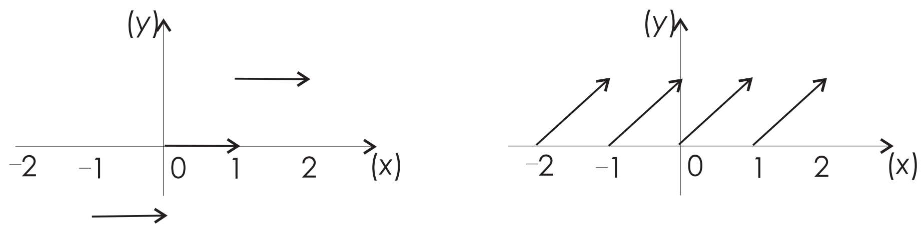

Slika 5. Limita v neskončnosti

**Neobstoj limit**

Včasih funkcija $f$ v kakšni točki $\boldsymbol{a}$ nima limite, čeprav se da poljubno blizu $\boldsymbol{a}$ računati njene vrednosti.

ZGLEDI. (a) Vzemimo npr. funkcijo ene spremenljivke, definirano za $x \neq 0$ s predpisom $f(x) = 1/x$. Ker je za vsako zaporedje $(x_n)$, ki konvergira k 0, zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ neomejeno (saj tedaj $|f(x_n)| \to \infty$) in zato ne konvergira, ni nobenega števila $b$, ki bilo limita funkcije $f$ v točki 0.

(b) Naj bo $f(x) = [x]$, celi del realnega števila $x$ (glej sliko 6a) in naj bo $a$ poljubno celo število. Vidimo, da je v neposredni bližini levo od števila $a$ vrednost funkcije $f$ enaka $a - 1$, desno pa $a$. Če torej npr. vzamemo zaporedje s členi $x_n$, ki se sicer približujejo celemu številu $a$, vendar ležijo izmenično enkrat levo enkrat desno od $a$, vidimo, da ima zaporedje funkcijskih vrdnosti $f(x_n)$ dve stekališči, $a-1$ in $a$. Limite torej ni in pri celem številu $a$ funkcija $f$ nima limite. Podobno velja za sorodno funkcijo $g(x) = x - [x]$, katere zaloga vrednosti je interval $[0, 1)$ (glej 6b).




Slika 6. Stopničasta in žagasta funkcija

V zgornji točki (b) imata obe funkciji $f$ in $g$ vsaj levo in desno limito.

**Leva in desna limita**

DEFINICIJA. *Leva limita* funkcije ene realne spremenljivke $f$ v točki $a$ je tako realno število $b$, da za vsako zaporedje $(x_n)$, katerega členi $x_n$ pripadajo definicijskemu območju $D_f$, so manjši od $a$ in konvergirajo proti $a$, ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ konvergira proti številu $b$. Podobno definiramo *desno limito* funkcije ene realne spremenljivke $f$ v točki $a$, če so vsi členi $x_n$ večji od $a$.

Dejstvo, da je $b$ leva limita funkcije $f$ v točki $a$ označimo z $b = \lim_{x \uparrow a} f(x)$, pa tudi z $b = \lim_{x \to a-} f(x)$ ali $b = \lim_{x \to a, x<a} f(x)$. Včasih celo pišemo $b = f(a-)$, kjer pa moramo biti pozorni, da $f(a-)$ ne pomeni vrednosti funkcije v točki $a$, ampak samo njeno levo limito. Desno limito zaznamujemo z $\lim_{x \downarrow a} f(x)$, z $\lim_{x \to a+} f(x)$ ali $\lim_{x \to a, x>a} f(x)$, včasih pa tudi z $f(a+)$. Tako npr. v zadnjem zgledu v točki (b) velja $\lim_{x\uparrow a} f(x) = a - 1$, $\lim_{x\downarrow a} f(x) = a$ in $\lim_{x\uparrow a} g(x) = 1$, $\lim_{x\downarrow a} f(x) = 0$. Vidimo, da sta leva in desna limita lahko različni, tudi če obstajata.

ZGLED. *Indikatorska* ali *karakteristična funkcija* dane podmnožice $A \subset \mathbb{R}$ je definirana s predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases} .$$

Za karakteristično funkcijo $\chi_{[a,b]}$ zaprtega intervala $[a, b]$ je npr. $\chi_{[a,b]}(x) = 1$, če je $a \le x \le b$, in 0 sicer. V vseh točkah, razen v krajiščih $a$ in $b$, obstaja limita (1 ali 0), leva limita v $a$ je 0, desna 1, leva limita v $b$ je 1, desna 0.

### Čudne funkcije

Obstajajo funkcije, ki v nobeni točki nimajo niti desne niti leve limite. Taka je npr. funkcija $d = \chi_{\mathbb{Q}}$, karakteristična funkcija množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$. Imenujemo jo tudi Dirichletova funkcija po nemškem matematiku L. Dirichletu (1805-1859), ki jo je prvi opisal. Če je namreč $a \in \mathbb{R}$ poljubna točka, in je $(x_n)$ poljubno zaporedje racionalnih točk, ki z leve strani konvergirajo proti $a$, konvergirajo funkcijske vrednosti $d(x_n)$ proti 1; če pa so $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, konvergira zaporedje $d(x_n)$ proti 0. Podobno je, če se bližamo točki $a$ z desne strani.

Še bolj čudno funkcijo je leta 1875 predlagal K.J. Thomae:

$$t(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 1/q & , \quad x = p/q \text{ (okrajšan ulomek)} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ta funkcija pa ima limito v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$, čeprav je divje nemonotona. Če se namreč z zaporedjem $x_n = p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ bližamo točki $a$, morajo imenovalci $q_n$ postajati čedalje večji in rasti v neskončnost; v nasprotnem primeru bi ulomki $p_n/q_n$ postali neomejeni, kar bi bilo v nasprotju s konvergenco $p_n/q_n \to a$. Torej je za vsako zaporedje $x_n \in \mathbb{Q}$ z lastnostjo $x_n \to a$ tudi $t(x_n) = 1/q_n \to 0$. Isto velja potem tudi za vsako zaporedje iracionalnih števil $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, in sploh za vsako zaporedje $x_n \to a$. Kot bomo videli kasneje, je ta funkcija zvezna v vsaki iracionalni točki (torej na gosti številni podmnožici v $\mathbb{R}$) in nezvezna v vsaki racionalni točki.

### Limita funkcije več spremenljivk

Pri funkcijah več spremenljivk imamo lahko podobne ali še hujše težave. Tam sicer ne moremo govoriti o levih in desnih limitah, pač pa je limita zaporedja funkcijskih vrednosti prav tako lahko odvisna od smeri, v kateri se zapredje točk $\boldsymbol{x}_n$ približuje točki $\boldsymbol{a}$.

ZGLED. Za $(x, y) \neq (0, 0)$ lahko definiramo funkcijo dveh realnih spremenljivk

$$f(x, y) = xy/(x^2 + y^2).$$

Poglejmo, kaj se s funkcijskimi vrednostmi te funkcije dogaja v bližini točke $(0, 0)$. Denimo, da zaporedje $(x_n, y_n)$ konvergira proti $(0, 0)$ vzdolž premice $y = kx$ s smernim koeficientom $k$. Na tej premici je

$$f(x, y) = f(x, kx) = kx^2/(x^2 + k^2x^2) = k/(1 + k^2).$$

Vidimo, da potem tudi zaporedje $f(x_n, y_n)$ konvergira k številu $k/(1+k^2)$. Ta limita je odvisna od smernega koeficienta $k$; torej ni ena sama in zato funkcija v točki $(0, 0)$ nima limite.

Isto lahko ugotovimo, če namesto kartezičnih koordinat $(x, y)$ uporabimo polarne koordinate $(r, \phi)$, za katere velja zveza $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$. Vrednost iste funkcije $f$ v točki $(r, \phi)$ je potem $f(r, \phi) = \cos\phi \sin\phi = \sin(2\phi)/2$, kar je spet odvisno od polarnega kota $\phi$.

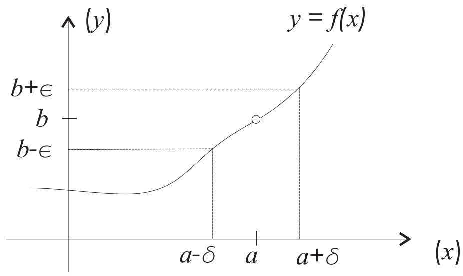
### Alternativna definicija limite funkcije

TRDITEV. Število $b \in \mathbb{R}$ je limita funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\boldsymbol{x} \in D_f$ in $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$ sledi $|f(\boldsymbol{x}) - b| < \epsilon$.

**Dokaz**. Denimo, da ne velja to, kar pravi trditev v drugem delu. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsako naravno število $k$ obstaja točka $\boldsymbol{x}_k \in D_f$, za katero je $0 < \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < 1/k$ in hkrati $|f(\boldsymbol{x}_k) - b| \geq \epsilon$. Zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k$ torej konvergira k točki $\boldsymbol{a}$, vendar pa zaporedje funkcijskih vrednosti $f(\boldsymbol{x}_k)$ ne konvergira k $b$. Torej $b$ ni limita funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a}$.

Obratno, naj bo to, kar pravi trditev v drugem delu, res in naj bo $\boldsymbol{x}_k$ poljubno zaporedje od $\boldsymbol{a}$ različnih točk iz $D_f$, ki konvergira k točki $\boldsymbol{a}$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in utrezen $\delta > 0$ v skladu z drugim delom trditve. Potem so od nekega indeksa $m$ dalje vsi členi zaporedja $\boldsymbol{x}_k$ taki, da je $0 < \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \delta$, in zato $|f(\boldsymbol{x}_k) - b| < \epsilon$. Torej so členi $f(\boldsymbol{x}_k)$ za $k \geq m$ v epsilonski okolici števila $b$. Ker velja to za vsak $\epsilon > 0$, konvergira zaporedje števil $f(\boldsymbol{x}_k)$ k številu $b$.

**Opomba**. Zgornjo trditev lahko imamo za novo definicijo limite funkcije $f$ v dani točki $\boldsymbol{a}$ in jo tudi pogosto uporabljamo. Podobno je pri funkcijah ene spremenljivke $b = \lim_{x\uparrow a} f(x)$, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x \in D_f$ in $0 < a - x < \delta$ sledi $|f(x) - b| < \epsilon$, in $b = \lim_{x\downarrow a} f(x)$, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x \in D_f$ in $0 < x - a < \delta$ sledi $|f(x) - b| < \epsilon$.




Slika 7. Limita funkcije z okolicami

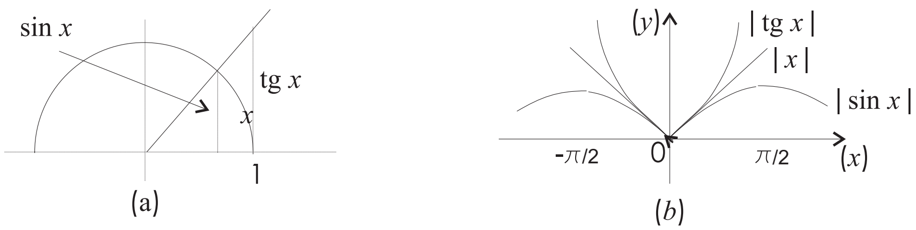
Za monotone (naraščajoče ali padajoče) funkcije, kakršna je npr. funkcija celi del, v vsaki točki obstajata leva in desna limita, nista pa nujno med seboj enaki.

TRDITEV. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na odprtem intervalu $(a, b)$ monotono naraščajoča funkcija. Potem ima $f$ v vsaki točki $c$ tega intervala levo in desno limito in velja*

$$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x).$$

**Dokaz**. Množica $A = \{f(x);\ a < x < c\}$ je neprazna in navzgor omejena z $f(c)$. Po Dedekindovem aksiomu ima supremum $L = \sup A \leq f(c)$. Ker pri nobenem $\epsilon > 0$ število $L - \epsilon$ ni več supremum, obstaja $x_0 \in A$ za lastnostjo $L - \epsilon < f(x_0) \leq L$ in za $x_0 < x < c$ imamo $L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \epsilon$. To pa že pomeni, da je $L$ leva limita funkcije $f$ v točki $c$ in da velja $L \leq f(c)$. Obstoj desne limite $D$ in neenakosti $D \geq f(c)$ dokažemo podobno.

Za padajoče funkcije velja podobna trditev z zamenjano neenakostjo, o čemer se lahko takoj prepričamo, če zgornjo trditev uporabimo na funkciji $-f$.




Slika 8. Neenakosti s sinusom in tangensom

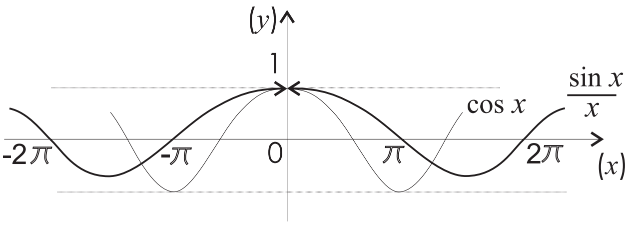
**Posebne limite**

(a) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$.

Dokaz sledi iz ocene $|1-\cos x| = \sin^2 x/(1+\cos x) \le x^2$ za $|x| \le \pi/2$. Uporabili smo oceno $\sin^2 x \le x^2$ oziroma $|\sin x| \le |x|$, ki jo brez težav izpeljemo za $x > 0$ iz geometrijskega premisleka, da je dolžina pravokotnice na abscisno os manjša od dolžine tetive, le-ta pa manjša od dolžine krožnega loka (glej sliko 8a). Za $x < 0$ upoštevamo simetrično situacijo. Iz iste slike s primerjanjem ploščin krožnega izseka in večjega pravokotnega trikotnika vidimo, da velja tudi neenakost $x \le \operatorname{tg} x$ oziroma splošneje $|x| \le |\operatorname{tg} x|$, ki jo bomo potrebovali kasneje. Na sliki 8b sta obe ključni neenakosti prikazani z grafi funkcij $|x|$, $|\sin x|$ in $|\operatorname{tg} x|$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Funkcija $f(x) = \sin x/x$ je definirana za $x \ne 0$, tako da je točka $a = 0$, v kateri računamo limito, limitna točka za definicijsko območje. Upoštevajmo, da za $|x| \le \pi/2$ velja ocena $\cos x \le \sin x/x \le 1$ (glej sliko 9), ki jo lahko izpeljemo iz prejšnje neenakosti $|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x|$ (slika 8b).




Slika 9. Funkcija $(\sin\, x)/x$

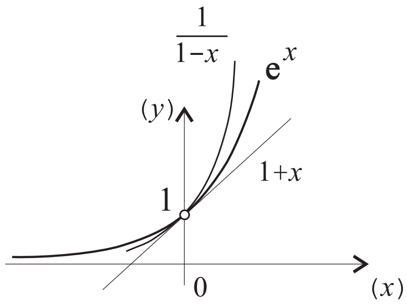
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Od prej vemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja ocena $(1+1/n)^n < \mathrm{e} < (1-1/n)^{-n}$, ki jo lahko preoblikujemo v oceno $1 < n(\sqrt[n]{e}-1) < n/(n-1)$. Odtod po izreku o sendviču vidimo, da je $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1$ in zato tudi $\lim_{n\to\infty}(n+1)(\sqrt[n]{e}-1) = 1$ in $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n+1]{e}-1) = 1$. Naj bo zdaj realen $x > 0$ in $n = [1/x]$, se pravi, da je $n \le 1/x < n+1$ oziroma $1/(n+1) < x \le 1/n$. Potem je zaradi naraščanja eksponentne funkcije $n(\sqrt[n+1]{e}-1) < (\mathrm{e}^x - 1)/x \le (n+1)(\sqrt[n]{e}-1)$. Če pošljemo $x$ po pozitivnih vrednostih proti 0, narašča $n = [1/x]$ v neskončno. Ker leva in desna stran konvergirata proti 1, mora veljati tudi $\lim_{x\downarrow 0}(\mathrm{e}^x - 1)/x = 1$. Odtod tudi takoj sledi, da je $\lim_{x\downarrow 0}\mathrm{e}^x = 1$, saj lahko pišemo $\mathrm{e}^x - 1 = x\cdot(\mathrm{e}^x-1)/x$ in upoštevamo pravilo za računanje limite produkta.

Prav tako vidimo, da je tudi leva limita $\lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x-1)/x = 1$, saj lahko z uvedbo nove spremenljivke $y = -x$ izračunamo levo limito $\lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x-1)/x = \lim_{y\downarrow 0}(\mathrm{e}^{-y}-1)/(-y) = \lim_{y\downarrow 0}(1-\mathrm{e}^{-y})/y = \lim_{y\downarrow 0}(1/\mathrm{e}^y)\cdot(\mathrm{e}^y-1)/y = 1$.

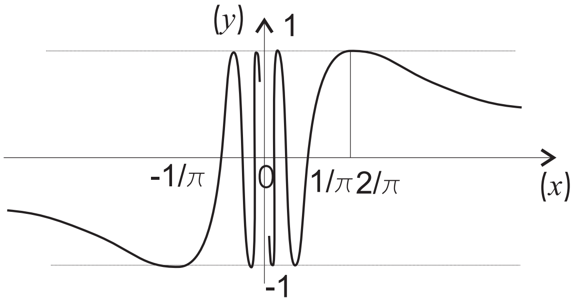
Če pa sta leva in desna limita enaki, obstaja tudi limita funkcije in je enaka tej vrednosti. Na enak način kot v primeru desne limite tudi vidimo, da je $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$, kar bomo potrebovali pri dokazu zveznosti eksponentne funkcije.

**Opomba**. Če bi že znali pokazati, da za $0 < x < 1$ velja funkcijska neenakost $1 + x < \mathrm{e}^x < 1/(1-x)$ (slika 10), bi iz nje takoj dobili še oceno $1 < (\mathrm{e}^x - 1)/x < 1/(1-x)$. Iz obeh potem najdemo desni limiti $\lim_{x\downarrow 0} \mathrm{e}^x = 1$ in $\lim_{x\downarrow 0}(\mathrm{e}^x - 1)/x = 1$. Levi limiti takoj sledita z zamenjavo spremenljivke $y = -x$, saj je $\lim_{x\uparrow 0} \mathrm{e}^x = \lim_{y\downarrow 0} 1/\mathrm{e}^y = 1$ in $\lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x - 1)/x = \lim_{y\downarrow 0}(\mathrm{e}^y - 1)/y \cdot 1/\mathrm{e}^y = 1$. Zgornjo neenakost bomo dokazali v enem od naslednjih razdelkov z uporabo odvoda.



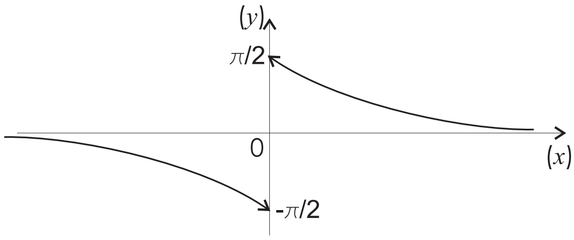

Slika 10. Eksponentna funkcija

(d) Limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ ne obstaja, ko gre $x \to 0$. Pravzaprav ne obstaja niti leva niti desna limita. Za različna zaporedja, ki konvergirajo k 0 dobimo lahko zelo različne vrednosti za limito zaporedja ustreznih funkcijskih vrednosti (izberimo npr. $x_n = 1/n\pi$, ali $x_n = 2/n\pi$ itd.). V bližini točke 0 graf funkcije divje oscilira (slika 11).




Slika 11. Funkcija $\sin(1/x)$

(e) Za funkcijo $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ je desna limita $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \pi/2$ in leva limita $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -\pi/2$. Vidimo, da sta limiti različni (slika 12).




Slika 12. Funkcija $\mathrm{arctg}(1/x)$

## 3. Zvezne funkcije

V zadnjem zgledu smo ugotovili, da sta leva in desna limita funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}(1/x)$ v točki 0 različni, na sliki 10 pa smo videli, da je graf te funkcije v točki 0 "pretrgan". Pravzaprav funkcija $f$ sploh ni bila definirana pri $x = 0$, pa tudi če bi bila, bi bil njen graf v točki 0 še vedno nepovezan. Tej pomanjkljivosti se izognejo t.i. zvezne funkcije.

### Različne definicije zveznosti

DEFINICIJA. Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *zvezna v točki* $\boldsymbol{a} \in D_f$, če za vsako zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in D_f$, ki konvergira proti $\boldsymbol{a}$, ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(\boldsymbol{x}_k)$ konvergira proti funkcijski vrednosti $f(\boldsymbol{a})$.

Vidimo, da je ta definicija zelo podobna definiciji limite funkcije, vendar pozor! Vlogo $b$ igra zdaj funkcijska vrednost $f(\boldsymbol{a})$, zato mora biti točka $\boldsymbol{a}$, v kateri preverjamo zveznost, v definicijskem območju funkcije in ne le njegova limitna točka. Ne zahtevamo pa več, da morajo biti členi zaporedja $\boldsymbol{x}_n$ različni od $\boldsymbol{a}$. Če je npr. $\boldsymbol{a}$ izolirana točka v $D_f$, je edino zaporedje v $D_f$, ki konvergira proti $\boldsymbol{a}$, konstantno zaporedje $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, tako da je v tem primeru tudi $f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{a})$ za vsak $k$. Torej je funkcija $f$ zvezna v vsaki izolirani točki svojega definicijskega območja.

Definicijo zveznosti lahko povemo tudi v jeziku $\delta$-$\epsilon$.

TRDITEV. *Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $\boldsymbol{a} \in D_f$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz $\boldsymbol{x} \in D_f$ in $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$ sledi $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \epsilon$.*

**Dokaz**. Denimo, da velja zgornji pogoj v zvezi z $\delta$ in $\epsilon$ in naj bo $(\boldsymbol{x}_k) \in Df$ poljubno zaporedje z lastnostjo $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$. Potem obstaja tudi tak $m \in \mathbb{N}$, da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \delta$ za vsak $k \geq m$. Torej velja za $k \geq m$ tudi $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{a})| < \epsilon$. Obratno, če pogoj v zvezi z $\delta$ in $\epsilon$ ne velja, obstaja tak $\epsilon > 0$, da lahko za vsak $k \in \mathbb{N}$ najdemo $\boldsymbol{x}_k \in D_f$, za katerega je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < 1/k$ in hkrati $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{a})| \geq \epsilon$. Tedaj torej zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergira proti $\boldsymbol{a}$, vendar pa zaporedje funkcijskih vrednosti $f(\boldsymbol{x}_k)$ ne konvergira proti $f(\boldsymbol{a})$.

Kadar točka $\boldsymbol{a} \in D_f$ ni izolirana, je gotovo limitna točka za množico $D_f \setminus \{\boldsymbol{a}\}$. V tem primeru lahko govorimo tudi o limiti funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a}$ in velja naslednja ugotovitev.

TRDITEV. *Funkcija $f$ je v neizolirani točki $\boldsymbol{a} \in D_f$ zvezna natanko takrat, ko ima v točki $\boldsymbol{a}$ limito in velja* $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.

Da je funkcija $f$ zvezna v neizolirani točki $a \in D_f$, mora biti torej izpolnjenih več pomembnih zahtev. Najprej mora biti funkcija $f$ v točki $\boldsymbol{a}$ definirana, tako da lahko izračunamo $f(a)$. Nadalje mora v točki $a$ obstajati limita funkcije $f$ in nazadnje mora biti ta limita enaka funkcijski vrednosti.

ZGLED. Funkcija $f(x) = \cos x$ je zvezna v točki 0, saj že vemo, da je $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, hkrati pa je tudi $\cos 0 = 1$. Funkciji $f(x) = \sin x/x$ in $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)/x$ v točki 0 sploh nista definirani, vendar bi z dodatno definicijo $f(0) = 1$ lahko njuno definicijsko območje razširili tudi v točko 0, tako da bi bili potem tam zvezni, saj smo videli, da je v obeh primerih $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Funkciji $f(x) = \sin(1/x)$ in $f(x) = \mathrm{arctg}(1/x)$ pa nikakor ne bi mogli definirati v točki 0 tako, da bi bili v njej zvezni, saj točka 0 ni izolirana od drugih točk iz $D_f$ in v njej funkciji nimata niti limite.

ZGLED. Poglejmo si še zveznost pri bolj čudnih funkcijah. Dirichletova funkcija $d = \chi_{\mathbb{Q}}$ ni zvezna v nobeni točki na realni osi, saj nobena točka ni izolirana in v nobeni točki nima limite. Za Thomaejevo funkcijo $t$ vemo od prej, da ima limito enako 0 v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Če je $a \in \mathbb{Q}$, se ta limita razlikuje od funkcijske vrednosti $t(a)$ ($= 1/q$, če $a = p/q$, okrajšan ulomek), torej v racionalni točki funkcija $t$ ni zvezna. Če pa $a \notin \mathbb{Q}$, je po definiciji $t(a) = 0$, torej isto kot limita funkcije, zato je v iracionalni točki funkcija $t$ zvezna.

**Lastnosti zveznih funkcij**

DEFINICIJA. Funkcija $f$ je *zvezna na podmnožici* $A \subset \mathbb{R}^n$, če je definirana in zvezna v vsaki točki $\boldsymbol{a} \in A$. V posebnem primeru je npr. funkcija ene spremenljivke $f$ zvezna na intervalu $I$, če je na $I$ definirana in zvezna v vsaki točki $a \in I$.

Zvezne funkcije imajo številne lepe lastnosti:

TRDITEV. *Vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer je definiran) zveznih funkcij so zvezne funkcije.*

**Dokaz**. To ni težko videti, če upoštevamo, da je limita vsote (razlike, produkta, kvocienta) enaka vsoti (razliki, produktu, kvocientu) limit. Trditev velja tako za zveznost v posamezni točki kot za zveznost na skupni podmnožici definicijskega območja.

ZGLED. Konstantna funkcija $f(x) = c$ in identična funkcija $f(x) = x$ sta zvezni takorekoč po definiciji. Potem so zvezne tudi potence $x^2,\ x^3,\ \ldots$ in njihove linearne kombinacije, se pravi, polinomi. Enako velja tudi za racionalne funkcije, ki so kot kvocienti polinomov zvezne povsod, kjer so definirane.

TRDITEV. *Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.*

**Dokaz**. Naj bo funkcija več spremenljivk $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $\boldsymbol{a} \in D_f$ in $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka funkcija ene spremenljivke, da je $f(\boldsymbol{a}) \in D_g$ in da je $g$ zvezna v $f(\boldsymbol{a})$. Potem iz $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ zaradi zveznosti funkcije $f$ sledi $f(\boldsymbol{x}_k) \to f(\boldsymbol{a})$, odtod pa zaradi zveznosti funkcije $g$ tudi $g(f(\boldsymbol{x}_k)) \to g(f(\boldsymbol{a}))$. Torej velja $(g \circ f)(\boldsymbol{x}_k) \to (g \circ f)(\boldsymbol{a})$, se pravi zveznost sestavljene funkcije $g \circ f$ v točki $\boldsymbol{a}$.

**Zveznost nekaterih elementarnih funkcij**

TRDITEV. *Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$ je zvezna funkcija.*

**Dokaz**. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubna točka. Ker je $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{x-a}$, je $\lim_{x\to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{x-a}$ $= \mathrm{e}^a \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^a$, saj zadnjo limito že poznamo od prej. To pomeni, da je eksponentna funkcija zvezna v poljubni točki $a$.

TRDITEV. *Sinusna funkcija $f(x) = \sin x$ je zvezna funkcija.*

**Dokaz**. Za vsako točko $a \in \mathbb{R}$ je $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$ in zato $|\sin x - \sin a| \le |x - a|$. Upoštevali smo, da je $|\cos\frac{x+a}{2}| \le 1$ in $|\sin\frac{x-a}{2}| \le |x-a|/2$. Torej iz $x \to a$ sledi $\sin x \to \sin a$.

Podobno bi dobili zveznost funkcije $\cos x$. Za funkciji tg $x$ in ctg $x$ bi potem zveznost izpeljali iz dejstva, da je kvocient zveznih funkcij spet zvezna funkcija (vsaka na svojem definicijskem območju).

**Zveznost monotonih funkcij**

Videli smo že, da ima monotona funkcija $f$ v vsaki točki $c$ levo limito $f(c-)$ in desno limito $f(c+)$. Razliko $s(c) = f(c+) - f(c-)$ imenujemo *skok* funkcije $f$ v točki $c$; lahko je pozitiven ali negativen, odvisno od tega, ali je $f$ naraščajoča ali padajoča funkcija. Njegovo absolutno vrednost $|s(c)| = |f(c+) - f(c-)|$ imenujemo *dolžina* skoka.

TRDITEV 1. *Monotono naraščajoča (padajoča) funkcija je na vsakem zaprtem intervalu $[a, b]$ nezvezna kvečjemu v števno mnogo točkah, kjer doživi skok končne dolžine.*

**Dokaz**. Naj bo npr. $f$ naraščajoča funkcija. Ker so za različne točke $c$, v katerih doživi funkcija $f$ skok, intervali $(f(c-), f(c+))$ disjunktni, je njihova skupna dolžina (tj. vsota vseh skokov) manjša od $f(b) - f(a)$. Med temi skoki jih je samo končno mnogo takih, da imajo dolžino večjo od 1, samo končno mnogo takih z dolžino večjo od 1/2, itd. Ker je unija števnih množic spet števna množica, mora biti vseh točk, v katerih doživi monotona funkcija $f$ skok, kvečjemu števno mnogo.

TRDITEV 2. *Zvezna strogo naraščajoča funkcija preslika interval $[a, b] \subset D_f$ bijektivno na interval $[f(a), f(b)]$.*

**Dokaz**. Strogo naraščajoča funkcija je gotovo injektivna. Pokažimo še njeno surjektivnost na interval $[f(a), f(b)]$. Naj bo $y \in (f(a), f(b))$ poljubno število. Definirajmo $c = \sup\{x \in [a, b];\ f(x) < y\}$ in $d = \inf\{x \in [a, b];\ f(x) > y\}$; potem imamo zaradi monotonosti $c \leq d$ in zaradi zveznosti $f(c) \leq y \leq f(d)$. Pokažimo, da je $f(c) = f(d) = y$. Če bi bilo $f(c) < f(d)$, bi bilo tudi $c < d$ in lahko bi našli tak par $x_1, x_2$, da bi veljalo $c < x_1 < x_2 < d$ in zato $f(c) < f(x_1) < f(x_2) < f(d)$. Vsaj ena od funkcijskih vrednosti, $f(x_1)$ ali $f(x_2)$, bi bila manjša od $y$ ali večja od $y$, kar pa je v nasprotju z definicijo števil $c$ in $d$. Če bi bilo npr. $f(x_1) < y$, potem $c$ ne bi bil supremum množice vseh $x$ z lastnostjo $f(x) < y$. Enako sklepamo, če bi bilo npr. $f(x_2) > y$. Protislovje dokazuje, da mora biti $f(c) = f(d) = y$ in funkcija $f$ je surjektivna.

Podobno je tudi zvezna strogo padajoča funkcija bijekcija iz $[a, b]$ na $[f(b), f(a)]$.

TRDITEV 3. *Inverzna funkcija zvezne strogo naraščajoče funkcije je zvezna funkcija.*

**Dokaz**. Naj bo funkcija $f$ na intervalu $[a, b]$ strogo naraščajoča in zvzena. Po trditvi 2 preslika bijektivno interval $[a, b]$ na interval $[f(a), f(b)]$ in ima zato inverzno funkcijo $f^{-1}$, ki preslika interval $[f(a), f(b)]$ nazaj na interval $[a, b]$. Hitro vidimo, da iz $y_1 < y_2$ sledi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, tako da je tudi inverz strogo naraščajoča funkcija.

Naj bo $f(a) < y_0 < f(b)$ in $\epsilon > 0$. Pokazali bomo, da je funkcija $f^{-1}$ zvezna v točki $y_0$, da torej obstaja tak $\delta > 0$, da iz $|y - y_0| < \delta$ sledi $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$. Ker je $f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$, je tudi $f(f^{-1}(y_0) - \epsilon) < y_0 < f(f^{-1}(y_0) + \epsilon)$. Če označimo $y_1 = f(f^{-1}(y_0) - \epsilon)$ in $y_2 = f(f^{-1}(y_0) + \epsilon)$, je torej $y_1 < y_0 < y_2$. Naj bo $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$, tako da je $\delta \leq y_0 - y_1$ in $\delta \leq y_2 - y_0$. Potem pa je za vsak $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ res tudi $y_1 < y_0 - \delta < y < y_0 + \delta < y_2$ in zaradi monotonosti inverza tudi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$, se pravi $f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$. To pomeni, da iz $|y - y_0| < \delta$ sledi $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$ in funkcija $f^{-1}$ je zvezna v točki $y_0$. Zveznost v krajiščih preverimo še hitreje, saj se npr. v interval $[a, a + \epsilon)$ preslikajo vsi $y \in [f(a), f(a + \epsilon))$ in lahko vzamemo $\delta = f(a + \epsilon) - f(a)$.

ZGLED. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ je zvezna bijekcija iz zaprtega poltraka $[0, \infty)$ na zaprti poltrak $[0, \infty)$; njen inverz je ravno korenska funkcija $g(x) = \sqrt{x}$, ki je po zadnji trditvi tudi zvezna funkcija. Podobno velja za višje korenske funkcije, kar pomeni, da lahko limito vedno spravimo pod znak za korenjenje.

Logaritemska funkcija $g(x) = \ln x$ je inverzna funkcija eksponentne funkcije $f(x) = e^x$. Ker smo videli, da je le-ta zvezna, je zvezen tudi njen obrat, logaritemska funkcija (kjer je definirana). Splošno potenco $a^x$ definiramo pri pozitivni osnovi $a > 0$ z uporabo eksponente in logaritemske funkcije, tako da postavimo $a^x = e^{x \ln a}$. Torej je tudi eksponentna funkcija

$f(x) = a^x$ zvezna kot kompozitum logaritemske funkcije, pomnožene s konstanto $a$, in eksponentne funkcije.

Enako so ciklometrične funkcije arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens inverzne funkcije k trigonometričnim funkcijam sinus (na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$), kosinus (na intervalu $[0, \pi]$), tangens (na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$) in kotangens (na intervalu $(0, \pi)$). Torej so prav tako zvezne.

Posledica vseh zgornjih trditev je naslednja splošna in uporabna ugotovitev:

IZREK. *Vse elementarne funkcije so zvezne, kjer so definirane.*

**Dokaz**. Elementarne funkcije so dobljene iz konstantne funkcije 1, identične funkcije, eksponentne funkcije in sinusne funkcije z uporabo štirih osnovnih računskih operacij (vsote, razlike, produkta in kvocienta), invertiranja (izračuna inverzne funkcije) in komponiranja (sestavljanja kompozitov). Videli smo, da so osnovne funkcije zvezne in da osnovne računske operacije, komponiranje in invertiranje (kadar je možno) to zveznost ohranjajo.

Torej bomo pri nadaljnjem računanju z elementarnimi funkcijami in njihovimi kompozitumi vedno lahko upoštevali, da so zvezne.

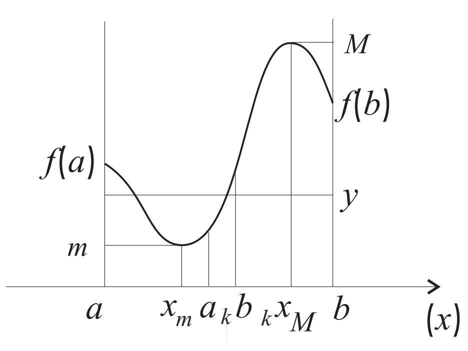
Dokažimo še nekaj (teoretično) pomembnih izrekov o funkcijah, ki so zvezne na zaprtem intervalu oziroma bolj splošno na kompaktni množici. Potrebovali jih bomo kasneje pri izpeljavi nekaterih rezultatov pri odvajanju in integriranju funkcij.

### Funkcije, ki so zvezne na zaprtem omejenem intervalu

IZREK 1. *Zvezna funkcija ene realne spremenljivke je na vsakem zaprtem intervalu $[a, b] \subset D_f$ omejena in zavzame na njem svojo največjo in svojo najmanjšo vrednost.*

**Dokaz**. Če $f$ ni omejena, obstaja zaporedje $x_n \in [a, b]$, da je $|f(x_n)| \geq n$ za vsak $n$. Toda zaporedje $(x_n)$ leži na intervalu $[a, b]$, zato je omejeno in ima vsaj eno stekališče $x \in [a, b]$. Obstaja podzaporedje $(x_{n_k})$, ki konvergira k $x$. Tedaj pa zaradi zveznosti funkcije $f$ velja $f(x_{n_k}) \to f(x)$. To je v nasprotju z neomejenostjo podzaporedja $f(x_{n_k})$, saj je tudi $|f(x_{n_k})| \geq n_k \geq k$ za vsak $k$.

Naj bo $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Obstaja zaporedje $x_n \in [a, b]$, za katero ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ konvergira proti $M$. Spet ima zaporedje $(x_n)$ stekališče $x_M \in [a, b]$ in spet obstaja podzaporedje $x_{n_k} \to x_M$ $(k \to \infty)$. Tedaj zaradi zveznosti velja tudi $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. Po drugi strani pa vemo, da $f(x_{n_k}) \to M$. Torej je $f(x_M) = M$. Podobno obravnavamo največjo spodnjo mejo $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$.




SLIKA 13. Zveza funkcija na kompaktnem intervalu

IZREK 2. *Na zaprtem intervalu $[a,b]$ zavzame zvezna funkcija $f$ ene realne spremenljivke vsako vrednost med najmanjšo in največjo.*

**Dokaz**. Naj bo $m \leq y \leq M$ in $f(x_m) = m \leq y$, $f(x_M) = M \geq y$ (glej sliko 13). Napravimo bisekcijo intervala $[x_m, x_M]$ (ali $[x_M, x_m]$, če je $x_m > x_M$), in izberemo interval, pri katerem je v enem (npr. levem) krajišču funkcijska vrednost pod $y$, v drugem pa nad $y$. To ponavljamo. Dobimo zaporedje intervalov $[a_k, b_k]$ z lastnostjo $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq b_2 \leq b_1$, $f(a_k) \leq y$, $f(b_k) \geq y$ za vsak $k$ in $b_k - a_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Po lemi o vloženih intervalih obstaja v preseku vseh intervalov natanko ena točka $x$. Ker je $x = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$, mora biti $f(x) = y$.

POSLEDICA 1. *Če je realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v krajiščih intervala $[a,b] \subset D_f$ nasprotno predznačena, se pravi, če velja $f(a)f(b) < 0$, ima na odprtem intervalu $(a,b)$ vsaj eno realno ničlo.*

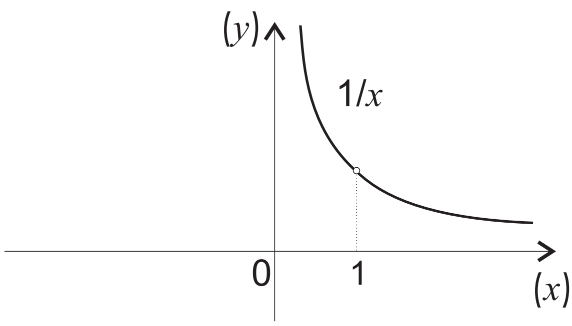
**Dokaz**. Pri omenjenih predpostavkah je 0 vmesna vrednost med $\min f(x)$ in $\max f(x)$, ki jo funkcija $f$ zavzame vsaj v eni točki $x_0 \in (a,b)$. Torej je $x_0$ ničla funkcije $f$.

POSLEDICA 2. *Nekonstantna zvezna funkcija preslika zaprt interval na zaprt interval.*

**Dokaz**. Po izreku 2 zavzame zvezna funkcija $f$ na zaprtem intervalu $[a,b]$ vsaj enkrat vsako vrednost iz množice $[\min f(x), \max f(x)]$, ki je zaradi nekonstantnosti funkcije $f$ pravi neizrojen interval. Torej je $f([a,b]) = [\min f(x), \max f(x)]$.

Zgornja dva izreka veljata samo na zaprtem (omejenem) intervalu in samo za zvezne funkcije, o čemer se lahko prepričamo na nekaj posebnih primerih.

ZGLED. (a) Funkcija $f(x) = 1/x$ je na polodprtem intervalu $(0,1]$ zvezna, vendar na njem ni omejena (slika 14). Če bi jo v točki 0 definirali npr. s predpisom $f(0) = 0$, ne bi bila več zvezna (in še vedno neomejena). Ista funkcija na poltraku $[1,\infty)$ pa je omejena in zvezna. Njen maksimum je 1, svoje najmanjše vrednosti pa ne zavzame nikjer. Poltrak seveda ni (omejen) zaprt interval.




Slika 14. Funkcija $1/x$

(b) Naj pomeni $[x]$ celi del števila $x$, torej največje celo število, ki ne presega števila $x$. Funkcija $f(x) = [x]$ je sicer povsod definirana, vendar v nobeni točki $x \in \mathbb{Z}$ ni zvezna (ni elementarna!); njen graf je sestavljen iz stopnic dolžine in višine 1 (glej sliko 3a). Podobno je graf funkcije $g(x) = x - [x]$ sestavljen iz poševnih daljic (glej sliko 3b). Tudi ta funkcija ni zvezna pri celih številih.

Na zaprtem intervalu $[0,1]$ funkciji $f$ in $g$ nista zvezni, čeprav sta obe omejeni. Funkcija $f$ ima npr. minimum 0 in maksimum 1, ne zavzame pa nobene vmesne vrednosti. Funkcija $g$ pa npr. ne zavzame niti svoje največje vrednosti.

**Zvezne funkcije na kompaktnih množicah v $\mathbb{R}^n$**

Izrek 1 lahko posplošimo na zvezne funkcije več realnih spremenljivk.

IZREK 3. *Če je $K$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, definirana na $K$, je $f(K) = \{f(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in K\}$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$.*

**Dokaz**. Izberimo poljubno zaporedje števil $y_k \in f(K)$. Naj bodo $\boldsymbol{x}_k \in K$ originali za $y_k$, tako da je $f(\boldsymbol{x}_k) = y_k$ za vsak $k$. Zaradi kompaktnosti množice $K$ lahko izberemo podzaporedje $\boldsymbol{x}_{k_j}$, ki konvergira proti $\boldsymbol{x} \in K$. Potem pa zradi zveznosti funkcije $f$ zaporedje $f(\boldsymbol{x}_{k_j})$ konvergira proti $f(\boldsymbol{x}) \in f(K)$, se pravi, da smo iz zaporedja $(y_k)$ lahko izbrali podzaporedje $y_{k_j}$, ki konvergira proti $f(\boldsymbol{x}) \in f(K)$.

IZREK 4. *Zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je na vsaki kompaktni podmnožici $K \subset D_f$ omejena in zavzame na njej svojo največjo vrednost $M = \max_{x\in K} f(x)$ in svojo najmanjšo vrednost $m = \min_{x\in K} f(x)$.*

**Dokaz**. Ker je po prejšnjem izreku tudi $f(K)$ kompaktna množica, je omejena, kar pomeni, da je funkcija $f$ omejena na $K$ in obstajata $M = \sup f(K)$ in $m = \inf f(K)$. Ker je $f(K)$ tudi zaprta podmnožica v $\mathbb{R}$, sta obe ti dve števili v $f(K)$, torej obstajata točki $\boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{x}_m \in K$ za lastnostjo $f(\boldsymbol{x}_M) = M$ in $f(\boldsymbol{x}_m) = m$.

**Enakomerna zveznost**

DEFINICIJA. Rečemo, da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *enakomerno zvezna* na podmnožici $S \subset \mathbb{R}^n$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\| < \epsilon$ za vsak par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in S$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$.

Isti $\delta$ je zdaj dober za vsak $\boldsymbol{a} \in S$, prej je bil odvisen tudi od $\boldsymbol{a}$, ne le od $\epsilon$. Vsaka funkcija, ki je enakomerno zvezna na $S$ je seveda tudi zvezna na $S$ (tj. v vsaki točki $\boldsymbol{a} \in S$). Obratno pa v splošnem ne velja.

ZGLED. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ na realni osi je zvezna povsod na $\mathbb{R}$. Ni pa povsod na $\mathbb{R}$ enakomerno zvezna; to velja le na vsaki omejeni podmnožici $S \subset \mathbb{R}$. To vidimo takole: za poljubna $a, x \in \mathbb{R}$ z lastnostjo $|x - a| < \delta$ je $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x + a)(x - a)| < |x + a|\delta$.

Če je $a$ fiksen, je $|x + a| < 2|a| + \delta < 3|a|$ in $|f(x) - f(a)| < 3|a|\delta < \epsilon$, kakor hitro je $\delta < |a|$ in $\delta < \epsilon/3|a|$. To pomeni, da je $f$ zvezna funkcija v točki $a$.

Če je $a$ lahko poljuben, naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ število $a = n/2 + 1/n$ in število $x = n/2 + 2/n$. Potem je $|x - a| = 1/n$ in $|x + a| = n + 3/n$, tako da je $|f(x) - f(a)| = |x + a|/n = 1 + 3/n^2 > 1$. To pomeni, da $f$ ni enakomerno zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

Če pa opazujemo $f$ le na omejeni podmnožici v $\mathbb{R}$, se pravi na nekem zaprtem intervalu $[-M, M]$, je $|f(x) - f(a)| = |(x + a)(x - a)| \leq 2M|x - a|$ in iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, kakor hitro je $\delta < \epsilon/2M$ in ne glede na to, kakšna sta $a$ in $x$, da le velja $-M \leq a, x \leq M$. Torej je na $[-M, M]$, in zato na vsaki omejeni podmnožici v $\mathbb{R}$, funkcija $f$ enakomerno zvezna.

Kar se je dalo pokazati v posebnem primeru kvadratne funkcije, velja tudi splošno.

IZREK 5. *Zvezna funkcija več spremenljivk $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je na kompaktni podmnožici $K \subset \mathbb{R}^n$ enakomerno zvezna.*

**Dokaz**. Denimo, da $f$ ni enakomerno zvezna na $K$. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ lahko najdemo v $K$ točki $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}_k$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k\| < 1/k$, za kateri velja $\|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{a}_k)\| \geq \epsilon$. Zaradi kompaktnosti množice $K$ obstaja podzaporedje $\boldsymbol{a}_{k_j}$, ki konvergira proti $\boldsymbol{a} \in K$. Tedaj velja tudi $\|\boldsymbol{x}_{k_j} - \boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{x}_{k_j} - \boldsymbol{a}_{k_j}\| + \|\boldsymbol{a}_{k_j} - \boldsymbol{a}\| \leq 1/k_j + \|\boldsymbol{a}_{k_j} - \boldsymbol{a}\| \to 0$ in zato $\boldsymbol{x}_{k_j} \to \boldsymbol{a}$. Zaradi zveznosti funkcije $f$ velja $f(\boldsymbol{a}_{k_j}) \to f(\boldsymbol{a})$ in $f(\boldsymbol{x}_{k_j}) \to f(\boldsymbol{a})$, kar pa je v nasprotju z neenakostjo $\|f(\boldsymbol{x}_{k_j}) - f(\boldsymbol{a}_{k_j})\| \geq \epsilon$, veljavno za vsak $j$. Protislovje dokazuje, da je funkcija $f$ enakomerno zvezna na $K$.

# III. ODVODI FUNKCIJ ENE REALNE SPREMENLJIVKE

## 1. Odvajanje funkcij ene spremenljivke

Odvajanje je ena najpomembnejših operacij na funkcijah. Z uporabo odvoda, kadar le-ta obstaja, lahko veliko bolje spoznamo vedenje funkcije v bližini določene točke, kot lahko to storimo le z računanjem njenih vrednosti in njene limite.

### Definicija in geometrijski pomen odvoda

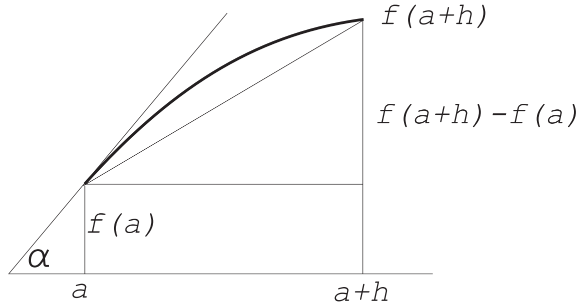
Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$, tj. na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, kjer je $\delta > 0$. Za $0 < |x-a| < \delta$ lahko izračunamo ulomek $(f(x)-f(a))/(x-a)$ oziroma $(f(a+h)-f(a))/h$, če pišemo $h = x-a$. Ta ulomek imenujemo *diferenčni kvocient* funkcije $f$ v točki $a$.

DEFINICIJA. Realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v točki $a$ *odvedljiva*, če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}.$$

To limito imenujemo *odvod* funkcije $f$ v točki $a$.

Geometrijsko pomeni odvod $f'(a)$ tangens naklonskega kota tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(a, f(a))$ in določa strmino (smer grafa) funkcije v dani točki. Naklon tangente dobimo kot limitno lego naklona sekante skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$ (glej sliko 15).




SLIKA 15. Geometrijski pomen odvoda

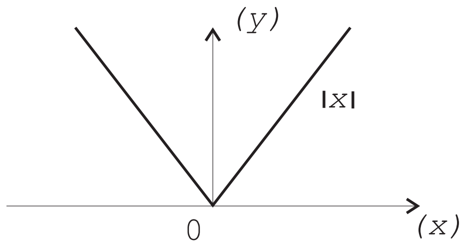
Smerni koeficent tangente v točki $(a, f(a))$ torej znaša $f'(a)$, zato je *enačba tangente* na krivuljo $y = f(x)$ v točki $a$ enaka $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. Premici, ki je pravokotna na tangento in poteka skozi njeno dotikališče, pa rečemo *normala*. Če tangenta ni vodoravna, se pravi, če $f'(a) \neq 0$, normala ni navpična in lahko zapišemo *enačbo normale* v obliki $y = f(a) - (x-a)/f'(a)$.

Včasih lahko izračunamo samo desno ali samo levo limito diferenčnega kvocienta. Tedaj imenujemo limito $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ *desni odvod* in limito $\lim_{x\uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $= \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ *levi odvod* funkcije $f$ v točki $a$. Rečemo, da je funkcija v $a$ *odvedljiva* *z desne* oziroma *z leve*.

ZGLEDI. (a) Če je $f(x) = kx + n$, je $f'(a) = k$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, saj je že diferenčni kvocient povsod enak $k$. Tangenta v katerikoli točki $a$ se ujema s premico $y = kx + n$, ki je graf funkcije $f$.

(b) Če je $f(x) = x^2$, je $f'(a) = 2a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, saj je diferenčni kvocient enak $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = 2a + h$. Tangenta na prabolo $y = x^2$ v točki $a$ ima enačbo $y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$.

(c) Funkcija $f(x) = |x|$ v točki $x = 0$ ni odvedljiva. Diferenčni kvocient v točki 0 je enak $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = |h|/h$. Zdaj je leva limita enaka $-1$, desna 1, limite pa ni. Odvod v točki 0 ne obstaja, obstajata pa levi in desni odvod v točki 0 in sta različna (glej sliko 16).




SLIKA 16. Funkcija $y = |x|$

TRDITEV. *Če je funkcija $f$ v točki $a$ odvedljiva, je tam tudi zvezna.*

**Dokaz**. Zapišimo $f(a + h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h$. Ker limita diferenčnega kvocienta obstaja, obstaja tudi limita razlike $f(a + h) - f(a)$ pri pogoju $h \to 0$ in je enaka 0. To pomeni, da je $\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a)$ in funkcija $f$ je v točki $a$ zvezna.

Obratno ne drži, kot pove prejšnji zgled (c). Funkcija $f(x) = |x|$ je v točki 0 (pravzaprav povsod) zvezna, ni pa tam odvedljiva. Prav tako je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

v točki 0 zvezna, vendar ne odvedljiva, ker limita $\lim_{h\to 0} \sin(1/h)$ ne obstaja.

DEFINICIJA. Funkcija $f$ je na odprtem intervalu $(a, b)$ odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$. Funkcija $f$ je na zaprtem intervalu $[a, b]$ odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$ in je v levem krajišču $a$ odvedljiva z desne, v desnem krajišču $b$ pa z leve.

Odvod funkcije $f(x)$ je odvisen od točke $x$, v kateri jo odvajamo; torej je $f'$ spet funkcija. Njeno definicijsko območje $D_{f'}$ je v splošnem manjše od definicijskega območja $D_f$ funkcije $f$, saj funkcija $f$ na $D_f$ ni nujno zvezna, kaj šele odvedljiva. Obstajajo celo funkcije, ki so na vsej realni osi zvezne in v nobeni točki odvedljive.

DEFINICIJA. Rečemo, da je funkcija $f$ na (odprtem ali zaprtem) $I$ *zvezno odvedljiva*, če je odvedljiva na $I$ (v krajiščih z ene strani) in je njen odvod $f'$ na $I$ zvezna funkcija (v krajiščih z ene strani).

Funkciji $f(x) = kx + n$ in $f(x) = x^2$ sta npr. zvezno odvedljivi povsod na realni osi. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

je odvedljiva povsod na $\mathbb{R}$, tudi v točki 0, vendar v v točki 0 ni zvezno odvedljiva. Njen odvod

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

v točki 0 namreč ni zvezna funkcija.

**Pravila za odvajanje**

Za odvajanje veljajo znana pravila:

1. *Odvod konstantne funkcije je* 0.

**Dokaz**. Že diferenčni kvocient konstante je enak 0.

2. *Odvod vsote in razlike*: $(u+v)' = u' + v'$, $(u-v)' = u' - v'$.

**Dokaz**. Uporabimo definicijo odvoda in pravila za računanje limit. Zapišimo npr. diferenčni kvocient za vsoto $u + v$:

$$\frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

če na desni strani obstajata limiti obeh diferenčnih kvocientov, ko $h \to 0$, obstaja tudi limita na levi strani.

To lahko posplošimo na več členov: $(u_1 + u_2 + ...u_n)' = u_1' + u_2' + ... + u_n'$.

3. *Odvod produkta*: $(uv)' = u'v + uv'$.

**Dokaz**. Spet zapišimo diferenčni kvocient za produkt:

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

in izračunajmo na obeh straneh limito pri pogoju $h \to 0$. Upoštevajmo, da pri tem velja $\lim_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$ zaradi zveznosti funkcije $v$.

Poseben primer je odvod funkcije pomnožene s konstanto: $(cu)' = cu'$.

Formulo za odvod produkta lahko posplošimo na več faktorjev, npr. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

4. *Odvod kvocienta*: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Dokaz izpustimo, ker je podoben kot dokaz za produkt, le nekoliko bolj zapleten.

5. *Odvod kompozituma*: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

To formulo imenujemo tudi *formula za odvod sestavljene oziroma posredne funkcije* ali *verižno pravilo.* Tu je $y = g(u)$, $u = f(x)$, tako da je $y$ posredna funkcija spremenljivke $x$. Pogosto ne vpeljemo novih oznak, ampak pišemo kar $y = y(u)$, $u = u(x)$, s čimer nakažemo, od česa so odvisne nastopajoče spremenljivke. V tem primeru se verižno pravilo glasi $y'(x) = y'(u(x))u'(x)$.

**Dokaz**. Označimo diferenčni kvocient funkcije $f$ v točki $x$ s $k_x(h)$, torej $k_x(h) = (f(x+h) - f(x))/h$. Torej je $f(x+h) = f(x) + hk_x(h)$. Če je $k_x(h) = 0$ za vse dovolj majhne $|h|$, je $f(x+h) = f(x)$; zato tudi $g(f(x+h)) - g(f(x)) = 0$ in odvod sestavljene funkcije je enak nič. Če pa je $k_x(h) \neq 0$, lahko zapišemo diferenčni kvocient sestavljene funkcije v obliki

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x) + hk_x(h)) - g(f(x))}{hk_x(h)} \cdot k_x(h).$$

Predpostavimo, da obstajata odvoda $f'(x)$ in $g'(f(x))$. Potem konvergira prvi faktor pri pogoju $h \to 0$ proti $g'(f(x))$, drugi pa proti $f'(x)$.

**Zgled**. Če je $y = (2x^2 + x)^3$, je $y' = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$.

6. *Odvod inverzne funkcije*: Če je $y = f^{-1}(x)$ inverzna funkcija k funkciji $f$, je $y' = 1/f'(y),\ y = f^{-1}(x)$, torej $y' = 1/f'(f^{-1}(x))$.

**Dokaz**. Uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije, saj je $x = f(y),\ y = f^{-1}(x)$. Potem z upoštevanjem točke 5 dobimo z odvajanjem na spremenljivko $x$ na obeh straneh $1 = f'(y)y'$ oziroma $y' = 1/f'(y)$, kjer je seveda $y = f^{-1}(x)$.

**Odvodi elementarnih funkcij**

Vse elementarne funkcije so ne samo zvezne, ampak tudi odvedljive. Njihove odvode najdemo po definiciji, upoštevati pa je potrebno nekatere limite iz prejšnjega razdelka in splošna pravila za odvajanje.

1. *Odvod konstante je* 0. To smo že videli.

2. *Odvod potence je* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Za potence z naravnim eksponentom $n \in \mathbb{N}$ je ta formula poseben primer formule za odvod produkta več faktorjev. Za splošne potence bomo to formulo izpeljali takoj, ko bomo poznali odvod eksponentne in logaritemske funkcije.

3. *Odvod eksponentne funkcije je* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

**Dokaz**. Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta $\frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \frac{e^h - 1}{h}$ pri pogoju $h \to 0$ (upoštevajmo, da je limita zadnjega ulomka enaka 1).

Podobna formula velja tudi za eksponentne funkcije z drugo osnovo. Za $a > 0$, $a \neq 1$ in $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ npr. dobimo po pravilu za odvod posredne funkcije $f'(x) = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

4. *Odvod logaritemske funkcije je* $(\ln x)' = 1/x$.

**Dokaz**. Logaritemska funkcija $y = \ln x$ je inverzna k eksponentni, zato iz $x = \mathrm{e}^y$ dobimo $y' = 1/\mathrm{e}^y = 1/x$.

Odvajamo lahko tudi logaritme z drugo osnovo $a > 0,\ a \neq 1$, če jih prej prevedemo na osnovo e. Dobimo $\log_a x = \ln x / \ln a$ in zato $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.

Zdaj se lahko lotimo tudi splošne potence ($x > 0$, $n \in \mathbb{R}$), ki jo najprej zapišemo v obliki $x^n = \mathrm{e}^{n \ln x}$. Torej je $(x^n)' = \mathrm{e}^{n \ln x} \cdot n/x = nx^{n-1}$, se pravi formalno enaka formula kot za naravne eksponente.

5. *Odvodi kotnih funkcij so*: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg}x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$, $(\mathrm{ctg}x)' = -1/\sin^2 x = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$.

**Dokaz**. Za sinusno funkcijo je po definiciji

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = (2/h)\cos(x + h/2)\sin h/2$$

in ta diferenčni kvocient konvergira proti $\cos x$, ko $h \to 0$. Odvod kosinusa dobimo podobno ali z odvajanjem formule $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Odvoda za tangens in kotangens dobimo z odvajanjem ustreznih ulomkov, $\sin x/\cos x$ in $\cos x/\sin x$.

6. *Odvodi krožnih funkcij so*: $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, $(\mathrm{arcctg}x)' = -1/(1+x^2)$.

**Dokaz**. Upoštevajmo pravila za odvod inverznih funkcij. Če je npr. $y = \arcsin x$, je $x = \sin y$ in zato $y' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$. Podobno dobimo iz $x = \mathrm{tg}\, y$ odvod za arkus tangens: $y' = 1/(1+\mathrm{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$.

### Diferencial in diferenciabilnost funkcije

Diferenčni kvocient funkcije $f$ (v poljubni točki $a$) pogosto označimo z $\Delta y/\Delta x$, kjer je $\Delta x = x - a$ razlika argumentov in $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(a)$ razlika funkcijskih vrednosti. Pogosto pišemo kar $\Delta x = dx$ in to razliko imenujemo *diferencial neodvisne spremenljivke*.

DEFINICIJA. *Diferencial* (odvedljive) *funkcije* $f$ v točki $a$ je izraz oblike $df = f'(a)dx$, torej produkt odvoda funkcije $f$ v točki $a$ in diferenciala neodvisne spremenljivke $dx$.

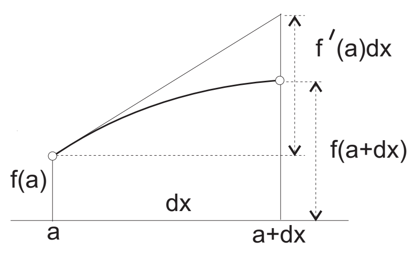
Če je $f(x) = x$ za vsak $x$, je $f'(a) = 1$ za vsak $a$ in zato $df = dx$; diferencial (identične) funkcije $f(x) = x$ se v tem primeru ujema z diferencialom neodvisne spremenljivke $x$.

**Opomba**. Odvod dobimo kot limito diferenčnega kvocienta $\Delta y/\Delta x$, ko pošljemo $\Delta x$ proti nič, zato se je za odvod funkcije že od Leibniza dalje uveljavil tudi izraz $dy/dx$ oziroma $df/dx$.

Ker je diferenčni kvocient pri majhnem $dx$ približno enak odvodu funkcije $f$ v točki $a$, torej $\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \approx f'(a)$, imamo tudi približno formulo

$$f(a+dx) - f(a) \approx f'(a)dx.$$

To formulo pogosto uporabljamo, kadar želimo približno oceniti vrednost funkcije $f$ v premaknjeni točki $x + dx$ z vrednostjo funkcije $f$ v točki $x$. Geometrijsko to pomeni, da vrednost funkcije v bližini dane točke $x$ ocenimo z vrednostjo tangente na krivuljo $y = f(x)$ v tej točki (glej sliko 17).




SLIKA 17. Geometrijski pomen diferenciala

ZGLED. 1. Za $f(x)=\sqrt{x}$ je $f(a+dx)\approx\sqrt{a}+\frac{dx}{2\sqrt{a}}$, zato imamo npr. za točko $a=1$ in za premik $dx=0.1$ oceno $\sqrt{1.02}\approx 1+0.02/2=1.01$.
2. Zaradi $\sin(a+dx)\approx\sin a+\cos a dx$ dobimo npr. za $a=0$ in $dx=\pi/180$ vrednost $\sin 1^0\approx\sin 0+\cos 0\cdot\pi/180=\pi/180\approx 0.018$.

Aproksimativni formuli $f(a+dx)-f(a)\approx f'(a)dx$ dajmo še natančnejšo obliko. Če pišemo $dx=h$, potem formula $f(a+h)-f(a)\approx f'(a)h$ pravzaprav pomeni

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0$$

Tu je preslikava $h\mapsto f'(a)h$ neka linearna funkcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

DEFINICIJA. Rečemo, da je funkcija $f$ *diferenciabilna* v točki $a$, če obstaja tako realno število $A$ (odvisno od funkcije $f$ in točke $a$), da je

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h}=0.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je število $A$, če obstaja, natanko določeno in da je funkcija $f$ diferenciabilna v točki $a$ natanko takrat, ko je odvedljiva v točki $a$, in da je $A=f'(a)$.

Res, če bi tudi število $B$ ustrezalo zgornjemu pogoju, bi imeli

$$B-A=\lim_{h\to 0}\frac{Bh-Ah}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Bh}{h}=0.$$

Poleg tega je $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h}=0$ natanko takrat, ko je $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$, se pravi, natanko takrat, ko je funkcija $f$ odvedljiva v točki $a$ in njen odvod enak $A$.

**Višji odvodi**

DEFINICIJA. Višje odvode funkcije $f$ definiramo rekurzivno: $f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$ za $n\geq 1$, pri čemer je $f^{(1)}=f'$. Npr. $f^{(2)}=f^{(1)\prime}$ oziroma $f''=(f')'$ itd. Druga oznaka za $n$-ti odvod funkcije $f$ je $d^nf/dx^n$.

ZGLEDI. Višje odvode nekaterih funkcij, npr. $f(x)=x^n,\ f(x)=\mathrm{e}^x,\ f(x)=\ln x,\ f(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x$ izračunamo brez težav.
Tako je npr. $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$ za vsak $n$, $(x^n)^{(k)}=n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$ za $k\leq n$ in $(x^n)^{(k)}=0$ za $k>n$. Tudi za vsak polinom $f$ stopnje $n$ je $f^{(k)}=0$ za $k>n$. Odvod logaritemske funkcije $f(x)=\ln x$ je, kot vemo, $f'(x)=1/x$, zato je drugi odvod $f''(x)=-1/x^2$, tretji odvod $f^{(3)}(x)=2/x^3$, četrti odvod $f^{(4)}(x)=-6/x^4$ itd.; splošno ugotovimo (z indukcijo), da je $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ za vsak $n$. Z indukcijo se lahko tudi prepričamo, da je $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$ in $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$ za vsak $n$.

Oglejmo si še, kako večkrat odvajamo produkt dveh funkcij $uv$. Vemo že, da je $(uv)'=u'v+uv'$. Potem je $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$. Z indukcijo potem najdemo splošno pravilo:

**Leibnizova formula**: $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)}+...+uv^{(n)}$ ali na kratko $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$.

Če je funkcija $f$ na intervalu $[a,b]$ odvedljiva, je $f$ seveda tam zvezna (v krajiščih le z ene strani). Podobno velja: Če je funkcija $f$ na intervalu $[a,b]$ dvakrat odvedljiva, je prvi odvod $f'$ tam zvezna funkcija in zato isto velja tudi za funkcijo $f$. Zato je smiselna naslednja definicija.

DEFINICIJA. Naj bo $I$ odprti ali zaprti, omejeni ali neomejeni interval. Rečemo, da pripada funkcija $f$ razredu $C^n(I)$, $n = 0, 1, 2, ...$, če je funkcija $f$ na $I$ $n$-krat odvedljiva in je $n$-ti odvod $f^{(n)}$ na $I$ zvezna funkcija.

Razred $C^0(I) = C(I)$ je množica vseh zveznih, razred $C^1(I)$ pa množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na intervalu $I$. Posebej pa definiramo še razred $C^\infty(I) = \cap_{n=0}^\infty C^n(I)$ neskončnokrat odvedljivih funkcij na $I$. Elementarna funkcija $f$ običajno spada v $C^\infty(I)$, če je $I \subset D_f$. Tako so npr. neskončnokrat odvedljivi vsi polinomi, eksponentna funkcija, logaritemska funkcija, vse trigonometrične in ciklometrične funkcije itd. Neskončnokrat so odvedljive tudi nekatere neelementarne funkcije, npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

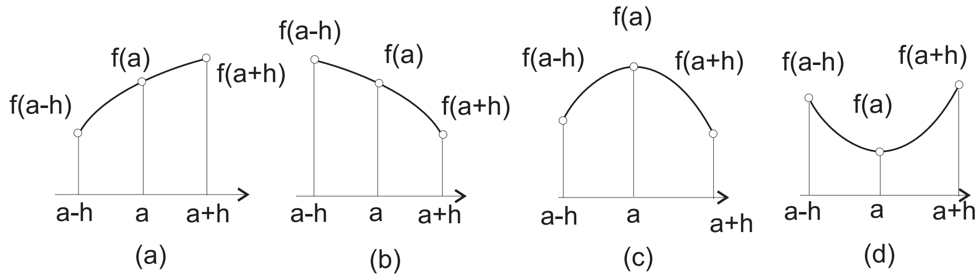
Pri tej funkciji je 0 edina kritična točka, kjer je treba preveriti odvedljivost. Npr. za prvi odvod iz $|f'(0)| = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/|x|}}{|x|} = \lim_{y\downarrow 0} \dfrac{e^{-1/y}}{y} = 0$ dobimo $f'(0) = 0$. Za drugi odvod moramo najprej izračunati odvod v točkah $x \neq 0$. Dobimo $f'(x) = \pm \dfrac{e^{-1/|x|}}{x^2}$ (+, če je $x > 0$ in $-$, če je $x < 0$), zato je $|f''(0)| = \lim_{x\to 0} \dfrac{|f'(x)|}{|x|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/|x|}}{|x|^3} = 0$. Podobno velja tudi pri višjih odvodih, vsi so v točki 0 enaki nič.

## 2. Uporaba odvoda pri proučevanju funkcij

Zdaj bomo naše znanje o odvajanju uporabili pri podrobnejši obravnavi vedenja funkcij v posamezni točki ali na vsem intervalu. Naj bo odslej $I$ poljuben *odprt* interval in $f$ realna funkcija, definirana in zvezna na $I$.

Spomnimo se, da je funkcija $f$ strogo naraščajoča na intervalu $I$, če za vsak $x, y \in I$ iz $x < y$ sledi $f(x) < f(y)$. To je globalni pojem naraščanja funkcije na celem intervalu, potrebovali pa bomo tudi naslednji lokalni pojem naraščanja funkcije v eni sami točki.

DEFINICIJA. Pravimo, da je funkcija $f$ v točki $a \in I$ *naraščajoča*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ in da za $0 < h < \delta$ velja $f(a - h) < f(a) < f(a + h)$ (glej sliko 18).




SLIKA 18. Lokalno vedenje funkcije

TRDITEV. *Funkcija $f$ je na intervalu $I$ strogo naraščajoča natanko takrat, ko je naraščajoča v vsaki točki iz $I$.*

**Dokaz**. Iz strogega naraščanja funkcije $f$ na intervalu $I$ seveda takoj sledi naraščanje funkcije $f$ v vsaki točki tega intervala. Obratno, naj bo funkcija $f$ naraščajoča v vsaki točki intervala $I$. če $f$ na $I$ ni strogo naraščajoča, obstaja taka točka $a \in I$, da množica $A = \{x \in I;\ a < x \text{ in } f(x) \le f(a)\}$ ni prazna. Ker je navzdol omejena z $a$, obstaja

$b = \inf A$. Zaradi zveznosti funkcije $f$ iz konvergence $x_k \to b$, $x_k \in A$, sledi konvergenca $f(x_k) \to f(b)$ in zato $f(b) \leq f(a)$. Če je $a < b$, za $a < x < b$ velja $f(b) \leq f(a) < f(x)$ po definiciji infimuma $b$, zato funkcija $f$ ni naraščajoča v točki $b$. Če pa je $a = b$, obstajajo poljubno blizu $a$ točke $x_k > a$ z lastnostjo $f(x_k) \leq f(a)$, tako da funkcija $f$ ni naraščajoča v točki $a$.

Podobno definiramo tudi padajoče funkcije (glej sliko 16b).

DEFINICIJA. Funkcija $f$ je v točki $a \in I$ *padajoča*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ in da za $0 < h < \delta$ velja $f(a - h) > f(a) > f(a + h)$ (slika 16b).

Spet je zvezna funkcija $f$ padajoča v vsaki točki na $I$, če je strogo padajoča na $I$ v smislu, da za vsak $x, y \in I$ iz $x < y$ sledi $f(x) > f(y)$.

Pri odvedljivih funkcijah lahko naraščanje in padanje funkcije v eni točki karakteriziramo z odvodom.

TRDITEV 1. *Če je $a \in I$ in za odvedljivo funkcijo $f$ velja $f'(a) > 0$, je funkcija $f$ v točki $a$ naraščajoča. Če je $f'(a) < 0$, je funkcija $f$ v točki $a$ padajoča.*

**Dokaz**. Če je odvod $f'(a) > 0$, obstaja tak $\delta > 0$, da je $\dfrac{f(a+h) - f(x_0)}{h} > 0$ in $\dfrac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h} > 0$ za $0 < h < \delta$. Drugi del dokažemo podobno.

Poleg naraščanja ali padanja se funkcija v posamezni točki lahko vede tudi drugače.

DEFINICIJA. Funkcija $f$ ima v točki $a \in I$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ in da za $0 < h < \delta$ velja velja $f(a) \geq f(a \pm h)$. Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogem lokalnem maksimumu* (glej sliko 16c).

DEFINICIJA. Funkcija $f$ ima v točki $a \in I$ *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ in da za $0 < h < \delta$ velja velja $f(a) \leq f(a \pm h)$. Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogem lokalnem minimumu* (glej sliko 16d).

Če ima funkcija $f$ v točki $a \in I$ svoj lokalni maksimum ali svoj lokalni minimum, potem rečemo, da ima v točki *a lokalni ekstrem.* Ta pojem moramo ločiti od globalnega ekstrema funkcije $f$ na intervalu $I$. Vsak globalni ekstrem je tudi lokalni, obratno na sploh ni res. Zvezna funkcija na odprtem intervalu $I$ morda nima niti lokalnih niti globalnih ekstremov, na zaprtem intervalu pa jih lahko ima v krajišču (npr. če je strogo naraščajoča).

Še na eno podrobnost opozorimo v zvezi z gornjo definicijo: funkcija lahko ima v točki $a$ lokalni ekstrem (maksimum ali minimum) natanko takrat, ko v $a$ niti ne narašča niti ne pada. Tudi na intervalu $I$ konstantna funkcija ima npr. v vsaki točki tega intervala svoj lokalni (in globalni) maksimum in hkrati svoj lokalni (in globalni) minimum. V tem primeru njene ekstremne točke niso izolirane.

Pri odvedljivih funkcijah imamo lep potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema.

TRDITEV 2. *Če ima odvedljiva funkcija $f$ v točki $a \in I$ lokalni ekstrem (maksimum ali minimum), je $f'(a) = 0$.*

**Dokaz**. Sledi iz trditve 1: če bi bil $f'(a) > 0$ ali $f'(a) < 0$, bi v točki $a$ funkcija $f$ naraščala ali padala.

DEFINICIJA. Točko $a$, v kateri je $f'(a) = 0$, imenujemo *stacionarna točka* funkcije $f$.

Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka, obratno pa ni nujno.

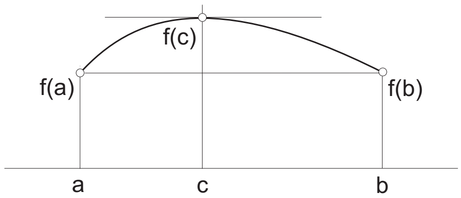
**Zgled**. Funkcija $f(x) = x^3$ ima v točki 0 ničlo 3. stopnje, zato velja $f^{(3)}(0) = 0$, vendar se hitro lahko prepričamo, da je funkcija v točki 0 naraščajoča.

**Opomba**. Trditev 2 velja za odvedljive funkcije. Lahko pa se zgodi, da ima funkcija $f$ lokalni ekstrem v točki, v kateri sploh ni odvedljiva. To je npr. res za funkcijo $f(x) = |x|$, ki ima minimum (koleno) v točki 0 (glej sliko 14).

**Izreki o odvedljivih funkcijah**

IZREK (Rolle). *Naj bo $f$ zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na odprtem intervalu $(a, b)$. Če je $f(a) = f(b)$, obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$.*

**Dokaz**. Če je funkcija $f$ na intervalu $[a, b]$ konstantna, je odvedljiva na $(a, b)$ in v vsaki točki $c \in (a, b)$ velja $f'(c) = 0$. Denimo, da ni konstantna. Potem ima zaradi zveznosti na zaprtem intervalu $[a, b]$ svoj globalni maksimum in svoj globalni minimum; vsaj eden od njiju zaradi nekonstantnosti funkcije $f$ ni dosežen v krajišču intervala ampak v neki točki $c \in (a, b)$. Ker je v njej funkcija $f$ odvedljiva, je po trditvi 2 $f'(c) = 0$ (slika 19).

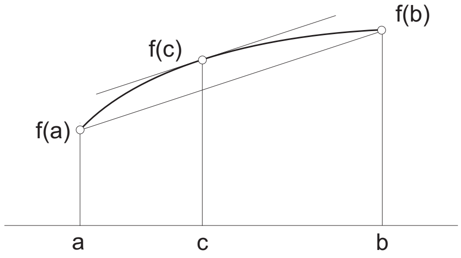



Slika 19. Ilustracija Rolleovega izreka

IZREK (Lagrange). *Naj bo $f$ zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na odprtem intervalu $(a, b)$. Tedaj obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Dokaz**. Pišimo $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Funkcija $g$ je zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na $(a, b)$ in velja $g(a) = g(b) = f(a)$. Po Rolleovem izreku obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je $g'(c) = 0$. Toda to pomeni, da je $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (slika 20).




Slika 20. Ilustracija Lagrangevega izreka

POSLEDICA. *Če je za odvedljivo funkcijo $f$:*
(i) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) *za vsak $x \in I$, je funkcija $f$ na intervalu $I$ naraščajoča* (*strogo naraščajoča*);

(ii) $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) < 0)$ *za vsak* $x \in I$, *je funkcija* $f$ *na intervalu* $I$ *padajoča (strogo padajoča);*
(iii) $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in I$, *je funkcija* $f$ *na intervalu* $I$ *konstantna.*

**Dokaz**. Uprabimo Lagrangev izrek: za poljuben par točk $a, b \in I$ z lastnostjo $a < b$ imamo $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, kjer je $c \in (a, b)$. Če je $f'(c) > 0$ ali $f'(c) < 0$, je $f(b) - f(a) > 0$ ali $f(b) - f(a) < 0$. Točka (iii) sledi podobno.

ZGLEDI. Lagrangevim izrekom lahko takoj izpeljemo različne neenakosti, npr.:
(a) $|\sin x| \leq |x|$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Res, iz $\sin x - \sin 0 = (\cos c)(x - 0)$, kjer je $c$ med 0 in $x$, dobimo $|\sin x| = |\cos c||x| \leq |x|$
(b) $e^x \geq 1 + x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Res, iz $e^x - e^0 = e^c(x - 0)$, kjer je $c$ med 0 in $x$, dobimo $e^x = 1 + e^c x \geq 1 + x$, ne glede na to, ali je $x > 0$ ali $x < 0$.
(c) $e^x \leq 1/(1-x)$ za $0 \leq x < 1$. Res, za funkcijo $f(x) = (1-x)e^x$ z odvodom $f'(x) = -xe^x$ za vsak $x \geq 0$ velja $f(x) - f(0) = -ce^c(x - 0)$ oziroma $f(x) = 1 - xce^c \leq 1$.

Posplošitev Lagrangevega izreka je naslednji rezultat. Tudi dokaz je podoben.

IZREK (Cauchy). *Naj bosta* $f, g$ *zvezni funkciji na zaprtem intervalu* $[a, b]$ *in odvedljivi v odprtem intervalu* $(a, b)$. *Tedaj obstaja taka točka* $c \in (a, b)$, *da je*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

**Dokaz**. Oglejmo si funkcijo $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$. Zanjo velja zveznost na $[a, b]$, odvedljivost na $(a, b)$ in $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$. Po Rolleovem izreku obstaja točka $c \in (a, b)$ z lastnostjo $h'(c) = 0$, kar je ekvivalentno trditvi v izreku.

Lagrangev izrek dobimo, če v Cauchyjevem izreku izberemo $g(x) = x$ za vsak $x \in [a, b]$. Posledica Cauchyjevega izreka pa je izrek, ki velikokrat pomaga pri računanju limit.

IZREK (L'Hospitalovo pravilo I). *Naj bosta funkciji* $f$ *in* $g$ *odvedljivi v vsaki točki intervala* $(a, b)$. *Za neko točko* $c \in (a, b)$ *naj velja* $f(c) = g(c) = 0$ *in* $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ *za* $x$ *blizu* $c$. *Poleg tega naj obstaja limita* $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$. *Tedaj je*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Dokaz**. Uporabimo Cauchyjev izrek za funkciji $f$ in $g$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$. Ker je $c < t < x$ (ali $x < t < c$), konvergira hkrati s $x \to c$ tudi $t \to c$, in ker obstaja limita $\lim_{t\to c} f'(t)/g'(t)$, obstaja tudi limita $\lim_{t\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki.

ZGLED. L'Hospitalovo pravilo lahko pogosto s pridom uporabimo. Preprosti zgledi so že znane limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = 1$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$,

Včasih je potrebno pravilo uporabiti večkrat zapored, npr.:

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

L'Hospitalovo pravilo velja tudi za enostranske limite (ki so lahko limite v neskončnosti).

IZREK (L'Hospitalovo pravilo II). *Naj bosta funkciji* $f$ *in* $g$ *odvedljivi v vsaki točki intervala* $(a, b)$, *kjer je* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a, b)$ *in naj obstaja (končna ali neskončna) desna limita* $\lim_{x\downarrow a} f'(x)/g'(x)$. *Tedaj je*

$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*v naslednjih primerih*:
(a) $f(x)\to 0$ in $g(x)\to 0$, ko $x\downarrow a$;
(b) $g(x)\to +\infty$, *ko* $x\downarrow a$.

**Dokaz**. Če velja (a), razširimo funkciji $f$ in $g$ v točko $a$ tako, da postavimo $f(a)=g(a)=0$; dokaz potem poteka tako kot pri osnovnem L'Hospitalovem pravilu, le da zdaj vzamemo $c=a$ in desno limito v $a$. Lahko pa tudi za vsak $a<x<y<b$ zapišemo po Cauchyju $\dfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$, kjer je $x<t<y$. Če velja (a) najprej pošljemo $x\to a$ in dobimo $\dfrac{f(y)}{g(y)}=\lim\limits_{x\downarrow a}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ ($t$ je odvisen od $x$). Ker z $y\to a$ velja tudi $x\to a$ in $t\to a$, dobimo odtod iskani rezultat.

Če pa velja (b), pomnožimo obe strani enakosti $\dfrac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ z $\dfrac{g(y)-g(x)}{g(x)}$. Rezultat lahko zapišemo v obliki $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\cdot\dfrac{g(y)}{g(x)}-\dfrac{f(y)}{g(x)}$. Naj bo $A=\lim\limits_{x\downarrow a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tako da je pri pogoju, da je $y$ dovolj blizu $a$ in $a<x<t<y$, tudi $|\dfrac{f'(t)}{g'(t)}-A|$ omejena funkcija. Zaradi ocene

$$0\le|\frac{f'(t)}{g'(t)}-\frac{f(x)}{g(x)}|\le|\frac{f'(t)}{g'(t)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}|\le|\frac{f'(t)}{g'(t)}-A|\frac{|g(y)|}{|g(x)|}+\frac{|Ag(y)-f(y)|}{|g(x)|}$$

konvergira pri pogoju $x\to a$ desna stran zaradi $g(x)\to+\infty$ proti nič, tako da velja tudi $\lim\limits_{x\downarrow a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\downarrow a}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$.

Podobno kot za desno limito v $a$ velja pravilo tudi za levo limito v $b$. Dokaz je analogen. To velja tudi, kadar je $b=+\infty$.

ZGLED. Tako je npr. $\lim_{y\to+\infty}y\mathrm{e}^{-y}=lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^y}=lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^y}=0$. Uporabili smo L'Hospitalovo pravilo II(b). Z večkratno uporabo istega pravila (in z indukcijo) vidimo, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja $\lim_{y\to+\infty}y^n\mathrm{e}^{-y}=0$. Če npr. pišemo $y=1/|x|$, dobimo tudi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{|x|^n}=0$, kar smo potrebovali pri enem od primerov neelementarne funkcije, ki je poljubnokrat odvedljiva v točki 0.

Pogoja (a) ali (b) morata biti res izpolnjena, sicer nam L'Hospitalovo pravilo ne da pravega rezultata. Prav tako mora obstajati $\lim_{x\downarrow a}f'(x)/g'(x)$.

ZGLED. Limita kvocienta funkcij je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{3+x}=2/3$, limita kvocientov odvodov pa je enaka 1. Limita kvocenta funkcij $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{3x-\cos x}=2/3$ obstaja, limita kvocienta odvodov $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{3+\sin x}$ pa ne obstaja.

### Aproksimacija s polinomi in Taylorjeva formula

Naj bo $f$ odvedljiva funkcija na odprtem intervalu $I$ in naj bosta točki $a,x\in I$. Če uporabimo Lagrangev izrek za interval $[a,x]$, dobimo formulo

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a),$$

kjer je $a<c<x$ ali $x<c<a$, odvisno kako ležita $a$ in $x$. To formulo lahko imamo za napotek, kako lahko na $I$ aproksimiramo odvedljivo funkcijo $f$ s konstantno funkcijo $f(a)$,

pri čemer predstavlja člen $f'(c)(x-a)$ napako. Opazimo, da je formula eksaktna v točki $a$ in dokaj natančna v njeni bližini.

Če je funkcija $f$ večkrat odvedljiva, je možno zgornjo formulo posplošiti, Namesto s konstantno funkcijo, bi radi $f$ aproksimirali s polinomom $P$ višje stopnje, vendar tako, da bo aproksimacija v točki $a$ eksaktna ne samo za vrednosti funkcije, ampak tudi za višje odvode. Radi bi torej, da bi veljalo $P(a)=f(a)$, $P'(a)=f'(a)$, $P''(a)=f''(a)$ itd.

Naj bo funkcija $f$ na intervalu $I$ odvedljiva vsaj $n$-krat in iskani polinom $P_n$ stopnje $n$. Ujemanje odvodov v točki $a$ pa zahtevajmo do vključno $n$-tega reda, aproksimacija pa naj bo oblike $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, kjer je $R_n(x)$ ostanek, katerega obliko bi tudi radi določili.

Polinom $P_n$ iščimo v obliki

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n.$$

Koeficiente moramo še določiti tako, da bo $P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ za $k=0,1,2,...,n$. Najprej vidimo, da mora biti $c_0=f(a)$. Ker je $P_n'(x)=c_1+2c_2(x-a)+...+n(x-a)^{n-1}$, mora biti $c_1=f'(a)$. Še z enim odvajanjem spoznamo, da mora biti $c_2=f''(a)/2!$ itd., postopoma najdemo, da mora za vsak $k=0,1,2,...,n$ veljati $c_k=f^{(k)}(a)/k!$. Iskani polinom je torej oblike

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Temu polinomu rečemo $n$-ti *Taylorjev polinom* (stopnje $n$) za funkcijo $f$ in točko $a$.

Glede ostanka oziroma celotne aproksimacijske formule velja naslednji izrek.

IZREK (Taylor). *Za funkcijo $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ki je $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu $I$, naj bo $P_n$ njen $n$-ti Taylorjev polinom za točko $a\in I$. Potem za vsak $x\in I$ obstaja taka točka $c$ med $a$ in $x$, da velja naslednja* Taylorjeva *formula*:

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Dokaz izreka**. Če je $x=a$, je formula pravilna, zato privzemimo, da je $x\neq a$ in definirajmo $M=(f(x)-P_n(x))/(x-a)^{n+1}$. Pokazali bi radi, da je $M=f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$ za nek $c$ med $a$ in $x$. Za $t\in I$ vpeljimo oznako $g(t)=f(t)-P_n(t)-M(t-a)^{n+1}$ in novo funkcijo $(n+1)$-krat odvajajmo, da izničimo polinom $P_n(t)$. Dobimo $g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-M(n+1)!$. Ker je $P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ za $k=0,1,2,...,n$, velja $g(a)=g'(a)=...=g^{(n)}(a)=0$.

Zdaj bomo večkrat zapored uporabili Rolleov izrek. Ker je $g(a)=0$ in zaradi definicije števila $M$ tudi $g(x)=0$, obstaja po Rolleovem izreku tak $c_1$ med $a$ in $x$, da je $g'(c_1)=0$. Ker je tudi $g'(a)=0$, obstaja po Rolleovem izreku tak $c_2$ med $a$ in $c_1$, da je $g''(c_2)=0$. Postopek tako nadaljujemo; po $n+1$ korakih najdemo tak $c=c_{n+1}$, da je $g^{(n+1)}(c)=0$. To pa pomeni, da je $f^{(n+1)}(c)=M(n+1)!$ oziroma $M=f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$, kar smo potrebovali.

Drugemu členu

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

na desni strani Taylorjeve formule rečemo *Taylorjev ostanek* (v Lagrangevi obliki) in pomeni napako aproksimacijske formule. Iz oblike ostanka vidimo, da lahko napako ocenimo, če poznamo omejitev za $|f^{(n+1)}(c)|$. To je res npr. takrat, ko je $f\in C^{n+1}(I)$ in je zato $f^{(n+1)}$ tudi omejena funkcija na vsakem zaprtem podintervalu v $I$.

Pri $n = 0$ je $P_0(x) = f(a)$ in $R_0(x) = f'(c)(x-a)$, tako da dobimo že znano Lagrangevo formulo $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ za $x \in I$. Pri $n = 1$ je to formula $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)(x-a)^2/2$, kjer smo funkcijo $f$ aproksimirali z linearno funkcijo (oziroma njen graf s tangento v točki $a$), itd.

ZGLEDI. Z uporabo Taylorjevega izreka lahko izpeljemo različne bolj natančne formule za aproksimacijo različnih funkcij in tudi različne zanimive ocene. npr.:

(a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ z napako $R_1(x) = -x^2/4\sqrt{(1+c)^3}$, torej $|R_1(x)| \leq x^2/4$, če $x > 0$;

(b) $\cos x \approx 1 - x^2/2$ z napako $R_3(x) = \cos(c)x^4/24$, torej $|R_3(x)| \leq |x|^4/24$;

(c) $e^x \approx 1 + x/1! + x^2/2! + ... + x^n/n!$ z napako $R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$, torej $|R_n(x)| \leq e|x|^{n+1}/(n+1)!$, če je $x \leq 1$. Spomnimo se, da smo pri zaporedjih že ugotovili $e \approx 1 + 1/1! + 1/2! + ... + 1/n!$ za dovolj velik $n$.

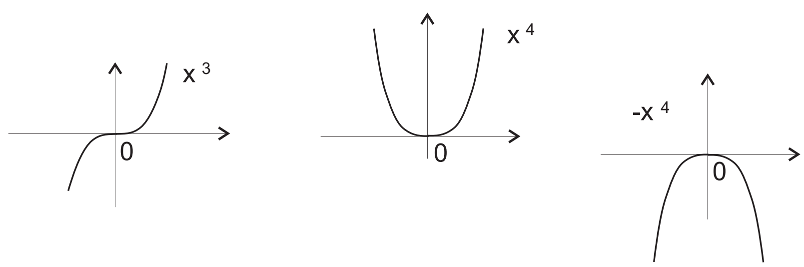
**Zadostni pogoji za lokalni ekstrem**

Vedenje odvedljive funkcije $f$ v okolici stacionarne točke $a$ lahko ugotovimo z naslednjim kriterijem, ki uporablja predznak odvoda $f'$ levo in desno od točke $a$.

TRDITEV. *Funkcija $f$ naj bo na intervalu $I$ zvezna in odvedljiva, točka $a \in I$ pa stacionarna točka, torej $f'(a) = 0$. Če obstaja tak $\delta > 0$, da na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ velja:*
*(1) $f'(x) > 0$ za $x < a$ in $f'(x) > 0$ za $x > a$, funkcija v točki $a$ narašča,*
*(2) $f'(x) < 0$ za $x < a$ in $f'(x) < 0$ za $x > a$, funkcija v točki $a$ pada,*
*(3) $f'(x) \leq 0$ za $x < a$ in $f'(x) \geq 0$ za $x > a$, ima funkcija $f$ v točki $a$ lokalni minimum,*
*(4) $f'(x) \geq 0$ za $x < a$ in $f'(x) \leq 0$ za $x > a$, ima funkcija $f$ v točki $a$ lokalni maksimum.*

**Dokaz**. Za $0 < h < \delta$ je po Lagrangevem izreku $f(a+h) - f(a) = f'(c)h$, kjer je $a \leq c < a+h$, in $f(a) - f(a-h) = f'(d)h$, kjer je $a - h < d \leq a$. V vsakem od štirih primerov ocenim odvoda v $c$ in $d$ pa dobimo ustrezen rezultat (naraščanje, padanje ali ekstrem funkcije $f$ v točki $a$).

ZGLED. Obravnavajmo funkcije $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ in $h(x) = -x^4$ v stacionarni točki $a = 0$. Ugotovimo, da je predznak odvoda levo in desno od točke $a$ za funkcijo $f$ obakrat pozitiven, za funkcijo $g$ negativen in pozitiven, za funkcijo $h$ pozitiven in negativen. Zato prva funkcija v stacionarni točki narašča, druga ima minimum in tretja maksimum (glej sliko 21).




SLIKA 21. Različno vedenje funkcije v stacionarni točki

Za dvakrat odvedljive funkcije imamo za nastop ekstrema zadosten pogoj, pri katerem izračunamo vrednost prvega in drugega odvoda samo v točki $a$.

IZREK. *Če je funkcija $f$ na intervalu $I$ dvakrat odvedljiva in je $a \in I$ stacionarna točka za $f$, torej $f'(a) = 0$, velja naslednje:*
*(a) Če je $f''(a) > 0$, ima funkcija $f$ v točki $a$ strogi lokalni minimum.*

(b) *Če je $f''(a) < 0$, ima funkcija $f$ v točki $a$ strogi lokalni maksimum.*

**Dokaz**. Če je $f''(a) > 0$, sta za vse dovolj majhne $h > 0$ izpolnjeni neenakosti $\dfrac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$ in $\dfrac{f'(a) - f'(a-h)}{h} > 0$. Ker je $f'(a) = 0$, sledi od tod $f'(a+h) > 0$ in $f'(a-h) < 0$. Po zgornji trditvi ima funkcija $f$ v stacionarni točki $a$ minimum. Podobno dokažemo točko (b).

ZGLEDI. (a) Edina stacionarna točka kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, je točka $-b/2a$, v kateri ima parabola, ki je njen graf, teme. Funkcija $f$ ima v tej točki maksimum, če je $a < 0$, in minimum, če je $a > 0$. To sledi iz dejstva, da je $f''(x) = 2a$ za vsak $x$.
(b) Funkcija $f(x) = \cos x$ ima v točki 0 maksimum, v točki $\pi$ pa minimum, saj je $f'(0) = f'(\pi) = 0$, $f''(0) = -1$ in $f''(\pi) = 1$.

**Opomba**. Ta kriterij odpove, če je $f''(a) = 0$. Tedaj lahko nastopijo vse različne možnosti (zgled: funkcije $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ in $h(x) = -x^4$ na sliki 19). V tem primeru si lahko včasih pomagamo z višjimi odvodi v stacionarni točki.

IZREK. *Denimo, da za funkcijo $f \in C^n(I)$ in točko $a \in I$ velja*

$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{in} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

*Potem velja:*
(a) *Če je $n$ sodo število, ima funkcija $f$ v točki $a$ lokalni ekstrem in sicer minimum, če je $f^{(n)}(a) > 0$, in maximum, če je $f^{(n)}(a) < 0$.*
(b) *Če je $n$ liho število, je funkcija $f$ v točki $a$ naraščajoča, če je $f^{(n)}(a) > 0$, in padajoča, če je $f^{(n)}(a) < 0$.*

**Dokaz**. Uporabimo Taylorjevo aproksimacijsko formulo $f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$, kjer je $P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)$ zdaj Taylorjev polinom stopnje $n-1$. Ker je po predpostavki izreka $P_{n-1}(x) = f(a)$, je $f(x) - f(a) = R_{n-1}(x)$ in od predznaka Taylorjevega ostanka je odvisno vedenje funkcije v bližini točke $a$. Vemo pa, da je ostanek oblike $R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ ($c$ je neka vmesna točka med $a$ in $x$). Če je torej $n$ sodo število, je predznak razlike $f(x) - f(a)$ enak predznaku $n$-tega odvoda $f^{(n)}$ v točki $c$, ne glede na to, ali je $x < a$ ali $x > a$. Zaradi zveznosti tega odvoda pa je predznak $f^{(n)}(c)$ isti kot predznak $f^{(n)}(a)$, če je le $x$ (in s tem $c$) dovolj blizu točki $a$. Tedaj ima funkcija $f$ v točki $a$ očitno lokalni ekstrem ustrezne vrste, v odvisnosti od predznaka za $f^{(n)}(a)$. Če pa je $n$ liho število, je predznak razlike $f(x) - f(a)$ odvisen tudi od tega, na kateri strani točke $a$ je $x$. V tem primeru funkcija $f$ v točki $a$ narašča ali pada.

ZGLEDI. Za funkcijo $f(x) = x^3$ je $f'(0) = f''(0) = 0$ in $f'''(0) = 6$, zato je $f$ v točki 0 naraščajoča funkcija. Po drugi strani pa za funkcijo $g(x) = x^4$ velja $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ in $g^{(4)}(0) = 24$, zato ima funkcija $g$ v točki 0 lokalni (in globalni) minimum.

**Opomba**. Lahko se zgodi, da ima neskončnokrat odvedljiva funkcija v izolirani točki lokalni ekstrem, vendar so v tej točki vsi njeni odvodi (poljubnega reda) enaki nič. V tem primeru si z zgornjim kriterijem seveda ne moremo pomagati. Zgled je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

ki ima v točki 0 (globalni) minimum, vsi njeni odvodi v 0 pa so enaki nič.

## 3. Konveksnost in konkavnost funkcije

Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu $I$ in $a, b \in I$. Potem je enačba sekante skozi točki $(a, f(a)$ in $(b, f(b)$, ki ležita na grafu funkcije $f$, enaka $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

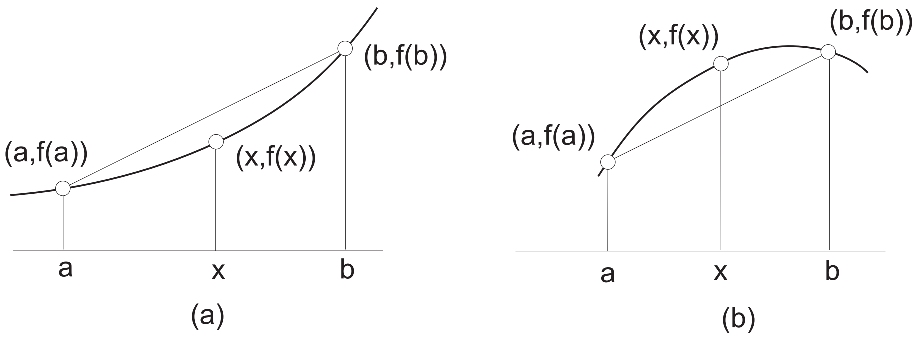
DEFINICIJA. Rečemo, da je funkcija $f$ na intervalu $I$:
(a) *konveksna*, če za vsak par $a, b \in I$, $a < b$, in za $a \le x \le b$ velja

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

(b) *konkavna*, če za vsak par $a, b \in I$, $a < b$, in za $a \le x \le b$ velja

$$f(x) \ge f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Vidimo, da leži graf na intervalu $I$ konveksne funkcije $f$ na vsakem zaprtem podintervalu $[a, b] \subset I$ pod sekanto skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ (slika 22a), graf konkavne funkcije pa nad njo (slika 22b).




Slika 22. Globalna konveksnost in konkavnost

Definicijo lahko povemo tudi nekoliko drugače: za vsak $h$ z lastnostjo $0 \le h \le b - a$ je $a \le a + h \le b$ in $a \le b - h \le b$ in zato $f(a + h) \le f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\, h$, če je $f$ konveksna, in $f(a + h) \ge f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\, h$, če je $f$ konkavna.

Če pa zapišemo $t = (x - a)/(b - a)$, je $0 \le t \le 1$ in $x = (1 - t)a + tb$ (konveksna kombinacija točk $a$ in $b$). Neenakost za konveksnost se zdaj glasi

$$f((1 - t)a + tb) \le (1 - t)f(a) + tf(b),$$

za konkavnost pa

$$f((1 - t)a + tb) \ge (1 - t)f(a) + tf(b).$$

**Opomba**. Iz definicije je jasno, da razumemo konveksnost ali konkavnost v širšem smislu. Med konveksne (ali konkavne) štejemo npr. tudi linearne funkcije. Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogi konveksnosti* (ali *strogi konkavnosti*).

ZGLED. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ in eksponentna funkcija $g(x) = \mathrm{e}^x$ sta npr. (strogo) konveksni na vsej realni osi, logaritemska funkcija $h(x) = \ln x$ pa je na svojem definicijskem območju (strogo) konkavna. Na vsej realni osi sta konveksni tudi funkciji $x \mapsto x$ in $x \mapsto |x|$, ki pa nista strogo konveksni.

TRDITEV. *Vsaka konveksna ali konkavna funkcija $f$, definirana na odprtem intervalu $I$, je zvezna.*

**Dokaz**. Iz konveksnosti funkcije $f$ na intervalu $I$, vidimo, da je

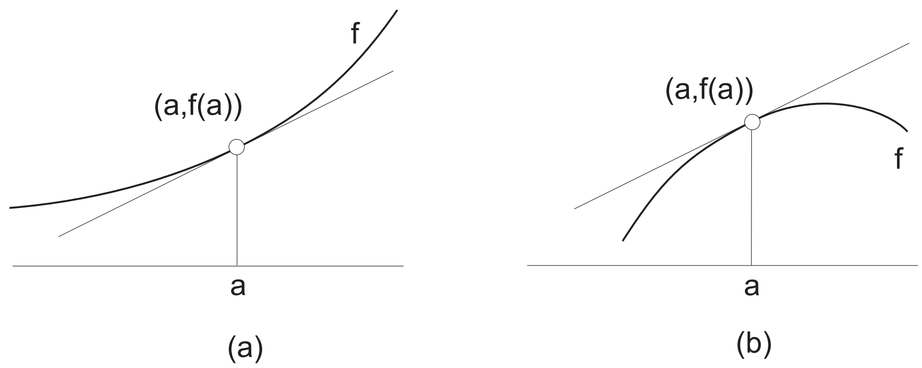
$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

za poljubne štiri točke $a, b, t, x \in I$ z lastnostjo $a < t < x < b$. Odtod je

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}(x-t) \le f(x)-f(t) \le \frac{f(b)-f(t)}{b-t}(x-t).$$

Če pošljemo $x \to t$, dobimo $f(x) \to f(t)$, se pravi zveznost z desne funkcije $f$ v točki $t$. Podobno dokažemo tudi zveznost z leve.

DEFINICIJA. Rečemo, da je na intervalu $I$ odvedljiva funkcija:
(a) *konveksna v točki* $a \in I$, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a-\delta, a+\delta) \subset I$ in da za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta)$ velja $f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a)$;
(b) *konkavna v točki* $a \in I$, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $(a-\delta, a+\delta) \subset I$ in da za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta)$ velja $f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a)$.




SLIKA 23. Lokalna konveksnost in konkavnost

Graf funkcije $f$, ki je konveksna v točki $a$, leži torej v dovoj majhni okolici točke $a$ nad tangento v tej točki, graf konkavne funkcije pa pod njo.

Nekoliko drugače, z običajno oznako $h = x - a$, lahko definicijo povemo tudi takole:

DEFINICIJA. Odvedljiva funkcija $f$ je v točki $a \in I$
(a) *konveksna*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$ velja $f(a+h) - f(a) \ge f'(a)h$, in
(b) *konkavna*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$ velja $f(a+h) - f(a) \le f'(a)h$.

ZGLED. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ in eksponenta funkcija $g(x) = e^x$ sta konveksni v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$. To sledi iz ocen

$$f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2 \ge 2ah = f'(a)h,$$

$$g(a+h) - g(a) = e^{a+h} - e^a = e^a(e^h - 1) \ge e^a h = f'(a)h.$$

Po drugi strani je logaritemska funkcija $h(x) = \ln x$ v vsaki točki $a > 0$ konkavna, kar vidimo iz ocene

$$h(a+h) - h(a) = \ln(a+h) - \ln a = \ln(1 + h/a) \le h/a = h'(a)h.$$

TRDITEV. *Odvedljiva funkcija $f$ je konveksna v vsakem svojem lokalnem minimumu in konkavna v vsakem svojem lokalnem maksimumu.*

**Dokaz**. Res, če ima odvedljiva funkcija $f$ lokalni minimum v točki $a$, obstaja $\delta < 0$, tako da za $|h| < \delta$ velja $f(a+h) - f(a) \ge 0$, torej tudi $f(a+h) - f(a) \ge f'(a)h$, ker je v lokalnem ekstremu $f'(a) = 0$. Podobno dokažemo trditev glede lokalnega maksimuma.

Za odvedljive funkcije lahko konveksnost ali konkavnost definiramo na en ali drug način in dobimo isti rezultat. Velja namreč naslednja trditev.

TRDITEV. *Odvedljiva funkcija $f$ je na intervalu $I$ konveksna (konkavna) natanko takrat, ko je konveksna (konkavna) v vsaki točki $a \in I$.*

**Dokaz**. Dokažimo samo konveksnost. Naj bo funkcija $f$ na $I$ konveksna, $a \in I$ poljubna točka in $\delta > 0$ tak, da je $(a - \delta, a + \delta) \subset I$. Izberimo $x \in I$ z lastnostjo $0 < |x - a| < \delta$ in naj bo $t \in I$ tak, da je $a < t < x$, če je $x > a$, in $x < t < a$, če je $x < a$. Zaradi konveksnosti funkcije $f$ je potem v obeh primerih $f(t) \leq f(a) + \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(t - a)$. Ker je $\dfrac{t - a}{x - a} > 0$, dobimo odtod $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) \leq f(x) - f(a)$ in v limiti $(t \to a)$ tudi $f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a)$, kar pomeni, da je funkcija $f$ konveksna v točki $a$.

Obratno, naj bo zdaj funkcija $f$ konveksna v vsaki točki intervala $I$ in pokažimo najprej vmesni rezultat, da velja potem neenakost $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ za vsak par $a, x \in I$ (tj. ne samo lokalno, v okolici točke $a$). Dovolj je pri danem $a \in I$ neenakost pokazati za $x > a$ (za $x < a$ poteka dokaz podobno). Če bi bila množica

$$A = \{x > a;\ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)\}$$

neprazna, bi obstajal $b = \inf A$ in za njega bi veljalo $b \geq a$ in $f(b) \leq f(a) + f'(a)(b - a)$. V primeru $b = a$, funkcija $f$ ne bi bila konveksna v točki $a$. V primeru $b > a$ pa mora nujno veljati $f(b) = f(a) + f'(a)(b - a)$, sicer $b$ ne bi bil infimum množice $A$. Za funkcijo $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a)$ torej velja $g(a) = g(b) = f(a)$. Ker je zvezna, ima na zaprtem intervalu $[a, b]$ globalni maksimum, ki je dosežen vsaj v eni točki tega intervala. Če je $c$ supremum vseh takih točk, ima funkcija $g$ v točki $c$ tudi maksimum, zato je $g'(c) = 0$ oziroma $f'(c) = f'(a)$, funkcija $g$ pa je v točki $c$ po prejšnji trditvi konkavna. Ker je $g(x) < g(c)$ za $x > c$, velja v teh točkah tudi $f(x) - f'(x)(x - a) < f(c) - f'(c)(c - a)$ oziroma $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)$. To pomeni, da funkcija $f$ v točki $c \in I$ ne bi bila konveksna.

Izberimo zdaj poljubni točki $a, b \in I$, $a < b$. Če je $a < x < b$, ležita po pravkar dokazanem vmesnem rezultatu točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ obe nad tangento na graf funkcije $f$ v točki $x$. Torej velja isto za daljico skozi omenjeni točki, od koder sledi, da leži točka $(x, f(x)$ pod sekanto skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Torej je $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a)$ za vsak $a \leq x \leq b$ in funkcija $f$ je na intervalu $I$ konveksna.

IZREK 1. *Odvedljiva funkcija $f$ je v točki $a \in \mathbb{R}$ strogo konveksna, če odvod $f'$ v točki $a$ narašča, in strogo konkavna, če odvod $f'$ v točki $a$ pada.*

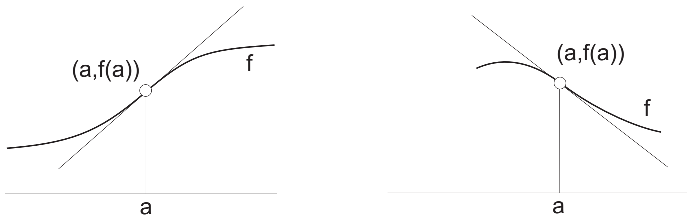
**Dokaz**. Če $f'$ v točki $a$ narašča, obstaja $\delta > 0$, da za $0 < h < \delta$ velja $f'(a-h) < f'(a) < f'(a + h)$. Po Lagrangevem izreku potem obstajata točki $c \in (a - h, a)$ in $d \in (a, a + h)$, tako da velja $f(a) - f(a - h) = f'(c)h < f'(a)h$ in $f(a + h) - f(a) = f'(d)h > f'(a)h$. Torej je funkcija $f$ v točki $a$ konveksna. Podobno dokažemo konkavnost, kadar odvod v točki $a$ pada.

IZREK 2. *Naj bo funkcija $f$ dvakrat odvedljiva v točki $a$.*
(a) *Če je $f''(a) > 0$, je funkcija $f$ v točki $a$ strogo konveksna.*
(b) *Če je $f''(a) < 0$, je funkcija $f$ v točki $a$ strogo konkavna.*

**Dokaz**. Če je $f''(a) > 0$, odvod $f'$ v točki $a$ narašča, zato je funkcija $f$ po izreku 1 strogo konveksna in velja točka (a). Podobno dokažemo točko (b).

DEFINICIJA. Točka $a$ je *prevoj* odvedljive funkcije $f$, če obstaja tak $\delta > 0$, da za $0 < |h| < \delta$ velja:
(a) $f(a+h) - f(a) < f'(a)h$, če je $h > 0$, in $f(a+h) - f(a) > f'(a)h$, če je $h < 0$, ali
(b) $f(a+h) - f(a) > f'(a)h$, če je $h > 0$, in $f(a+h) - f(a) < f'(a)h$, če je $h < 0$.

Drugače rečeno, prevoj je taka točka $a$, v kateri ni odvedljiva funkcija $f$ niti konveksna niti konkavna, ampak leži njen graf v bližini točke $a$ tako na eni kot na drugi strani tangente v točki $a$ (glej sliko 24).




Slika 24. Prevoj

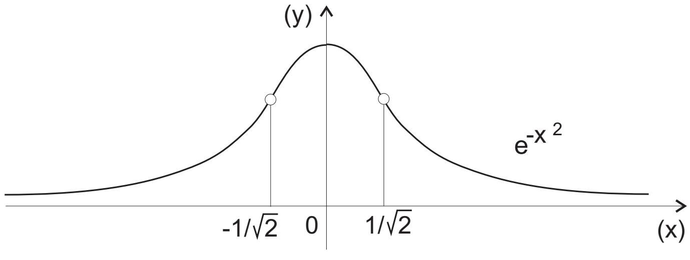
IZREK 3. *Potreben in zadosten pogoj za prevoj funkcije $f$ v točki $a$ je strogi lokalni ekstrem (maksimum ali minimum) odvoda $f'$ v točki $a$.*

**Dokaz**. Če ima funkcija $f$ v točki $a$ prevoj, ni v točki $a$ niti konveksna niti konkavna. Po izreku 1 potem prvi odvod $f'$ v točki $a$ niti ne narašča niti ne pada, ne more pa se niti zgoditi, da bi bil na eni ali na obeh straneh točke $a$ konstanten. Se pravi, da ima $f'$ v točki $a$ strogi lokalni ekstrem.

Obratno, če ima $f'$ v točki $a$ npr. strogi lokalni maksimum, obstaja $\delta > 0$, tako da za $0 < |x - a| < \delta$ velja $f'(x) < f'(a)$. Za $0 < |h| < \delta$ je potem po Lagrangeu $f(a+h) - f(a) = f'(c)h < f'(a)h$, če je $h > 0$, in $f(a+h) - f(a) = f'(c)h > f'(a)h$, Če je $h < 0$. Torej ima funkcija $f$ v točki $a$ prevoj. Na podoben način ugotovimo prevoj, če ima $f'$ v točki $a$ lokalni minimum.

**Opomba**. Če je funkcija $f$ v točki $a$ dvakrat odvedljiva, je $f''(a) = 0$ potreben pogoj za prevoj, ki pa ni tudi zadosten.

ZGLEDI. Funkcija $f(x) = x^2$ nima nobenega prevoja; prvi odvod $f'(x) = 2x$ je povsod naraščajoča funkcija, $f$ povsod konveksna. Funkcija $g(x) = x^3$ ima prevoj v točki 0, saj ima prvi odvod $g'(x) = 3x^2$ tam svoj minimum. Konveksna funkcija $h(x) = x^4$ tudi nima nobenega prevoja, saj je $h'(x) = 4x^3$ povsod naraščajoča funkcija. Ker je v tem primeru drugi odvod $h''(x) = 12x$ v točki 0 enak nič, vidimo, da izničenje drugega odvoda ni zadostno za nastop prevoja.




Slika 25. Primer računanja prevoja

Poiščimo še prevoje funkcije $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Ker je ta funkcija velikokrat odvedljiva je potreben pogoj za prevoj v točki $a$ enačba $f''(a) = 0$. Prvi odvod je $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, drugi odvod pa $f''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$. Torej je prevoj lahko le v točkah $a = \pm 1/\sqrt{2}$. Ker ima tu prvi odvod res lokalni ekstrem, ima funkcija $f$ prevoj, sicer pa je konveksna za $x < -1/\sqrt{2}$ in $x > 1/\sqrt{2}$, med obema prevojema pa je konkavna (glej sliko 23).

## 4. Krivulje v parametrični in polarni obliki

Doslej smo večkrat narisali grafe različnih eksplicitno podanih funkcij ene spremenljivke. Graf funkcije $f$ je neka krivulja v ravnini, ki jo opiše točka $(x, f(x))$, ko neodvisna spremenljivka zavzame vse svoje možne vrednosti. Pogosto pa podamo ravninsko krivuljo, ki ni nujno graf neke funkcije, v ti. *parametrični obliki*:

$$x = x(t), \; y = y(t),$$

kjer je zdaj $t$ nova spremenljivka, ki lahko zavzame svoje vrednosti na nekem (omejenem ali neomejenem) zaprtem intervalu $I$, za $x$ in $y$ pa zahtevamo, da sta zvezni realni funkciji na $I$. Novi spremenljivki $t$ rečemo *parameter*, enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$ pa *parametrični enačbi* krivulje. V posebnem primeru lahko tudi graf funkcije $f$ zelo enostavno podamo v parametrični obliki; preprosto pišemo $x = t$ in $y = f(t)$ (parameter je v tem primeru v resnici kar neodvisna spremenljivka $x$).

Pravzaprav gre pri parametričnih enačbah $x = x(t)$, $y = y(t)$ za preslikavo iz $I$ v $\mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, ki vsaki vrednosti parametra $t \in I$ priredi točko $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Vsako tako zvezno preslikavo imenujemo *pot*, njeno zalogo vrednosti pa (parametrizirano) *krivuljo*. Če je interval omejen, npr. $I = [\alpha, \beta]$, je $(x(\alpha), y(\alpha))$ začetna in $(x(\beta), y(\beta))$ končna točka dane poti. Mislimo si, da je parameter $t$ čas, in da se točka $(x(t), y(t))$ giblje po ravnini in pri tem v danem časovnem intervalu $I = [\alpha, \beta]$ opiše dano krivuljo oziroma njen lok od začetne do končne točke. V primeru $x(\alpha) = x(\beta)$ in $y(\alpha) = y(\beta)$ rečemo, da je krivulja *sklenjena*.

Tudi lokalno vedenje parametrično podanih krivulj obravnavamo z odvodom, določamo tangente nanje, iščemo njihove posebne točke itd. Naj bosta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ vsaj enkrat odvedljivi funkciji parametra $t$. Odvode na $t$ običajno označimo s piko, torej $\dot{x} = dx/dt$ in $\dot{y} = dy/dt$, črtica pa naj še naprej pomeni odvod na spremenljivko $x$, torej $y' = dy/dx$.

Če je npr. $x = x(t)$ na intervalu $I$ strogo monotona funkcija ki preslika $I$ na interval $J$, in je $\dot{x}(t) \neq 0$ za vsak $t \in I$, obstaja na $J$ inverzna funkcija $t = t(x)$, ki je tudi strogo monotona in odvedljiva, poleg tega pa velja $t'(x) = 1/\dot{x}(t(x))$ za vsak $x \in J$. Potem pa je tudi $y$ posredna funkcija spremenljivke $x$ in po pravilu za odvajanje posredne funkcije velja $y' = \dot{y}(t(x)) \cdot t'(x) = \dot{y}(t(x))/\dot{x}(t(x))$. Ne da bi $t$ izrazili z $x$ lahko to formulo zapišemo

$$y' = \dot{y}(t)/\dot{x}(t) \;\; \text{oziroma krajše} \;\; y' = \dot{y}/\dot{x}.$$

To formulo si najlaže zapomnimo z uporabo diferencialov: ker je $dx = \dot{x}(t)dt$ in $dy = \dot{y}(t)dt$, je $y' = dy/dx = \dot{y}(t)dt/\dot{x}(t)dt = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ oziroma na kratko $y' = \dot{y}/\dot{x}$.

Enačbo tangente na krivujo $y = f(x)$ v točki $(x_0, y_0)$, kjer je $y_0 = f(x_0)$, lahko podamo z enačbo $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Pri parametrično podani krivulji $x = x(t)$, $y = y(t)$ je smer tangente v točki $(x_0, y_0)$, kjer je $x_0 = x(t_0)$ in $y_0 = y(t_0)$, določena z $y_0' = \dot{y}(t_0)/\dot{x}(t_0) = \dot{y}_0/\dot{x}_0$, tako da je enačba tangente enaka $y - y_0 = \dot{y}_0/\dot{x}_0(x - x_0)$ oziroma v lepši obliki

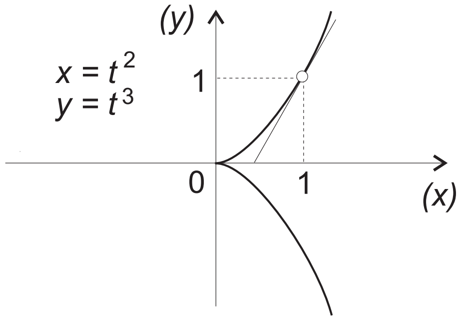
$$\dot{y}_0(x - x_0) - \dot{x}_0(y - y_0) = 0.$$

Vidimo, da je vektor $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ smerni vektor na tangenti; določa smer, v kateri poteka krivulja skozi točko $(x_0, y_0)$. Tu je lahko tudi $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) = 0$; če je v tem primeru $\dot{y}_0 = \dot{y}(t_0) \neq 0$, je tangenta navpična, pri $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) \neq 0$ in $\dot{y}_0 = \dot{y}(t_0) = 0$ pa je vodoravna.

Če vsaj eden od odvodov pri danem $t_0$ ni enak nič, rečemo, da je krivulja tam *gladka* (ima tangento). Točki $(x(t_0), y(t_0))$ na krivulji, kjer velja $\dot{x}(t_0) = 0$ in $\dot{y}(t_0) = 0$ pa rečemo *singularna točka* krivulje. V singularnih točkah tangenta na krivuljo ne obstaja.

ZGLEDI. 1. Naj bo $x = t^2$, $y = t^3$. Vidimo, da sta obe funkciji zvezni za vsak $t \in \mathbb{R}$ in da je $x \geq 0$. Poleg tega sta obe funkciji odvedljivi $\dot{x}(t) = 2t$ in $\dot{y}(t) = 3t^2$. Pri $t = 1$ dobimo npr. na krivulji točko $(1, 1)$, enačba tangente pa se v tej točki glasi $3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$ oziroma $y = (3x - 1)/2$.

Iz odvodov tudi vidimo, da doseže $x$ svoj minimum (ker je drugi odvod $\ddot{x}(0) > 0$) v točki $t = 0$, medtem ko je funkcija $y$ strogo monotono naraščajoča za vsak $t \in \mathbb{R}$. Vendar sta pri $t = 0$ oba odvoda enaka nič, zato je $(0, 0)$ singularna točka, krivulja ima v njej ost (glej sliko 26).

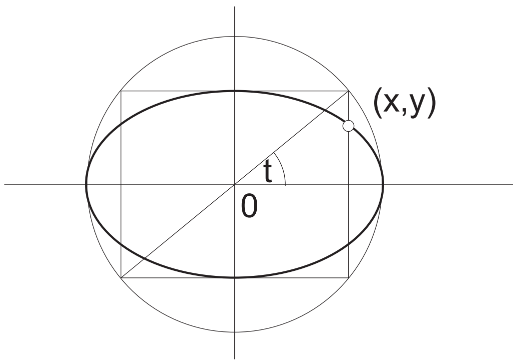



Slika 26. Krivulja z ostjo

2. *Elipsa* v centralni legi je v parametrični obliki podana z enačbama

$$x = a \cos t, \;\; y = b \sin t,$$

kjer je $a > 0$, $b > 0$ in $0 \leq t \leq 2\pi$. Res, z eliminacijo parametra iz teh dveh enačb dobimo kanonično obliko elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Če je $a = b$, dobimo krožnico (glej sliko 27). Predstavljamo si lahko, da dobimo elipso tako, da točka kroži po krožnici, v vsaki legi pa ordinato skrčimo v razmerju $b/a$; parameter $t$ pri tem meri kot do točke na krožnici. Torej lahko rečemo, da je elipsa 'stisnjena' krožnica.




Slika 27. Elipsa

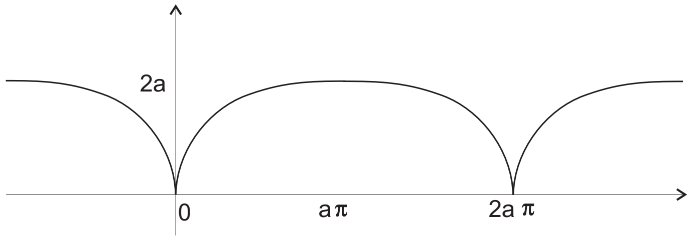
Odvajajmo parametrični enačbi in dobimo $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$, vidimo, da sta stacionarni točki za $x$ točki $t = 0$ in $t = \pi$, kjer dobimo $x(0) = a$, $x(\pi) = -a$ in $y(0) = y(\pi) = 0$, stacionarni točki za $y$ pa točki $t = \pi/2$ in $t = 3\pi/2$, kjer pa je $x(\pi/2) = x(3\pi/2) = 0$, $y(\pi/2) = b$, $y(3\pi/2) = -b$. Dobili smo ravno vsa štiri temena elipse $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$. Singularnih točk pa elipsa nima; za noben $t$ ni hkrati $\dot{x} = 0$ in $\dot{y} = 0$.

3. *Cikloida* ima parametrične enačbe

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$$

kjer je $a > 0$ in $t \in \mathbb{R}$. Geometrijsko nastane kot krivulja, ki jo oriše točka na krožnici s polmerom $a$, ko se le-ta brez drsenja kotali po realni osi, v začetku, pri $t = 0$ pa se opazovana obodna točka ujema s koordinatnim izhodiščem (glej sliko 26).

Z dvakratnim odvajanjem na parameter $t$ najdemo $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$ in $\ddot{x} = a \sin t$, $\ddot{y} = a \cos t$. Odtod takoj sledi, da ima funkcija $x$ prevoje pri $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ko je $x = 2ak\pi$ in $y = 0$, funkcija $y$ pa lokalne minimume v istih točkah in lokalne maksimume pri $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ko je $x = ak\pi$ in $y = 2a$. Singularne točke na krivulji so točke $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, kjer ima krivulja osti (glej sliko 28).



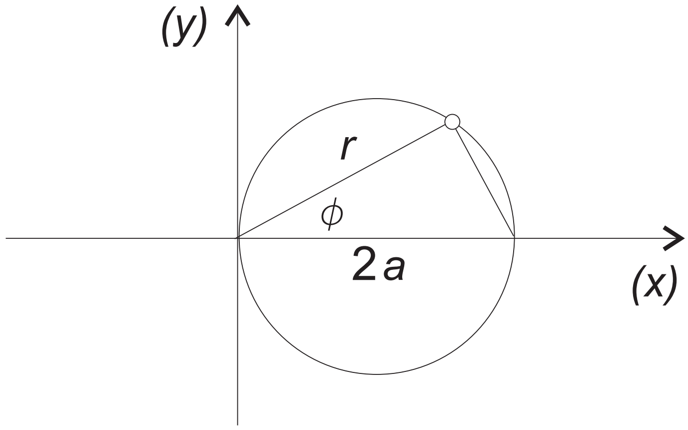

SLIKA 28. Cikloida

**Polarna oblika**

Pogosto je parameter $t = \phi$, *polarni kot*, ki lahko zavzame vsako vrednost na realni osi (pozitivno in negativno). Ker je zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami dana z enačbama $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, dobimo iz $x = x(\phi)$, $y = y(\phi)$, da se tudi *polarna razdalja* $r = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$ spreminja s kotom $\phi$, seveda pa lahko zavzame le nenegativne vrednosti. Tako pridemo do *polarne oblike enačbe* krivulje:

$$r = r(\phi), \quad D_r = \{\phi \in \mathbb{R};\ r(\phi) \geq 0\}.$$

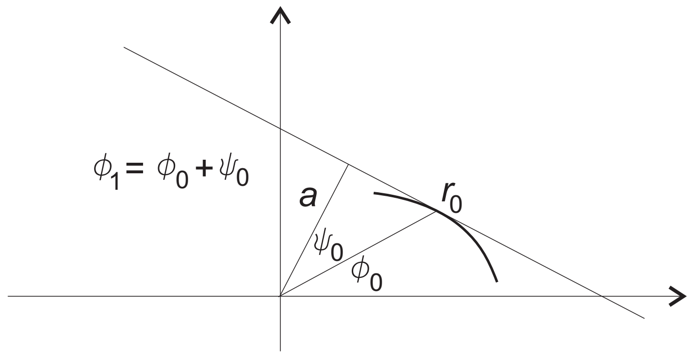
ZGLEDI. 1. Krožnica s polmerom $a > 0$ v centralni legi je podana s preprosto enačbo $r = a$. Tudi krivulja z enačbo $r = 2a \cos \phi$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$, je krožnica, in sicer taka, ki ima polmer $a$ in središče na abscisni osi v točki $(a, 0)$ (slika 29). Parametrični enačbi te krožnice sta $x = 2a \cos^2 \phi$, $y = 2a \cos \phi \sin \phi$. Če raje pišemo $x - a = a(2\cos^2 \phi - 1) = a \cos 2\phi$ in $y = a \sin 2\phi$, vidimo da je res $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.




SLIKA 29. Krožnica v polarni obliki

2. Poševna premica, pri kateri daljica dolžine $a$, ki povezuje koordinatno izhodišče z najbljižjo točko na premici, oklepa z abscisno osjo kot $\phi_1$, ima enačbo $r = a/\cos(\phi - \phi_1)$ (glej sliko 30). Polarni kot je zdaj v mejah med $\phi_1 - \pi/2$ in $\phi_1 + \pi/2$. V posebnem primeru,

ko je $\phi_1 = 0$ gre za navpično premico $r = a/\cos\phi$, ki preseka abscisno os v točki $a$, ko je $\phi_1 = \pi/2$ pa za vodravno premico $r = a/\sin\phi$, ki preseka ordinatno os v točki $a$.




Slika 30. Premica v polarni obliki

Tudi krivulje v polarni obliki lahko obravnavamo z odvodom. Tako lahko npr. določimo enačbe tangent v poljubni točki take krivulje, poiščemo točke, v katerih so tangente vodoravne ali navpične, pa tudi druge zanimive točke.

Z $r'$ označimo odvod polarne razdalje $r$ na polarni kot $\phi$. Ker je $\dot{x} = r'\cos\phi - r\sin\phi$ in $\dot{y} = r'\sin\phi + r\cos\phi$, je enačba tangente na polarno podano krivuljo $r = r(\phi)$ v točki s polarnima koordinatama $(r_0, \phi_0)$, $r_0 = r(\phi_0)$, in z oznako $r'_0 = r'(\phi_0)$ enaka

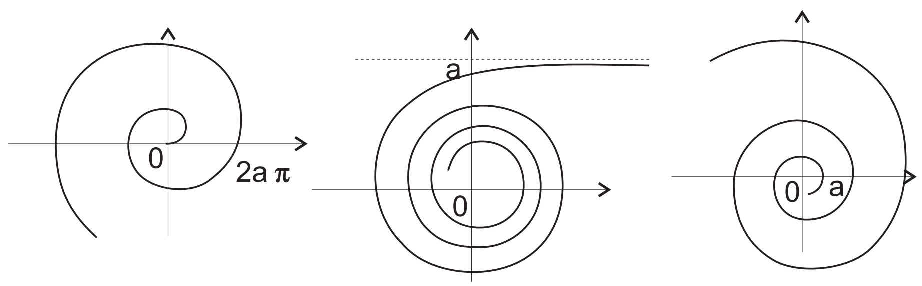
$$(r'_0\cos\phi_0 - r_0\sin\phi_0)(y - r_0\sin\phi_0) - (r'_0\sin\phi_0 + r_0\cos\phi_0)(x - r_0\cos\phi_0) = 0.$$

Pišimo še $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$ ter iz dobljene enačbe ob upoštevanju adicijskih izrekov izrazimo $r$, pa dobimo $r = r_0^2/(r_0\cos(\phi - \phi_0) - r'_0\sin(\phi - \phi_0))$.

Tudi to je enačba neke premice, kar vidimo, če izberemo tak $\psi_0$, da je $\cos\psi_0 = r_0/\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}$ in $\sin\psi_0 = -r'_0/\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}$. Tedaj je namreč $r = r_0\cos\psi_0/\cos(\phi - \phi_0 - \psi_0) = a/\cos(\phi - \phi_1)$, kjer je $a = r_0\cos\psi_0$ in $\phi_1 = \phi_0 + \psi_0$ (glej sliko 28).

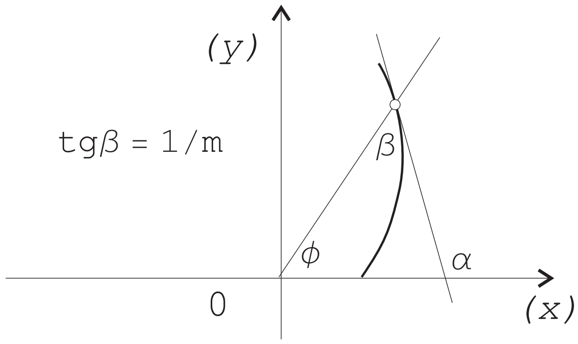
3. Zelo zanimive in v naravi prisotne krivulje so različne spirale:
(a) *Arhimedova spirala* ima polarno enačbo $r = a\phi$. Tu je $a > 0$ in $\phi \geq 0$.
(b) *Hiperbolična spirala* je dana z enačbo $r = a/\phi$, $a > 0, \phi > 0$.
(c) *Logaritemska spirala* ima enačbo $r = ae^{m\phi}$. Tu je $a > 0$ in $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ (pri $m = 0$ bi dobili enačbo krožnice), polarni kot $\phi \in \mathbb{R}$ pa lahko zavzame vse realne vrednosti. Če je $m > 0$, se spirala z rastočim $\phi$ odpira, za $m < 0$ pa zapira okrog koordinatnega izhodišča.

Vse tri spirale so prikazane na sliki 31.




Slika 31. Različne vrste spiral

ZGLED. Znano je, da logaritemska spirala s polarno enačbo $r = ae^{m\phi}$ seka vsak poltrak iz izhodišča pod istim kotom $\beta$.




SLIKA 32. Logaritemska spirala

To spoznamo takole. Kot med poltrakom in krivuljo je v bistvu kot med poltrakom in tangento na krivuljo v presečišču. Ker je smerni koeficient tangente na krivuljo v polarni obliki pri danem polarnem kotu $\phi$ enak $\mathrm{tg}\alpha = (r' \sin\phi + r\cos\phi)/(r'\cos\phi - r\sin\phi)$ in je v našem primeru $r' = ame^{m\phi}$, dobimo $\mathrm{tg}\alpha = (m\sin\phi + \cos\phi)/(m\cos\phi + \sin\phi)$ Naklonski kot poltraka je seveda $\phi$, kot med njima pa iskani kot $\beta = \alpha - \phi$ (glej sliko 32). Njegov tangens je po znanih trigonometričnih formulah in po krajšem računu enak

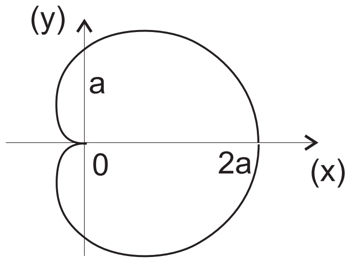
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\phi}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\phi} = \frac{(m\sin\phi + \cos\phi)\cos\phi - (m\cos\phi - \sin\phi)\sin\phi}{(m\cos\phi - \sin\phi)\cos\phi + (m\sin\phi + \cos\phi)\sin\phi} = \frac{1}{m}.$$

Vidimo, da je kot $\beta$ neodvisen od $\phi$, torej konstanten.

4. Še ena lepa krivlja v polarni obliki je *srčnica* (*kardioida*), dana z enačbo

$$r = a(1 + \cos\phi),$$

kjer je $a > 0$ in $0 \le \phi \le \pi$. Prikazana je na sliki 33.




SLIKA 33. Srčnica ali kardioida

V tem primeru dobimo

$$\dot{x} = -a(\sin\phi + \sin 2\phi) = -a\sin\phi(1 + 2\cos\phi),$$

$$\dot{y} = a(\cos\phi + \cos 2\phi) = a(1 + \cos\phi)(1 - 2\cos\phi),$$

tako da ima $x$ lokalne ekstreme (navpična tangenta) pri $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\phi = \pm 2\pi/3$ in $y$ lokalne ekstreme (vodoravna tangenta) pri $\phi = \pi$ in $\phi = \pm\pi/3$. Singularna točka je koordinatno izhodišče (pri $\phi = \pi$).

**Pritisnjeni krog in ukrivljenost ravninskih krivulj**

V dotikališču tangente na graf odvedljive funkcije $f$ se poleg vrednosti ujemata tudi naklona tangente in krivulje (odvod funkcije $f$). Podobno je pri aproksimaciji večkrat odvedljive funkcije $f$ s Taylorjevim polinomom višjega reda, ko se v neki točki ujemajo vrednosti in vsi višji odvodi funkcije in polinoma do nekega reda.

DEFINICIJA. Če sta $f$ in $g$ večkrat odvedljivi funkciji in če v neki točki $c$ velja $f(c) = g(c)$, $f'(c) = g'(c)$, ..., $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$, rečemo, da imata krivulji $y = f(x)$ in $y = g(x)$, tj. grafa funkcij $f$ in $g$, v točki $c$ *dotik reda* $n$.

Graf funkcije $f$ in graf $n$-tega Taylorjevega polinoma za točko $c$ imata npr. v točki $c$ dotik reda $n$ in to je edini polinom $n$-tega reda s to lastnostjo. Lahko torej rečemo, da med vsemi polinomi $n$-tega reda graf Taylorjevega polinoma v točki $c$ najbolje prilega grafu dane $n$-krat odvedljive funkcije $f$.

Imejmo zdaj dvakrat odvedljivo funkcijo $f$ in si zastavimo sorodno vprašnje: *Katera* krožnica *se v dani točki* $(x, y)$ *najbolje prilega grafu funkcije* $f$?

Krožnico iščimo v obliki $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$, kjer sta središče $(a, b)$ in polmer $\rho$ še neznani. Določimo jih tako, da bo imela krožnica z grafom funkcije $f$ v točki $(x, y)$ dotik reda dva: $y(x) = f(x)$, $y'(x) = f'(x)$ in $y''(x) = f''(x)$. Tu smo z $y = y(x)$ označili tudi funkcijo, ki se skriva v enačbi krožnice. Njene odvode lahko poiščemo po pravilu za odvajanje posredne funkcije.

Z odvajanjem enačbe krožnice na spremenljivko $x$ dobimo $2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$ oziroma $a = x - (b-y)y'$. Še enkrat odvajajmo, pa dobimo $0 = 1 + y'^2 - (b-y)y''$. Če je $y'' \neq 0$, lahko iz zadnje enačbe izračunamo

$$b = y + (1 + y'^2)/y''$$

in nato iz prejšnje dobimo

$$a = x - y'(1 + y'^2)/y''.$$

To sta koordinati središča krožnice, njen polmer pa je potem $\rho = (1 + y'^2)^{3/2}/|y''|$.

Zdaj pa zahtevajmo $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ in $y'' = f''(x)$. Potem so količine $a$, $b$ in $\rho$ z vrednostjo funkcije $f$ ter njenih odvodov $f'$ in $f''$ v točki $x$ natanko določene.

Dobljena krožnica omejuje krog, ki mu rečemo *pritisnjeni* ali *krivinski krog* krivulje, ki predstavlja graf funkcije $f$, v splošni točki $(x, f(x))$, kjer je $f''(x) \neq 0$. Središče pritisnjenega kroga je točka $(a, b)$, kjer je

$$a = x - \frac{f'(x)(1 + f'(x))^2}{f''(x)}, \quad b = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

polmer pa

$$\rho = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

**Opomba**. Središče pritisnjenega kroga na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(x, f(x))$ leži seveda na normali skozi $(x, f(x))$. Ker se v bližnji točki $(x+h, f(x+h))$ krivulja skoraj ujema s pritisnjen krožnico v točki $(x, f(x))$, dobimo središče pritisnjenega kroga tudi tako, da najprej poiščemo presečišče $(a, b)$ normale skozi $(x+h, f(x+h))$ z normalo skozi $(x, f(x))$ (kar je možno storiti, če normali nista vzporedni). Točka $(a, b)$ torej zadošča enačbama obeh normal $b - f(x) = (x-a)/f'(x)$ in $b - f(x+h) = (x+h-a)/f'(x+h)$. Če odtod izločimo $b$, dobimo za $a$ enačbo $(f'(x+h) - f'(x))(x-a) = (f(x+h) - f(x))f'(x)f'(x+h) + f'(x)h$. Delimo s $h$ in pošljimo $h \to 0$ pa dobimo v limiti $f''(x)(x-a) = f'(x)(1 + f'(x)^2)$, kar nam da isti rezultat kot zgoraj.

Poleg tega definiramo še eno količino.

DEFINICIJA. *Ukrivljenost* krivulje $y = f(x)$ v točki $x$ je količina

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Vidimo, da je ukrivljenost pozitivna, če je funkcija $f$ v točki $x$ strogo konveksna (krivulja se z rastočim $x$ ukrivlja na levo) in negativna, če je funkcija $f$ v točki $x$ strogo konkavna (krivulja se z rastočim $x$ ukrivlja na desno). Ukrivljenost je tudi lahko enaka nič, kar se zgodi, kadar je $f''(x) = 0$.

**Opomba**. Kasneje bomo ukrivljenost (krivulje v parametrični obliki) definirali še drugače, kot hitrost spreminjanja smeri tangente na krivuljo glede na t.i. naravni parameter.

DEFINICIJA. Polmeru pritisnjenega kroga rečemo *krivinski polmer* ali *krivinski radij.*

Iz definicije vidimo, da je enak absolutni vrednosti ukrivljenosti na $-1$, se pravi $\rho = 1/|\kappa|$. Kadar je ukrivljenost enaka nič, je krivinski polmer neskončen.

ZGLED. Običajna parabola je graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2$. Tu je $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ in zato $\kappa = 2/(1+4x^2)^{3/2}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Vidimo, da je ukrivljenost največja in enaka 2 v točki $x = 0$ (tedaj je krivinski polmer enak $1/2$), potem pa se zmanjšuje in konvergira proti 0, ko $|x| \to \infty$.

Poglejmo si še, kako ukrivljenost izračunamo pri krivuljah v parametrični in polarni obliki.

TRDITEV 1. *Za krivuljo, ki je podana v parametrični obliki z enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, kjer sta $x$ in $y$ dvakrat odvedljivi funkciji parametra $t$, je ukrivljenost pri poljubni vrednosti parametra $t$ enaka*

$$\kappa = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \quad \textit{oziroma na kratko} \quad \kappa = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

*krivinski polmer pa*

$$\rho = \frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}{|\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|} \quad \text{oziroma na kratko} \quad \rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}.$$

**Dokaz**. Še enkrat odvajamo $y' = \dot{y}/\dot{x}$ na spremenljivko $x$, pa dobimo za drugi odvod po $x$ izraz $y'' = (\dot{y}/\dot{x})^{\cdot}/\dot{x} = (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})/\dot{x}^3$. Ker je tudi $(1+y'^2)^{3/2} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}/\dot{x}^3$, dobimo rezultat iz definicij za ukrivljenost in za krivinski polmer.

TRDITEV 2. *Za krivuljo, ki je podana v polarni obliki z enačbo $r = r(\phi)$, kjer je $r$ dvakrat odvedljiva funkcija polarnega kota $\phi$, je ukrivljenost pri poljubni vrednosti kota $\phi$ enaka*

$$\kappa = \frac{r(\phi)^2 + 2r'(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)}{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{3/2}} \quad \textit{oziroma na kratko} \quad \kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

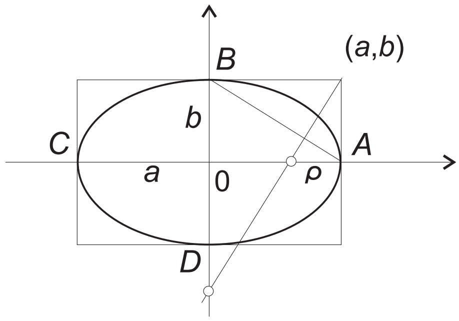
*krivinski polmer pa*

$$\rho = \frac{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{3/2}}{|r(\phi)^2 + 2r'(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)|} \quad \text{oziroma na kratko} \quad \rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}.$$

**Dokaz**. Ker je $\dot{x} = r'\cos\phi - r\sin\phi$ in $\dot{y} = r'\sin\phi + r\cos\phi$, sta druga odvoda enaka $\ddot{x} = r''\cos\phi - 2r'\sin\phi - r\cos\phi$ in $\ddot{y} = r''\sin\phi + 2r'\cos\phi - r\sin\phi$, zato s kratkim računom dobimo $\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y} = r^2 + 2r'^2 - rr''$ in $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 + r'^2$, odkoder sledi rezultat po trditvi 1.

Tudi v teh dveh primerih vidimo, da je ukrivljenost pozitivna, če se krivulja z rastočim parametrom $t$ ali $\phi$ ukrivlja na levo, in negativna, če se ukrivlja na desno.

ZGLEDI. 1. Za elipso v parametrični obliki $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geq b$, je $\dot{x} = -a\sin t$, $\dot{y} = b\cos t$, $\ddot{x} = -a\cos t$ in $\ddot{y} = -b\sin t$, zato je njena ukrivljenost pri poljubnem parametru $t$ po trditvi 1 enaka $\kappa = (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = ab/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}$, krivinski polmer pa $\rho = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}/ab$. Ukrivljenost je vedno pozitivna. Če poiščemo lokalne ekstreme funkcije $g(t) = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$, lahko npr. odtod takoj ugotovimo, da je največja ukrivljenost dosežena pri $t = 0$ in $t = \pi$, in sicer je tedaj enaka $\kappa_{max} = a/b^2$, najmanjša pa pri $t = \pi/2$ in $3\pi/2$, ko je enaka $\kappa_{min} = b/a^2$. Največja in najmanjša ukrivljenost elipse je torej v njenih temenih $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (-a, 0)$ in $D = (0, -b)$. Središči pritisnjenih krogov v temenih $A$ in $B$ torej dobimo tam, kjer pravokotnica na zvezico skozi temeni $A$ in $B$ skozi točko $(a, b)$ seka abscisno in ordinatno os (glej sliko 34).




SLIKA 34. Ukrivljenost elipse v temenih

2. Za krožnico $r = 2a\cos\phi$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ s polmerom $a > 0$, je seveda $\rho = a$ in $\kappa = 1/a$, o čemer se lahko prepričamo tudi po zgornjih formulah, saj je $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 8a^2$ in $r^2 + r'^2 = 4a^2$ (ali pa iz zgleda 1, če postavimo $a = b$, saj je krožnica poseben primer elipse).

3. Za kardioido je $r = a(1 + \cos\phi)$, $r' = -a\sin\phi$ in $r'' = -a\cos\phi$, zato imamo po kratkem računu $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3a^2(1 + \cos\phi) = 6a^2\cos^2(\phi/2)$ in $(r^2 + r'^2)^{3/2} = 8a^3\cos^3(\phi/2)$. Torej je $\rho = (4a/3)\cos(\phi/2)$ in $\kappa = 3/(4a\cos(\phi/2))$. Najmanjšo ukrivljenost dobimo pri $\phi = 0$.

# IV. ODVODI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIK

Tudi funkcije več spremenljivk obravnavamo z odvodi, ki pa jih moramo še definirati.

## 1. Odvajanje funkcij več realnih spremenljivk

Denimo, da je $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk.

*Parcialna odvoda* po $x$ in po $y$ funkcije $f$ v točki $(a, b)$ definiramo (podobno kot odvod pri funkciji ene spremenljivke) kot limiti ustreznih parcialnih diferenčnih kvocientov (pri pogoju, da ti dve limiti obstajata):

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$
$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Parcialna odvoda torej izračunamo tako, da odvajamo funkcijo na $x$ oziroma na $y$ po znanih pravilih za odvajanje funkcij ene spremenljivke, pri čemer smatramo drugo spremenljivko za konstanto.

**Zgled**. Za funkcijo $f(x,y) = x^2y + x$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$. Za funkcijo $g(x,y) = x \sin \frac{x}{y}$ pa imamo $\frac{\partial g}{\partial x} = \sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}$ in $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}$.

Podobno ravnamo splošno pri funkcijah več spremenljivk.

DEFINICJA. *Parcialni odvod* po spremnljivki $x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, funkcije $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ definiramo kot limito ustreznega parcialnega diferenčnega kvocienta (če obstaja):

$$f_{x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ...a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{h}$$

Rečemo, da je funkcija $f$ v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *parcialno odvedljiva* na spremenljivko $x_i$, če obstaja parcialni odvod funkcije $f$ na spremenljivko $x_i$ v točki $\boldsymbol{a}$. Iz dejstva, da obstajajo vsi parcialni odvodi v neki točki, pa še ne sledi, da je funkcija $f$ v tisti točki zvezna. To je torej drugače kot pri funkcijah ene spremenljivke.

ZGLED. Naj bo $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, če je $(x,y) \neq (0,0)$ in $f(0,0) = 0$. Vemo že, da ta funkcija dveh spremenljivk ni zvezna v točki $(0,0)$, saj v njej nima niti limite. Kljub temu ima v tej točki oba parcialna odvoda: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$.

Ker so parcialni odvodi funkcije več spremenljivk spet funkcije več spremenljivk (lahko katera manjka), se ima smisel vprašati, ali lahko te parcialne odvode še naprej parcialno odvajamo in pridemo do ti. *višjih parcialnih odvodov.* Storimo to za funkcije dveh spremenljivk. Parcialne odvode drugega reda tedaj definiramo s predpisom:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Podobno definiramo parcialne odvode tretjega reda itd.

ZGLED. Za funkcijo $f(x,y)=x^2y+x$ je $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy+1$ in $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2$. Torej je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Nadalje je $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$ itd.

Na tem primeru vidimo, da so mešani odvodi enaki ne glede na vrstni red odvajanja. To ni slučajno, saj velja naslednja trditev.

TRDITEV. *Če mešana parcialna odvoda* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *in* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *funkcije dveh spremenljivk* $f$ *obstajata in sta zvezni funkciji, sta med seboj enaka*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

*Tudi višji mešani parcialni odvodi so med seboj enaki ne glede na vrstni red odvajanja.*

**Dokaz**. Izberimo poljubno točko $(a,b)$, v kateri obstajata mešana odvoda in naj bo npr. $a<x$ in $b<y$. Na vsaki strani enakosti

$$(f(x,y)-f(a,y))-(f(x,b)-f(a,b))=(f(x,y)-f(x,b))-(f(a,y)-f(a,b))$$

uporabimo Lagrangev izrek (na levi strani glede na spremenljivko $y$ in na desni strani glede na spremenljivko $x$). Obstajata taki števili $c,d$, $a<c<x$, $b<d<y$, da je

$$(\frac{\partial f}{\partial y}(x,d)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,d))(y-b)=(\frac{\partial f}{\partial x}(c,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(c,b))(x-a).$$

Še enkrat na vsaki strani uporabimo Lagrangev izrek in najdemo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(c',d)(x-a)(y-b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d')(y-b)(x-a),$$

kjer je prav tako $a<c'<x$ in $b<d'<y$. Krajšajmo z $(x-a)(y-b)$. Če konvergira $x\to a$ in $y\to b$, velja tudi $c,c'\to a$ in $d,d'\to b$. Zaradi zveznosti mešanih odvodov dobimo v limiti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b).$$

Pri mešanih odvodih višjega reda upoštevamo pravkar dokazano enakost in dobimo npr.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x})=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}.$$

Brez predpostavke zveznosti mešanih odvodov, le-ti med seboj niso nujno enaki.

ZGLED. Za funkcijo $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ obstajata oba druga mešana parcialna odvoda v točki (0,0), vendar sta različna: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$.

Oba prva parcialna odvoda v točki (0,0) sta namreč enaka 0. Izračunati pa moramo še oba prva parcialna odvoda v poljubni bližnji točki $(x,y)$ in nato odtod po definiciji oba mešana odvoda (ustrezna odvoda prvih odvodov) v točki (0,0).

**Diferenciabilnost in totalni diferencial**

Pri funkcijah več spremenljivk parcialna odvedljivost še ne pomeni prave odvedljivosti. Slednja je definirana podobno kot diferenciabilnost pri funkciji ene spremenljvike:

DEFINICIJA. Funkcija $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *odvedljiva* ali *diferenciabilna*, če obstaja taka $n$-terica $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, da je

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Uporabili smo standardno oznako $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h}$ za skalarni produkt $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{h} = b_1h_1+b_2h_2+...+b_nh_n$ dveh $n$-teric $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$. Vemo tudi, da pomeni $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ isto kot $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ oziroma $h_i \to 0$ za vsak $i$.

Brez težav se lahko prepričamo, da je v točki $\boldsymbol{a}$ diferenciabilna funkcija $f$ tudi parcialno odvedljiva na vsako spremenljivko $x_i$ posebej in da za vsak $i$ velja $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = b_i$.

POSEBNI PRIMER. Funkcija $f$ dveh spremenljivk je v točki $(a, b)$ odvedljiva (diferenciabilna), če obstajata konstanti $A, B$, da velja

$$\lim_{h\to 0, k\to 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

pri čemer je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ in $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Videli smo, da iz same eksistence parcialnih odvodov funkcije $f$ ne moremo sklepati, da je funkcija $f$ zvezna. Pač pa velja naslednja trditev.

TRDITEV. *Če je funkcija $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ odvedljiva (diferenciabilna), je v točki $\boldsymbol{a}$ tudi zvezna.*

**Dokaz**. Iz pogoja diferenciabilnosti funkcije $f$ v točki $a$ sledi, da je limita števca enaka nič oziroma celo $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a})$. To pa pomeni zveznost v točki $a$.

Po drugi strani pa je zveznost parcialnih odvodov zadosten pogoj za odvedljivost funkcije.

IZREK. *Če je zvezna funkcija $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v okolici točke $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ in so vsi parcialni odvodi v točki $\boldsymbol{a}$ zvezni, je funkcija $f$ odvedljiva v točki $a$.*

**Dokaz**. Dokažimo samo primer $n = 2$; splošni dokaz poteka podobno, le bolj zamuden je. Izberimo $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, dvakrat uporabimo Lagrangev izrek in izračunajmo

$$U = \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b) - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,t)k - (Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) - A)h + (\frac{\partial f}{\partial y}(a,t) - B)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

in ocenimo absolutno vrednost

$$|U| \le |\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) - A| + |\frac{\partial f}{\partial y}(a,t) - B|.$$

Ker je pri pogoju $h \to 0$, $k \to 0$ res tudi $(s, b+k) \to (a, b)$ in $(a, t) \to (a, b)$, zaradi zveznosti parcialnih odvodov velja $\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) \to \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(a, t) \to \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Ne pozabimo, da je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ in $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, pa spoznamo konvergenco $U \to 0$, kar je bilo treba pokazati.

DEFINICIJA. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ poljubna odprta podmnožica, zvezna funkcija $f$ pa naj ima v vsaki točki množice $\Omega$ parcialne odvode, ki naj bodo zvezni kot funkcije $n$ spremenljivk. Potem rečemo, da pripada funkcija $f$ razredu $C^1(\Omega)$ *zvezno odvedljivih funkcij* na množici $\Omega$. Podobno definiramo za vsak $k$ razred *$k$-krat zvezno odvedljivih funkcij* $C^k(\Omega)$ kot razred tistih zveznih funkcij, ki imajo v vsaki točki množice $\Omega$ zvezne parcialne odvode do reda $k$, ter nazadnje razred $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$ vseh *neskončnokrat zvezno odvedljivih funkcij* na množici $\Omega$.

Pogosto označimo $n$-terico $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}))$ z oznako $\nabla f(\boldsymbol{a})$ in jo imenujemo *nabla* $f$ ali *gradient* funkcije $f$ v točki $\boldsymbol{a}$, se pravi

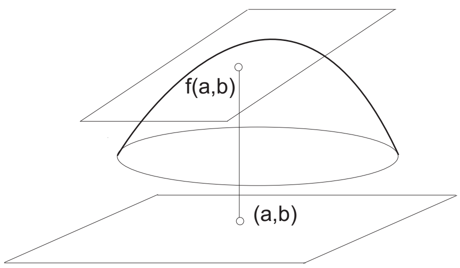
$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})).$$

S temi oznakami je $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$. Prav tako (kot pri funkcijah ene spremenljivke) pišemo $h_i = dx_i$ za $i = 1, 2, ..., n$ in namesto $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ kar $\boldsymbol{dx} = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)$.

DEFINICIJA. *Totalni diferencial* funkcije več spremenljivk v točki $\boldsymbol{a}$ je izraz

$$df = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})dx_n.$$

Pri funkcijah dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ je torej $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, kjer sta oba parcialna odvoda izračunana v točki $(a, b)$. Geometrijski pomen diferenciala je prirastek *tangentne ravnine* na ploskev $z = f(x, y)$ v točki $(a, b)$, podobno kot je bil pri funkciji ene spremenljivke njen diferencial prirastek tangente v točki $a$ (glej sliko 35). Enačba tangentne ravnine se glasi $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$, od koder tudi vidimo, da je vektor $\boldsymbol{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1)$ pravokoten (normalen) na tangentno ravnino. Če pišemo $x - a = dx$, $y - b = dy$ in $z - f(a, b) = dz$, imamo $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy = df$ oziroma $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{dx} = 0$, kjer je $\boldsymbol{dx} = (dx, dy, dz)$.




SLIKA 35. Tangentna ravnina

Pri funkcijah treh ali več spremenljivk govorimo namesto o tangentni ravnini seveda o *tangentnem prostoru*.

ZGLED. Izračunajmo totalni diferencial za $z = x^2y + x$ in $z = x \sin \frac{x}{y}$ v poljubni točki $(x, y)$. Parcialne odvode že poznamo, zato lahko kar takoj zapišemo: $dz = (2xy + 1)dx + x^2dy$ in $dz = (\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y})dx - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}dy$.

Totalni diferencial uporabljamo npr. pri ocenjevanju napak. Tako je za produkt $z = xy$ totalni diferencial $dz = ydx + xdy$, za kvocient $z = \frac{x}{y}$ pa $dz = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$.

Totalni diferencial pomeni oceno za *absolutno napako*. Pogosto pa je pomebnejša *relativna napaka*. Ocena zanjo pa je $\dfrac{dz}{z}$. Pri produktu dobimo $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$ (relativni napaki faktorjev se seštejeta), pri kvocientu pa $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{y}$ (relativni napaki se odštejeta).

## 2. Taylorjeva formula in implicitne funkcije

Najprej si oglejmo funkcije dveh spremenljivk. Namesto običajne formule $z = f(x, y)$ pišimo bolj enostavno kar $z = z(x, y)$, da prihranimo nove oznake. Izraz $z = z(x, y)$ dovolj nazorno pove, da je spremenljivka $z$ odvisna od spremenljivk $x$ in $y$, oziroma da je funkcija spremenljivk $x$ in $y$.

### Odvajanje posrednih funkcij

Naj bo zdaj $z$ le posredna funkcija spremenljivk $x$, in $y$, torej $z = z(u, v)$, kjer je $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ (spremenljivki $u$ in $v$ sta le posrednika).

TRDITEV. *Za parcialne odvode na $x$ in $y$ posredne funkcije $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ velja v tem primeru naslednje* **verižno pravilo**:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

**Dokaz**. Verižno pravilo izpeljemo tako, da na dva načina izračunamo totalni diferencial funkcije $z$. Enkrat gledamo $z$ kot funkcijo spremenljivk $x$ in $y$. Tedaj dobimo $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. Drugič pa opazujemo $z$ kot funkcijo posrednih spremenljivk $u$ in $v$, torej $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv$. Seveda pa sta v tem primeru $u$ in $v$ spet funkciji spremenljivk $x$ in $y$, zato sta njuna diferenciala enaka $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ in $dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$. Skupaj torej dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + \frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy) =$$

$$(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy.$$

S primerjanjem koeficientov pri $dx$ in $dy$ na obeh straneh enakosti dobimo formule za verižno pravilo.

**Opomba**. Opisana situacija ni edina možna. Lahko sta npr. spremenljivki $u$ in $v$ funkciji samo ene spremenljivke $t$; tedaj je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}u' + \dfrac{\partial z}{\partial v}v'$, kjer črtica pomeni odvod na $t$.

Ali pa je npr. $z$ funkcija samo ene spremenljivke $u$, ki pa je sama funkcija dveh spremenljivk $x$ in $y$. Tedaj je $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Lahko nastopa tudi več posrednikov, npr.: $z = z(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$. V takem primeru se verižno pravilo glasi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \text{ in } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Vidimo, da je veliko različnih oblik verižnega pravila; vse dokažemo podobno kot osnovno pravilo zgoraj. Seveda lahko verižno pravilo posplošimo tudi na več spremenljivk.

ZGLED. Če je $u = u(x)$, $v = v(x)$, izračunajmo odvod funkcije $z = z(x, y)$ po spremenljivki $x$ za naslednje izraze: (i) $z = u + v$, (ii) $z = uv$, (iii) $z = u/v$ in (iv) $z = u^v$. Dobimo: (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}$, (ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}$, (iii) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$, (iv) $\frac{\partial z}{\partial x} = vu^{v-1}\frac{\partial u}{\partial x} + u^v \ln u \frac{\partial v}{\partial x}$. Če je v zadnjem primeru npr. $u = x$ in $v = x$, dobimo na tan način odvod funkcije $z = x^x$, se pravi $z' = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

2. Funkcijo dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ pogosto želimo izraziti s polarnima koordinatama $r$ in $\phi$. To ni težko, če se spomnimo enačb, ki povezujejo kartezične in polarne koordinate: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Parcialna odvoda na polarni koordinati $\frac{\partial z}{\partial r}$ in $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ lahko po verižnem pravilu izrazimo s parcialnima odvodoma na kartezični koordinati $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -\frac{\partial z}{\partial x} r\sin\phi + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\phi.$$

Kadar hočemo, obratno, kartezične parcialne odvode izraziti s polarnimi, moramo ta sistem enačb razrešiti na $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dobimo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi$ in $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi$.

S temi formulami, lahko izraze, v katerih nastopajo parcialni odvodi prvega reda na kartezični spremenljivki $x$ in $y$, izrazimo s parcialnimi odvodi na polarni spremenljivki $r$ in $\phi$. Tako npr. iz zadnjih enačb po kratkem računu dobimo

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{\partial z}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \phi})^2.$$

S polarnimi koordinatami lahko izrazimo tudi izraze z višjimi parcialnimi odvodi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi)\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\sin\phi)\sin\phi +$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi)\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi)\cos\phi = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}.$$

**Taylorjeva formula za funkcije več spremenljivk**

Za $(n+1)$-krat odvedljivo funkcijo $F$ ene spremenljivke in točko 0 se Taylorjeva formula glasi: $F(t) = P_n(t) + R_n(t)$, kjer je $P_n(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)t^2/2! + ... + F^{(n)}(0)t^n/n!$ Taylorjev polinom in $R_n(t) = F^{(n+1)}(s)t^{n+1}/(n+1)!$ Taylorjev ostanek. S to formulo si pomagamo tudi pri funkcijah več spremenljivk.

Naj bo najprej $f$ funkcija dveh spremenljivk s parcialnimi odvodi do reda $(n+1)$ in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dana točka. Poleg tega naj bosta $h, k$ poljubni realni števili. Definirajmo funkcijo ene spremenljivke $F(t) = f(a + th, b + tk)$. Potem je $F(0) = f(a, b)$ in po verižnem pravilu

$$F'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Nadalje je
$$F''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^{(2)}|_{(a,b)},$$
kjer je izraz na desni simboličen kvadrat in pomeni, da binom v oklepaju najprej kvadriramo, nato pa potence prvih parcialnih odvodov zamenjamo z drugim parcialnim odvodom, njun produkt z mešanim odvodom, vse skupaj pa izračunamo v točki $(a, b)$ (ko je $t = 0$). Z indukcijo lahko to nadaljujemo, tako da za vsak $k \leq n$ dobimo
$$F^{(k)}(0) = (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^{(k)}|_{(a,b)},$$
kjer ima potenca na desni strani podoben simboličen pomen, se pravi, da najprej damo binom na $k$-to potenco in nato nadomestimo možne produkte prvih parcialnih odvodov z mešanim produktom reda $k$ in vse skupaj izračunamo v točki $(a, b)$. Ko je $k = n + 1$ pa končni rezultat namesto v točki $(a, b)$ izračunamo v vmesni točki $(a + \theta th, b + \theta tk)$, $0 < \theta < 1$.

Po Taylorjevi formuli za funkcijo $F$ in točko 0 potem dobimo $f(a + th, b + tk) = f(a, b)+ (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})|_{(a,b)}t + (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^{(2)}|_{(a,b)}t^2/2! + ... + (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^{(n)}|_{(a,b)}t^n/n! + R_n(t)$, kjer je $R_n(t) = (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^{(n+1)}|_{(a+\theta th,b+\theta tk)}t^{(n+1)}/(n + 1)!$, $0 < \theta < 1$.

Če tu izberemo $t = 1$, dobimo *Taylorjevo formulo za funkcijo $f$ dveh spremenljivk* in točko $(a, b)$ v naslednji obliki:
$$f(a + h, b + k) =$$
$$f(a, b) + (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial x})|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial x})^{(2)}|_{(a,b)} + ... + \frac{1}{n!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial x})^{(n)}|_{(a,b)} + R_n,$$
kjer je $R_n = R_n(1) = \dfrac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial x})^{(n+1)}|_{(a+\theta h,b+\theta k)}$, $0 < \theta < 1$.

Z nekaj več dela, ampak prav po podobni poti dobimo tudi *Taylorjevo formulo reda $m$ za funkcijo $n$ spremenljivk $f$* in točko $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Da bi še nekoliko poenostavili zapis, definirajmo še $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ in $\boldsymbol{h} \cdot \nabla f = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$. Potem je
$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla f)|_{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla f)^{(2)}|_{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla f)^{(3)}|_{\boldsymbol{a}}+...+\frac{1}{m!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla f)^{(m)}|_{\boldsymbol{a}}+R_m,$$
kjer je $R_m = \dfrac{1}{(m+1)!}(\boldsymbol{h} \cdot \nabla f)^{(m+1)}|_{\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}}$, $0 < \theta < 1$.

Zapis z diferenciali je še krajši:

Če pišemo $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{dx}$ in se spomnimo, da je diferencial funkcije več spremenljivk enak $df = \nabla f \cdot \boldsymbol{dx}$, obenem pa vpeljemo tudi oznako $d^k f(\boldsymbol{a}) = (\nabla f \cdot \boldsymbol{dx})^{(k)}|_{\boldsymbol{a}}$ za vsak $k$, dobimo formulo, ki po obliki spominja na Taylorjevo formulo za funkcije ene spremenljivke:
$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{dx}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{3!}d^3 f(\boldsymbol{a}) + ... + \frac{1}{m!}d^m f(\boldsymbol{a}) + R_m,$$
kjer je $R_m = \dfrac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{dx})$, $0 < \theta < 1$.

ZGLED. Poiščimo nekaj prvih členov v razvoju funkcije $f(x, y) = x\sin(x - y)$ okrog točke $(0, 0)$. Seveda je $f(0, 0) = 0$. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x + y) + x\cos(x - y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -x\cos(x - y)$, sta tudi oba prva parcialna odvoda v točki (0,0) enaka 0. Nadalje je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x - y) - x\sin(x - y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\cos(x - y) + x\sin(x - y)$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\sin(x - y)$, zato je $\frac{1}{2}d^2 f = \frac{1}{2}(2h^2 - 2hk) = h^2 - hk$.

Torej se Taylorjeva formula začne takole: $f(h,k) = h^2 - hk + ...$ oziroma $f(x,y) = x^2 - xy + ...$, če namesto $h$ pišemo kar $x$ in namesto $k$ kar $y$. Z nadaljnjim računanjem parcialnih odvodov bi lahko pridelali še nekaj členov $f(x,y) = x^2 - xy - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}y^4 + ...$, kar bi lahko veliko lažje dobili iz razvoja sinusa

$$f(x,y) = x\sin(x-y) = x[(x-y) - \tfrac{1}{6}(x-y)^3 + ...].$$

**Implicitne funkcije**

*Ničelna množica* $\{(x,y);\ F(x,y) = 0\}$ funkcije dveh spremenljivk $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ določa v ravnini neko krivuljo, sestavljeno iz tistih točk $(x,y)$, ki pač zadoščajo pogoju $F(x,y) = 0$. Ta pogoj je neka zveza med spremenljivkama $x$ in $y$. Včasih lahko iz te zveze eksplicitno izračunamo spremenljivko $y$ in jo izrazimo kot funkcijo spremenljivke $x$. Rečemo, da enačba $F(x,y) = 0$ implicitno določa funkcijo $y = y(x)$, tako da je enačba $F(x, y(x)) = 0$ izpolnjena za vsak $x$ iz nekega intervala. Lahko pa se zgodi, da zveza ne predstavlja nobene realne krivulje, torej tudi ne nobene realne funkcije $y = y(x)$.

Npr. iz zveze $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ki določa v ravnini krožnico s središčem v izhodišču in polmerom 1, lahko izrazimo $y$ v obliki dveh funkcij: $y = \sqrt{1-x^2}$ in $y = -\sqrt{1-x^2}$, ki sta definirani za $-1 \le x \le 1$. Zveza $x^2 + y^2 + 1 = 0$ pa v realnem določa zgolj prazno množico.

Vendar pa enačba $F(x,y) = 0$ pogosto določa funkcijo $y = y(x)$ tudi, če te funkcije ne znamo eksplicitno izračunati. Kdaj je to res, pove naslednji pomembni izrek.

IZREK (o implicitni funkciji). *Naj bo* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija dveh spremenljivk z naslednjimi lastnostmi*:
(i) $F \in C^1(V)$ *v neki okolici* $V$ *točke* $(a,b)$;
(ii) $F(a,b) = 0$;
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \ne 0$.
*Potem obstaja natanko ena zvezna in zvezno odvedljiva funkcija* $y = y(x)$, *definirana v neki okolici* $I$ *točke* $a$, *tako da je* $y(a) = b$ *in* $F(x, y(x)) = 0$ *za vsak* $x \in I$.

**Dokaz**. Ker je po točki (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \ne 0$, in je $\frac{\partial F}{\partial y}$ zvezna funkcija dveh spremenljivk, obstaja taka okolica $U \subset V$ in $\delta > 0$, da je $|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)| \ge \delta$ za vsak $(x,y) \in U$. Odslej opazujmo funkcijo $F$ le na okolici $U$. Zaradi neničelnega parcialnega odvoda na $y$ funkcija $y \to F(a,y)$ v točki $b$ narašča ali pada, po točki (ii) pa je $F(a,b) = 0$. Torej za vsak dovolj majhen $k > 0$ velja $F(a, b-k)F(a, b+k) < 0$ in zaradi zveznosti funkcije $F$ velja isto tudi za vsak $x$ iz neke okolice $I$ točke $a$, se pravi $F(x, b-k)F(x, b+k) < 0$ za $x \in I$. Ker sta torej funkcijski vrednosti funkcije $y \mapsto F(x,y)$ v krajiščih intervala $[b-k, b+k]$ nasprotnega predznaka, obstaja po izreku o vmesni vrednosti na tem intervalu vsaj en tak $y$, da je $F(x,y) = 0$. Pokažimo, da je $y$ en sam. Če bi veljalo še $F(x,z) = 0$, bi imeli po Lagrangevem izreku za funkcijo $y \mapsto F(x,y)$ na intervalu $(b-k, b+k)$ tako točko $c$, da bi veljalo $0 = F(x,y) - F(x,z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,c)(y-z)$. Ker ima po točki (i) funkcija $F$ v okolici $U$ točke $(a,b)$ zvezne prve parcialne odvode in je $|\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)| \ge \delta$, mora biti tudi $\frac{\partial F}{\partial y}(x,c) \ne 0$. Iz prejšnje zveze tako sledi $y = z$ in $y$ je en sam.

Ta $y$ je seveda še odvisen od $x$, torej funkcija spremenljivke $x \in I$. Pokažimo, da je funkcija $y = y(x)$ zvezna in odvedljiva na $I$. Izberimo tako število $h \ne 0$, da je hkrati z $x$ tudi $x+h \in I$ in naj bo $\Delta y = y(x+h) - y(x)$. Zaradi $F(x, y(x)) = 0$ in $F(x+h, y(x)+\Delta y) = F(x+h, y(x+h)) = 0$ imamo po Taylorjevi formuli

$$0 = F(x+h, y(x)+\Delta y) - F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y(x)+\theta\Delta y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

Ker zaradi zveznosti (in zato omejenosti) parcialnih odvodov prvi člen na desni strani strani konvergira proti nič, ko $h \to 0$, konvergira proti nič tudi drugi člen. Ker pa je

$|\frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y(x)+\theta\Delta y)| \geq \delta$, mora proti nič konvergirati $\Delta y$. Dobili smo torej limito $\lim_{h\to 0}(y(x+h)-y(x)) = \lim_{h\to 0}\Delta y = 0$, kar pomeni zveznost funkcije $y = y(x)$ v točki $x$. Poleg tega je za vsak $x \in I$ na osnovi iste enačbe v limiti $(h \to 0)$

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \frac{\Delta y}{h} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h, y(x)+\theta\Delta y)/\frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h, y(x)+\theta\Delta y) \to$$
$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))/\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)).$$

Po drugi strani je, zdaj ko vemo, da je funkcija $y = y(x)$ odvedljiva, po verižnem pravilu zaradi $F(x, y(x)) = 0$ res tudi $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$ za vsak $x \in I$, tudi za $x + h$. Torej je zaradi zveznosti funkcij $y = y(x)$ in parcialnih odvodov funkcije $F$

$$y'(x+h) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x+h, y(x+h))/\frac{\partial F}{\partial y}(x+h, y(x+h)) \to$$
$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))/\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) = y'(x),$$

kar pomeni, da je funkcija $y = y(x)$ celo zvezno odvedljiva v $I$.

**Opomba**. Če bi zahtevali, da je $F \in C^k(V)$, bi lahko pokazali, da je tudi implicitna funkcija $y = y(x)$ $k$-krat zvezno odvedljiva v okolici $I$.

ZGLED. Naj bo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, tako da je $F$ zvezna funkcija, ki ima na vsej ravnini zvezne parcialne odvode $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. Ker je $F(0, 1) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, so vsi pogoji izreka o implicitni funkciji izpolnjeni in v okolici $I = (-1, 1)$ točke 0 obstaja zvezno odvedljiva funkcija $y = \sqrt{1-x^2}$, za katero je $y(0) = 1$ in $F(x, \sqrt{1-x^2}) = 0$ za vsak $x \in I$. V točkah $(-1, 0)$ in $(1, 0)$, kjer je tudi vrednost funkcije $F$ enaka nič, pogoj $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ni izpolnjen, zato v okolici teh točk ne obstaja funkcija $y = y(x)$ z zahtevanimi lastnostmi. Pač pa je tedaj izpolnjen pogoj $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ in lahko najdemo zvezno odvedljivo funkcijo $x = \sqrt{1-y^2}$, za katero je $x(0) = 1$ ali $x(0) = -1$ in $F(\sqrt{1-y^2}, y) = 0$.

Pojem implicitne funkcije se da razširiti na funkcije več spremenljivk. Naj bo npr. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in $F \in C^1(V)$, kjer je $V$ okolica točke $(a, b, c)$, v kateri je $F(a, b, c) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Podobno kot prej lahko dokažemo, da pri teh pogojih obstaja natanko ena zvezna funkcija dveh spremenljivk $z = z(x, y)$ iz razreda $C^1(U)$, kjer je $U$ neka okolica točke $(a, b)$ v $\mathbb{R}^2$. Poleg tega je $z(a, b) = c$ in za vsak $(x, y) \in U$ velja $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Po verižnem pravilu najdemo tudi parcialna odvoda funkcije $z$ na $x$ in $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)/\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)/\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z).$$

Pa imejmo še eno tako funkcijo $G$; zdaj bi pri danem $x$ radi hkrati rešili dve enačbi: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. Naj bo $(a, b, c)$ taka točka, da je $F(a, b, c) = 0$ in $G(a, b, c) = 0$ in spet naj bo $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Iz prve enačbe kot zgoraj izračunajmo odvedljivo funkcijo $z = z(x, y)$ z lastnostjo $z(a, b) = c$ in jo vstavimo v drugo enačbo. Dobimo $H(x, y) = G(x, y, z(x, y)) = 0$. Zdaj je $H(a, b) = G(a, b, c) = 0$, njen parcialni odvod na $y$ pa je po verižnem pravilu enak

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}/\frac{\partial F}{\partial z} = (\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y})/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Če izraz v števcu v točki $(a,b)$ ni enak nič, je tudi $\dfrac{\partial H}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji potem obstaja odvedljiva funkcija $y = y(x)$, tako da je $y(a) = b$ in $H(x, y(x)) = 0$ v bližini točke $a$. Če vstavimo ta $y$ v $z(x,y)$ dobimo, da je tudi funkcija $z = z(x, y(x)) = z(x)$ odvisna samo od $x$. Poleg tega je $z(a) = z(a, y(a)) = z(a,b) = c$. Velja torej $F(x, y(x), z(x)) = 0$ in $G(x, y(x), z(x)) = 0$, tako da smo dobili, kar smo želeli.

To smo izpeljali pri pogoju $\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ in pri pogoju, da je bil v enem od prejšnjih izrazov števec v točki $(a,b,c)$ različen od nič, torej

$$D = \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Ampak slednje zadostuje: če bi bil namreč v tem primeru $\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) = 0$, bi bil nujno $\dfrac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ in vlogi $F$ in $G$ bi preprosto zamenjali.

**Opomba**. Izraz $D$ je v resnici determinanta t.i. *Jacobijeve matrike* za funkciji $G$ in $F$

$$J(G,F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

ZGLED. Če je $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, je $F(0,0,1) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$, zato obstaja zvezno odvedljiva funkcija $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, za katero je $z(0,0) = 1$ in $F(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = 0$ na krogu $K = \{(x,y);\ x^2 + y^2 < 1\}$. Denimo, da je še $G(x,y,z) = x + y + z - 1$. Potem je tudi $G(0,0,1) = 0$ in $D = \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 \neq 0$ v točki (0,0,1). Torej obstajata po prejšnjem funkciji $y = y(x)$ in $z = \sqrt{1 - x^2 - y(x)^2}$, ki določata v prostoru $\mathbb{R}^3$ krivuljo, sestavljeno iz točk $(x,y,z)$, kjer je hkrati $F(x,y,z) = 0$ in $G(x,y,z) = 0$. Torej predstavlja ta krivulja presek krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ z ravnino $x + y + z = 1$, se pravi krožnico v prostoru $\mathbb{R}^3$ skozi točke (1,0,0), (0,1,0) in (0,0,1).

## 3. Ekstremi funkcij več spremenljivk

### Lokalni ekstremi funkcij več spremenljivk

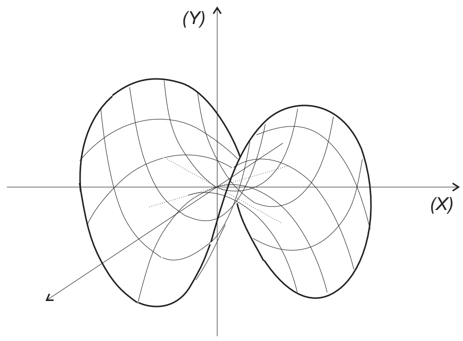
DEFINICIJA. Zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima v točki $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *lokalni ekstrem*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $\boldsymbol{h}$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{h}\| < \delta$ velja $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) \geq 0$ (*minimum*) ali $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) \leq 0$ (*maksimum*).
Funkcija $f$ ima v točki $\boldsymbol{a}$ *strogi lokalni ekstrem*, če za $\|\boldsymbol{h}\| < \delta$ in $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ velja $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) > 0$ (*strogi minimum*) ali $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) < 0$ (*strogi maksimum*).

TRDITEV. *Za odvedljivo funkcijo več spremenljivk je potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema v točki $\boldsymbol{a}$ stacionarnost točke $\boldsymbol{a}$, se pravi, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$ za vsak $i = 1, 2, ..., n$ oziroma $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.*

**Dokaz**. Tudi funkcija $x_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ mora imeti pri $x_i = a_i$ lokalni ekstrem, kar pomeni, da mora biti njen odvod, ki je enak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, enak nič.

Pogoj stacionarnosti ni tudi zadosten za nastop ekstrema.

ZGLED. Za funkcijo $f(x,y) = xy$ je točka $(0,0)$ stacionarna, ker sta oba prva parcialna odvoda v njej enaka nič, ni pa ekstrem, ker ima v smeri $y = x$ funkcija $f$ minimum, v smeri $y = -x$ pa maksimum. Rečemo, da ima v točki $(0,0)$ funkcija $f$ *sedlo* (glej sliko 36).




Slika 36. Sedlo

Zadostne pogoje za lokalni ekstrem ugotovimo z uporabo Taylorjeve formule. V okolici $V$ stacionarne točke $\boldsymbol{a}$ dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f \in C^2(V)$ velja

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2} d^2 f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}),\ 0<\theta<1,$$

zato je predznak diference in s tem narava stacionarne točke odvisna od predznaka drugega diferenciala $d^2 f = (\boldsymbol{h}\cdot\nabla f)^{(2)}$, izračunanega v bližnjih točkah. Nasploh je to bolj zapleteno vprašanje, zato si podrobneje oglejmo samo funkcije dveh spremenljivk. Tam je $\boldsymbol{a} = (a,b)$, $\boldsymbol{h} = (h,k)$ in

$$d^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k), 0<\theta<1.$$

Vpeljimo oznake: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ in $D = AC - B^2$.

**Opomba**. Izraz $D$ je enak determinanti t.i. *Hessejeve matrike*, sestavljene iz drugih parcialnih odvodov funkcije $f$, izračunanih v stacionarni točki $(a,b)$:

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix} = J(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})|_{(a,b)}$$

Vidimo, da je Hessejeva matrika za funkcijo $f$ enaka Jacobijevi matriki za parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$, torej $H_f = J(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

Zaradi zveznosti drugih parcialnih odvodov, konvergirajo pri pogoju $h,k \to 0$ izrazi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) \to A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) \to B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k) \to C$ in potem tudi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k))^2 \to D$.

IZREK. *Pri zgornjih oznakah velja za funkcijo $f$ dveh spremenljivk z zveznimi drugimi parcialnimi odvodi v stacionarni točki $(a,b)$ naslednje*:
(a) *Če je v točki $(a,b)$ izraz $D>0$, ima funkcija $f$ v točki $(a,b)$ strogi lokalni ekstrem in sicer strogi maksimum, če je $A<0$, in strogi minimum, če je $A>0$.*
(b) *Če je v točki $(a,b)$ izraz $D<0$, ekstrema ni, ampak ima funkcija $f$ v točki $(a,b)$ sedlo.*
*Če pa je $D=0$, samo iz drugih odvodov v točki $(a,b)$ ne moremo ugotoviti ali nastopi lokalni ekstrem ali ne.*

**Dokaz**. Ali je izraz $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ pri majhnih $h,k \neq 0$ ves čas pozitiven ali negativen, odloča $D = AC - B^2$.
(a) Če je npr. $D>0$, mora biti $A \neq 0$ in velja $Ah^2+2Bhk+Ck^2 = ((Ah+Bk)^2+Dk^2)/A$, tako da je ta izraz za vse dovolj majhne $h,k \neq 0$ pozitiven, če je $A>0$, in negativen, če

je $A > 0$. V tem primeru je pri dovolj majhnih $h, k \neq 0$ tudi $f(a+h, b+k) - f(a,b) = d^2f(a+\theta h, b+\theta k)/2 > 0$, če je $A > 0$, in $f(a+h, b+k) - f(a,b) = d^2f(a+\theta h, b+\theta k)/2 < 0$, če je $A < 0$, in funkcija ima v stacionarni točki $(a,b)$ strogi lokalni minimum oziroma strogi lokalni maksimum.

(b) Če je $D < 0$, je izraz

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \begin{cases} ((Ah+Bk)^2 + Dk^2)/A & , \quad A \neq 0 \\ (2Bh + Ck)k & , \quad A = 0 \end{cases}$$

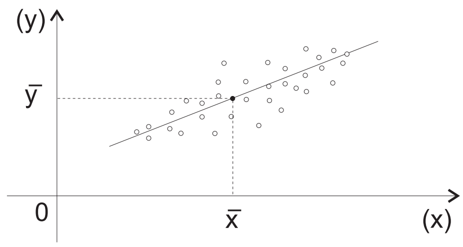
lahko pozitiven ali negativen, odvisno od $h$ in $k$. Potem je tudi $f(a+h, b+k) - f(a,b) = d^2f(a+\theta h, b+\theta k)/2$ lahko pozitiven ali negativen v odvisnosti od $h, k$, tako da funkcija v stacionarni točki $(a,b)$ nima ekstrema, ampak sedlo.

ZGLEDI. 1. Funkcija $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y + 5$ ima samo en minimum in sicer v točki $(3,2)$. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 4$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 1$, hitro ugotovimo, da je $(3,2)$ edina stacionarna točka. V njej velja $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,2) = -1$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,2) = 2$ in $D = AC - B^2 = 3 > 0$, torej ima po zgornjem izreku funkcija $f$ v točki (3,2) minimum, vrednost funkcije v minimumu pa je $f(3,2) = -2$.

2. Funkcija $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ima sedlo v točki $(0,0)$ in minimum v točki (1,1). Zdaj je $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ in $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, zato sta rešitvi sistema enačb $x^2 = y$ in $y^2 = x$ dve. Z drugimi odvodi ugotovimo, da v točki $(0,0)$ velja $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ in $D = -9 < 0$, torej sedlo za funkcijo $g$, v točki $(1,1)$ pa $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$ in $D = 27 > 0$, torej minimum za funkcijo $g$.

3. *Metoda najmanjših kvadratov.* Pogosto zvezo med dvema količinama, ki ju lahko merimo, opisuje funkcija $y = f(x,a,b)$, ki je odvisna npr. še od dveh (včasih tudi več) parametrov $a$ in $b$. Parametre še ne poznamo natančno. Skušamo pa jih določiti tako, da se bo funkcija čimbolje prilagajala danim eksperimentalnim podatkom $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$. To dosežemo npr. z iskanjem minimuma funkcije dveh spremenljivk

$$F(a,b) = \textstyle\sum_{k=1}^n (f(x_k, a, b) - y_k)^2.$$




SLIKA 37. Diagram razpršenosti

Za zgled, kako ta metoda deluje, si oglejmo iskanje linearne zveze $y = a + bx$ (slika 37). Postavimo $F(a,b) = \sum_{k=1}^n (a + bx_k - y_k)^2$, izračunamo parcialna odvoda in ju izenačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^n (a + bx_k - y_k) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^n x_k(a + bx_k - y_k) = 0$$

Za spremenljivki $a$ in $b$ dobimo sistem linearnih enačb

$$an + b\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

ki je enolično rešljiv, če sta vsaj dve točki v zaporedju $x_1, x_2, ..., x_n$ med seboj različni. Iz njega izračunamo

$$b = (n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k)/(n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2)$$

in nato še

$$a = (\sum_{k=1}^{n} y_k - b\sum_{k=1}^{n} x_k)/n.$$

Ker je $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2n > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $(\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b})^2 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k$ in $D = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - (\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b})^2$ $= 4n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 4(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = 4n\sum_{k=1}^{n}(x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 > 0$, vidimo, da v stacionarni točki vedno nastopi minimum.

### Vezani ekstremi funkcije dveh spremenljivk

Včasih iščemo ektreme funkcije dveh spremenljivk $z = f(x, y)$, pri čemer pa spremenljivki $x$ in $y$ ne tečeta prosto po območju odvedljivosti funkcije $f$, ampak sta med seboj povezani z enačbo $g(x, y) = 0$ (t.i. *enačba vezi*). Iz te enačbe bi v načelu lahko eno spremenljivko izrazili z drugo, vstavili v dano funkcijo in tako dobili ekstremalni problem za funkcijo ene spremenljivke. V točkah, kjer $\nabla g \neq 0$, lahko to storimo in npr. izločimo $y = y(x)$, kadar je $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Vemo, da je tedaj odvod implicitne funkcije enak $y' = -\frac{\partial g}{\partial x}/\frac{\partial g}{\partial y}$. Vstavimo funkcijo $y = y(x)$ v izraz za $f(x, y)$ in dobimo funkcijo ene spremenljivke $x \mapsto f(x, y(x))$.

Ker iščemo njen lokalni ekstrem, mora biti odvod te funkcije ene spremenljivke enak nič, se pravi $0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}/\frac{\partial g}{\partial y}$. Potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema je torej $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ oziroma $J(f, g) = 0$ (Jacobijeva determinanta). Ta enačba pove, da sta v lokalnem ekstremu vektorja $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ in $(\frac{\partial g}{\partial y}, -\frac{\partial g}{\partial x})$ med sabo pravokotna oziroma vektorja $\nabla f$ in $\nabla g$ kolinearna, tj. obstaja konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je npr. $\nabla f = -\lambda \nabla g$ oziroma $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$. Zapisano po komponentah to pomeni, da je $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ in $g(x, y) = 0$ (če hočemo, da je ekstrem na krivulji, ki jo določa enačba vezi). Ekvivalenten je naslednji Lagrangev postopek:

Sestavimo novo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

in ji poiščemo ekstrem. Potrebno je seveda rešiti sistem enačb

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ in } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Zadnja enačba nam ponovno da pogoj $g(x, y) = 0$. Iz tega sistema izračunamo neznanke $x$, $y$ in $\lambda$, vsaka rešitev $(x, y)$ je stacionarna točka, torej možna ekstremalna točka.

ZGLED. Poiskati želimo npr. polosi elipse v centralni legi z enačbo $ax^2+2bxy+cy^2=1$ (elipso dobimo, kadar je $ac-b^2>0$, $a>0$ in hkrati $a\neq c$ ali $b\neq 0$).

Polosi sta dve, večja in manjša. Ker je ta elipsa v centralni legi, ju dobimo kot največjo in najmanjšo možno razdaljo točke na elipsi do koordinatnega izhodišča. Zadošča opazovati kvadrat razdalje. Iščemo torej ekstreme kvadrata razdalje $f(x,y)=x^2+y^2$ pri pogoju $ax^2+2bxy+cy^2=1$.

Nastavek

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(ax^2+2bxy+cy^2-1)$$

nam da z odvajanjem na $x$ in na $y$ sistem enačb $x+\lambda(ax+by)=0$, $y+\lambda(bx+cy)=0$ oziroma $(a\lambda+1)x+b\lambda y=0$, $b\lambda x+(c\lambda+1)y=0$, ki je netrivialno rešljiv samo, če je $(ac-b^2)\lambda^2+(a+c)\lambda+1=0$. Ker je za to kvadratno enačbo pri zgornjih pogojih diskriminanta $(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$, dobimo za $\lambda$ dve vrednosti $\lambda_1$ in $\lambda_2<\lambda_1$, ki sta obe negativni. Pri vsaki od teh vrednosti $\lambda$ dobimo dve rešitvi $(\pm x,\pm y)$, ki predstavljata nasprotni temeni elipse, ki ležita na premici $y=-(a\lambda_1+1)x/b\lambda_1$ oziroma $y=-(a\lambda_2+1)x/b\lambda_2$.

Iz sistema obeh enačb tudi ugotovimo, da za vsako rešitev $(x,y)$ velja $x^2+y^2=-\lambda$. Torej je mala polos elipse enaka $\sqrt{-\lambda_1}$, velika pa $\sqrt{-\lambda_2}$.

Oglejmo si konkreten primer elipse: $3x^2+2xy+y^2=1$. V tem primeru je $a=3$, $b=1$, $c=1$ in $ac-b^2=2$. Enačba za $\lambda$ nam da dve vrednosti: $\lambda_1=-1+1/\sqrt{2}$ in $\lambda_2=-1-1/\sqrt{2}$, temeni elipse pa ležita na premicah $y=(\sqrt{2}-1)x$ in $y=-(\sqrt{2}+1)x$.

ZGLED. Denimo, da bi radi poiskali vse lokalne ekstreme fnkcije $f(x,y)=x^2-y^2$ na enotskem disku $x^2+y^2\leq 1$. Posebej jih poiščemo v notranjosti kroga in posebej na njegovem obodu.

Edina stacionarna točka znotraj kroga (in sploh v celi ravnini je točka $(0,0)$, vendar je v njej $A=2$, $B=0$ in $C=-2$, torej $D=AC-B^2=-4<0$, zato je tam sedlo.

Kaj pa na robu? Zdaj rešujemo problem vezanega ekstrema. Iščemo maksimum in minimum funkcije $f(x,y)=x^2-y^2$ pri pogoju $x^2+y^2=1$. Po Lagrangevi metodi definiramo $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$, zato je $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x$ in $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y+2\lambda y$. Enačbe $x+\lambda x=0$, $-y+\lambda y=0$ in $x^2+y^2=1$ so hkrati rešljive za $x=0$, $y=\pm 1$ in $\lambda=1$ ter za $x=\pm 1$, $y=0$ in $\lambda=-1$. Funkcija $f$ ima na krožnici $x^2+y^2=1$ lokalna minimuma v točkah $(0,1)$ in $(0,-1)$, ko je vrednost funkcije enaka $-1$, ter lokalna maksimuma v točkah $(1,0)$ in $(-1,0)$, ko je vrednost funkcije enaka 1.

**Vezani ekstremi funkcije več spremenljivk**

Vzemimo zdaj splošni primer, pri katerem bi radi poiskali lokalni ekstrem funkcije $n$ spremenljivk $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ pri $m$ pogojih

$$g_1(x_1,x_2,...,x_n)=0,\ g_2(x_1,x_2,...,x_n)=0,\ ...,\ g_m(x_1,x_2,...,x_n)=0.$$

Enačb vezi mora biti manj kot spremenljvk, se pravi $m<n$. Totalni diferencial funkcije $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ je

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Če diferenciramo še enačbe vezi, vidimo, da diferenciali spremenljivk niso med seboj neodvisni, ampak zadoščajo tudi naslednjim $m$ enačbam:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_1}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial g_1}{\partial x_n}dx_n=0,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_2}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial g_2}{\partial x_n}dx_n=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g_m}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial g_m}{\partial x_n}dx_n=0.$$

Iz teh enačb bi lahko izrazili $m$ diferencialov s preostalimi $n-m$ diferenciali, jih vstavili v enačbo za $du$ in zahtevali, da je vseh $n-m$ tako dobljenih koeficientov enakih nič. Skupaj z $m$ enačbami vezi imamo torej ravno $n$ enačb za $n$ neznank $x_1, x_2, ..., x_n$.

Lagrangeva metoda pa je drugačna. Pomnožimo zgornjih $m$ enačb z $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ in jih prištejemo enačbi za $du$, tako da dobimo

$$du=(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_1})dx_1+(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_2})dx_2+...$$
$$+(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_n}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_n})dx_n.$$

Neznanke $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ najprej določimo tako, da so enaki nič koeficienti pri zadnjih $m$ diferencialih. Ker so diferenciali $dx_1, dx_2, ..., dx_{n-m}$ neodvisni, morajo biti tudi preostali koeficienti enaki nič, tako da imamo na koncu $n$ pogojev:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_2}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_n}+...+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_n}=0,$$

Neznanke $x_1, x_2, ..., x_n$ in $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ poiščemo tako, da so izpolnjene te enačbe in še $m$ enačb vezi: $g_1(x_1, x_2, ..., x_n)=0$, $g_2(x_1, x_2, ..., x_n)=0$, ..., $g_m(x_1, x_2, ..., x_n)=0$. Ker pa vse te enačbe dobimo s parcialnim odvajanjem Lagrangeve funkcije

$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)=f(x_1, x_2, ..., x_n)+\lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n)+...+\lambda_m g_m(x_1, x_2, ..., x_n)$, na vsako od spremenljivk $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, je treba za določitev točk, kjer nastopi vezani ekstrem, rešiti $m+n$ enačb

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\ ...,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=0,\ ...,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m}=0.$$

To metodo imenujemo *metoda Lagrangevih multiplikatorjev.*

ZGLED. (1) Na premici, ki je enaka preseku ravnin $x+y+z=3$ in $x+3y-z=3$, poiščimo točko, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču.

Dovolj je poiskati vezane ekstreme funkcije $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ pri pogojih

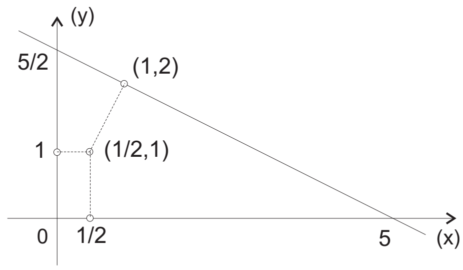
$$x+y+z-3=0 \text{ in } x+3y-z=3.$$

Uporabimo Lagrangevo metodo in definirajmo novo funkcijo
$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x+y+z-3) + \mu(x+3y-z-3).$$
Parcialni odvodi so $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda + \mu$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda + 3\mu$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda - \mu$. Če iz teh treh enačb izločimo $\lambda$ in $\mu$, dobimo zvezo $-2x + y + z = 0$, iz katere z upoštevanjem prve enačbe vezi $x + y + z = 3$ najdemo $x = 1$ in $y + z = 2$. Vstavimo v drugo enačbo vezi $x + 3y - z = 3$ in končno najdemo še $y = 1$ in $z = 1$. Iz geometrije je jasno, da je točka $(1, 1, 1)$ najbližja koordinatnemu izhodišču in sicer je od njega oddaljena $\sqrt{3}$ enot.

(2) Na ravnini poiščimo točko $(x, y)$ z minimalno vsoto kvadratov razdalj do premic $x = 0$, $y = 0$ in $x + 2y = 5$.

Opazimo, da je vsota treh kvadratov razdalj minimalna samo, če od točke $(x, y)$ postavimo na vse tri premice pravokotnico. Zato si lahko privoščimo, da poiščemo mininimum vsote kvadratov razdalj od $(x, y)$ do treh točk $(z, 0)$, $(0, t)$ in $(u, v)$, od katerih vsaka pripada eni od premic.

Iščemo torej minimum funkcije
$$f(x,y,z,t,u,v) = (x-z)^2 + y^2 + x^2 + (y-t)^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2,$$
pri pogoju $u + 2v = 5$ (da točka $(z, 0)$ leži na abscisni osi, točka $(0, t)$ pa na ordinatni osi, je jasno). Po Lagrangeu je torej
$$F(x,y,z,t,u,v,\lambda) = (x-z)^2 + y^2 + x^2 + (y-t)^2 + (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda(u+2v-5).$$
Ko izračunamo vse parcialne odvode, jih izenačimo z nič in poenostavimo izraze, dobimo enačbe $x = z$, $y = t$, $u = 2x$, $v = 2y$, $u + 2v = 5$ in $\lambda = 2(x - u) = y - v$ z rešitvami $x = 1/2$, $y = 1$, $z = 1/2$, $t = 1$, $u = 1$, $v = 2$ in $\lambda = -1$. Iskana točka je torej točka $(1/2, 1)$, podnožišča so $(1/2, 0)$ (na abscisni osi), $(0, 1)$ (na ordinatni osi) in $(1, 1)$ (na premici $x+2y = 5$), najmanjša vsota kvadratov vseh treh razdalj pa znaša $5/2$ (glej sliko 38).




Slika 38. Problem vezanega ekstrema

## LITERATURA

[1] K.R. Davidson, A.P. Donsig, *Real Analysis with Applications*, Prtentice Hall 2002.
[2] B. Drinovec Drnovšek, S. Strle, *Naloge iz analize 1 - z odgovori, nasveti in rešitvami*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2010.
[3] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.
[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraww-Hill 1976.
[5] R.S. Strichartz, *The Way of Analysis*, Jones nad Bartlett Publ., Boston 2000.
[6] G. Tomšič, Bojan Orel, Neža Mramor Kosta, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[7] N. Mramor Kosta, B. Jurčič Zlobec, *Zbirka nalog iz matematike I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[8] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA-založništvo, Ljubljana 1994.