

ANALIZA 1, program IŠRM

Shema predavanj 1911/12

1. teden (TOREK 4.10.2011, ČETRTEK 6.10.2011) Uvod, številske množice in operacije med njimi

Naravna števila in matematična indukcija: Peanovi aksiomi (tudi v jeziku preslikav), princip matematične indukcije, zgled: $(1+x)^n \geq 1+nx$ za $x \geq -1$ in $n \in \mathbb{N}$, binomski obrazec

Preslikave med množicami: pojem preslikave, domena, kodomena, zaloga vrednosti, surjektivnost, injektivnost, bijektivnost, zgled: $n \mapsto n'$, kjer je $n' = n+1$ naslednik naravnega števila n

Notranje operacije v številskih množicah: dvočlenska operacija splošno, induktivna definicija vsote in produkta naravnih števil, potreba pa razširitvi številskih množic, pojem ekvivalenčne relacije (razlike in cela števila, ulomki in racionalna števila), zakaj $\sqrt{2}$ ni racionalno število

Aksiomi za realna števila: vsota in produkt, deset osnovnih lastnosti, pojem kolobarja in obsega, zgledi, upodabljanje realnih števil

Definicija kompleksnih števil: kanonični zapis $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, realni in imaginarni del, imaginarna enota ($i^2 = -1$), upodabljanje v koordinatni ravnini, vsota in produkt, konjugiranje in absolutna vrednost, polarni zapis, de Moivreova formula (zgled: reševanje binomske enačbe)

2. teden (TOREK 11.10.2011, ČETRTEK 13.10.2011) Urejenost in polnost realnih števil

Urejenost realnih števil: dodatna dva aksioma o množici pozitivnih števil ($a \neq 0 \implies a \in \mathbb{P}$ ali $-a \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{P} \implies a+b \in \mathbb{P}$ in $ab \in \mathbb{P}$), trihotomija, zaprtost množice \mathbb{P} za vsoto in produkt, relacije manjši, večji, lastnosti, definicija intervalov in poltrakov

Absolutna vrednost realnega števila: definicija, geometrijski pomen $|x-y|$ razdalja med x in y , zgledi: reševanje neenačb z absolutno vrednostjo

Omejenost podmnožic: navzgor (navzdol) omejene množice v \mathbb{R} , najmanjša zgornja in največja spodnja meja: $\sup A$, $\inf A$, Dedekindov aksiom

Posledice Dedekindovega aksioma: neomejenost množice \mathbb{N} , Arhimedova lastnost, gostost racionalnih števil, decimalni zapis, obstoj kvadratnega korena, Dedekindovi rezi, decimalni približki, množica realnih števil \mathbb{R} ima večjo moč kot množica naravnih števil \mathbb{N} .

3. teden (TOREK 18.10.2011, SREDA 19.10.2011, ČETRTEK 20.10.2011) Zaporedja

Zaporedje kot preslikava: $n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, lastnosti: omejenost in monotonost, zgledi

Podanost zaporedja: eksplicitno, rekurzivno, zgled (aritmetično zaporedje $x_{n+1} = x_n + d$, geometrijsko zaporedje $x_{n+1} = kx_n$, $k \in \mathbb{R}$)

Stekališče in limita: definicija epsilonske okolice $V_\epsilon(a)$, definiciji limite in stekališča, lastnosti, konvergenca in divergenca zaporedja

Izreki o limitah in stekališčih: koliko je limit, stekališč, podzaporedja, omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče, če ima eno, je limita, Cauchyjevo zaporedje, je omejeno in

ima kvečjemu eno stekališč, je konvergentno.

Računanje limit: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, formalna definicija (za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0 , da iz $n \geq n_0$ sledi $|x_n - a| < \epsilon$), $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0$, $a_n, b_n > 0$ za vsak n , $c > 0 \implies (a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \implies a_n + b_n \rightarrow 0, ca_n \rightarrow 0$

Primerjanje zaporedij: (a) $x_n \leq y_n$ za vsak $n \implies \lim_n x_n \leq \lim_n y_n$

(b) $x_n \leq z_n \leq y_n$ za vsak n , $\lim_n x_n = \lim_n y_n \implies \lim_n z_n = \lim_n x_n = \lim_n y_n$

Limita vsote, razlike, produkta in kvocienta, potence: limita ulomkov, limita izrazov s koreni, posebne limite ($\lim_n 1/(1+nb) = 1$, če $b = 0$, in 0 , če $b \neq 0$, $\lim_n \sqrt{1+1/n} = 1$, $\lim_n a^n = 0$, če $|a| < 1$, 1 , če $a = 1$, ne obstaja če $a = -1$ ali $|a| > 1$, $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$).

Izrek o monotoni zaporedjih: vsako navzgor omejeno naraščajoče zaporedje realnih števil x_n je konvergentno, njegova limita je enaka $a = \sup x_n$, lema o vloženi intervalih, število e , drugi zgledi.

4. teden (TOREK 25.10.2011)

Zaporedja, limite, diskretni dinamični sistemi

Spodnja in zgornja limita: definicija, dve trditvi, druge lastnosti, zgled.

Rekurzijsko podana zaporedja: linearne diferenčne enačbe, nelinearne enačbe prvega reda, zgledi (dinamični sistemi), mrežni diagrami.

5. teden (ČETRTEK 3.11.2011)

Evklidski prostori

Prostor \mathbb{R}^n : operacije z n-tericami (vsota, produkt s skalarjem), lastnosti

Lastnosti norme: pozitivna definitnost, pozitivna homogenost, Cauchy-Schwarzova neenakost, trikotniška neenakost, neenakost za maksimalno vrednost komponente

Konvergenca v \mathbb{R}^n : epsilonska okolica, definicija limite in stekališča, konvergenca v \mathbb{R} na n , po komponentah, Cauchyjeva lastnost

6. teden (TOREK 8.11.2011, ČETRTEK 10.11.2011)

Zaprta, kompaktnost. Funkcije ene ali več realnih spremenljivk

Zaprte množice: definicija limitne točke, definicija zaprtih množic, zgledi, definicija zaprtja

Odrte množice: definicija s kroglicami, komplement je zaprt

Kompaktnost: definicija z zaporedji, zveza z zaprtostjo in omejenostjo (Heine Borelov izrek), vloženi kompakti.

Preslikave splošno: domena in kodomena, enakost, graf, injektivnost, surjektivnost, bijektivnost, inverzna preslikava, kompozitum

Realne funkcije: grafi nekaterih funkcij, kaj so elementarne funkcije

7. teden (TOREK 15.11.2011, ČETRTEK 17.11.2011)

Limite funkcij

Limita funkcij: definicija z zaporedji in ϵ - δ , leva, desna limita, monotone funkcije

Računanje limit: pravila, preprosti zgledi, posebne limite

8. teden (TOREK 22.11.2011, ČETRTEK 24.11.2011)

Zvezne funkcije

Zvezne funkcije: definicija, lastnosti (vsota, razlika, produkt, kvocient, kompozitum, elementarne funkcije so zvezne)

Izreki o monotonih funkcijah: leva in desna limita v vsaki točki, števno točk nezveznosti, zvezna strogo monotona funkcija je bijektivna

Izrek o inverzni funkciji: inverz zvezne strogo monotone funkcije je tudi zvezna strogo monotona funkcija, zgledi

Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu: omejenost, doseganje maksimalne in minimalne vrednosti, zavzemanje vsake vmesne vrednosti

Zvezne funkcije na kompaktni množici: omejenost, doseganje največje in mnajmanjše vrednosti, enakomerna zveznost

9. teden (TOREK 29.11.2011, ČETRTEK 1.12.2011)

Odvod funkcij ene spremenljivke

Odvod funkcije: definicija in geometrijski pomen, levi in desni odvod, odvedljivost in zveznost, zgledi

Pravila za odvajanje: vsota, razlika, produkt, kvocient, kompozitum, odvod inverzne funkcije

Odvodi elementarnih funkcij: odvodi osnovnih funkcij, zgledi

Diferencial in diferencibilnost: definicija diferenciala, približna formula, diferencibilnost in odvedljivost

Višji odvodi: definicija, zgledi, razredi $C^n(I)$

Aproksimacija s polinomi višjih redov in Taylorjeva formula: približne formule, oblika Taylorjevega polinoma in ostanka, uporaba

10. teden (TOREK 6.12.2011, ČETRTEK 8.12.2011)

Izreki o odvedljivih funkcijah in uporaba

Naraščanje funkcije v točki ($f \nearrow$): $h > 0$, $f(a+h) > f(a)$, $f(a-h) < f(a)$

Padanje funkcije v točki ($f \searrow$): $h > 0$, $f(a+h) < f(a)$, $f(a-h) > f(a)$

Trditev: $f'(a) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ v a

Lokalni ekstrem funkcije v točki: $h > 0$, maksimum $f(a \pm h) < f(a)$, minimum $f(a \pm h) > f(a)$

Trditev: Če ima odvedljiva funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je $f'(a) = 0$ (stacionarna točka).

Vsaka stacionarna točka še ni ekstrem, zgled: x^3

Izreki o odvedljivih funkcijah:

Rolle: $f(a) = f(b)$, f zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na $(a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$ za $a < c < b$

Lagrange: f zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na $(a, b) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ za $a < c < b$
geometrijska interpretacija: sekanti vzporedna tangenta

Cauchy: f, g zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na $(a, b) \Rightarrow (f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$
za $a < c < b$

L'Hospital: $f(c) = g(c) = 0$, f, g odvedljivi v okolici $c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)/g'(x)$

Dokaz: PO Cauchyju ali z uporabo Rolleovega izreka, $F(t) = g(x)f(t) - f(x)g(t)$, $t \in [a, x]$; ker $F(x_0) = 0$ in $F(x) = 0$, po Rolleu obstaja $c \in (x_0, x)$, da je $F'(c) = 0$; torej je $g(x)f'(c) - f(x)g'(c) = 0$ oziroma $f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$, od koder dobimo rezultat v limiti $x \rightarrow a$.

Zgledi: Izračunati limite $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctg x)/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x)/x^3$

Taylorjeva formula: aproksimacija večkrat odvedljive funkcije s polinomi, oblika Taylorjevega polinoma $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)(x-a)^k/k!$

Taylorjev izrek in Taylorjeva formula: f $(n+1)$ -krat odvedljiva na I , $a, x \in I$, $x \neq a$, potem obstaja vmesna točka c , da velja $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, kjer je $R_n(x) = f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ Taylorjev ostanek v Lagrangevi obliki. dokaz z večkratno uporabo Rolleovega izreka, posebni primeri, zgledi za približne formule, aproksimacija sinusne funkcije.

11. teden (TOREK 13.12.2011, ČETRTEK 15.12.2011)

Iskanje ekstremov, konveksnost in konkavnost

Iskanje lokalnih ekstremov: Potreben pogoj $f'(a) = 0$ (stacionarna točka)

Trditev: $f' \nearrow$ v stacionarni točki \Rightarrow minimum (po Lagrangeu:

$f(a+h) - f(a) = f'(c)h > f'(a)h = 0$ in podobno $f(a) - f(a-h) < 0$ za $h > 0$)

Trditev: $f' \searrow$ v stacionarni točki \Rightarrow maksimum (podobno)

Posledica: $f''(a) > 0 \Rightarrow$ minimum, $f''(a) < 0 \Rightarrow$ maksimum

Kaj se zgodi, če $f''(a) = 0$? Ne vemo (ekstrem ali prevoj). Pogledamo prvi od 0 različen odvod, če je sode stopnje, je ekstrem, če je lihe, je prevoj.

Zgledi: $x^3 - 3x^5$, $2x/(x^2 + 1)$, praktični zgledi (včrtati v krog pravokotnik z največjo ploščino, lomni zakon)

Konveksnost, konkavnost: splošna definicija, različne oblike, zveznost konveksne funkcije na odprtem intervalu **Konveksnost, konkavnost v točki:** $f(a+h) - f(a) > f'(a)h$ za $h \neq 0$ (konveksnost, graf nad tangento)

$f(a+h) - f(a) < f'(a)h$ za $h \neq 0$ (konkavnost, graf pod tangento)

Enakovrednost globalne in lokalne konveksnosti (brez dokaza). Če ima f' v točki a strogi lokalni ekstrem (minimum ali maksimum), ima funkcija v točki a prevoj

Trditev: $f' \nearrow$ v $a \Rightarrow f$ strogo konveksna v a (po Lagrangeu kot prej pri minimumu)

Trditev: $f' \searrow$ v $a \Rightarrow f$ strogo konkavna v a (po Lagrangeu kot prej pri maksimumu)

Posledica: $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ strogo konveksna v a , $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ konkavna v a

Kaj se zgodi, če $f''(a) = 0$? Ne vemo, lahko je prevoj, ne pa nujno. Zgledi:

$f(x) = x^2$, x^3 , $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = 2x/(x^2 + 3)$, $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2x + 1)$

12. teden (TOREK 20.12.2011, ČETRTEK 22.12.2011)

Ravninske krivulje, parcialni odvodi

Krivulje v parametrični in polarni obliki: odvajanje, enačba tangente, zgledi

Pritisnjeni krog in ukrivljenost: dotik višjega reda, izpeljava formul za središče in polmer pritisnjenega kroga, definicija ukrivljenosti, zgled

Ukrivljenost za parametrične in polarne krivulje: formule, zgledi

Odvajanje funkcij več spremenljivk: parcialni odvodi, višji parcialni odvodi, enakost mešanih odvodov

Diferenciabilnost in totalni diferencial: definicija odvedljivosti, zveznost odvedljive funkcije, totalni diferencial, zgledi uporabe

13. teden (TOREK 3.1.2012, ČETRTEK 5.1.2012)
Verižno pravilo in Taylorjeva formula

Odvajanje posrednih funkcij: verižno pravilo za dve spremenljivki in dva posrednika, splošno verižno pravilo

Taylorjeva formula za funkcije več spremenljivk: izpeljava za dve spremenljivki, splošno, različne oblike (z gradienti in diferenciali)

14. teden (TOREK 10.1.2012, ČETRTEK 12.1.2012)
Ekstremi funkcij več spremenljivk

Lokalni maksimum in minimum: Definicija, potreben pogoj (stacionarna točka), gradient nič, protiprimer: sedlo ($z = xy$)

Zadostni pogoji: drugi diferencial, Hessejeva matrika in njena determinata D , izrek: $D > 0 \Rightarrow$ strogi lokalni ekstrem (maksimum, če $A < 0$, in minimum, če $A > 0$), $D > 0 \Rightarrow$ sedlo, zgledi: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y + 5$, $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Metoda najmanjših kvadratov: uvod, prevedba v ekstremalni problem, rešitev, zapis s povprečji, dokaz, da res nastopi minimum

Vezani ekstremi za funkcije dveh spremenljivk: formulacija problema, Lagrangeva metoda

Zgled: elipsa v centralni legi $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, $ac - b^2 > 0$, $a > 0$ in $a \neq c$ ali $b \neq 0$ (konkreten primer: $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$), vsi ekstremi funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ na disku $x^2 + y^2 \leq 1$, posebej znotraj, posebej na robu

Vezani ekstremi splošno: Lagrangevi multiplikatorji

Zgled: Na preseku ravnin $x + y + z = 3$ in $x + 3y - z = 3$ poiskati izhodišču najbližjo točko

15. teden (TOREK 17.1.2012, ČETRTEK 19.1.2012)
Implicitne funkcije

Implicitne funkcije: motivacija, izrek o implicitni funkciji za funkcije dveh spremenljivk, dokaz, za eno in dve funkciji treh spremenljivk

Pogovor s študenti o izpitih pri analizi 1