ANALIZA 2
Zapiski predavanj

Milan Hladnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Ljubljana 2012

KAZALO

I. INTEGRIRANJE FUNKCIJ

1. Nedoločeni integral

Poleg odvajanja funkcij je za uporabo pomembno, da jih znamo tudi integrirati. Z integralom računamo dolžine krivulj, površine krivočrtnih likov, prostornine teles omejenih s ploskvami. Brez integriranja npr. ne bi mogli reševati diferencialnih enačb (glej zadnji razdelek), veliko fizikalnih količin je podanih v integralski obliki itd.

Osnovni pojmi

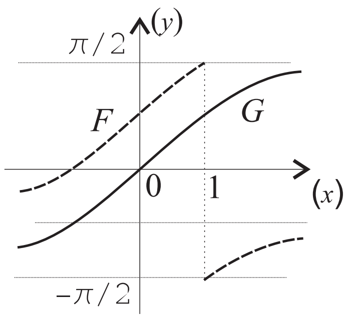
Iskanje nedoločenega integrala neke funkcije je obraten problem kot iskanje odvoda: Dana je (zvezna) funkcija f, iščemo tako odvedljivo funkcijo F, da je $F'(x) = f(x)$ za vsak x. Tej funkciji rečemo *primitivna funkcija* ali *nedoločeni integral* (dane funkcije f).

Nedoločeni integral ni enolično določen, funkciji F lahko prištejemo katerokoli konstanto, saj velja $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)$. Poleg tega se poljubna dva nedoločena integrala za isto funkcijo f na danem intervalu I lahko razlikujeta le za aditivno konstanto. Res, če je $G'(x) = F'(x)$ za $x \in I$, je $(G(x) - F(x))' = 0$ in zato $G(x) = F(x) + C$ po posledici Lagrangevega izreka.

Nedoločeni integral zapišemo z integralskim znakom: $F(x) = \int f(x)dx$. Zapis izhaja iz Leibnizove pisave odvoda $y' = \frac{dy}{dx}$. Če je $\frac{dy}{dx} = f(x)$, je $dy = f(x)dx$ in $y = \int f(x)dx$. Funkcijo, ki jo integriramo, imenujemo na kratko *integrand*.

ZGLED. $\int 2xdx = x^2 + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$. Tu je C poljubna konstanta.

Opomba. Če za dana integrala F in G velja $F'(x) = G'(x)$ za vsak $x \in [a, b]$ razen za $c \in (a, b)$, je njuna razlika $F(x) - G(x)$ konstanta, ki pa je na posameznih podintervalih $[a, c)$ in $(c, b]$ lahko različna. Zgled sta npr. funkciji $F(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ in $G(x) = \operatorname{arctg}x$, ko je $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = G'(x)$ za $x \neq 1$, vendar pa je $F(x) - G(x) = \pi/4$ za $x < 1$ in $F(x) - G(x) = -3\pi/4$ za $x > 1$ (glej sliko 1).



SLIKA 1

Za preproste funkcije lahko njihov integral kar uganemo in ga zapišemo v tabelo.

Tabela elementarnih integralov

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ 1 \neq a > 0 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C, \ a \neq 0$$

V zadnjem primeru lahko z odvajanjem naknadno preverimo, da je dobljena funkcija res nedoločen integral dane funkcije. Pri nekaterih integrandih z ugibanjem ne gre. Potrebno je poznati nekatera splošna pravila za integriranje. Oglejmo si tri osnovne metode.

Metoda dekompozicije

Integrand skušamo preoblikovati, največkrat prevesti na vsoto ali razliko znanih integralov. Pri tem upoštevamo, da velja:
1) $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$
2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
Ti dve pravili preverimo z odvajanjem (upoštevamo, da podobno velja za odvode).

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int ((2x-1)^2 + 3x^2)dx = \int (7x^2 - 4x + 1)dx = 7\int x^2 dx - 4\int x dx + \int dx = 7x^3/3 - 2x^2 + x + C$
(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+1}\, dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = x + 3\,\mathrm{arctg}\, x + C$

Metoda substitucije

Uvedemo novo integracijsko spremenljivko t, tako da je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Pri tem se spremeni tudi diferencial $dx = x'(t)dt$ in s tem celoten integrand:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Če smo substitucijo $x = x(t)$ izbrali pametno, je novi integral preprostejši od prejšnjega in ga znamo rešiti direktno.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$; uvedli smo substitucijo $x = \frac{1}{2}t + 1$ oziroma $2x - 1 = t$. Na sploh je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, če je $\int f(x)dx = F(x)$ in $a \neq 0$.
(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$. Zdaj je dobra izbira $x = \arccos t$ oziroma $\cos x = t$, saj je $-\sin x\, dx = dt$.
(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^3+1} + C$. Tu smo izbrali $x^3 + 1 = t$ in dobili $3x^2 dx = dt$. Še bolje bi bilo izbrati $x^3 + 1 = t^2$. S tem bi hkrati odpravili tudi kvadratni koren iz drugega integrala in dobili še bolj preprost integral.

Metoda integracije po delih (per partes)

Formula za integracijo per partes je $\int udv = uv - \int vdu$, kjer sta u in v funkciji spremenljivke x. Izpeljemo jo iz dejstva, da je $uv = \int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu$. Integriranje po delih uporabljamo, kadar je integrand produkt dveh raznorodnih funkcij, npr. produkt polinoma in eksponentne (logaritemske, trigonometrične) funkcije ali produkt eksponentne in trigonometrične funkcije.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Izbrali smo $u = \ln x$ in $dv = xdx$.

(b) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C =$ $(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C$. Zdaj smo morali dvakrat integrirati per partes. Prvič smo izbrali $u = x^2$, drugič $u = x$, obakrat pa $dv = \mathrm{e}^x dx$.

Pri nekaterih tipih integralov, npr. pri integriranju racionalnih funkcij, ali pri integralih, kjer nastopajo kvadratni koreni iz kvadratnih izrazov, so potrebni posebni prijemi. V teorijo integriranja takih funkcij se tu ne bomo resneje spuščali, podali pa bomo nekaj preprostih napotkov in zgledov.

Metode za integriranje racionalnih funkcij

Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov: $f(x) = p(x)/q(x)$. Če je stopnja števca večja ali enaka stopnji imenovalca, oba polinoma najprej med seboj delimo, da dobimo celi del in ostanek: $p(x)/q(x) = s(x) + r(x)/q(x)$. Polinom znamo integrirati (členoma), preostalo racionalno funkcijo pa po potrebi razstavimo na ti. *parcialne ulomke*, nato pa integriramo vsak parcialni ulomek posebej. (Uporabimo torej neko varianto metode dekompozicije.)

ZGLED. Zaradi $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$ je $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C$.

V tem primeru je bila razčlenitev na parcialne ulomke zelo enostavna. Imenovalec pa ima v splošnem večkratne linearne in večkratne v realnem nerazcepne kvadratne faktorje, npr.

$q(x) = q_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}...(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$

Razčlenitev na parcialne ulomke je zdaj oblike:

$$\begin{gathered}
\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\
\frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + ... \\
\frac{A_{m1}}{x-a_m} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^2} + ... + \frac{A_{mk_m}}{(x-a_m)^{k_m}} + \\
\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \\
\frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + ... + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + ... \\
+ \frac{B_{n1}x + C_{n1}}{x^2+p_nx+q_n} + \frac{B_{2n}x + C_{2n}}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + ... + \frac{B_{nl_n}x + C_{nl_n}}{(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}}.
\end{gathered}$$

Koeficiente moramo še določiti z odpravljanjem ulomkov.

Člen oblike $A/(x-a)^k$ je enostavno integrirati; dobimo $A\ln|x-a|$, če je $k=1$, in $(A/(1-k))/(x-a)^{k-1}$, če je $k>1$. Člen $(Bx+C)/(x^2+px+q)$ z nerazcepnim imenovalcem zapišemo v obliki $(Bx+C)/(x^2+px+q)=(B/2)(2x+p)/(x^2+px+q)+D/(x^2+px+q)$, kjer je $D=C-Bp/2$. Integral prvega člena se izraža z $(B/2)\ln(x^2+px+q)$. Imenovalec drugega člena pa preoblikujemo v popolni kvadrat: $x^2+px+q=\frac{1}{4}((2x+p)^2+(4q-p^2))=\frac{4q-p^2}{4}(1+(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2)$, saj je $4q-p^2>0$, in uvedemo novo spremenljivko $t=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$. Rezultat integriranja je potem $\frac{2D}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$. Če pa nastopajo nerazcepni faktorji tudi na višjo potenco l, so integrali poleg teh dveh oblik tudi oblike $h(x)/(x^2+px+q)^{l-1}$, kjer je h polinom stopnje $2l-3$.

Najbolje je torej za integral splošne racionalne funkcije $p(x)/q(x)$, kjer je stopnja imenovalca vsaj tolikšna kot stopnja števca in je imenovalec razstavljen v zgornji obliki, vzeti nastavek:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}+A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+...+A_m\ln|x-a_m|+$$

$$B_1\ln(x^2+p_1x+q_1)+B_2\ln(x^2+p_2x+q_2)+...+B_{2n}\ln(x^2+p_nx+q_n)+$$

$$\frac{2C_1}{\sqrt{4q_1-p_1^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_1}{\sqrt{4q_1-p_1^2}}+\frac{2C_2}{\sqrt{4q_2-p_2^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_2}{\sqrt{4q_2-p_2^2}}+...+\frac{2C_n}{\sqrt{4q_n-p_n^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_n}{\sqrt{4q_n-p_n^2}},$$

kjer je $\tilde{q}(x)$ polinom z istimi linearnimi in kvadratnimi faktorji, kot so večkratni faktorji v $q(x)$, vendar nastopa vsak na potenco, ki je za ena manj kot pri polinomu $q(x)$, polinom $\tilde{p}(x)$ pa naj ima stopnjo za eno manjšo kot polinom $\tilde{q}(x)$. Koeficiente potem določimo tako, da obe strani najprej odvajamo, nato pa odpravimo ulomke in primerjamo dobljene koeficiente pri različnih potencah spremenljivke x na obeh straneh enačbe. Kadar tako ravnamo, rečemo, da smo integral izračunali z *metodo nedoločenih koeficientov.*

ZGLED. Integral $I=\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ uženemo z zgornjim nastavkom

$$I=A\ln|x-1|+B\ln(x^2+x+1)+\frac{2C}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{D}{x-1}.$$

Najprej določimo A,B,C in D iz primerjave odvajane leve in desne strani. Po odpravi ulomkov dobimo $x=(A+2B)x^3+(-3B+C-D)x^2-(2C+D)x+(-A+B+C-D)$, rešimo ustrezen sistem linearnih enačb in najdemo $A=B=0$, $C=D=-1/3$. Končni rezultat integriranja je potem $I=-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1$, kjer je C_1 poljubna konstanta.

Metode za integriranje korenskih funkcij

Najprej si oglejmo primer, ko pod korenom nastopa linearna ali lomljena linearna funkcija. Lahko so različni koreni, le radikand mora biti vedno isti. Če je npr. pod korenom izraz $\frac{ax+b}{cx+d}$ pišemo $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$, kjer je p taka potenca, da po zamenjavi spremenljivke odpadejo vsi koreni. Problem prevedemo na integracijo racionalnih funkcij, kar že poznamo (je pa z integracijo lahko še veliko dela).

ZGLED. S substitucijo $\frac{1-x}{1+x}=t^3$ oziroma $x=\frac{1-t^3}{1+t^3}$, od koder je $dx=\frac{-6t^2dt}{(1+t^3)^2}$, dobimo $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx=-6\int\frac{t^3dt}{(1+t^3)^2}$, ki jo lahko potem integriramo po metodah za integriranje racionalnih funkcij.

Naslednji primer, ko se da integral popopolnoma izračunati, je primer, ko nastopa pod *kvadratnim korenom* kvadratni trinom ax^2+bx+c, $a\neq 0$. Označimo $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,

integrand pa naj bo racionalna funkcija spremenljivk x in y, torej
$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{Q_1(x) + Q_2(x)y},$$
kjer so P_1, P_2, Q_1, Q_2 polinomi v x. Odpravimo koren iz imenovalca, pa imamo
$$R(x,y) = \frac{P_1(x)Q_1(x) - P_2(x)Q_2(x)y^2}{Q_1(x)^2 - Q_2(x)^2y^2} + \frac{P_2(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)^2 - Q_2(x)^2y^2}y.$$
Prvi člen je racionalna funkcija, ki jo znamo integrirati, drugi pa je produkt racionalne funkcije in korena y oziroma racionalna funkcija, deljena s korenom y, torej oblike
$$\frac{H(X)}{G(x)y} = \frac{F(x)}{y} + \frac{R(x)}{G(x)y},$$
če polinoma G in H po potrebi med sebj še delimo.

Oglejmo si najprej, kako izračunamo integral $I = \int \frac{F(x)dx}{y} = \int \frac{F(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Z metodo nedoločenih koeficientov (odvajanje obeh strani in primerjanje ulomkov) ugotovimo, da lahko vedno zapišemo
$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = F_1(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$
kjer je $F_1(x)$ polinom, stopnje za eno manjše od stopnje polinoma F, in K neka konstanta. Odtod vidimo, da je treba znati izračunati samo zadnji člen. V ta namen zapišimo kvadratni trinom v drugi obliki: $4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 - D$, kjer je $D = b^2 - 4ac$ njegova diskriminanta. Pri izračunu ustreznega integrala uvedemo novo integracijsko spremenljivko $t = 2ax + b$, $dt = 2adx$, upoštevati pa moramo tri možnosti: (a) $D \neq 0$, $a > 0$, (b) $D > 0$, $a < 0$ (možnost $D < 0$, $a < 0$, ne pride v poštev, ker mora biti $ax^2+bx+c > 0$) in (c) $D = 0$.

V prvem primeru je $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-D}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(t + \sqrt{t^2-D}) + C$ oziroma izraženo s starimi spremenljivkami $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}) + C$.

V drugem primeru je $I = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{D-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{D}} + C$ oziroma s starimi spremenljivkami $I = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$.

V tretjem primeru je pod korenom popolni kvadrat, zato dobimo $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{|t|} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t|$ za $t < 0$ in $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t|$ za $t > 0$, torej $I = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|$ za $2ax + b < 0$ in $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|$ za $2ax + b > 0$.

ZGLEDI. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \ln(t+\sqrt{t^2-2})+C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})+C$.
(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin(x-1) + C$.
(c) $I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{a^2-x^2} + C\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (nastavek); odvajamo in primerjamo koeficiente, da dobimo $A = 1/2$, $B = 0$ in $C = a^2/2$, torej je
$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C_1.$$

Preostane še izračun integrala oblike $\int \frac{R(x)}{G(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Polinom $G(x)$ razčlenimo na same linearne faktorje (predpostavimo, da to gre), ulomek $R(x)/G(x)$ pa na parcialne ulomke. Potem je treba izračunati integrale oblike $I = \int \frac{dx}{(x-e)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

V ta integral vpeljemo substitucijo $x - e = 1/t$, tako da je $dx = -dt/t^2$ in dobimo $I = -\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(ae^2+be+c)t^2+(2ae+b)t+a}}$, se pravi integral take vrste, kakršno smo že obravnavali.

ZGLED. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$

Kadar so pred korenom tudi nerazcepni kvadratni, je integracija težja. Vendar je vedno možno napraviti ustrezno substitucijo, s katero integral s korenom prevedemo na integral racionalne funkcije.
(a) Če je $a > 0$, pišemo $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x+t)\sqrt{a}$ in dobimo

$$x = \frac{at^2-c}{b-2at};\ dx = -2a\frac{at^2-bt+c}{(b-2at)^2}\,dt \text{ ter } y = \sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}\ \frac{at^2-bt+c}{b-2at}.$$

(b) Če je $a < 0$, mora imeti enačba $ax^2+bx+c = 0$ dva različna realna korena x_1 in x_2, sicer bi bil izraz pod kvadratnim korenom vedno negativen alii nič. V tem primeru lahko pišemo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}(x-x_1)t$ in dobimo

$$x = \frac{x_1t^2+x_2}{t^2+1};\ dx = \frac{2(x_1-x_2)tdt}{(t^2+1)^2}\,dt \text{ ter } y = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\ \frac{(x_2-x_1)t}{t^2+1}.$$

Opomba. Kadar nastopa pod kvadratnim korenom polinom tretje ali četrte stopnje, govorimo o *eliptičnih integralih*. V splošnem se jih ne da elementarno izračunati, tj. izraziti z elementarnimi funkcijami, pač pa jih lahko z ustrezno transformacijo vedno prevedemo na eno od naslednjih osnovnih treh oblik (a, k konstanti, $0 < k < 1$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx,\quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Integrali transcendentnih funkcij

Med transcendentne funkcije spadajo eksponenta in logaritemska funkcija, trigonometrične in ciklometrične funkcije. Racionalne ali korenske izraze, v katerih nastopa ena od teh funkcij, včasih integriramo tako, da se s primerno substitucijo teh funkcij znebimo in prevedemo postopek na integracijo racionalnih funkcij.

ZGLEDI. (a) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})\,dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C =$ $\ln\frac{|t|}{|t+1|} + C = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$
(b) $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \int t^2dt = t^3/3 + C = (\ln x)^3/3 + C.$
(c) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = -\frac{1}{2}\ln\cos^2 x + C = -\ln|\cos x| + C.$

Za trigonometrične funkcije substitucija $t = \operatorname{tg}(x/2)$ vedno privede do integrala racionalne funkcije, saj je tedaj $x = 2\operatorname{arctg} t$ in $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, poleg tega pa je tedaj tudi $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ in $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Je pa ta substitucija precej dolgovezna, pogosto pridemo do rezultata hitreje s kakšno drugo zamenjavo. Če je npr. integrand oblike $R(\cos^2 x)\cos x$, kjer je R racionalna funkcija, je uspešna substitucija $t = \sin x$. Če je integrand oblike $R(\cos^2 x)$ ali $R(\sin^2 x)$, pa pomaga substitucija $t = \operatorname{tg} x$.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{|\sqrt{2}+t|}{|\sqrt{2}-t|} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{|\sqrt{2}+\sin x|}{|\sqrt{2}-\sin x|} + C.$
(b) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(a\mathrm{tg}^2 x + b)} = \int \frac{dt}{at^2+b}.$ Če imata konstanti a, b isti predznak, je $\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{a/b}) + C =$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x) + C.$ Če pa imata konstanti a, b nasproten predznak, dobimo
$\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|u+1|}{|u-1|} + C = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|t\sqrt{-ab}+b|}{|t\sqrt{-ab}-b|} + C =$
$\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|(\operatorname{tg} x)\sqrt{-ab}+b|}{|(\operatorname{tg} x)\sqrt{-ab}-b|} + C.$

Sode potence sinusne in kosinusne funkcije ali njihove produkte integriramo tako, da uvedemo dvojne kote.

ZGLED. $\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}(x-\sin 2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Produkte različnih trigonometričnih funkcij (pri različnih argumentih) preoblikujemo najprej z uporabo adicijskih izrekov v vsote ali razlike.

ZGLED. Naj bo $a \neq \pm b$. Potem je
$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C.$$

Včasih nastopa transcendentna funkcija kot faktor v produktu s polinomom ali racionalno funkcijo. Tedaj je potrebno uporabiti metodo integriranja po delih (per partes).

ZGLEDI. (a) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$
(b) $\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$
(c) $\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x\, dx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x) + C = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C.$
(d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$
(e) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin\, x - \int e^x \cos\, x\, dx = e^x \sin\, x - (e^x \cos\, x + \int e^x \sin\, x\, dx)$ in odtod $\displaystyle\int e^x \sin\, x\, dx = e^x(\sin\, x - \cos\, x)/2 + C.$

2. Določeni integral

Radi bi (z aproksimacijo) računali tudi ploščine krivočrtnih likov, tj. likov, ki jih omejujejo krivulje. Kako bi npr. poiskali ploščino množice

$$A = \{(x, y);\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$

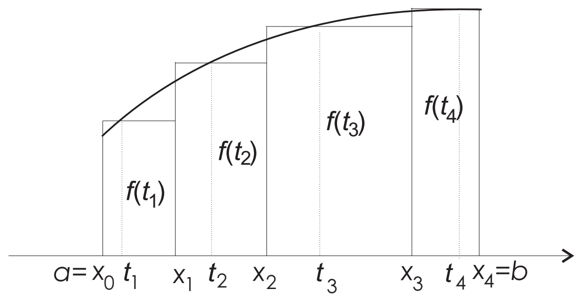
kjer je $f > 0$ zvezna pozitivna funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$? Če je f konstantna ali linearna funkcija, bi še nekako šlo, sicer pa bi morali funkcijo f (po koščkih) aproksimirati z odsekoma konstantnimi ali odsekoma linearnimi funkcijami.

Riemannove vsote in definicija Riemannovega integrala.

Postopek za poljubno realno funkcijo f, definirano na omejenem zaprtem intervalu $[a,b]$, je naslednji. Izberemo delitev intervala $[a,b]$, $a<b$, na n podintervalov z $n-1$ vmesnimi točkami: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Delitev je torej podana z urejenim naborom točk, zato jo označimo z $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$. Dolžina k-tega podintervala $[x_{k-1},x_k]$ naj bo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, maksimalno dolžino označimo z $|D|$, torej $|D| = \max_{1\le k\le n}\Delta x_k$ in ji recimo *norma* razdelitve. Na vsakem podintervalu si izberimo poljubno točko $t_k\in[x_{k-1},x_k]$; množico tako izbranih točk označimo s T_D, saj je podrejena delitvi D.

Naj bo f realna funkcija, definirana na omejenem zaprtem intervalu $[a,b]$. Za vsak par (D,T_D), kjer je D delitev intervala $[a,b]$ in T_D podrejena množica točk, sestavimo t.i. *integralsko* ali *Riemannovo vsoto* funkcije f s predpisom (glej sliko 2):

$$S(f;D,T_D)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$



SLIKA 2

DEFINICIJA 1. Število I imenujemo *določeni* ali *Riemannov integral* realne funkcije f na omejenem zaprtem intervalu $[a,b]$, če velja

$$I=\lim_{|D|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k.$$

Natančneje ta limita pomeni, da za vsak $\epsilon>0$ obstaja tak $\delta>0$, da za poljubno delitev D, za katero velja $|D|<\delta$ in za poljubno podrejeno množico izbranih točk T_D velja $|I-S(f;D,T_D)|<\epsilon$.

Zgornja limita ne obstaja vedno. Kadar obstaja, rečemo, da je funkcija f na intervalu $[a,b]$ *Riemannovo integrabilna*, limito, se pravi določeni (Riemannov) integral funkcije f na intervalu $[a,b]$ pa označimo z $I=\int_a^b f(x)dx$.

Opomba. Ta oznaka nas spomni, da izhaja določeni integral v limiti iz integralskih vsot $S(f;D,T_D)=\sum_k f(t_k)\Delta x_k$, in tudi sam integralski znak je modificirana črka S, začetna črka latinske besede *summa* (vsota).

ZGLED. (a) Izračunajmo po definiciji določeni integral $\int_a^b xdx$, ki obstaja zaradi zveznosti funkcije $f(x)=x$ (glej zadnji odstavek v tem podrazdelku). Pri poljubni delitvi lahko za izbrano točko na podintervalu $[x_{k-1},x_k]$ izberemo karkoli, npr. aritmetično sredino podintervala, tj. $t_k=(x_k+x_{k-1})/2$. Dobimo

$$S(f;D,T_D)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+x_{k-1}}{2}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2)=\frac{b^2-a^2}{2}=(b-a)(a+b)/2$$

in zato tudi $\int_a^b xdx = (b-a)(a+b)/2$. Ker smo na ta način dobili ploščino trapeza pod linearno funkcijo $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$, če je $0 < a < b$, vidimo, da je vsaj v tem primeru rezultat pravilen. Če je $a < b < 0$, dobimo negativno ploščino ustreznega trapeza; če pa je $a < 0 < b$, pa razliko ploščine dveh trikotnikov (nad in pod abscisno osjo), t.i. *predznačeno ploščino*. Izračun je bil v tem primeru dokaj enostaven, ker je bil integrand preprost. V bolj zapletenih primerih to ne bi delovalo.

(b) Izračunajmo še integral $\int_a^b x^2 dx$. Zdaj pa najprej izberimo posebno (enakomerno) delitev intervala $[a, b]$ z delilnimi točkami $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, za izbrane točke pa vzemimo kar desna krajišča podintervalov $t_k = x_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Potem je

$$S(f; D, T_D) = \sum_{k=1}^{n} (a+k(b-a)/n)^2 (b-a)/n = (b-a)(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{(b-a)^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2) =$$

$$(b-a)(a^2 + a(b-a)(1-1/n) + \frac{1}{3}(b-a)^2(1+1/n)(1+1/2n)).$$

V limiti $(n \to \infty)$ dobimo $\displaystyle\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)/3 = \frac{b^3-a^3}{3}$.

TRDITEV. *Vsaka na $[a, b]$ Riemannovo integrabilna realna funkcija je omejena.*

Dokaz. Denimo, da funkcija f na intervalu $[a, b]$ ni omejena. Potem za poljubno konstanto $M > 0$ in za vsako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a, b]$ s podrejeno množico točk $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ obstaja tak k in taka točka $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da velja $|f(t_k) - f(s_k)| \geq M/\Delta x_k$. V nasprotnem primeru, če bi za vsak k in vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$ veljala nasprotna neenakost $|f(t_k) - f(x)| < M/\Delta x_k$, bi takoj ugotovili, da je funkcija f omejena na $[a, b]$, saj bi za vsak k in vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$ veljalo $|f(x)| \leq |f(t_k)| + |f(t_k) - f(x)| < |f(t_k)| + M/\Delta x_k$ oziroma $|f(x)| \leq \max_k(|f(t_k)| + M/\Delta x_k)$ za vsak $x \in [a, b]$.

Izberimo delitvi D podrejeno podmnožico točk $T'_D = \{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$, kjer je $t'_j = t_j$ za $j \neq k$ in $t'_k = s_k$. Potem je $|S(f; D, T_D) - S(f; D, T'_D)| = |f(t_k) - f(s_k)|\Delta x_k \geq M/\Delta x_k$. To pa že pomeni, da funkcija f ni Riemannovo integrabilna, sicer bi obstajal Riemannov integral I in bi bila razlika $|S(f; D, T_D) - S(f; D, T'_D)| \leq |S(f; D, T_D) - I| + |I - S(f; D, T'_D)|$ pri dovolj drobni delitvi D poljubno majhna.

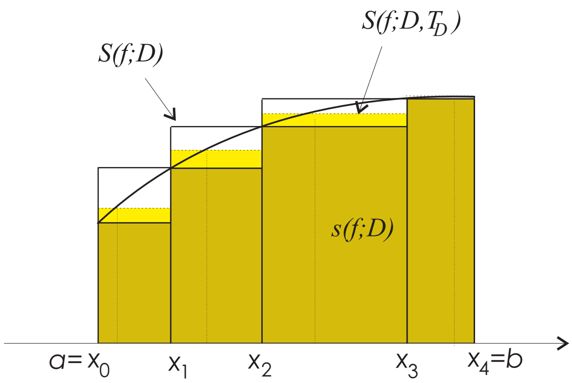
Samo omejene realne funkcije so torej lahko integrabilne. V bodoče bomo večinoma integrirali samo preproste funkcije. Ker je vsaka elementarna funkcija zvezna na vsakem intervalu, na katerem je definirana, za zvezne funkcije pa bomo posebej dokazali, da so Riemannovo inegrabilne, bodo praktično vse naše funkcije integrabilne.

Zgornje in spodnje Darbouxove vsote

Imejmo dano poljubno delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a, b]$. Posebna izbira točke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ je pri zvezni funkciji f tista, kjer doseže funkcija na tem podintervalu svoj maksimum M_k ali svoj minimum m_k. Pri nezvezni *omejeni* funkciji namesto tega vzamemo $M_k = \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ in $m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. V prvem primeru imenujemo ustrezno vsoto *zgornjo Darbouxovo vsoto* in jo označimo z $S(f; D)$, v drugem primeru pa *spodnjo Darbouxovo vsoto* in jo označimo z $s(f; D)$. Torej

$$S(f; D) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad s(f; D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

Opomba. Te vsote se imenujejo po G. Darbouxu, ki je ta pristop prvi uporabil in z njimi definiral svoj integral. Včasih pa jih najdemo tudi pod imenom *zgornje in spodnje Riemannove vsote*.



SLIKA 3

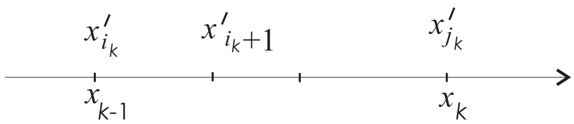
Očitno za poljubno delitev D s podrejeno množico točk T_D velja

$$s(f;D) \leq S(f;D,T_D) \leq S(f;D).$$

Rekli bomo, da je $D' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$ *finejša* delitev intervala $[a,b]$, kot je delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, če je $D \subset D'$. Dve poljubni delitvi D_1 in D_2 istega intervala $[a,b]$ imata vedno skupno finejšo delitev $D = D_1 \cup D_2$.

TRDITEV 1. *Če je D' finejša delitev intervala $[a,b]$ kot delitev D, velja*

$$s(f;D) \leq s(f;D') \leq S(f;D') \leq S(f;D).$$



SLIKA 4

Dokaz. Podinterval $[x_{k-1}, x_k]$, ki pripada delitvi D lahko s točkami finejše delitve D' razdelimo naprej: $x_{k-1} = x'_{i_k} < ... < x'_{j_k} = x_k$. Količinam $M_k = M_k(D)$ in $m_k = m_k(D)$ glede na delitev D in indeks k ustrezajo glede na finejšo delitev D' in indeks l količine M'_l in m'_l. Če upoštevamo, da je infimum, vzet po manjši množici, večji, supremum pa manjši, imamo za vsak indeks l, $i_k + 1 \leq l \leq j_k$, neenakosti

$$m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \inf\{f(x');\ x' \in [x'_{l-1}, x'_l]\} = m'_l$$

in

$$M'_l = \sup\{f(x');\ x' \in [x'_{l-1}, x'_l]\} \leq \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = M_k.$$

Torej je

$$m_k \Delta x_k \leq \sum_{l=i_k+1}^{j_k} m'_l \Delta x'_l \quad \text{in} \quad \sum_{l=i_k+1}^{j_k} M'_l \Delta x'_l \leq M_k \Delta x_k.$$

Če seštejemo vse te neenakosti po indeksu k od 1 do n (po vseh podintervalih v delitvi D), dobimo iskano neenakost.

POSLEDICA. *Za poljubni delitvi D_1 in D_2 intervala $[a,b]$ velja $s(f;D_1) \leq S(f;D_2)$.*

Dokaz. Naj bo D skupna finejša delitev za D_1 in D_2. Potem je po zgornji trditvi $s(f;D_1) \leq s(f;D) \leq S(f;D) \leq S(f;D_2)$.

Darbouxova integrabilnost

Odtod vidimo, da je (neprazna) množica $\{s(f;D_1)\}$ vseh spodnjih Darbouxovih vsot glede na delitev D_1 omejena navzgor s poljubno zgornjo Darbouxovo vsoto glede na (katerokoli drugo) delitev D_2, se pravi da obstaja supremum $s(f) = \sup_{D_1}\{s(f;D_1)\}$ in da velja $s(f) \le S(f;D_2)$. Toda to hkrati pomeni, da je tudi (neprazna) množica $\{S(f;D_2)\}$ vseh zgornjih Darbouxovih vsot glede na delitev D_2 omejena navzdol, da obstaja infimum $S(f) = \inf_{D_2} S(f;D_2)$ in da velja $s(f) \le S(f)$.

TRDITEV 2. *Za omejeno funkcijo f na intervalu $[a,b]$ so pri zgornjih oznakah ekvivalentne naslednje trditve*:
(i) $s(f) = S(f)$,
(ii) *Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka delitev D intervala $[a,b]$, da velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.*
(iii) *Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.*

Dokaz. Očitno iz točke (iii) sledi točka (ii). Naj bo zdaj D taka delitev, da pri danem $\epsilon > 0$ velja točka (ii). Potem zaradi ocene $s(f;D) \le s(f) \le S(f) \le S(f;D)$ velja $S(f) - s(f) \le S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$. To pomeni, da je $s(f) = S(f)$ in velja točka (i).

Predpostavimo, da je izpolnjena točka (i), torej $s(f) = S(f) = I$, in naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstajata taki delitvi D_1, D_2 intervala $[a,b]$, da je $S(f;D) < I + \epsilon/4$ in $s(f;D) > I - \epsilon/4$. Naj bo $D_0 = D_1 \cup D_2$ skupna finejša delitev intervala $[a,b]$ na n podintervalov. Po trditvi 1 je zato tudi $I - \epsilon/4 < s(f;D_0) \le S(f;D_0) < I + \epsilon/4$. Definirajmo še $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$ in $\delta = \epsilon/(8nM)$.

Naj bo zdaj D poljubna druga delitev intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ in naj bo $D' = D_0 \cup D$ skupna finejša delitev. Po trditvi 1 velja tudi

$$I - \epsilon/4 < s(f;D') \le S(f;D') < I + \epsilon/4.$$

Ker je vmesnih točk delitve D_0 ravno $n-1$, je največ $n-1$ podintervalov, pripadajočih razdelitvi D še naprej razdeljenih s točkami iz D_0. Torej se v vsotah $s(f;D')$ in $s(f;D)$ ujemajo vsi členi razen tistih na teh največ $n-1$ intervalih. Razliko vsot lahko potem ocenimo z

$$s(f;D') - s(f;D) \le (n-1)(2M)|D| < 2nM\epsilon/(8nM) = \epsilon/4.$$

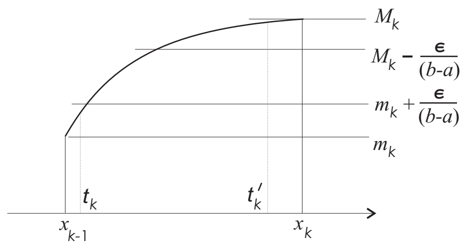
Odtod vidimo, da je $s(f;D) > s(f;D') - \epsilon/4 > I - \epsilon/2$. Podobno spoznamo, da je $S(f;D) < I + \epsilon/2$, tako da imamo končno $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$ in velja točka (iii).

Opomba. Kadar je izpolnjena točka (i) zgornje trditve (in s tem tudi vsaka druga točka), tj. kadar velja $s(f) = S(f)$, rečemo, da je omejena funkcija f na intervalu $[a,b]$ *Darbouxovo integrabilna*. Vendar ta integrabilnost ni v resnici nič drugačna od dosedanje, Riemannove, integrabilnosti, kot pove naslednji izrek.

IZREK 1. *Omejena realna funkcija f, definirana na intervalu $[a,b]$, je Riemannovo integrabilna natanko takrat, ko je Darbouxovo integrabilna.*

Dokaz. Riemannova integrabilnost pomeni, da lahko najdemo tako število $I \in \mathbb{R}$, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta >$, tako da za vsako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$ z lastnostjo $\delta_D < \delta$ in za *vsako* izbiro podrejene množice točk $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, velja $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon/4$. Vemo tudi, da je vsaka Riemannovo integrabilna funkcija omejena.

Izberimo tako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ z lastnostjo $|D| < \delta$, da je hkrati $s(f) - \epsilon/8 < s(f;D)$ in $S(f;D) < S(f) + \epsilon/8$. To lahko storimo, če po potrebi preidemo na finejšo delitev. Za vsak k naj bo $m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ter $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ taki točki, da je $f(t_k) < m_k + \epsilon/8(b-a)$ in $f(t'_k) > M_m - \epsilon/8(b-a)$.



Slika 5

Naj bo $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ in $T'_D = \{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$. Potem je

$$s(f;D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k = S(f;D,T_D) <$$

$$\sum_{k=1}^{n} (m_k + \epsilon/8(b-a)) \Delta x_k = s(f;D) + \epsilon/8,$$

$$S(f;D) - \epsilon/8 = \sum_{k=1}^{n} (M_k - \epsilon/8(b-a)) \Delta x_k < S(f;D,T'_D) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(t'_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(f;D).$$

To pomeni, da je $|S(f;D,T_D) - s(f;D)| < \epsilon/8$, zato tudi $|S(f;D,T_D) - s(f)| < \epsilon/4$, in $|S(f;D,T'_D) - S(f;D)| < \epsilon/8$, zato tudi $|S(f;D,T'_D) - S(f)| < \epsilon/4$. Odtod skupaj z $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon/4$ in $|I - S(f;D,T'_D)| < \epsilon/4$ dobimo $|I - s(f)| < \epsilon/2$ in $|S(f) - I| < \epsilon/2$, se pravi $S(f) - s(f) < \epsilon$. Po trditvi 2 to pomeni $S(f) = s(f)$.

Obratno, naj bo funkcija f Darbouxovo integrabilna, se pravi, naj velja $S(f) = s(f) = I$. Po trditvi 2 za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$. Potem pa za vsako tej delitvi D podrejeno množico točk T_D velja $s(f;D) \leq S(f;D,T_D) \leq S(f;D) < s(f;D) + \epsilon$. Seveda velja tudi $s(f;D) \leq I \leq S(f;D) < s(f;D) + \epsilon$, tako da imamo skupaj $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon$. To pomeni, da je funkcija f Riemannovo integrabilna in da je njen integral enak $\int_a^b f(x)dx = I = s(f) = S(f)$.

Izrek 1 nam zagotavlja učinkovit kriterij, kdaj je funkcija na danem intervalu Riemannovo integrabilna, saj je enakost $s(f) = S(f)$ dostikrat preprosto preveriti, upoštevajoč, da je po trditvi 2 za vsak $\epsilon > 0$ dovolj najti delitev D z lastnostjo $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.

Namesto o Riemannovi ali Darbouxovi integrabilnosti omejene funkcije bomo odslej govorili kar o njeni integrabilnosti.

Primeri integrabilnih funkcij

IZREK 2. *Vsaka monotona funkcija na intervalu* $[a,b]$ *je integrabilna.*

Dokaz. Vsaka monotona funkcija je na omejenem zaprtem intervalu $[a,b]$ omejena. Privzemimo, da je funkcija f naraščajoča, in si izberimo enakomerno delitev intervala $[a,b]$ s točkami $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Zaradi naraščanja funkcije f je $m_k = f(x_{k-1})$ in $M_k = f(x_k)$, tako da imamo

$$S(f;D) - s(f;D) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(b-a)/n - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(b-a)/n = (b-a)(f(b) - f(a))/n.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ lahko izberemo dovolj velik n tako, da je desna stran manjša od ϵ. Po trditvi 2 je potem $s(f) = S(f)$ in po izreku 1 je funkcija f integrabilna.

IZREK 3. *Vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ je integrabilna.*

Dokaz. Vsaka zvezna funkcija je na intervalu $[a, b]$ omejena. Ker je po izreku iz analize 1 zvezna funkcija na kompaktnem intervalu $[a, b]$ tudi enakomerno zvezna (glej 3. razdelek v 2. poglavju), za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubni dve točki $s, t \in [a, b]$ z lastnostjo $|s - t| < \delta$ velja $|f(s) - f(t)| < \epsilon/(b - a)$. Naj bo D delitev intervala $[a, b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$, tako da za poljubni točki $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ velja $|f(s)-f(t)| < \epsilon/(b-a)$. Torej je tudi $M_k - m_k \leq \epsilon/(b - a)$, zato imamo oceno (ki takoj implicira integrabilnost funkcije f)

$$S(f; D) - s(f; D) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \epsilon.$$

ZGLEDI. (a) Obstajajo omejene (nezvezne) funkcije, ki niso integrabilne; taka je npr. karakteristična funkcija $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$, definirana na intervalu $[a, b]$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Tu je $m_k = 0$ in $M_k = 1$ za vsako delitev D in vsak k, torej je $s(f; D) = 0$ in $S(f; D) = b-a$ oziroma tudi $s(f) = 0$ in $S(f) = b - a$, tako da funkcija f ni inegrabilna.

(b) Po drugi strani obstajajo omejene nezvezne funkcije, ki pa so integrabilne. Zgled so nezvezne monotone funkcije, npr.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, 1/2] \\ 1 & , \quad x \in (1/2, 1] \end{cases} .$$

(b) Nezveznost omejenih integrabilnih funkcij je lahko še hujša. Za zgled si vzemimo dobro znano funkcijo f, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & , \quad x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Vemo, da ta funkcija v točki 0 nima limite. Pokažimo, da je kljub temu integrabilna.

Za vsak $\epsilon > 0$ si izberimo delitev D z lastnostjo, da je prva delilna točka enaka $x_1 = \epsilon/4$. Ker je f zvezna na intervalu $[\epsilon/4, 1]$, je tam integrabilna in obstaja taka delitev D_1 intervala $[\epsilon/4, 1]$, da je $S(f|_{[x_1,1]}; D_1) - s(f|_{[x_1,1]}; D_1) < \epsilon/2$. Zdaj naj bo $D = \{x_0\} \cup D_1$ delitev intervala $[0, 1]$. Ker je $m_1 = -1$ in $M_1 = 1$, imamo $s(f; D) = -\Delta x_1 + s(f|_{[x_1,1]}; D_1) = -\epsilon/4 + s(f|_{[x_1,1]}; D_1)$ in $S(f; D) = \Delta x_1 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1) = \epsilon/4 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1)$. Torej je funkcija f integrabilna, saj je

$$S(f; D) - s(f; D) = \epsilon/2 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1) - s(f|_{[x_1,1]}; D_1) < \epsilon.$$

Zadnji zgled je poseben primer bolj splošne zakonitosti.

TRDITEV 3. *Če je funkcija f omejena na $[a, b]$ in zvezna na (a, b), je na zaprtem intervalu $[a, b]$ integrabilna.*

Dokaz. Naj bo $m \leq f \leq M$ na $[a, b]$ in naj bo $\epsilon > 0$. Izberimo tako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ intervala $[a, b]$, da je (1) $\Delta x_1 = x_1 - x_0 < \epsilon/4(M - m)$ in $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} < \epsilon/4(M - m)$; (2) delitev $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ intervala $[x_1, x_{n-1}]$, na katerem je zvezna funkcija f integrabilna, taka, da je razlika med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto $\sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon/2$. Potem pa je tudi za celoten interval $S(f; D) - s(f; D) = (M_1 - m_1)\Delta x_1 + (M_n - m_n)\Delta x_n + \sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon$. Po trditvi 2 in izreku 1 to pomeni, da je funkcija f na intervalu $[a, b]$ integrabilna.

Lastnosti integrabilnih funkcij in integrala

TRDITEV 4. *Konstantna funkcija* $f(x) = c$ *za vsak* $x \in [a,b]$ *je integrabilna in velja* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$.

Dokaz. Riemannova vsota je $\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n c\Delta x_k = c(b-a)$, isto v limiti.

TRDITEV 5. *Naj bosta* f *in* g *integrabilni funkciji na intervalu* $[a,b]$ *in* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *poljubni konstanti. Potem je na* $[a,b]$ *integrabilna tudi funkcija* $\alpha f + \beta g$ *in velja*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Poljubno Riemannovo vsoto za funkcijo $\alpha f + \beta g$ lahko zapišemo v obliki $S(\alpha f + \beta g; D, T_D) = \alpha S(f; D, T_D) + \beta S(g; D, T_D)$. Pri dovolj drobni delitvi leva stran dobro aproksimira integral $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx$, desna stran pa $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

Opomba. Rečemo, da je določeni integral *linearen funkcional* na prostoru integrabilnih funkcij na intervalu $[a,b]$.

TRDITEV 6. *Naj bo funkcija* f *omejena na intervalu* $[a,b]$, *in naj velja* $a < c < b$. *Funkcija* f *je integrabilna na intervalu* $[a,b]$ *natanko takrat, ko je integrabilna na podintervalih* $[a,c]$ *in* $[c,b]$. *Poleg tega velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dokaz. Če je f integrabilna na $[a,b]$ lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tako delitev D intervala $[a,b]$, da velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$. Lahko privzamemo, da je c ena od delilnih točk (sicer jo dodamo, razlika med zgornjo in spodnjo vsoto se pri tem le zmanjša). Potem pa lahko zapišemo $S(f;D) - s(f;D) = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k$, kjer ustreza prva vsota delitvi podintervala $[a,c]$ in druga delitvi podintervala $[c,b]$. Ker sta vsoti nenegativni, sta obe manjši od ϵ, kar pomeni integrabilnost na vsakem podintervalu posebej.

Obratno je še lažje: delitvi podintervalov, ki dasta majhno razliko med zgornjo in spodnjo vsoto, združimo v delitev intervala $[a,b]$, in dobimo

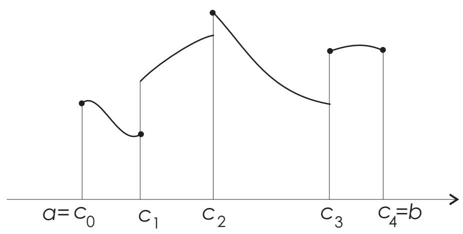
$$\sum_k (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Zdaj ko vemo, da je funkcija integrabilna tudi na podintervalih, lahko po definiciji izbiramo vedno bolj drobne delitve intervala $[a,b]$, pri čemer ves čas ohranjamo c kot eno izned delilnih točk. Ker Riemannova integralska vsota razpade v dve integralski vsoti $S(f; D, T_D) = \sum_k f(t_k)\Delta x_k = \sum_k' f(t_k)\Delta x_k + \sum_k'' f(t_k)\Delta x_k = S(f|_{[a,c]}; D', T_{D'}) + S(f|_{[c,b]}; D'', T_{D''})$, dobimo v limiti, da je integral funkcije f po vsem intervalu $[a,b]$ enak vsoti integralov funkcije f po obeh podintervalih $[a,c]$ in $[c,b]$.

Opomba. Doslej smo zahtevali, da je spodnja meja a integrala $\int_a^b f(x)dx$ manjša od zgornje meje b. Pa naj bo $b < a$. V tem primeru definirajmo $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Dodatno definirajmo za vsak $a \in \mathbb{R}$ še $\int_a^a f(x)dx = 0$. Potem lahko uporabljamo formulo iz trditve 4 ne glede na to, kje leži točka c, se pravi tudi zunaj intervala $[a,b]$, da je le funkcija definirana na maksimalnem intervalu (od $\min\{a,b,c\}$ do $\max\{a,b,c\}$). Če je npr. $a < b < c$, imamo po formuli iz trditve 4 relacijo $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ oziroma $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Zaradi te lastnosti pravimo, da je določeni integral *aditivna funkcija integracijskega območja.*

DEFINICIJA 2. Rečemo, da je funkcija f *odsekoma zvezna* na intervalu $[a, b]$, če obstaja taka števila c_i, $i = 0, 1, 2, ..., r$, da je $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_r = b$ in da je f zvezna funkcija na vsakem odprtem podintervalu (c_{i-1}, c_i), $i = 1, 2, ..., r$ (glej sliko 6). Kot posledico zadnjih dveh trditev imamo naslednji rezultat.



SLIKA 6

TRDITEV 7. *Vsaka na $[a, b]$ omejena in odsekoma zvezna funkcija f je integrabilna.*

Dokaz. Po trditvi 3 je f integrabilna na vsakem podintervalu $[c_{i-1}, c_i]$, iz trditve 6 pa potem sledi (s preprosto indukcijo), da je integrabilna tudi na celotnem intervalu $[a, b]$.

Opomba. Odsekoma zvezna funkcija ima po definiciji končno mnogo točk nezveznosti. Trditev 7 potemtakem pove, da je vsaka omejena funkcija, ki ima kvečjemu končno mnogo točk nezveznosti, integrabilna. Kot zanimivost povejmo, da velja isto tudi za omejene funkcije, ki imajo kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti (zato je npr. integrabilna tudi Thomaejeva funkcija).

Še več, pokazati se da, da je omejena funkcija integrabilna natanko takrat, ko ima množica njenih točk nezveznosti mero nič. (Rečemo, da ima podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ *mero nič*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka števna - končna ali neskončna - družina odprtih intervalov $\{(c_n, d_n);\ n \geq 1\}$, da je $A \subset \cup_{n\geq 1}(c_n, d_n)$ in da je njihova skupna dolžina $\sum_{n\geq 1}(d_n - c_n) < \epsilon$.) Vsaka števna množica ima mero nič.

IZREK 4. *Naj bo f omejena integrabilna funkcija na $[a, b]$ in g zvezna funkcija na intervalu $[m, M]$, kjer je $m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}$ in $M = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}$. Potem je tudi kompozitum $h = g \circ f$ integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Če je $M = m$, je funkcija f konstantna, zato je konstantna tudi funkcija h in po trditvi 4 integrabilna.

Naj bo $M \neq m$ in $\epsilon > 0$ poljubno pozitivno število. Označimo $A = \inf g$ in $B = \sup g$ na intervalu $[m, M]$ in $K = b - a + B - A > 0$. Zaradi enakomerne zveznosti funkcije g na intervalu $[m, M]$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $u, u' \in [m, M]$ in $|u - u'| < \delta$ sledi $|g(u) - g(u')| < \epsilon/K$.

Ker je f integrabilna na $[a, b]$, obstaja taka delitev D, da je $S(f; D) - s(f; D) < \delta\epsilon/K$. Zapišimo $S(f; D) - s(f; D) = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k$, kjer se prva vsota $\sum_k'$ nanaša na tiste delilne intervale, za katere je $M_k - m_k < \delta$, druga vsota $\sum_k''$ pa na ostale. Ker je torej $\sum_k'' \delta\Delta x_k \leq \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k \leq S(f; D) - s(f; D) < \delta\epsilon/K$, dobimo $\sum_k'' \Delta x_k < \epsilon/K$.

Označimo še $h_k = \inf h$ in $H_k = \sup h$ na k-tem podintervalu delitve D. Če je ta podinterval prve vrste (tako da je $M_k - m_k < \delta$), je za poljubna x, x' iz tega intervala in za $u = f(x)$, $u' = f(x')$ res $|u - u'| = |f(x) - f(x')| \leq M_k - m_k < \delta$, zato $|h(x) - h(x')| = |g(u) - g(u')| < \epsilon/K$ in potem tudi $H_k - h_k \leq \epsilon/K$ oziroma tudi

$$\sum_k'(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (\epsilon/K) \sum_k' \Delta x_k = (b - a)\epsilon/K.$$

Če pa je k-ti podinterval druge vrste (tako da je $M_k - m_k \geq \delta$), velja $H_k - h_k \leq B - A$ in zato tudi

$$\textstyle\sum_k''(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (B-A)\sum_k'' \Delta x_k \leq (B-A)\epsilon/K.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ smo torej našli tako delitev D, da je $S(h;D) - s(h;D) =$

$$\textstyle\sum_k'(H_k - h_k)\Delta x_k + \sum_k''(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (b-a)\epsilon/K + (B-A)\epsilon/K = \epsilon,$$

kar pomeni, da je funkcija h integrabilna na intervalu $[a,b]$.

POSLEDICA. *Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a,b]$, so na $[a,b]$ integrabilne tudi funkcije $|f|$, f^n za vsak $n \in \mathbb{N}$ in fg, kjer je $|f|(x) = |f(x)|$, $f^n(x) = f(x)^n$ in $(fg)(x) = f(x)g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Dokaz. Funkciji $u \mapsto |u|$ in $u \mapsto u^n$ (za $n \in \mathbb{N}$)) sta zvezni, tako da lahko uporabimo izrek 4. Poleg tega je $fg = [(f+g)^2 - f^2 - g^2]/2$ in zaradi trditve 5 je potem integrabilna tudi funkcija fg.

Opomba. Obrat posledice ne velja: naj bo npr. $f = g = \chi_{\mathbb{Q}}$, karakteristična funkcija množice racionalnih števil. Vemo, da ta funkcija ni integrabilna na nobenem intervalu, njena absolutna vrednost in njen kvadrat pa sta integrabilni funkciji, saj sta obe enaki konstantni funkciji 1.

TRDITEV 8. *Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a,b]$ in velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, velja tudi $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)$.*

Dokaz. Ta neenakost velja za poljubno Riemannovo vsoto $S(f;D,T_D) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(t_k)\Delta x_k = S(g;D,T_D)$, torej tudi v limiti.

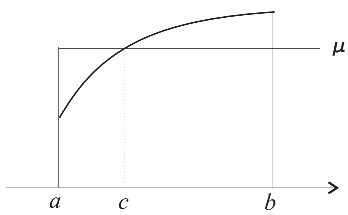
Rečemo, da je določeni integral *monotoni funkcional.*

POSLEDICA 1. *Če je $a < b$, velja $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Če je $a > b$, pa velja $|\int_a^b f(x)dx| \leq -\int_a^b |f(x)|dx$.*

Dokaz. Takoj sledi iz trditve 8 ob upoštevanju opombe za trditvijo 6.

POSLEDICA 2. *Iz $m \leq f(x) \leq M$ na $[a,b]$ sledi* $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$.

Dokaz. Tudi to dobimo iz trditve 8.



SLIKA 7

DEFINICIJA 3. Izraz $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ imenujemo *povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$. Vidimo, da leži μ med $m = \inf\{f(x); a \leq x \leq b\}$ in $M = \sup\{f; a \leq x \leq b\}$ (glej sliko 7).

Omenimo še pomembno posledico točke 8.

TRDITEV 9. *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, obstaja taka točka $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*

Dokaz. Povprečna vredost μ funkcije f zadošča po posledici 2 pogoju $m \leq \mu \leq M$. Potem pa rezultat sledi iz znanega dejstva, da zavzame zvezna funkcija na zaprtem in omejenem intervalu vsako vrednost med najmanjšo in največjo.

IZREK 5 (**Prvi izrek o povprečni vrednosti**). *Naj bosta funkciji f, g integrabilni na intervalu $[a,b]$ in naj za vsak $x \in [a,b]$ velja $m \leq f(x) \leq M$. Poleg tega naj bo na intervalu $[a,b]$ funkcija g povsod istega predznaka. Tedaj obstaja tako število $\mu \in [m,M]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Naj bo npr. $g(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a,b]$. Iz $m \leq f(x) \leq M$ dobimo $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ za vsak $x \in [a,b]$ in zato tudi

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Če je $\int_a^b g(x)dx = 0$, je tudi $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ in vsak μ je dober. Če pa je $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, je

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

Srednji ulomek označimo z μ, pa imamo $m \leq \mu \leq M$ in hkrati $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$. Podobno, samo z obrnjenimi neenačaji, dokažemo izrek, če je $g(x) \leq 0$ za vsak $x \in [a,b]$.

POSLEDICA. *Če je funkcija f zvezna in funkcija g integrabilna in povsod istega predznaka na intervalu $[a,b]$, obstaja tako število $c \in [a,b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Vemo, da zavzame zvezna funkcija na kompaktnem intervalu $[a,b]$ vsako vrednost med $m = \inf\{f(x); a \leq x \leq b\}$ in $M = \max\{f(x); a \leq x \leq b\}$, torej tudi vrednost $\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx$ iz dokaza prejšnjega izreka.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala po definiciji je zelo komplicirano, tudi v primeru, ko integriramo zvezno funkcijo, zato je ugodno poznati še druge načine. Izpeljimo osnovno povezavo med določenim in nedoločenim integralom.

IZREK 6. *Naj bo f omejena integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$. Definirajmo $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$. Tedaj je G:*
(a) *zvezna funkcija zgornje meje na intervalu $[a,b]$;*
(b) *odvedljiva funkcija zgornje meje v vsaki točki x, v kateri je f zvezna funkcija, in velja $G'(x) = f(x)$.*

Dokaz. (a) Hitro se lahko prepričamo, da je $G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$, torej po posledici 1 trditve 7 $|G(x+h) - G(x)| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leq M|h|$, kjer je $M \geq |f(t)|$ za vsak $t \in [a,b]$. Odtod takoj sledi, da je G zvezna funkcija v vsaki točki $x \in [a,b]$.

(b) Izračunajmo $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dx$. Ker je funkcija f zvezna v točki x, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(t)-f(x)| < \epsilon$, čim je $|t-x| < \delta$. Zato lahko ocenimo

$$|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)| \leq \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dx| < \epsilon$$

za vsak $|h| < \delta$. To pomeni, da je limita diferenčnega kvocienta funkcije G (ko $h \to 0$) enaka $f(x)$. Torej je funkcija G odvedljiva v točki x in njen odvod enak $G'(x) = f(x)$.

POSLEDICA. *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, je funkcija G, definirana s predpisom $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, povsod na $[a,b]$ odvedljiva in velja $G'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Torej je G je nedoločeni integral (primitivna funkcija) zvezne funkcije f. Če je F poljuben drug nedoločeni integral funkcije f, je kot znano, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Ker je $F(a) = C$, velja $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$.

Vstavimo točko $x = b$, pa dobimo *osnovno formulo integralskega računa*:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

To formulo imenujemo tudi *Leibnizova formula*. Včasih zapišemo krajše $\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b$, kjer pomeni $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. To pomeni, da določeni integral izračunamo tako, da najprej poiščemo nedoločeni integral (primitivno funkcijo) F, če le-ta obstaja, vanjo vstavimo najprej zgornjo mejo b, nato spodnjo mejo a in oboje odštejemo.

V zgornji posledici smo videli, da primitivna funkcija obstaja za vsako zvezno funkcijo f. Za zvezne funkcije torej osnovna formula velja in največkrat bo to dejstvo za naše izračune zadoščalo. Velja pa za vsako integrabilno funkcijo, za katero obstaja primitivna funkcija (tj. odvedljiva funkcija F z lastnostjo $F' = f$).

IZREK 7 (**Osnovni izrek integralskega računa**). *Naj bo f taka integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$, ki ima na $[a,b]$ primitivno funkcijo F. Tedaj velja*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Za poljubno delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$ lahko po Lagrangevem izreku poiščemo na odprtih intervalih (x_{k-1}, x_k) take točke t_k, da velja $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)\Delta x_k$. Seštejmo obe strani teh enakosti po k od 1 do n, pa dobimo $F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k$ oziroma $F(b) - F(a) = S(f; D, T_D)$. To velja za vsako delitev D in ustrezno izbiro podrejene množice T_D. Ker vemo, da je funkcija f Riemannovo integrabilna, konvergirajo desne strani proti integralu $\int_a^b f(x)dx$, kakor hitro konvergira $|D| = \max_k \Delta x_k$ proti nič. V limiti torej dobimo $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Metode za računanje določenega integrala

1. **Uporaba osnovne (Leibnizove) formule**. Najprej izračunamo nedoločeni integral, nato pa vstavimo meje.

ZGLED. (a) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$.
(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x)|_{-1}^1 = \ln 3$.

2. **Metoda zamenjave spremenljivke (substitucija)**. Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, ni problema. Izberemo (ne nujno monotono) zvezno odvedljivo funkcijo $x = x(t)$, ki preslika interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$, tako da je $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$. Dobimo $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

Dokaz. Ker je f zvezna funkcija na $[a,b]$, obstaja po osnovnem izreku integralskega računa primitivna funkcija F, tako da je $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Definirajmo funkcijo $G(t) = F(x(t))$ za vsak $t \in [\alpha,\beta]$. Ker je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, je po verižnem pravilu tudi $G'(t) = f(x(t))x'(t)$ za vsak $t \in [\alpha,\beta]$. Torej je

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Iz postopka vidimo naslednje: ko nadomestimo x s funkcijo $x = x(t)$, nadomestimo tudi diferencial dx z $dx = x'(t)dt$, tako da je $f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt$.

ZGLED: (a) V integral $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ uvedemo substitucijo $\sqrt{x+1} = t$ oziroma $x = t^2 - 1$. Dobimo $dx = 2tdt$, integral pa je enak $2\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2(2\sqrt{2} - 1)/3$.
(b) Če v integral $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ uvedemo substitucijo $x = \mathrm{e}^t,\ 0 \le t \le 1$, oziroma $\ln x = t$ in $dx/x = dt$, dobimo $I = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$.
(c) Za integralu $I = \int_0^{3\pi} \frac{\sin t\, dt}{2+\cos t}$ postavimo $x = \cos t$, $dx = -\sin t\, dt$ in najdemo $I = -\int_1^{-1} \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x)|_{-1}^{1} = \ln 3$.

Če je substitucijska funkcija $x = x(t)$ monotona (naraščajoča ali padajoča), velja enaka formula za izračun integrala z zamenjavo spremenljivk tudi v splošnejšem primeru.

IZREK 8 (**o zamenjavi integracijske spremenljivke**). *Naj bo zvezno odvedljiva $x = x(t)$ naraščajoča funkcija na intervalu $[\alpha,\beta]$ in naj preslika interval $[\alpha,\beta]$ surjektivno na interval $[a,b]$. Potem je za poljubno realno funkcijo f, definirano na intervalu $[a,b]$, funkcija $g(t) = f(x(t))x'(t)$ integrabilna na $[\alpha,\beta]$ natanko takrat, ko je f integrabilna na $[a,b]$, in tedaj velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

Dokaz. Izberimo poljubno delitev $D_t = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ intervala $[\alpha,\beta]$ in naj bo $x_k = x(t_k)$ za $k = 0, 1, ..., n$. Potem definira množica $D_x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ zaradi naraščanja funkcije $x = x(t)$ delitev intervala $[a,b]$ (nekatere zaporedne točke x_k lahko sovpadajo, toda to samo pomeni, da so v ustrezni Riemannovi vsoti nekateri členi lahko enaki nič). Riemannova vsota za funkcijo g je enaka $S(g; D_t, T_t) = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k$, kjer je $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ (in zato $\xi_k = x(\tau_k) \in [x_{k-1}, x_k]$) za vsak k. Potem pa po Lagrangevem izreku za vsak k obstaja tak $\tau_k' \in (t_{k-1}, t_k)$, da je $x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\tau_k')\Delta t_k$ in imamo tudi

$$S(f; D_x, T_x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x(t_k) - x(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k))x'(\tau_k')\Delta t_k.$$

Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$; torej je f omejena na $[a,b]$ in naj velja $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$. Če odštejemo obe Riemannovi vsoti med seboj in upoštevamo, da je funkcija $x' = x'(t)$ na intervalu $[\alpha,\beta]$ enakomerno zvezna, tako da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ z lastnostjo $|x'(\tau) - x'(\tau')| < \epsilon/(2M(\beta - \alpha))$, če $|\tau - \tau'| < \delta$, dobimo (za dovolj fino delitev D_t) pri pogoju $|D_t| < \delta$ oceno

$$|S(g; D_t, T_t) - S(f; D_x, T_x)| \le \sum_{k=1}^n |f(x(\tau_k))|\,|x'(\tau_k) - x'(\tau_k')|\Delta t_k < \epsilon/2.$$

Ker je odvod $x' = x'(t)$ zvezna in zato omejena funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$, imamo pri dovolj majhnem $\delta > 0$ tudi

$$|D_x| = \max_k \Delta x_k = \max_k (x(t_k) - x(t_{k-1})) = \max_k |x'(\tau_k')| \Delta t_k \leq \max_k |x'(\tau_k')||D_t|$$

tako majhen, da velja zaradi integrabilnosti funkcije f tudi $|S(f; D_x, T_x) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon/2$. Torej je pri takem δ veljavna neenakost $|S(g; D_t, T_t) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$, kar pomeni, da je tudi funkcija g integrabilna na intervalu $[\alpha, \beta]$ in da velja $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.
Iz integrabilnosti funkcije f na $[a, b]$ smo dokazali integrabilnost funkcije g na $[\alpha, \beta]$. Obratno pokažemo na enak način in izrek je dokazan.

Podobno velja v primeru, ko je $x = x(t)$ zvezno odvedljiva padajoča funkcija na $[\alpha, \beta]$ z zalogo vrednosti $[a, b]$.

3. **Metoda integracije po delih (per partes)**. Formula za integracijo po delih je podobna kot pri nedoločenem integralu, le da upoštevamo tudi meje: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$. Poglejmo, pri kašnih pogjih na u in v velja ta formula.

IZREK 9. *Naj bosta funkciji u in v odvedljivi na intervalu $[a, b]$ in naj imata integrabilna odvoda u' in v'. Potem sta tudi funkciji uv' in $u'v$ intgrabilni na $[a, b]$ in velja*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Dokaz. Ker sta funkciji u in v povsod odvedljivi, sta zvezni in zato tudi integrabilni na $[a, b]$. Njuna odvoda u' in v' sta po predpostavki integrabilni funkciji, zato sta integrabilna tudi produkta uv' in $u'v$. Ker je $(uv)' = u'v + uv'$ je po osnovni formuli integralskega računa $\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b$, od koder sledi zaradi aditivnosti integrala zgornja formula.

ZGLED. (a) $\int_0^\pi x \sin x dx = (-x \cos x)_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi$.
(b) $\int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1$.

Kot zgled za uporabo itegracije po delih izpeljimo naslednji pomembni izrek o povprečni vrednosti.

IZREK 10 (**Drugi izrek o povprečni vrednosti**). *Naj bo f odvedljiva monotona funkcija z integrabilnim odvodom f' in g poljubna zvezna funkcija na $[a, b]$. Potem je produkt fg integrabilna funkcija na $[a, b]$ in obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx.$$

Dokaz. Ker je funkcija f odvedljiva povsod na intervalu $[a, b]$, je tam zvezna, tako da je produkt fg z zvezno funkcijo g tudi zvezen in zato integrabilen na $[a, b]$. Naj bo $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, tako da je $G'(x) = g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Po formuli za integracijo per partes (za funkciji $u = f$ in $v = G$) imamo

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)dx.$$

Ker je v zadnjem integralu funkcija $f'(x)$ integrabilna in povsod istega predznaka, G pa zvezna funkcija, obstaja po posledici izreka 5 taka točka $c \in [a, b]$, da velja formula $\int_a^b f'(x)G(x)dx = G(c) \int_a^b f'(x)dx$. Seveda je $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, tako da imamo

$\int_a^b f'(x)G(x)dx = (f(b) - f(a))G(c)$ oziroma iskano zvezo:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(c) = f(a)G(c) + f(b)(G(b) - G(c)).$$

POSLEDICA. *Naj bo funkcija f nenegativna in odvedljiva z integrabilnim odvodom, funkcija g pa zvezna povsod na intervalu $[a, b]$.*
(a) *Če je f padajoča na $[a, b]$, obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^d g(x)dx.$$

(b) *Če je f naraščajoča na $[a, b]$, obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_d^b g(x)dx.$$

Dokaz. (a) V dokazu izreka 10 smo videli, da za neko točko $c \in [a, b]$ velja

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(c) = f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(c).$$

Naj bo $m = \min G(x)$ in $M = \max G(x)$ na intervalu $[a, b]$. Potem je zaradi zadnje enakosti

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a).$$

Če je $f(a) = 0$, je zaradi nenegativnosti in padanja funkcije f tudi $f(b) = 0$, tako da je $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ in iskana formula velja za poljuben d. Če pa je $f(a) > 0$, je $m \leq \frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M$ in zaradi zveznosti funkcije G obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da je $G(d) = \frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$ oziroma $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^d g(x)dx$ (točka (a)).

Za dokaz točke (b) ravnamo enako, le namesto $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ vzamemo kot primitivno funkcijo za g funkcijo $G(x) = \int_b^x g(t)dt$.

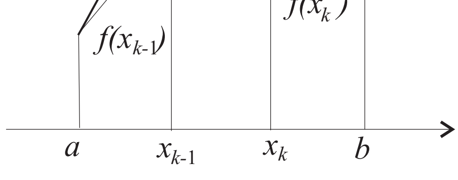
ZGLED. Naj bo $0 < a < b$, $p > 0$, $f(x) = 1/x^p$ in $g(x) = \sin x$. Tedaj je po točki (a) zgornje posledice za neko število $d \in [a, b]$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x^p}dx = \frac{1}{a^p}\int_a^d \sin x dx = \frac{1}{a^p}(\cos a - \cos d),$$

se pravi, da velja ocena $|\int_a^b \frac{\sin x}{x^p}dx| \leq \frac{2}{a^p}$. Ta ocena nam bo prišla prav kasneje.

Numerično računanje določenih integralov

Ogledali si bomo dve osnovni metodi za numerično (približno) računanje določenih integralov. Osnovna ideja je pri obeh metodah ista: integrand aproksimiramo s funkcijo, katere integral je preprosto izračunati.



SLIKA 8

(A) **Trapezna metoda**. Razdelimo interval $[a, b]$ na n enakih delov, tako da je dolžina vsakega od njih enaka $h = (b-a)/n$. Delilne točke so $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, pri čemer je $x_0 = a$ in $x_n = b$. Na vsakem podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ aproksimirajmo integrabilno funkcijo f z linearno funkcijo $f_k(x) = f(x_{k-1}) + (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x - x_{k-1})/h$, integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ pa z integralom (linearne funkcije)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)dx = h(f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$$

(za $f(x_{k-1}), f(x_k) > 0$ je to ploščina trapeza, odtod ime metode). Približek za integral po celotnem intervalu $[a, b]$ dobimo potem kot vsoto integralov po posameznih podintervalih:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(f(x_{k-1}+f(x_k))/2 = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

oziroma, če raje pišemo $y_k = f(x_k)$ za $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(y_{k-1} + y_k)/2 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n).$$

Zgornjo formulo imenujemo *trapezna formula*; spada med najbolj preproste formule za numerično integriranje funkcij, ki jim s skupnim izrazom rečemo *kvadraturne formule*.

Izpeljimo še oceno napake, ki jo naredimo pri uporabi trapezne formule za dovolj gladko funkcijo.

IZREK. *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$ in $A_n = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$ desna stran trapezne formule pri enakomerni razdelitvi intervala $[a, b]$ na n enakih delov, tako da je $h = (b-a)/n$. Potem velja ocena:*

$$|A_n - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$ ter $B_k = h(f(x_k) + f(x_{k-1}))/2 - F(x_k) + F(x_{k-1})$ in $c_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ za vsak $k = 1, 2, ..., n$. Definirajmo funkcijo

$$G_k(t) = t(f(c_k + t) + f(c_k - t)) - F(c_k + t) + F(c_k - t) - 8B_k t^3/h^3.$$

Opazimo, da je $G_k(0) = 0$ in $G_k(h/2) = h(f(x_k)+f(x_{k-1}))/2 - F(x_k)+F(x_{k-1}) - B_k = 0$. Po Rolleovem izreku obstaja taka točka $d_k \in (0, h/2)$, da je $G_k'(d_k) = 0$. Ker je $G_k'(t) = t(f'(c_k + t) - f'(c_k - t)) - 24B_k t^2/h^3$, imamo $0 = G_k'(d_k) = d_k(f'(c_k + d_k) - f'(c_k - d_k)) - 24B_k d_k^2/h^3$. Odtod lahko izrazimo B_k in z upoštevanjem Lagrangevega izreka obstaja taka točka $t_k \in (c_k - d_k, c_k + d_k)$, da je

$$B_k = \frac{h^3}{12d_k}((f'(c_k + d_k) - f'(c_k - d_k)) = \frac{h^3}{12} f''(t_k)$$

in zato $|B_k| \leq h^3 \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|/12$.

Ker je $A_n - \int_a^b f(x)dx = (h/2)\sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^n (h(f(x_k) + f(x_{k-1}))/2 - F(x_k) + F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n B_k$, velja ocena

$$|A_n - \int_a^b f(x)dx| \leq \sum_{k=1}^n |B_k| \leq \frac{nh^3}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| = \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| =$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|.$$

ZGLED. Izračunajmo npr. po trapezni metodi približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

na dve decimalki natančno. Ker je sedaj $f''(x) = 2/(1+x)^3$ in $\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)| = 2$, moramo zaradi ocene napake $|A_n - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)| = 1/6n^2$ vzeti $n \geq 6$, če želimo, da je napaka pod 0.005. Pri $n = 6$ imamo $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 2/3$, $x_5 = 5/6$ in $x_6 = 1$ ter $y_0 = 1$, $y_1 = 6/7 = 0.8571$, $y_2 = 3/4 = 0.7500$, $y_3 = 2/3 = 0.6667$, $y_4 = 3/5 = 0.6000$, $y_5 = 6/11 = 0.5455$ in $y_6 = 1/2 = 0.5000$. Trapezna formula za $n = 6$ nam torej da približek

$$A_6 = (1.0000{+}1.7142{+}1.5000{+}1.3334{+}1.2000{+}1.0910{+}0.5000)/12 = 8.3386/12 = 0.6949.$$

Prava vrednost je 0.6931, napaka pa manjša od 0.002.

(B) **Simpsonova metoda**. Tudi zdaj razdelimo interval $[a,b]$ na enake podintervale, vendar jih mora biti $2n$ (sodo mnogo) in so dolžine $h/2$, kjer je kot prej $h = (b-a)/n$. Pri tej metodi aproksimiramo na vsakem paru sosednjih podintervalov funkcijo f s kvadratno funkcijo $f_k(x) = \alpha_k(x-x_{2k-2})^2 + \beta_k(x-x_{2k-2}) + \gamma_k$, kjer koeficiente α_k, β_k in γ_k določimo tako, da je $f_k(x_{2k-2}) = f(x_{2k-2}) = y_{2k-2}$, $f_k(x_{2k-1}) = f(x_{2k-1}) = y_{2k-1})$ in $f_k(x_{2k}) = f(x_{2k}) = y_{2k}$. Ti trije pogoji pomenijo, da je $y_{2k-2} = \gamma_k$, $4y_{2k-1} = \alpha_k h^2 + 2\beta_k h + 4\gamma_k$ in $y_{2k} = \alpha_k h^2 + \beta_k h + \gamma_k$; z njimi so koeficienti α_k, β_k in γ_k enolično določeni.

Integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ se pri tem aproksimira z integralom kvadratne funkcije

$$\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f_k(x)dx = \int_0^h (\alpha_k t^2 + \beta_k t + \gamma_k)dt = \alpha_k h^3/3 + \beta_k h^2/2 + \gamma_k h =$$

$$\frac{h}{6}(2\alpha_k h^2 + 3\beta_k h + 6\gamma_k) = \frac{h}{6}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Če to storimo za vsak $k = 1, 2, ..., n$ in vse skupaj seštejemo, dobimo aproksimacijo integrala funkcije f na vsem intervalu $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(y_{2k-2} + 4x_{2k-1} + y_{2k})/6 =$$

$$\frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

To je t.i. *Simpsonova kvadraturna formula*. Je zelo natančna in že pri majhnih vrednostih za n daje dobre približke. Brez dokaza povejmo, da velja za napako R_n ocena

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{a\leq x\leq b}|f^{(4)}(x)|.$$

ZGLED. Pri računanju prejšnjega integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ po Simpsonovi formuli zadošča vzeti $n = 2$, saj je po zgornji oceni napaka manjša od $2/(2880\cdot 16) \approx 0.00004$. Po Simpsonu dobimo

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{h}{2}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = (1 + 16/5 + 4/3 + 16/7 + 1/2)/12 \approx 0.6932.$$

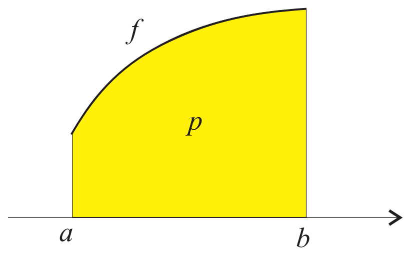
Opomba. Numerično sicer računamo integrale, ki se jih ne da izraziti z elementarnimi funkcijami, npr. $I = \int_0^1 e^{-x^2/2}$. Po trapezni formuli dobimo pri $n = 5$ približek $I \approx 0.8536$, Simpsonova formula pa nam da že pri $n = 2$ približek $I \approx 0.8557$. Prava vrednost je $I = 0.8556$ (glej [2]).

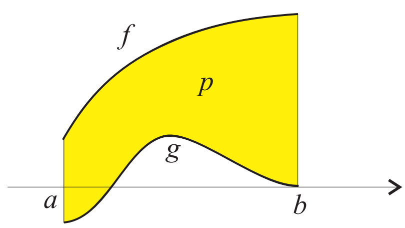
3. Uporaba določenega integrala v geometriji

Integriranje funkcij je zelo uporabno v naravoslovju, tehniki, ekonomiji in tudi drugje, kjer se uporabljajo moderne matematične metode. Večine zahtevnejših fizikalnih količin in izrekov npr. ni mogoče niti formulirati niti obravnavati brez integralov. Tu se v uporabo integrala v drugih vedah ne bomo spuščali, ogledali si bomo le nekaj bolj preprostih geometrijskih aplikacij.

(A) Računanje ploščin likov.

Vemo že, da je določeni integral tesno povezan s ploščino krivočrtnih likov. Če je npr. $f(x) \geq 0$ na $[a,b]$, je ploščina lika, ki ga na intervalu $[a,b]$ oklepajo krivulja $y = f(x)$, abscisna os in obe ordinati v krajiščih (slika 9), enaka $p = \int_a^b f(x)dx$.





Slika 9

Če je $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$ (slika 29b), je ploščina med njima na $[a,b]$ enaka $p = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Nekoliko bolj zapletena situacija nastopi, če se obe krivulji prepletata. Tedaj moramo izračunati del ploščine med njima na posameznih odsekih in potem te posamezne prispevke sešteti.

ZGLED. (a) Ploščino (polovice) kroga izračunamo z integralom $p = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Uvedemo substitucijo $x = a\sin t$. Torej je $dx = a\cos t dt$ in

$$p = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = a^2\pi.$$

(b) Ploščino med sinusom in kosinusom na intervalu $[0, 2\pi]$ izračunamo z vsoto integralov

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx = 4\sqrt{2}.$$

Včasih lahko na ta način izračunamo tudi ploščino lika, ki ga omejuje parametrično podana krivulja.

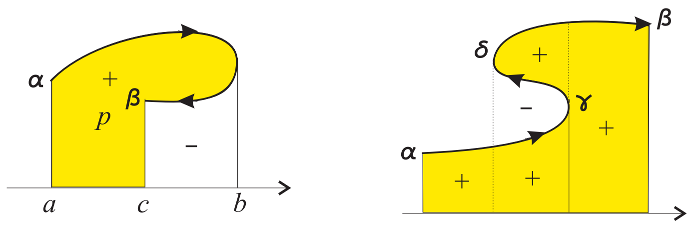
ZGLED. Ploščino pod enim lokom cikloide izračunamo z

$$p = \int_0^{2a\pi} ydx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt =$$

$$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 4a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 t)dt = 3a^2\pi.$$

Upoštevali smo, da je $y = a(1 - \cos t)$ in $dx = a(1 - \cos t)dt$.

Oglejmo si nekoliko podrobneje računanje ploščin pri parametrično podanih krivuljah. Če je $y(t) \geq 0$ in je tudi $\dot{x}(t) > 0$ (in zato x narašča) za $\alpha < t < \beta$ (tako kot pri zadnjem zgledu), je ploščina enaka $p = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$. To velja, tudi če $\dot{x}$ nima stalnega predznaka na intervalu $[\alpha, \beta]$. Kjer je $\dot{x} > 0$, potuje točka (x, y) po krivulji v desno in prispevek k ploščini pod krivuljo je pozitiven. Kjer pa je $\dot{x} < 0$, potuje točka (x, y) po krivulji v levo in prispevek k ploščini pod krivuljo je negativen (slika 10).



Slika 10

Parametrizacija ravninske krivulje je dana s parom zvezno odvedljivih preslikav $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, ali kar z eno vektorsko funkcijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, kjer je $\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t))$. Vektorsko funkcijo odvajamo po komponentah: $\dot{\boldsymbol{F}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ za vsak t. Tej funkciji $\boldsymbol{F}$ rečemo *pot* (točke (x, y) po ravnini $\mathbb{R}^2$), njeni zalogi vrednosti $\{\boldsymbol{F}(t);\ \alpha \leq t \leq \beta\}$ pa *krivulja* v ravnini (ali *lok* krivulje v ravnini).
Seveda imata dve različni funkciji lahko isto zalogo vrednosti, torej ima dana krivulja na sploh različne parametrizacije. Če je npr. $\phi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ poljubna druga zvezno odvedljiva funkcija, ki preslika interval $[\gamma, \delta]$ surjektivno na interval $[\alpha, \beta]$, je $\boldsymbol{F} \circ \phi$ druga parametrizacija iste krivulje. Da se pokazati, da lahko poljubno drugo parametrizacijo dane krivulje dobimo na ta način.

Kritične so točke t, kjer je $\dot{x}(t) = 0$ in $\dot{y}(t) = 0$; v njih smer ni določena (pri cikloidi so npr. take točke $t = \pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, kjer nastopi ost). Da se temu izognemo, zahtevamo, da je parametrizacija povsod regularna.

DEFINICIJA 1. Rečemo, da je parametrizacija $\boldsymbol{F}$ dane krivulje je v točki t *regularna*, če je $\dot{\boldsymbol{F}}(t) \neq (0, 0)$. Če je to res za vsak $t \in [\alpha, \beta]$, rečemo, da je parametrizacija $\boldsymbol{F}$ *regularna povsod*.

Regularna parametrizacija določa *usmerjenost* krivulje, podana je s smerjo potovanja točke $\boldsymbol{F}(t)$ po krivulji. Pogosto tvorijo krivulje zaključeno zanko (pot se vrne v začetno točko), ki omejuje nek lik. Tedaj rečemo, da je usmerjenost *pozitivna*, če je ta lik pri potovanju po krivulji na levi strani.

DEFINICIJA 2. *Gladka enostavno sklenjena* krivulja je krivulja z regularno parametrizacijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja:
(i) $\dot{\boldsymbol{F}}(\alpha) = \dot{\boldsymbol{F}}(\beta)$ (gladkost);
(ii) $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\beta)$ (sklenjenost);
(iii) $\boldsymbol{F}(s) \neq \boldsymbol{F}(t)$ za $s, t \in [\alpha, \beta)$, $s \neq t$ (enostavnost).

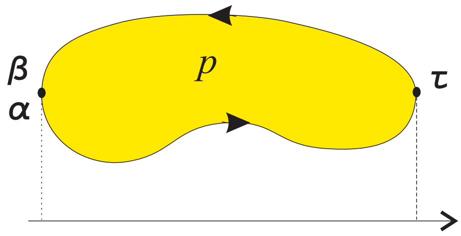
Zadnja točka (iii) pove, da je funkcija $\boldsymbol{F}$ na intervalu $[\alpha, \beta)$ injektivna; torej se točka na krivulji $\boldsymbol{F}(t)$ za noben $t < \beta$ ne vrne v nobeno prejšnjo točko, ampak se to zgodi šele pri $t = \beta$ (ii). Izpeljali bomo formulo za izračun ustrezne ploščine.

TRDITEV 1. *Ploščina območja, ki ga omejuje gladka enostavno sklenjena krivulja z regularno parametrizacijo in s pozitivno usmerjenostjo, je enaka*

$$p = \int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)dt = -\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt.$$

Dokaz. Oglejmo si npr. integral $\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$. Ker je $x = x(t)$ zvezna funkcija na kompaktnem intervalu, doseže na njem svoj globalni minimum, npr. v točki γ, in svoj globalni maksimum, npr. v točki τ. Brez škode lahko predpostavimo, da je $\gamma = \alpha$ (sicer izberemo novo regularno parametrizacijo, ki ustreza temu in vsem drugim pogojem, s preprostim premikom). Potem pomeni $\int_\alpha^\tau y(t)\dot{x}(t)dt$ ploščino med abscisno osjo in med spodnjim delom krivulje (predznačeno, če je krivulja kje pod abscisno osjo), integral $\int_\tau^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$ pa negativno ploščino med abscisno osjo in zgornjim delom krivulje. Skupaj dobimo ravno negativno ploščino lika, ki ga krivulja omejuje (glej sliko 11).

Prvo formulo $p = \int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)dt$ dokažemo podobno, če zamenjamo vlogo obeh osi, ali pa jo izpelejmo z integracijo pod delih; tretja formula $p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt$ je povprečje prvih dveh.



Slika 11

Pogosto zadnjo formulo za ploščino zapišemo na kratko $p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta (xdy - ydx)$.

ZGLED. Izračunajmo ploščino elipse, podane v parametrični obliki z enačbama $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Potem je npr.

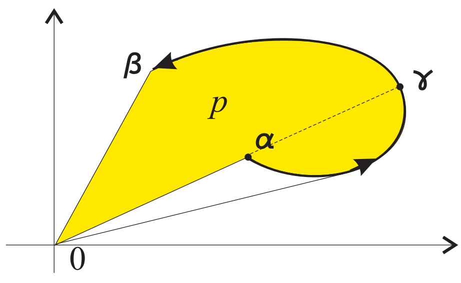
$$p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((a\cos t)(b\cos t) + (a\sin t)(b\sin t))dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$

V posebnem primeru dobimo pri $a = b$ ploščino kroga.

Opomba. Če $\boldsymbol{F}(\alpha) \neq \boldsymbol{F}(\beta)$, izračunamo po tej formuli samo ploščino izseka, ki ga omejuje krivulja in zveznici od koordinatnega izhodišča do začetne in končne točke krivuljnega loka. Čeprav rob tega izseka zdaj ni povsod gladek, formula velja, saj so tudi odsekoma zvezne funkcije integrabilne. Ploščino četrtine elipse npr. izračunamo z integralom

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} ((a\cos t)(b\cos t) + (a\sin t)(b\sin t))dt =$$

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = ab\pi/4.$$



Slika 12

TRDITEV 2. *Če je krivulja podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\phi)$, kjer je $\alpha \leq \phi \leq \beta$, je ploščina krivuljnega izseka podana s formulo*:

$$p = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi.$$

Dokaz. To formulo takoj izpeljemo iz formule za izračun ploščine krivuljnega izseka v parametrični obliki, saj je zdaj parameter $t = \phi$, spremenljivki pa $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ in $xdy - ydx = r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\phi = r^2 d\phi$. Lahko tudi upoštevamo, da je izraz $\frac{1}{2} r^2 d\phi$ enak ploščini enakokrakega trikotnika s krakom r in vmesnim kotom $d\phi$.

ZGLED. (a) Ploščino kroga bi lažje izračunali s formulo $p = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} a^2 d\phi = a^2 \pi$.

(b) Ploščina enega polnega zavoja Arhimedove spirale $r = a\phi$ je enaka
$p = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} a^2 \phi^2 d\phi = 4a^2 \pi^3/3$.

(c) Ploščina srčnice (kardioide) s polarno enačbo $r = a(1 + \cos \phi)$ pa je

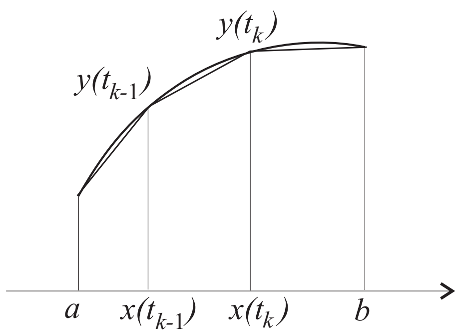
$$p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \phi)^2 d\phi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \phi + \cos^2 \phi) d\phi = 3a^2 \pi/2.$$

(B) Računanje ločnih dolžin.

Kot prej naj bo krivulja parametrizirana z zvezno funkcijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Interval $[\alpha, \beta]$ razdelimo na n podintervalov s točkami $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$. Tej delitvi $D = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ priredimo vsoto $\lambda(D) = \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{F}(t_k) - \boldsymbol{F}(t_{k-1})\|$, ki pomeni dolžino poligonske črte s krajišči v izbranih točkah $\boldsymbol{F}(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ na krivulji. Pri finejši delitvi se ta izraz kvečjemu poveča. Če so vse te vsote navzgor omejene, obstaja njihov supremum. V tem primeru rečemo, da je pot (tj. zvezna funkcija $\boldsymbol{F}$) *izmerljiva* in da je njena dolžina enaka temu supremumu. Imamo torej naslednjo definicijo.

DEFINICIJA 3. *Dolžina poti*, tj. zvezne funkcije $\boldsymbol{F}$, je enaka

$$l(\boldsymbol{F}) = \sup\{\lambda(D);\ D \text{ delitev intervala } [\alpha, \beta]\}.$$



SLIKA 13

TRDITEV 3. *Naj bo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva parametrizacija dane krivulje. Potem je pot $\boldsymbol{F}$ izmerljiva in njena dolžina je dana z integralom*

$$l(\boldsymbol{F}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\boldsymbol{F}}(t)\| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt.$$

Dokaz. Po definiciji za vsako delitev $D = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ velja

$$\lambda(D) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Po Lagrangeu je $x(t_k)-x(t_{k-1}) = \dot{x}(c_k)(t_k-t_{k-1})$ in $y(t_k)-y(t_{k-1}) = \dot{y}(d_k)(t_k-t_{k-1})$, kjer je $t_{k-1} < c_k, d_k < t_k$. Torej je $\lambda(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}(c_k)^2+\dot{y}(d_k)^2}\Delta t_k$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ za vsak k. To spominja na Riemannovo vsoto $S(h; D, T_D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}(c_k)^2+\dot{y}(c_k)^2}\Delta t_k$ za funkcijo $h(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}$, ki je tako blizu integralu $I = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\, dt$ kot želimo, če je le delitev D dovolj drobna, npr. $|I - S(h; D, T_D)| < \epsilon/2$.

Po drugi strani so točke c_k in d_k z istega podintervala. Zaradi zveznosti funkcije h, lahko pri dovolj drobni delitvi dosežemo, da je tudi $|S(h; D, T_D) - \lambda(D)| < \epsilon/2$, skupaj torej $|I - \lambda(D)| \le |I - S(h; D, T_D)| + |S(h; D, T_D) - \lambda(D)| < \epsilon$.

TRDITEV 4. *Naj bo* $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva funkcija in* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *strogo monotono naraščajoča in zvezno odvedljiva funkcija, ki preslika interval* $[\gamma, \delta]$ *bijektivno na interval* $[\alpha, \beta]$*. Potem je dolžina poti* $\boldsymbol{F} \circ \phi$ *enaka dolžini poti* $\boldsymbol{F}$*.*

Dokaz. Izračunajmo

$$l(\boldsymbol{F} \circ \phi) = \int_\gamma^\delta \sqrt{\dot{x}(\phi(s))^2\dot{\phi}(s)^2 + \dot{y}(\phi(s))^2\dot{\phi}(s)^2}\, ds =$$

$$\int_\gamma^\delta \sqrt{\dot{x}(\phi(s))^2 + \dot{y}(\phi(s))^2}\, \dot{\phi}(s)\, ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Na koncu smo zamenjali spremenljivko v določenem integralu: $t = \phi(s),\ dt = \dot{\phi}(s) ds$.

Zadnja trditev pove, da je izračun dolžine dane poti neobčutljiv za zvezno odvedljive bijekcije. To pomeni, da je smiselno definirati tudi pojem dolžine dane krivulje, ki bo neodvisen od dane regularne parametrizacije.

DEFINICIJA 4. *Dolžina krivulje* ziroma *ločna dolžina* s je enaka dolžini katerekoli njene zvezno odvedljive regularne parametrizacije $\boldsymbol{F}$, torej $s = l(\boldsymbol{F})$.

Regularnost pomeni, da nikjer na poti ni odvod parametrizacije enak nič, torej potuje točka po krivulji vedno v isto smer. Samo tedaj dobimo pravo (geometrijsko) dolžino krivulje.

Oglejmo si dva posebna primera:

(1) Naj bo krivulja podana z enačbo $y = f(x)$, torej predstavlja graf funkcije f. Tedaj je parameter kar enak x in za dolžino grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$ imamo formulo

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

(2) Za krivuljo v polarni obliki je parameter polarni kot ϕ, $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$, zato je $\dot{x} = r'\cos\phi - r\sin\phi$, $\dot{y} = r'\sin\phi + r\cos\phi$, zato dobimo $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (r'\cos\phi - r\sin\phi)^2 + (r'\sin\phi + r\cos\phi)^2 = r^2 + r'^2$ oziroma

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi.$$

Vse te formule si lahko nazorno lažje zapomnimo, če upoštevamo, da za *diferencial* ločne dolžine s velja $ds^2 = dx^2 + dy^2$, od koder dobimo $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$ oziroma $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$ za parametrično podano krivuljo, $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\, dx$ oziroma $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$ za eksplicitno podano krivuljo in na koncu $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{r^2+r'^2}\, d\phi$ oziroma $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}\, dx$ za krivuljo v polarni obliki.

ZGLED. (a) Obseg krožnice je enak štirikratni dolžini krivulje $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[0, a]$. Po kratkem računu dobimo $s = 4a \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin 1 = 2a\pi$. Seveda je veliko lažje izračunati obseg krožnice, podane v parametrični obliki z $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, ko je $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 2a\pi$. Še najhitreje pa ga izračunamo v polarni obliki. Krožnica ima zdaj najbolj preprosto enačbo $r = a$ (torej je $r' = 0$) in dobimo $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} d\phi = 2a\pi$.

(b) Dolžina enega loka cikloide z enačbo $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ je

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8a.$$

To predstavlja štiri premere kotaleče se krožnice.

ZGLED. Poskusimo na podoben način izračunati obseg elipse v parametrični obliki $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, kjer je $a > b > 0$. Zdaj je $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = b \cos t$ in zato $\dot{s}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t = a^2(1 - \epsilon^2 \cos^2 t)$, kjer pomeni $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ numerično ekscentričnost elipse. Za obseg elipse torej dobimo

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t}\, dt.$$

Ta integral seveda obstaja, saj je integrand zvezna funkcija, vendar se ga ne da izraziti z elementarnimi funkcijami. Imenuje se *eliptični integral druge vrste* in ga lahko poljubno natančno izračunamo numerično.

Naravni parameter

Dolžina krivulje na intervalu $[\alpha, t]$ je dana s formulo

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Ker je tu $s = s(t)$ strogo naraščajoča zvezna in zvezno odvedljiva funkcija parametra t, obstaja tudi strogo naraščajoča in zvezno odvedljiva inverzna funkcija $t = t(s)$ ločne dolžine s. Vstavimo to v enačbi $x = x(t)$ in $y = y(t)$, pa dobimo $x = x(t(s))$ in $y = y(t(s))$. Če je $\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t))$, je zdaj $s \mapsto F(x(t(s)), y(t(s)))$ nova parametrizacija iste krivulje. Parameter je zdaj kar *dolžina krivulje* od začetne točke $F(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ do točke $F(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$. Ta parameter se imenuje *naravni parameter.*

Da je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom, spoznamo iz dejstva, da tedaj zaradi $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ in $dx/ds = \dot{x}/\dot{s}$, $dy/ds = \dot{y}/\dot{s}$, velja tudi $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$ oziroma $x'^2 + y'^2 = 1$, kjer črtica pomeni odvod na naravni parameter. Obratno pa tudi iz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ dobimo za ločno dožino $s = t - \alpha$. Torej je parameter $t = s + \alpha$ samo premaknjen naravni parameter.

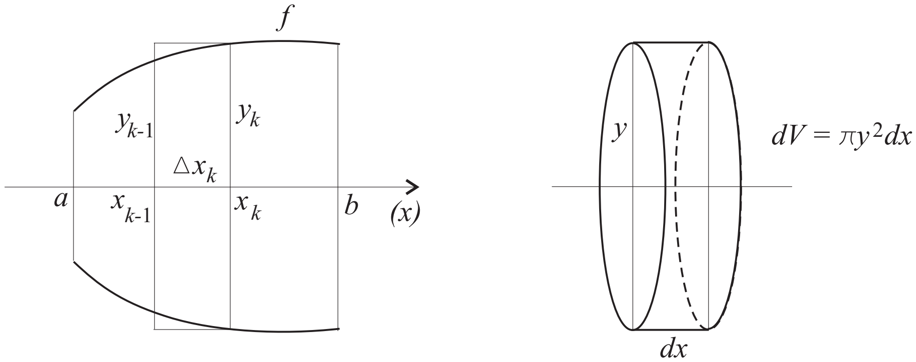
Pogosto je zelo ugodno imeti izmerljivo krivuljo parametrizirano z naravnim parametrom. Nekatere formule se pri tem poenostavijo. Za ukrivljenost ravninske krivulje smo npr. pri analizi 1 izpeljali formulo

$$\kappa = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

Če je tu t naravni parameter, je imenovalec enak 1 in ukrivljenost dobi bolj preprosto obliko: $\kappa = y''x' - x''y'$ (črtica zdaj pomeni odvod na naravni parameter).

(C) Računanje prostornine rotacijskih teles.

Kadar se krivulja $y = f(x)$ zavrti okrog abscisne osi, lahko z določenim integralom izračunamo tudi prostornino dobljene vrtenine (rotacijskega telesa), ki nastane nad intervalom $[a, b]$.



SLIKA 14

TRDITEV 5. *Naj bo f zvezna funkcija, ki je na intervalu $[a, b]$ povsod pozitivna (enaka nič kvečjemu v krajiščih). Potem je prostornina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ okrog abscisne osi enaka*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Dokaz. Razdelimo interval $[a, b]$ na podintervale s točkami $a = x_0 < x_1 < x_2 < ...x_n = b$. V vsaki točki x_k postavimo ravnino pravokotno na abscisno os. S temi ravninami smo rotacijsko telo razrezali na tanke plošče debeline Δx_k. Če je Δx_k majhen, ima taka plošča (med ravninama skozi x_{k-1} in x_k) približno obliko valja s polmerom osnovne ploskve $y_k = f(x_k)$ in višino Δx_k, zato je njena prostornina približno enaka $\pi y_k^2 \Delta x_k$. Ta približek je tem bolj natančen, čim manjši je Δx_k. Prostornina celotnega rotacijskega telesa je potem približno enaka vsoti prostornin posameznih plošč, tj. vsoti

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

Toda to je ena od integralskih (Riemannovih) vsot funkcije $x \mapsto \pi f(x)^2$ na intervalu $[a, b]$. Ker je funkcija f zvezna, je tudi ta nova funkcija zvezna, zato njene integralske vsote pri pogoju $\max_k \Delta x_k \to 0$ konvergirajo proti ustreznemu integralu. Torej res dobimo zgornjo formulo za prostornino vrtenine.

ZGLED. (a) Prostornino stožca s polmerom r in višino h dobimo z vrtenjem premice $y = rx/h$ okrog abscisne osi na intervalu $[0, h]$. Torej je $V = \dfrac{\pi r^2}{h^2} \displaystyle\int_0^h x^2 dx = \pi r^2 h/3$.

(b) Prostornino rotacijskega elipsoida, ki ga dobimo tako, da se zgornja veja elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ zavrti na intervalu $[-a, a]$ okrog abscisne osi, dobimo z integralom $V = \dfrac{\pi b^2}{a^2} \displaystyle\int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \dfrac{4\pi a b^2}{3}$.

V posebnem primeru, ko je $a = b$, dobimo prostornino krogle s polmerom a, torej $V = 4\pi a^3/3$.

Prostornino vrtenine lahko izračunamo tudi, če se zavrti parametrično podana krivulja, podana z enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$. Pri tem uporabljamo formulo $V = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx$, kjer je seveda $y = y(t)$ in $dx = \dot{x}(t) dt$ (paziti moramo, da je $\dot{x}(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ pozitiven oziroma da je $x = x(t)$ naraščajoča funkcija parametra t).

ZGLED. (a) Prostornina telesa, ki nastane z vrtenjem enega loka cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ je

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$a^3\pi(2\pi + 3\pi) = 5a^3\pi^2.$$

Upoštevali smo, da je integral po periodi (od 0 do 2π) lihe potence funkcije kosinus enak nič, integral kvadrata kosinusa pa polovica periode).

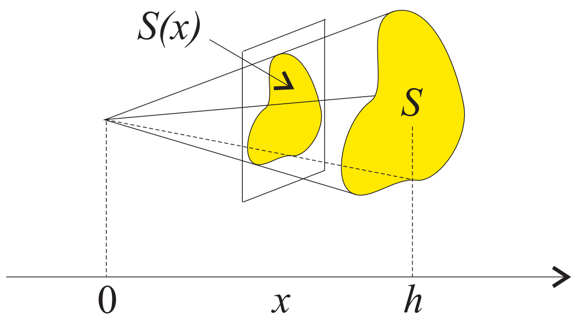
(b) Prostornina svitka (torusa) z enačbama $x = a\cos t$, $y = b - a\sin t$ pa je

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = -a\pi \int_0^{2\pi} (b - a\sin t)^2 \sin t \, dt =$$

$$-a\pi \int_0^{2\pi} (b^2 \sin t - 2ab\sin^2 t + a^2 \sin^3 t) dt = 2a^2 b\pi^2.$$

Prostornina telesa z znanim presekom. Še eno formulo za izračun prostornine lahko izpeljemo brez težav, čeprav telo ni rotacijsko. Denimo, da poznamo ploščino $S(x)$ vsakega na os x pravokotnega preseka telesa, ki se razteza od $x = a$ do $x = b$ (slika 15). Potem podobno kot pri vrteninah z razrezom na tanke vzporedne valje brez težav spoznamo, da velja za prostornino takega telesa naslednja formula.

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



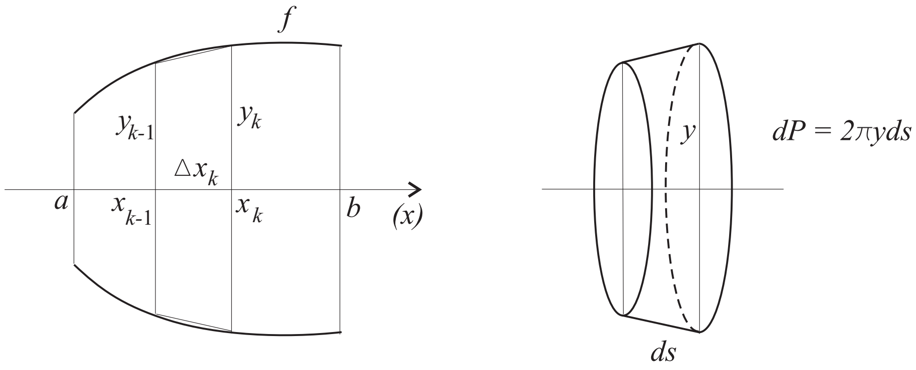
SLIKA 15

ZGLED. Imejmo pokončno piramido z višino h, katere osnovna ploskev je lik s ploščino S. Zaradi lažjega računa naj ima piramida vrh v koordinatnem izhodišču in osnovno ploskev v ravnini, pravokotni na abscisno os pri $x = h$ (glej sliko 15). Opazujmo pravokotne preseke v oddaljenosti x od izhodišča ($0 \le x \le h$). Ker je razmerje njihovih ploščin premo sorazmerno razmerju kvadratov oddaljenosti, imamo formulo $S(x) = S(h)x^2/h^2 = Sx^2/h^2$. Zato je prostornina piramide enaka $V = \int_0^h S(x)dx = (S/h^2)\int_0^h x^2 dx = Sh/3$.

(D) Računanje površine rotacijskih teles.

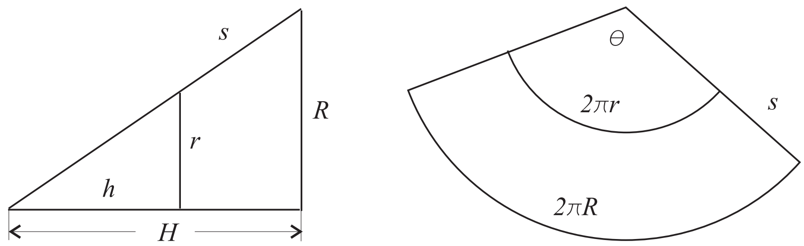
Približno površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ okrog abscisne osi, izračunamo tako, da seštejemo plašče vseh tankih plošč, na katere smo (tako kot prej) razrezali telo (glej sliko 16).

Upoštevajmo, da je zdaj tanka plošča v resnici prisekani stožec s polmeroma osnovnih ploskev y_{k-1} in y_k ter stranskim robom $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$, kjer je $x_{k-1} < c_k < x_k$. Uporabili smo Lagrangev izrek.



SLIKA 16

Formula za plašč prisekanega stožca z polmeroma osnovnih ploskev R in r ter stranskim robom s se glasi $pl = \pi(R+r)s$. Izpeljemo jo iz relacij $R/r = H/h = \sqrt{R^2+H^2}/\sqrt{r^2+h^2}$, $\theta = 2\pi r/\sqrt{r^2+h^2} = 2\pi R/\sqrt{R^2+H^2}$ in $s = \sqrt{R^2+H^2} - \sqrt{r^2+h^2}$, kjer sta H in h velika in mala višina ter θ središčni kot pri razgrnitvi valjevega plašča v ravnino (glej sliko 17). Velja namreč $pl = \frac{1}{2}(R^2+H^2)\theta - \frac{1}{2}(r^2+h^2)\theta = \pi(R\sqrt{R^2+H^2} - r\sqrt{r^2+h^2}) = \pi((R+r)\sqrt{R^2+H^2} - (R+r)\sqrt{r^2+h^2}) = \pi(R+r)s$.



SLIKA 17

Torej je plašč naše tanke plošče enak $\pi(y_{k-1}+y_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$. To pa je približno enako $2\pi f(c_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$, saj za zvezno funkcijo f velja ocena $|y_{k-1}+y_k-2f(c_k)| \le |f(x_{k-1})-f(c_k)|+|f(x_k)-f(c_k)| < \epsilon$, če je le $\Delta x_k < \delta$ (vse točke x_{k-1}, x_k in c_k ležijo na istem podintervalu z dolžino pod δ). Torej je tudi površina celotnega rotacijskega telesa približno enaka vsoti plaščev posameznih tankih plošč, tj. vsoti

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k,$$

ki je ena od integralskih vsot za integral funkcije $x \mapsto 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$. Dokazali smo naslednjo trditev.

TRDITEV 6. *Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija, ki je na intervalu $[a,b]$ povsod pozitivna. Potem je površina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ okrog abscisne osi enaka*

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

ZGLED. (a) Površina paraboloida $y = \sqrt{x}$ na intervalu [0,1] je

$$P = 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3\sqrt{3}-1).$$

Vpeljali smo substitucijo $\sqrt{2x+1} = t$.

(b) Površina krogle s polmerom a je enaka $P = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{1 + x^2/(a^2 - x^2)}\,dx = 4\pi a^2$.

Podobno kot prej pri prostorninah vidimo, da lahko uporabljamo formulo

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

za izračun površine tudi v primeru, ko je krivulja, ki se vrti okrog abscisne osi, podana v parametrični obliki.

ZGLED. Če se zavrti cikloidni lok, je $y = a(1 - \cos t)$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4a^2 \sin^2(t/2)$ in zato površina dobljene vrtenine enaka

$$2\pi \int_{0}^{2\pi} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 4\pi a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)\sin(t/2)dt = 64\pi a^2/3.$$

4. Posplošeni integral

Vemo, da je na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$ integrabilna funkcija f nujno omejena. Neomejene funkcije torej ne moremo integrirati (v Riemannovem smislu). Prav tako smo v definiciji potrebovali omejen interval $[a, b]$; za poltrak ali za celo realno os ne moremo definirati delitve D na končno mnogo omejenih podintervalov.
Kljub temu si včasih tudi v takih primerih lahko pomagamo še z enim limitnim procesom, ki bo funkciji in intervalu priredil določeno vrednost. Ta vrednost bo pomenila posploštev integrala in ji bomo zato rekli posplošeni integral funkcije f na danem (omejenem ali neomejenem) intervalu.

Potrebovali bomo naslednjo definicijo.

DEFINICIJA 1. Naj bo I kakršenkoli interval s krajiščema a, b, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ (odprt, zaprt, polodprt, omejen ali neomejen). Rečemo, da je realna funkcija f *lokalno integrabilna* na intervalu I, če je f integrabilna na vsakem kompaktnem (tj. omejenem in zaprtem) podintervalu $[c, d] \subset I$.

Če je npr. $I = (a, b]$, kjer sta a in b realni števili, $a < b$, lokalna integrabilnost pomeni, da je funkcija f integrabilna na vsakem podintervalu $[c, b] \subset (a, b]$. Podobno mora biti v primeru lokalne integrabilnosti na intervalu $I = [a, b)$ funkcija f integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[a, d] \subset [a, b)$. Seveda je v primeru intervala $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, lokalna integrabilnost isto kot integrabilnost.

Ločili bomo dva osnovna primera: (A), ko je funkcija neomejena na omejenem intervalu in (B), ko integriramo funkcijo po neomejenem intervalu (poltraku ali vsej realni osi).

(A) Neomejena funkcija

Posplošeni integral neomejene lokalno integrabilne funkcije na omejenem intervalu lahko definiramo v primeru, ko obstaja na intervalu $[a, b]$ samo končno mnogo točk c_i, v okolici katerih je funkcija f neomejena. Tedaj interval razdelimo na končno mnogo podintervalov tako, da vsak od njih vsebuje kvečjemu eno teh singularnih točk in sicer kot (levo ali desno) krajišče, izračunamo integral po vsakem takem podintervalu posebej, nato pa posamezne rezultate seštejemo v skupni integral funkcije f na vsem prvotnem intervalu $[a, b]$. Zadošča torej obravnavati samo dva primera: ko ima funkcija f singularno točko (v bližini katere je neomejena) kvečjemu v levem krajišču ali kvečjemu v desnem krajišču intervala $[a, b]$.

DEFINICIJA 2. Če je funkcija f lokalno integrabilna na intervalu $(a,b]$ (tj. integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[c,b] \subset (a,b]$) in zato neomejena kvečjemu v okolici točke a, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\downarrow a} \int_c^b f(x)dx.$$

Če je f lokalno integrabilna na intervalu $[a,b)$ (tj. integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[a,c] \subset [a,b)$) in zato neomejena kvečjemu v okolici točke b, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

Kadar je morebitna singularnost v vmesni točki c, $a < c < b$, integral seveda zapišemo v obliki $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ in problem prevedemo na oba prejšnja primera.

Če (ena ali druga) limita iz definicije 2 obstaja, rečemo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $(a,b]$ ali $[a,b)$ v *posplošenem smislu* in da je $\int_a^b f(x)dx$ njen *posplošeni* (*nepravi*) ali *izlimitirani* Riemannov integral. Namesto da integral obstaja v smislu zgornje limite, včasih tudi rečemo, da integral *konvergira*.

Opomba. Tudi posplošeni integral je linearen funkcional: če sta funkciji f in g na intervalu integrabilni v posplošenem smislu in sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti, je

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

To sledi iz dejstva, da po trditvi 5 iz prejšnjega razdelka isto velja na zaprtih podintervalih $[c,b]$ oziroma $[a,c]$, kjer je $a < c < b$, in da je tudi limita linearen funkcional.

TRDITEV 1. *Denimo, da je f integrabilna na celem intervalu $[a,b]$, se pravi, da obstaja njen* (*pravi*) *Riemannov integral. Potem obstaja tudi* nepravi *integral funkcije f v smislu definicije 2 in je enak Riemannovemu integralu.*

Dokaz. Zaradi zveznosti funkcije $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ imamo enakost $\lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c\uparrow b} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Podobno vidimo, da je tudi $\lim_{c\downarrow a} \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (zdaj vzamemo $F(x) = \int_x^b f(t)dt$).

Vsak pravi integral imamo torej lahko za posplošeni integral. Seveda pa včasih obstaja posplošeni integral tudi v primerih, ko pravega integrala ne moremo definirati.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0}(-\ln c) = \infty,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\uparrow 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\lim_{c\uparrow 1}(1-\sqrt{1-c}) = 2,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{c\downarrow 0} \int_c^1 \ln x\, dx = \lim_{c\downarrow 0}(c - c\ln c - 1) = -1.$

Zgleda iz točk (a) in (b) sta oblike $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ($a = 0$, $b = 1$, $p = 1$) in $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($a = 0$, $b = 1$, $p = 1/2$). Obravnavajmo npr. prvega za primer $p \neq 1$, uvedimo novo spremenljivko $x - a = t$ in izračunajmo (pri $a < c < b$)

$$\int_c^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_{c-a}^{b-a} \frac{dt}{t^p} = t^{1-p}/(1-p)|_{c-a}^{b-a} = ((b-a)^{1-p} - (c-a)^{1-p})/(1-p).$$

Ker je $x \mapsto x^{1-p}$ zvezna funkcija, če je $p < 1$, dobimo v tem primeru v limiti, ko $c \to a$, da posplošeni integral obstaja in je enak $\displaystyle\int_c^b \frac{dx}{(x-a)^p} = (b-a)^{1-p}/(1-p).$

Ob upoštevnju izreka 8 v drugem razdelku se lahko hitro prepričamo, da velja tudi za posplošene integrale (naslednji) izrek o zamenjavi integracijske spremenljivke.

IZREK 1. *Naj bo zvezno odvedljiva $x = x(t)$ naraščajoča funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$ in naj preslika interval $[\alpha, \beta]$ surjektivno na interval $[a, b]$. Potem je za funkcijo f, ki je lokalno integrabilna vsaj na intervalu (a, b), funkcija $g(t) = f(x(t))x'(t)$ lokalno integrabilna vsaj na (α, β), posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja natanko takrat, ko obstaja posplošeni integral $\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$, in oba integrala sta enaka.*

Dokaz. Brez škode lahko predpostavimo, da je $x = x(t)$ strogo naraščajoča zvezno odvedljiva funkcija in da je problem na spodnji meji. Ker v tem primeru velja $\int_c^b f(x)dx = \int_\gamma^\beta f(x(t))x'(t)dt$ za vsak $\alpha < \gamma < \beta$ in $a = x(\alpha) < c = x(\gamma) < b = x(\beta)$ ter je $x = x(t)$ zvezna funkcija, velja isto tudi v limiti.

Tudi metodo integracije po delih (per partes) lahko uporabljamo pri posplošenih integralih v naslednjem smislu.

TRDITEV 2. *Kadar obstajata limiti $\lim_{x\to a} u(x)v(x)$ in $\lim_{x\to b} u(x)v(x)$ ter posplošeni integral $\int_a^b v(x)u'(x)dx$, obstaja tudi posplošeni integral $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ in velja formula*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - \lim_{x\to a} u(x)v(x) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Dokaz izpustimo, formulo dokažemo z aproksimacijo, podobno kot prej. Seveda lahko formulo per partes pišemo tudi na običajen način $\displaystyle\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$, če le razumemo $uv|_a^b$ v smislu razlike limit in integrala v smislu posplošenih integralov.

Opomba. Lahko se zgodi, da niti kakšna od limit niti posplošeni integral na desni strani ne obstajajo. Kljub temu lahko obstaja posplošeni integral na levi strani. V tem primeru ga moramo izračunati po definiciji kot limito pravih integralov, npr. $\int_c^b udv$, za katere pa lahko uporabimo formulo per partes. Potem je

$$\int_a^b udv = \lim_{c\to a} \int_c^b udv = \lim_{c\to a}(uv|_c^b - \int_c^b vdu).$$

ZGLED. Če formalno izračunamo po metodi per partes, dobimo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Tu noben člen na desni ni končen. Prvi je neskončen v limiti, ko pošljemo $x \to 0$, drugi je posplošeni integral, ki po točki (b) izreka 2, ki ga bomo vsak hip dokazali, ne obstaja. Po drugi strani pa posplošeni integral na levi strani obstaja po istem izreku, točka (a).

Pri obravnavi zadnjih zgledov smo poznali primitivno funkcijo vsaj na odprtem intervalu (a, b). Včasih pa se da vnaprej, in ne da bi poznali primitivno funkcijo, povedati, ali bo integral konvergiral ali ne.

IZREK 2. *Naj bo g na $[a, b]$ zvezna funkcija. Potem posplošeni integral*

$$\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$$

(a) *obstaja, če je $p < 1$;*
(b) *ne obstaja, če je $p \geq 1$ in velja $g(a) \neq 0$.*

Dokaz. (a) V integral $\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$ uvedemo po izreku 1 substitucijo $x-a=t^n$, kjer je n tako velik, da je $n(1-p)>1$. Dobimo

$$\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx = n\int_0^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)t^{n(1-p)-1}dt.$$

Ker je na desni strani integrand zvezna funkcija na intervalu $[0, \sqrt[n]{b-a}]$, obstaja ta integral kot pravi (Riemannov) integral. Torej obstaja tudi posplošeni integral na levi strani.

(b) Naj bo npr. $g(a)>0$ (sicer dokazujemo neobstoj integrala za funkcijo $-g$). Zaradi zveznosti funkcije g obstaja d, $a<d<b$, in $m>0$, tako da je $g(x)\geq m$ za vsak $x\in[a,d]$. Ker je zdaj $p\geq 1$, imamo za vsak c, $a<c<d$, oceno

$$\int_c^d g(x)/(x-a)^p dx \geq m\int_c^d 1/(x-a)^p dx = m(\ln(d-a)-\ln(c-a).$$

V limiti, ko pošljemo $c\to a$, narašča desna stran v $+\infty$, zato velja isto za levo stran in $\lim_{c\downarrow a}\int_c^d g(x)/(x-a)^p dx$ ne obstaja. Potem pa ne obstaja niti integral $\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$.

Analogen izrek velja za integral $\int_a^b g(x)/(b-x)^p dx$.

ZGLED. Preverimo, kdaj obstaja posplošeni integral $\displaystyle\int_0^1 x^r(1-x)^s dx$. Interval $[0,1]$ razdelimo na pol, in si ogledamo integrala po vsaki polovici posebej. Prvi je oblike:

$$\int_0^{1/2} x^r(1-x)^s dx = \int_0^{1/2}\frac{g(x)}{x^{-r}}dx,$$

kjer je $g(x)=(1-x)^s$ zvezna funkcija na $[0,1/2]$ in $g(0)=1$, zato obstaja po izreku 1 natanko takrat, ko je $r>-1$. Drugi pa je podobne oblike, saj lahko napravimo zamenjavo spremenljivk $t=1-x$, tako da je

$$\int_{1/2}^1 x^r(1-x)^s dx = \int_0^{1/2} t^s(1-t)^r dt = \int_0^{1/2}\frac{g(t)}{t^{-s}}dx,$$

kjer je $g(t)=(1-t)^r$ zvezna funkcija, $g(0)=1$, tako da obstaja po izreku 1 natanko takrat, ko je $s>-1$. Prvotni integral $\displaystyle\int_0^1 x^r(1-x)^s dx$ torej obstaja natanko takrat, ko je $r,s>-1$.

Kadar je singularna točka c, v okolici katere je funkcija f neomejena, znotraj intervala $[a,b]$, moramo paziti, da oba integrala $\int_a^c f(x)dx$ in $\int_c^b f(x)dx$ izračunamo neodvisno. Vsak zase morata obstajati. Včasih pa se zgodi, da ta dva posplošena integrala sicer ne obstajata, obstaja pa naslednja limita:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right).$$

(Okrog singularne točke smo odstranili simetrično epsilonsko okolico.) Tedaj govorimo o t.i. *Cauchyjevi glavni vrednosti* integrala $\int_a^b f(x)dx$ in jo označimo z $v.p.$ pred integralom ($v.p.$ je okrajšava za francoski izraz *valeur principal*, ki pomeni glavno vrednost), torej:

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right).$$

ZGLED. Glavna vrednost integrala $\int_{-1}^2\frac{dx}{x}$ je $\ln 2$, čeprav posplošena integrala $\int_{-1}^0\frac{dx}{x}$ in $\int_0^2\frac{dx}{x}$ ne obstajata. Imamo namreč

$$v.p.\int_{-1}^2\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x} + \int_\epsilon^b\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\epsilon\to 0}(\ln\epsilon + \ln 2 - \ln\epsilon) = \ln 2.$$

(B) Neomejen integracijski interval

Ponovno lahko obravnavamo samo posplošeno integrabilnost funkcije, ki je definirana na desnem poltraku $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, ali na levem poltraku $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Integrabilnost na vsej realni osi $\mathbb{R}$ potem ugotavljamo z razdelitvijo realne osi na dva poltraka (npr. od $-\infty$ do 0 in od 0 do ∞).

DEFINICIJA 3. Če je funkcija f lokalno integrabilna na poltraku $[a, \infty)$ (tj. na vsakem kompaktnem podintervalu $[a, c] \subset [a, \infty)$) oziroma na poltraku $(-\infty, b]$ (tj. na vsakem kompaktnem podintervalu $[c, b] \subset (-\infty, b]$), definiramo

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx \quad \text{oziroma} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Kadar zgornja limita obstaja, spet rečemo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, \infty)$ oziroma $(-\infty, b]$ v *posplošenem smislu* in da je $\int_a^\infty f(x)dx$ oziroma $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ njen *posplošeni* (*nepravi*) ali *izlimitirani* Riemannov integral, oziroma rečemo, da ustrezni integral *konvergira*. Podobno kot prej vidimo, da je tudi ta posplošeni integral linearen funkcional.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}(1 - \mathrm{e}^{-c}) = 1$,
(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty} \ln(c^2+1) = \infty$.

Kadar sta obe integracijski meji neskončni, razdelimo integracijsko območje, tj.realno os, na dva dela, ali pa zapišemo $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{c\to-\infty, d\to\infty} \int_c^d f(x)dx$. Paziti moramo, da vsako limito izračunamo neodvisno od druge. Če namesto tega najprej integriramo samo po simetričnem intervalu $[-c, c]$ in potem pošljemo c v neskončnost, spet govorimo le o glavni vrednosti integrala $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, torej

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \left(\int_{-c}^c f(x)dx \right).$$

V zadnjem zgledu smo videli, da integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ ne konvergira. Obstaja pa njegova glavna vrednost

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty} \left(\int_c^c \frac{2xdx}{x^2+1} \right) = 0.$$

IZREK 3. *Če je funkcija f lokalno integrabilna na poltraku $[a, \infty)$, obstaja $\int_a^\infty f(x)dx$ natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $b > a$, da za poljubna $c, d > b$ velja $|\int_c^d f(x)dx| < \epsilon$.*

Dokaz. Naj bo $F(c) = \int_a^c f(t)dt$ za vsak $c > a$. Potem obstaja $\int_a^\infty f(x)dx$ natanko takrat, ko obstaja limita $\lim_{c\to\infty} F(c)$, to pa je spet res natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $b > a$, da za poljubna $c, d > b$ velja $|F(d) - F(c)| < \epsilon$ (za vsako zaporedje $x_n \to \infty$, je zaporedje $F(x_n)$ konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo). Zadnja neenakost ravno pomeni $|\int_c^d f(x)dx| < \epsilon$.

ZGLED. Pokažimo, da obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Kot posledico drugega izreka o povprečni vrednosti smo že ugotovili, da za poljubna c, d, $1 < c < d$, velja $\displaystyle|\int_c^d \frac{\sin x}{x^p}\,dx| < \frac{2}{c^p}$. Desna stran postane poljubno majhna, če je le c (in s tem d) dovolj velik. Torej obstaja po izreku 3 tudi integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$.

Brez dokazov povejmo, da tudi za posplošeni integral na neomejenem intervalu lahko uporabimo substitucijo (z monotono zvezno odvedljivo funkcijo) ali metodo per partes (kadar na desni strani formule vse limite in posplošeni integrali obstajajo). Pri zamenjavi spremenljivk se neomejeni interval lahko preslika na omejenega (ali obratno), tako da se ene vrste posplošeni integral transformira v posplošeni integral druge vrste.

ZGLED. (a) Če v integral $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ vpeljemo substitucijo $x = \sqrt{t}$, se integracijsko območje ohranja in zaradi $dx = dt/(2\sqrt{t})$ dobimo

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

V bližini točke 0, npr. na intervalu $(0, 1]$ ta integral obstaja (izrek 2). Pravkar pa smo videli, da obstaja tudi na neskončnem poltraku $[1, \infty)$.

(b) Naj bo $p \in \mathbb{R}$ poljuben. V integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ uvedimo substitucijo s padajočo funkcijo $x = 1/t$, tako da je $dx = -dt/t^2$ in

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 t^{p-2}\,dt.$$

Vemo, da integral na desni strani konvergira natanko takrat, ko je $2 - p < 1$ oziroma $p - 2 > -1$. Torej konvergira integral na levi strani natanko takrat, ko je $p > 1$. To bi lahko ugotovili tudi direktno po definiciji posplošenega integrala.

IZREK 4. *Naj bo funkcija g zvezna in omejena na poltraku $[a, \infty)$, kjer je $a > 0$. Potem posplošeni integral*

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$$

(a) *obstaja, če je $p > 1$;*
(b) *ne obstaja, če je $p \leq 1$ in za števili $m, b > 0$ velja $|g(x)| \geq m$ za vsak $x > b$.*

Dokaz. (a) Naj bo $|g(x)| \leq M$ za $x \geq a$ in $p > 1$. Potem je za poljubna $c, d \geq a$ veljavna ocena

$$|\int_c^d \frac{g(x)}{x^p}\,dx| \leq M\int_c^d \frac{dx}{x^p} = M(c^{1-p} - d^{1-p})/(p-1) \leq Mc^{1-p}/(p-1).$$

Torej lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tak $b > a$ (npr. $b > (M/\epsilon(p-1))^{1/(p-1)}$), da je $|\int_c^d \frac{g(x)}{x^p}\,dx| < \epsilon$ za $c, d > b$. Po izreku 3 posplošeni integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}dx$ konvergira.

(b) Naj bo $p \leq 1$ in naj za funkcijo g velja npr. $g(x) \geq m > 0$ za vsak $x > b$. Brez škode lahko predpostavimo, da je hkrati $b > a$ in $b > 1$. Izberimo še poljuben $c > b$. Potem je

$$\int_a^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx = \int_a^b \frac{g(x)}{x^p}\,dx + \int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx,$$

kjer je prvi integral pravi, drugega pa lahko ocenimo:

$$\int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx \geq m\int_b^c \frac{1}{x}\,dx = m(\ln c - \ln b).$$

Desna stran konvergira pri pogoju $c \to \infty$ prosti $+\infty$, zato velja isto za levo stran in limita $\lim_{c\to\infty} \int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ ne obstaja. Torej tudi limita $\lim_{c\to\infty} \int_a^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ ne obstaja, se pravi da ne obstaja integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$.

ZGLED. Z uporabo izreka 4 pokažimo konvergenco integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Težava je zdaj ta, da funkcija $\ln x$ ni omejena na poltraku $[1,\infty)$, ampak (počasi) narašča v neskončnost. Zato jo nekoliko popravimo tako, da pišemo $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}$, ki je gotovo zvezna funkcija na $[1,\infty)$. Poleg tega je $g(x) < h(x)$, kjer je funkcija $h(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$ na poltraku $[1,\infty)$ omejena z $2/e$ (prepričajte se, da ima maksimum enak $2/e$ v točki $x = e^2$). Potem je

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{3/2}}\,dx,$$

zato po izreku 4 integral konvergira.

V ta posplošeni integral lahko uvedemo novo spremenljivko s funkcijo $x = 1/t$, ki je na poltraku $[1,\infty)$ strogo padajoča. Po zamenjavi spremenljivke in preureditvi integrala dobimo

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

Torej obstaja tudi posplošeni integral na desni strani, kjer je integrand (isti kot prej) neomejena funkcija na intervalu $(0,1]$. Če namesto integracijske spremenljivke t pišemo kar x in upoštevamo, da je vsak integral aditivna funkcija integracijskega območja, vidimo, da je

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Če pa prejšnji integral obdelamo še per partes, dobimo še eno zanimivo zvezo:

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{arctg} x\,\ln x\big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Zadnji integral je celo pravi, saj je funkcija na intervalu $(0,1]$ zvezna in omejena.

ZGLED. Kot naslednji zgled uporabe teh izrekov si oglejmo t.i. *Eulerjevo funkcijo gama*, definirano s posplošenim integralom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Poglejmo si, kdaj ta funkcija sploh obstaja, se pravi, kadaj integral konvergira. Na intervalu $(0,\infty)$ je integrand zvezna funkcija (za $s \geq 1$ tudi v točki 0). Po izreku 2 posplošeni integral na intervalu $[0,1]$ obstaja natanko takrat, ko je $s > 0$. Na poltraku $[1,\infty)$ pa definirajmo $g(x) = x^{s+1}e^{-x}$ in ugotovimo, da je tam funkcija omejena (ker je zvezna in zato omejena na vsakem omejenem podintervalu ter ima limito $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ v neskončnosti). Torej po izreku 4 posplošeni integral

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^2}\,dx$$

obstaja za vsak $s > 0$. To pomeni, da je funkcija gama definirana za vsak $s > 0$.

Z integriranjem per partes dobimo za funkcijo gama rekurzivno formulo

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

ki velja za vsak $s > 0$. Res:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \frac{x^s}{s}e^{-x}\big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx = \Gamma(s+1)/s.$$

Ker je $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, iz rekurzivne formule z matematično indukcijo takoj sledi $\Gamma(n)=(n-1)!$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Torej je funkcija gama posplošitev aritmetične (diskretne) funkcije $n\mapsto(n-1)!$ na vsa pozitivna realna števila.

Posplošeni integrali nenegativnih funkcij

Zdaj naj bo $b\in\mathbb{R}$ ali $b=+\infty$. Če je f nenegativna lokalno integrabilna funkcija na $[a,b)$, hitro vidimo, da integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira natanko takrat, ko je funkcija $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ omejena na $[a,b)$. Tedaj je $\int_a^b f(x)dx=\sup_{x\in[a,b)}F(x)$, saj je zdaj funkcija F naraščajoča. Namesto konvergence integrala pišemo kar relacijo $\int_a^b f(x)dx<\infty$. V nasprotnem primeru je $\int_a^b f(x)dx=\infty$.

Za nenegativne funkcije je koristen *primerjalni test*.

IZREK 5. *Če sta f in g lokalno integrabilni funkciji na $[a,b)$ in je $0\le f(x)\le g(x)$ za $a\le x<b$, je v primeru $\int_a^b g(x)dx<\infty$ tudi $\int_a^b f(x)dx<\infty$ in v primeru $\int_a^b f(x)dx=\infty$ tudi $\int_a^b g(x)dx=\infty$.*

Dokaz. Za vsak x je $\int_a^x f(t)dx\le\int_a^x g(t)dt$ in zato tudi $\int_a^b f(x)dx=\sup\int_a^x f(t)dx\le\sup\int_a^x g(t)dt=\int_a^b g(x)dx$, od koder sledi trditev.

ZGLED. (a) Integral $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ smo obravnavali v enem od prejšnjih zgledov. Ker je integrand nenegativen, ga lahko navzgor ocenimo z integralom $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^2}\,dx$, ki ga brez težav izračunamo per partes $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^\infty+\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=1$. Torej je tudi prvotni integral končen.

(b) Pri integralu $I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx$ ocenimo integrand z $\mathrm{e}^{-x^2}\le 1/(1+x^2)$ (uporabili smo neenakost $e^t\ge 1+t$, ki velja za vsak $t\in\mathbb{R}$). Ker sta obe funkciji pozitivni in je $I\le\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, je tudi prvi integral končen.

DEFINICIJA 4. Naj bo realna funkcija f lokalno integrabilna na $[a,b)$. Rečemo, da je f na $[a,b)$ *absolutno integrabilna*, njen posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ pa *absolutno konvergenten*, če je integral $\int_a^b|f(x)|dx<\infty$.

Kadar integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira, integral $\int_a^b|f(x)|dx$ pa ne, rečemo, da je funkcija f samo *pogojno integrabilna* na $[a,b)$ oziroma da je integral $\int_a^b f(x)dx$ samo *pogojno konvergenten.*

Vsaka nenegativna funkcija, za katero obstaja posplošeni integral, je absolutno integrabilna. Zaradi ocene $|\int_c^d f(x)dx|\le\int_c^d|f(x)|dx$ za $a\le c<d<b$ pa vidimo, da iz absolutne kovergence integrala $\int_a^b f(x)dx$ sledi njegova navadna konvergenca. Po izreku 3 namreč v tem primeru za vsak $\epsilon>0$ obstaja tak $b>a$, da za $c,d>b$ velja $\int_c^d|f(x)|dx<\epsilon$. Potem pa velja tudi $|\int_c^d f(x)dx|<\epsilon$.

To vidimo tudi z uporabo primerjalnega testa:

Definirajmo $g(x) = |f(x)| - f(x)$ za $x \in [a,b)$; ker je $0 \le g(x) \le 2|f(x)|$ za vsak $x \in [a,b)$ in velja $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, velja tudi $\int_a^b g(x)dx < \infty$. Odtod sledi tudi obstoj (konvergenca) integrala

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx - \int_a^b g(x)dx.$$

ZGLED. Pokazali smo že, da konvergira integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Za $p > 1$ je ta konvergenca celo absolutna, kar vidimo iz ocene $|\dfrac{\sin x}{x^p}| \le \dfrac{1}{x^p}$ na $[1,\infty)$ in primerjalnega testa. Ni pa absolutna za $p \le 1$. Oglejmo si najprej primer $p = 1$. Tedaj je

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx >$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\ln\frac{n+1}{2}.$$

Odtod vidimo, da je $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty$ in isto velja tudi za integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \infty$ zaradi ocene $\dfrac{|\sin x|}{x^p} \ge \dfrac{|\sin x|}{x}$, veljavne za $p \le 1$ in $x \le 1$.

Torej je za $0 < p \le 1$ konvergenca samo pogojna. Konvergenco spoznamo tudi z integracijo per partes $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \cos 1 - p\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx$. Zaradi primerjave $\dfrac{|\cos x|}{x^{p+1}} \le \dfrac{1}{x^{p+1}}$ je zdaj zadnji integral absolutno konvergenten, saj je $p+1 > 1$, torej konvergenten. Zato obstaja tudi prvotni integral za vsak $p > 0$.

Zadnjo metodo za dokaz konvergence integrala lahko posplošimo.

IZREK 6 (**Dirichletov test**). *Naj bo funkcija f zvezna in naj bo njena primitivna funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ omejena na $[a,b)$, tj. $|F(x)| \le M$ za neko pozitivno konstanto M in vsak $x \in [a,b)$. Zvezno odvedljiva funkcija g pa naj bo taka, da je njen odvod g' absolutno integrabilen na $[a,b)$ in da je $\lim_{x\uparrow b} g(x) = 0$. Potem integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ konvergira.*

Dokaz. Zvezna funkcija fg je lokalno integrabilna na $[a,b)$. Z integracijo po delih dobimo

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Zaradi omejenosti funkcije F in limite $\lim_{x\uparrow b} g(x) = 0$ je $F(x)g(x)|_a^b = 0$. Torej je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = -\int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Zaradi ocene $|F(x)g'(x)| \le M|g'(x)|$ in absolutne integrabilnosti funkcije g', konvergira zadnji integral absolutno. Torej konvergira tudi prvotni integral.

ZGLED. Oglejmo si še enkrat integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Funkcija $f(x) = \sin x$ je zvezna na $[1,\infty)$ in ima omejeno primitivno funkcijo $F(x) = \cos 1 - \cos x$, funkcija $g(x) = 1/x^p$ pa je zvezno odvedljiva in ima (absolutno) integrabilen odvod $g'(x) = -p/x^{p+1}$, saj je zdaj $p+1 > 1$, poleg tega pa je očitno $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Po Dirichletovem testu torej prvotni integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ konvergira.

II. ŠTEVILSKE IN FUNKCIJSKE VRSTE

1. Številske vrste

Poleg zaporedij realnih števil lahko o konvergenci govorimo tudi pri t.i. številskih vrstah. Formalno gledano je *številska vrsta* neskončna vsota realnih števil; toda, kaj to sploh pomeni, saj smo doslej znali izvajati le končno mnogo operacij (seštevanj) naenkrat?

Pojem vrste in njene konvergence

Z namenom, da bi sešteli neskončno mnogo členov danega zaporedja, se pravi vrsto $a_1 + a_2 + ...$, tvorimo zaporedje delnih vsot te vrste. Prva delna vsota je kar prvi člen: $s_1 = a_1$, druga delna vsota je vsota prvih dveh členov: $s_2 = a_1 + a_2$, itd. Vsoti prvih n členov rečemo n*-ta delna vsota* vrste, torej $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

DEFINICIJA 1. Pravimo, da vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *konvergira* in ima *vsoto* s, če konvergira zaporedje delnih vsot s_n in velja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Če vrsta ne konvergira, rečemo, da *divergira.*

Vrsto $a_1 + a_2 + ...$ bomo pogosto na kratko označili z znakom za seštevanje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, njeno n-to delno vsoto pa z $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

ZGLED 1. (a) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$ ne konvergira, saj je $s_n = n$ za vsak n.

(b) Vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1) = 1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + ...$ ima delne vsote enake $s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + ... + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1)$, zato konvergira in ima vsoto 1.

(c) Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ...$ konvergira za $a = 0$ ali $|q| < 1$. V prvem primeru je vsota enaka nič, saj seštevamo same ničelne člene. Če pa $a \neq 0$, so delne vsote, kot se hitro vidi, enake $s_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = a(1-q^n)/(1-q)$ za $q \neq 1$ in $s_n = na$ za $q = 1$. Kot vemo iz razdelka o zaporedjih, konvergira pri pogoju $|q| < 1$ potenca q^n proti nič, zato konvergirajo tedaj delne vsote s_n proti $a/(1-q)$. Za druge vrednosti $|q|$, se pravi za $|q| \geq 1$, pa delne vsote ne konvergirajo.

DEFINICIJA 2. *Cauchyjev kriterij* za konvergenco zaporedij $s_k - s_n \to 0$ $(k, n \to \infty)$ se v primeru vrst glasi (pri pogoju $n \to \infty, n < k$)

$$\sum_{j=n+1}^{k} a_j = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_k \to 0.$$

Natančneje, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, tako da za $k > n \geq m$ velja

$$|\sum_{j=n+1}^{k} a_j| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_k| < \epsilon.$$

Na drug način to povemo takole: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq m$ in za poljuben $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon.$$

V posebnem primeru, ko vzamemo $p = 1$, dobimo *potreben pogoj* za konvergenco: $a_k \to 0$ ($k \to \infty$. Videli bomo, da ta pogoj ni tudi zadosten. Potreben pogoj lahko izpeljemo tudi direktno iz definicije konvergence vrst: $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = 0$.

ZGLED 2. (a) Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ...$ za $a \neq 0$ in $|q| \geq 1$ ne konvergira, ker že potreben pogoj $aq^k \to 0$ $(k \to \infty)$ ni izpolnjen.
(b). Za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + ...$ je potreben pogoj $(1/k \to 0)$ izpolnjen, ni pa izpolnjen Cauchyjev pogoj za konvergenco, saj za vsak n velja $1/(n+1) + 1/(n+2) + ... + 1/(2n) > 1/2$, zato vrsta ne konvergira. Ta vrsta se imenuje *harmonična vrsta.*

Vrste s pozitivnimi členi

Pri vrsti, ki ima same nenegativne člene, so tudi delne vsote $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ nenagativne in naraščajo, saj je $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ za vsak n. Monotono naraščajoče zaporedje s_n pa je konvergentno natanko takrat, ko je navzgor omejeno. Torej velja naslednja trditev.

TRDITEV 1. *Vrsta z nenegativnimi členi je konvergentna natanko takrat, ko so njene delne vsote navzgor omejene.*

Za vrste s pozitivnimi oziroma nenegativnimi členi imamo veliko različnih konvergenčnih kriterijev, ki zagotavljajo konvergenco dane vrste, ne da bi pri tem poznali delne vsote. Samo iz členov dane vrste lahko sklepamo na konvergenco, pri tem pa vsote vrste običajno ne moremo izračunati.

IZREK 1 (o primerjanju). *Imejmo vrsti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...$ *in* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + ...$, *pri čemer naj velja* $0 \leq a_k \leq b_k$ *za vsak* k.
(a) *Če vrsta z večjimi členi* (majoranta) *konvergira, konvergira tudi dana vrsta.*
(b) *Če vrsta z manjšimi členi* (minoranta) *divergira, divergira tudi dana vrsta.*

Dokaz. Ker so členi nenegativni, delne vsote naraščajo, zato je za konvergenco po trditvi 1 potreben in zadosten pogoj, da so tudi omejene. Če so omejene delne vsote majorante, velja isto za vrsto z manjšimi členi. Če pa delne vsote minorante niso omejene, tudi za vrsto z večjimi členi to ni res.

ZGLED 3. (a) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + ...$ konvergira, ker ima konvergentno majoranto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1) = 1 + 1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + ...$ (glej točko (b) prvega zgleda v tem razdelku).
(b) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k} = 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + ...$ divergira, ker ima za minoranto harmonično vrsto $1 + 1/2 + 1/3 + ...$, za katero vemo, da divergira.

S primerjavo lahko pogosto hitro ugotovimo konvergenco vrste s pozitivnimi členi tudi na naslednji način, ki deluje, kadar členi monotono padajo proti nič.

IZREK 2. *Naj bo* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$ *in* $a_k \to 0$ $(k \to \infty)$. *Potem konvergira vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

natanko takrat, ko konvergira "kondenzirana"vrsta

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ...$$

Dokaz. Označimo delne vsote obeh vrst z $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ in $t_k = a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k}$. Za $2^k \leq n < 2^{k+1}$ imamo oceno navzgor $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k} = t_k$, in oceno navzdol $s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}) \geq$

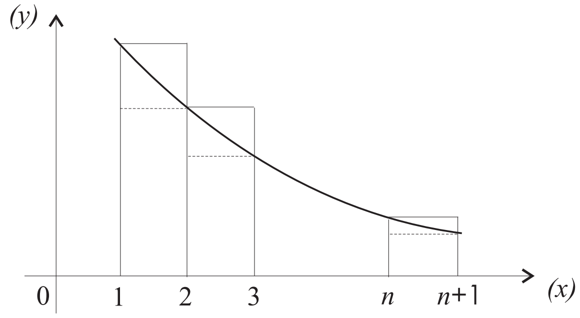
$a_1/2 + a_2 + 2a_4 + ...2^{k-1}a_{2^k} = t_k/2$. Ker torej za vsak $k \geq 0$ in za $2^k \leq n < 2^{k+1}$ velja $t_k/2 \leq s_n \leq t_k$, sta obe vrsti hkrati konvergentni ali divergentni.

ZGLED 4. Vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p = 1 + 1/2^p + 1/3^p + ...$ konvergira za $p > 1$ in divergira za $p \leq 1$. To vidimo tako. Če je $p \leq 0$, členi sploh ne konvergirajo proti nič, potreben pogoj ni izpolnjen in vrsta divergira. Če pa je $p > 0$, so členi vrste pozitivni in monotono padajo proti nič, tako da lahko uporabimo izrek 2. "Kondenzirana"vrsta je zdaj geometrijska vrsta

$$\textstyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{1}{2^{jp}} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-p)j},$$

ki je konvergenta natanko takrat, ko je kvocient $2^{1-p} < 1$ oziroma $1 - p < 0$.

Delna vsota $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k^p$ zadnje vrste je zaradi monotonosti funkcije $f(x) = 1/x^p$ gotovo večja od integrala $\int_1^{n+1} f(x)dx$ in manjša od $1 + \int_1^n f(x)dx$ (glej sliko 18). Ker vemo, da integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira natanko takrat, ko je $p > 1$, velja isto za delne vsote s_n dane vrste. Podobno velja za vsako na poltraku $[1, \infty)$ pozitivno in monotono padajočo funkcijo f.



SLIKA 18

IZREK 3 (Integralski kriterij). *Če so členi vrste enaki $a_k = f(k)$, kjer je f pozitivna zvezna in mnotono padajoča funkcija na poltraku $[1, \infty)$, konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ natanko takrat, kadar konvergira integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$.*

Dokaz. Kot v posebnem primeru je $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$ (glej sliko 18), od koder vidimo, da vrsta in integral konvergirata ali divergirata hkrati.

IZREK 4 (Cauchyjev korenski kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi $a_n \geq 0$ za vsak n.*
(a) *Če obstaja $m \in \mathbb{N}$ in pozitivno število $q < 1$, tako da velja $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ za $n \geq m$, vrsta konvergira.*
(b) *Če velja $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za neskončno mnogo členov, vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Za $n > m$ imamo $a_n \leq q^n$, torej vrsta $\sum_n a_n$ konvergira zaradi primerjanja z geometrijsko vrsto $\sum_n q^n$.

(b) Če za neskončno mnogo členov velja $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ oziroma $a_n \geq 1$, členi ne konvergirajo k nič in vrsta zato ne konvergira.

ZGLED 5. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^n = x + (x/2)^2 + (x/3)^3 + ...$ konvergira za vsak $x > 0$. Imamo namreč $\sqrt[n]{a_n} = x/n \to 0$ in zato $\sqrt[n]{a_n} \leq 1/2$ za vsak dovolj velik n.

POSLEDICA. *Za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi označimo* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Vrsta konvergira, če je* $\alpha < 1$, *in divergira, če je* $\alpha > 1$.

Dokaz. Če je $\alpha < 1$, gotovo obstaja q z lastnostjo $\alpha < q < 1$ in indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $\sqrt[n]{a_n} < q$. Če pa je $\alpha > 1$, je tudi $\sqrt[n]{a_n} > 1$ za neskončno mnogo členov. V obeh primerih sledi konvergenca oziroma divergenca vrste iz izreka 4.

Najlažje je uporabiti to posledico, kadar obstaja limita $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. V primeru $\alpha < 1$ dobimo konvergenco, v primeru $\alpha > 1$ divergenco, v primeru $\alpha = 1$ pa nam korenski kriterij ne pove ničesar.

ZGLED 6. Za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^p$, kjer je $x > 0$ in $p \in \mathbb{R}$, je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} x/\sqrt[n]{n^p} = x$, zato vrsta konvergira za $x < 1$ in divergira za $x > 1$ ne glede na to, kakšen je p. Pri $x = 1$ se vrsta glasi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$; zanjo korenski kriterij odpove, vendar vemo od prej, da ta vrsta konvergira za $p > 1$ in divergira pri $p \leq 1$.

IZREK 5. (D'Alembertov kvocientni kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi* $a_n > 0$ *za vsak* n.
(a) *Če obstajata* $m \in \mathbb{N}$ *in pozitivno število* $q < 1$, *tako da velja* $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ *za vsak* $n \geq m$, *vrsta konvergira.*
(b) *Če velja* $a_{n+1}/a_n \geq 1$ *za vsak* $n \geq m$, *vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Pri danem pogoju velja $a_{m+1} \leq q a_m$, $a_{m+2} \leq q^2 a_m$ itd., se pravi $a_{m+k} \leq q^k a_m$ za vsak $k \geq 0$. Primerjava z geometrijsko vrsto pove, da vrsta s členi a_n, $n \geq m$ konvergira, torej konvergira tudi prvotna vrsta.
(b) Zdaj imamo $a_{m+k} \geq a_m > 0$ za vsak $k \geq 0$ in zato členi a_n ne konvergirajo k 0, vrsta je divergentna.

V izreku ni dovolj, da velja le $a_{n+1}/a_n < 1$, kot lahko npr. vidimo iz zgleda (divergentne) harmonične vrste, kjer je $a_n = 1/n$ in $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) < 1$ za vsak n.

ZGLED 7. Vrsta $\sum_{m=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + ...$ konvergira za $0 < x < 1$ in divergira za $x \geq 1$. Res! Splošni člen vrste je namreč $a_n = n x^{n-1}$, zato je $a_{n+1}/a_n = \frac{n+1}{n} x$, kar konvergira proti x. Če je $x < 1$, lahko vzamemo $q = (x+1)/2$. Za vsak dovolj velik n je $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ in vrsta konvergira. Če pa je $x \geq 1$, je $a_{n+1}/a_n = \frac{n+1}{n} x > 1$, zato vrsta divergira. (To vidimo tudi iz dejstva, da tedaj členi ne konvergirajo proti nič.)

POSLEDICA. *Za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi označimo* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *in* $\beta = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potem vrsta konvergira, če je* $\alpha < 1$, *in divergira, če je* $\beta > 1$.

Dokaz. Če je $\alpha < 1$, obstaja q z lastnostjo $\alpha < q < 1$ in indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $a_{n+1}/a_n < q$ in po izreku 5 vrsta konvergira. Če pa je $\beta > 1$, obstaja tak m, da je $a_{n+1}/a_n > 1$ za $n \geq m$ in po izreku 5 vrsta divergira.

Opomba. Dejstvo, da je npr. limita $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$, še nič ne pove o konvergenci vrste, kot lahko spoznamo iz primerov vrst $\sum_n \frac{1}{n}$ in $\sum_n \frac{1}{n^2}$.

TRDITEV 2. *Za vsako zaporedje* (a_n) *s pozitivnimi členi velja*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dokaz. Srednja neenakost je trivialna, leva sledi iz desne, zato dokažimo samo desno. Označimo $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ in izberimo $q > \alpha$, tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ za vsak $n \geq m$. Za vsak $k \geq 0$ je torej $\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{m+k}}{a_{m+k-1}} < q^k$ oziroma $a_{m+k} \leq q^k a_m$. Drugače rečeno, $a_n \leq a_m q^{-m} q^n$, se pravi $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_m q^{-m}} \cdot q$ oziroma $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Ker velja to za vsak $q > \alpha$, imamo tudi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$, kar je bilo treba dokazati.

Iz trditve 2 vidimo, da je Cauchyjev korenski kriterij močnejši od D'Alembertovega kvocientnega kriterija v naslednjem smislu. Vedno, ko kvocientni kriterij napove konvergenco, lahko konvergenco ugotovimo tudi s korenskim kriterijem; kadar pa korenski kriterij odpove, odpove tudi kvocientni. Poleg tega obstajajo primeri, ko lahko konvergenco ugotovimo s korenskim kriterijem, medtem ko kvocientni kriterij o konvergenci nič ne pove.

ZGLED 8. Za vrsto $1/2 + 1/3 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/2^4 + 1/3^4 + \ldots$ je $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/3^n} = 1/\sqrt{3}$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/2^n} = 1/\sqrt{2}$ in $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(3/2)^n = +\infty$. Torej lahko ugotovimo konvergenco s korenskim kriterijem, s kvocientnim pa ne.

Kadar kvocientni kriterij odpove, je pogosto pametno uporabiti naslednji izboljšani konvergenčni kriterij.

IZREK 6 (Raabejev kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi, torej $a_n > 0$ za vsak n.*
(a) *Če obstajata $m \in \mathbb{N}$ in pozitivno število $q > 1$, tako da velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \geq q > 1$ za vsak $n \geq m$, vrsta konvergira.*
(b) *Če velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za vsak $n \geq m$, vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Pišimo $q = 1+r$, kjer je $r > 0$, in preoblikujmo pogoj $n(a_n/a_{n+1}-1) \geq q > 1$ v pogoj $na_n - (n+1)a_{n+1} \geq ra_{n+1}$ za $n \geq m$. Označimo $b_{n+1} = na_n - (n+1)a_{n+1}$ in takoj ugotovimo, da ima vrsta $b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots$ zaradi ocene $b_{n+1} \geq ra_{n+1} > 0$ pozitivne člene in navzgor omejene delne vsote $s_k = b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_{m+k} = ma_m - (m+k)a_{m+k} \leq ma_m$, tako da je konvergentna. Potem pa je zaradi ocene $ra_{n+1} \leq b_{n+1}$ za $n \geq m$ konvergentna tudi vrsta $\sum_n a_n$.

(b) Če velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za vsak $n \geq m$, je $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$ za $n \geq m$, torej $(m+k)a_{m+k} \geq ma_m$ za vsak $k \geq 0$ oziroma $a_{m+k} \geq ma_m/(m+k)$ za $k \geq 0$. Na desni strani so členi z ma_m pomnožene harmonične vrste, zato po izreku 1 o primerjanju vrst tudi vrsta $\sum_n a_n$ divergira.

POSLEDICA. *Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnimi členi označimo*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \ n(a_n/a_{n+1} - 1) \quad \textit{in} \quad \beta = \liminf_{n\to\infty} \ n(a_n/a_{n+1} - 1).$$

Potem vrsta konvergira, če je $\beta > 1$, in divergira, če je $\alpha < 1$.

Dokaz. V prvem primeru obstaja tak $q > 1$ in indeks m, da je $n(a_n/a_{n+1} - 1) \geq q > 1$ za $n \geq m$, v drugem primeru pa tak indeks m, da je $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za $n \geq m$. Obakrat rezultat sledi iz izreka 6.

Najlažje je ugotoviti konvergenco, kadar obstaja limita $\alpha = \lim_{n\to\infty} \ n(a_n/a_{n+1} - 1)$. Tedaj vrsta konvergira, če je $\alpha > 1$ in divergira, če je $\alpha < 1$. Kadar je $\alpha = 1$, tudi Raabejev kriterij odpove.

ZGLED 9. Za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, smo že ugotovili, kdaj konvergira. Preskusimo na njej še Raabejev kriterij. Ker je v tem primeru

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = \lim_{n\to\infty} n((1 + 1/n)^p - 1) = \lim_{h\to 0} ((1 + h)^p - 1)/h = f'(1),$$

kjer je $f(x) = x^p$, imamo zaradi $f'(x) = px^{p-1}$ in zato $\alpha = f'(1) = p$. Vidimo, da vrsta konvergira za $p > 1$ in divergira za $p < 1$. Kriterij nam ničesar ne pove, kadar je $p = 1$; tedaj pa je vrsta harmonična, torej divergentna.

Absolutno in pogojno konvergentne vrste

DEFINICIJA 3. Rečemo da konvergira vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *absolutno*, če konvergira vrsta iz absolutnih vrednosti $|a_1|+|a_2|+....$ Če to ni res, rečemo, da vrsta konvergira le *pogojno*.

TRDITEV 3. *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. To vidimo iz trikotniške neenakosti. Naj bo $m < n$. Tedaj je $|a_{m+1} + ... + a_n| \le |a_{m+1}| + ... + |a_n|$. Če vrsta absolutno konvergira, je desna stran te neenakosti poljubno majhna. Potem pa velja isto za levo stran. Vrsta torej zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato je konvergentna.

TRDITEV 4. *Če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...$ absolutno, zaporedje (b_n) pa je omejeno, konvergira absolutno tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ...$*

Dokaz. Naj bo $|b_n| \le M$ za vsak n za neko konstanto $M > 0$. Zaradi ocene $|a_n b_n| \le M|a_n|$, veljavne za vsak n, lahko uporabimo primerjalni test za vrste s pozitivnimi členi (izrek 1).

Poseben primer so t.i. *alternirajoče* vrste, kjer predznaki členov alternirajo: imamo $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$, kjer so zdaj vsi koeficienti $a_i > 0$.

IZREK 7 (Leibnizov kriterij). *Alternirajoča vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ konvergira, če je zaporedje (a_n) padajoče in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dokaz. Oglejmo si $2n$-to delno vsoto $s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$. Očitno je zaporedje sodih delnih vsot (s_{2n}) naraščajoče in omejeno z $|s_{2n}| \le a_1$, zato je konvergentno proti nekemu številu s. Zaporedje lihih delnih vsot s_{2n+1} prav tako konvergira proti s, saj je $s_{2n+1} = s_{2n}+a_{2n+1}$. Potem pa tudi celo zaporedje delnih vsot s_n konvergira proti s.

ZGLED 10. Vrsta $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ konvergira po zgornjem izreku, saj alternira in njeni členi po absolutni vrednosti monotono padajo in konvergirajo proti nič. Vendar, kot smo videli, ta konvergenca ni absolutna; vrsta iz absolutnih vrednosti je namreč harmonična in divergira.

Izračunajmo vsoto konvergentne vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Zanjo je

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) =$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}.$$

Oglejmo si določeni integral $\int_1^2 dx/x$ in njegovo spodnjo Darbouxovo vsoto $s(f;D) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$ za funkcijo $f(x) = 1/x$ in enakomerno delitev $D = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, kjer je $x_j = 1 + j/n$ za $j = 0, 1, 2, ..., n$, intervala $[1, 2]$ na n enako dolgih podintervalov. Potem je $\Delta x_j = 1/n$ za vsak j in

$$s(f;D) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(1+j/n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j} = s_{2n}$$

ravno $2n$-ta delna vsota naše vrste. Ker vemo, da spodnje Darbouxove vsote konvergirajo proti določenemu integralu $\int_1^2 dx/x = \ln x|_1^2 = \ln 2$, vidimo odtod, da je tudi vsota konvergentne vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ enaka $\ln 2$.

Opomba. Za konvergenco alternirajoče vrste ni dovolj, da členi konvergirajo proti nič. Če absolutne vrednosti členov *ne padajo* proti nič, vrsta ne konvergira nujno. Zgled je npr. vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{[(n+3)/2]+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + ...,$$

ki ni konvergentna, kar spoznamo tako, da združimo po dva člena in dobimo dvojno harmonično vrsto. Če pa izberemo malo bolj enostaven podoben primer, vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[(n+3)/2]+(-1)^n} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3+1} + ...,$$

katere členi alternirajo in konvergirajo proti nič, po absolutni vrednosti pa ne padajo, dobimo z združevanjem po dveh členov konvergentno vrsto

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1},$$

kar ugotovimo npr. po integralskem ali po Raabejevem kriteriju. Vidimo torej, da je Leibnizov kriterij (izrek 7) sicer zadosten, ne pa tudi potreben pogoj za konvergenco alternirajoče vrste.

Izrek 7 je poseben primer naslednjega izreka, ki je diskretna analogija *Dirichletovega testa* za posplošeni integral (izrek 6 v 4. razdelku 1. poglavja).

IZREK 8. *Naj bo (a_n) padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito nič, zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ...$ z realnimi členi pa naj bo omejeno. Potem je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Dokaz. Delne vsote vrste $\sum_n a_n b_n$ označimo z s_n, delne vsote vrste $\sum_n b_n$ označimo z t_n. Zaradi omejenosti slednjih obstaja tak $M > 0$, da je $|t_n| \le M$ za vsak n. Naj bo $m < n$; izračunajmo in ocenimo razliko dveh dovolj poznih delnih vsot za vrsto $\sum_n a_n b_n$. Najprej dobimo

$$s_n - s_m = a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + ... + a_n b_n =$$

$$a_{m+1}(t_{m+1}-t_m) + a_{m+2}(t_{m+2}-t_{m+1}) + ... + a_n(t_n - t_{n-1}) =$$

$$-a_{m+1}t_m + (a_{m+1}-a_{m+2})t_{m+1} + (a_{m+2}-a_{m+3})t_{m+2} + ... + (a_{n-1}-a_n)t_{n-1} + a_n t_n,$$

odtod pa oceno $|s_n - s_m| \le$

$$a_{m+1}|t_m| + (a_{m+1}-a_{m+2})|t_{m+1}| + (a_{m+2}-a_{m+3})|t_{m+2}| + ... + (a_{n-1}-a_n)|t_{n-1}| + a_n|t_n| \le$$

$$2Ma_{m+1}.$$

Če pošljemo $m \to \infty$ (in s tem tudi $n \to \infty$), konvergira desna stran (in s tem tudi leva stran) proti nič. To pomeni, da je zaporedje delnih vsot (s_n) Cauchyjevo, torej konvergentno.

ZGLED 11. (a) V posebnem primeru, ko vzamemo $b_n = (-1)^{n-1}$, tako da so delne vsote t_n enake 1 (če je n liho število) in 0 (če je n sodo število), torej omejene, dobimo Leibnitzov kriterij za alternirajoče vrste: če je $a_k > 0$ in $a_k \searrow 0$ monotono padajoče, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergira.

(b) V posebnem primeru, ko izberemo $b_n = \sin nx$, so delne vsote t_n za vrsto $\sum_n b_n$ tudi omejene, saj se lahko hitro prepričamo, da je $t_n = 0$, če je $\sin x = 0$ in

$$t_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \sin(n+1)x/2 \sin(nx/2)/\sin(x/2),$$

če je $\sin x \neq 0$, ter je zato v zadnjem primeru $|t_n| \leq 1/|\sin(x/2)|$. Po izreku 8 je potem vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$$

vedno konvergentna, če je le a_n padajoče zporedje pozitivnih števil z limito nič.

Podobno dokažemo, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ...$$

konvergentna, razem morda za $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, če je le a_n padajoče zporedje pozitivnih števil z limito nič.

Opomba. Če predpostavke izreka 8 niso izpolnjene, tudi sklep ne velja. Kot zgled lahko vzamemo npr. naslednje pare zaporedij: (i) $a_n = 1,\ b_n = (-1)^n$, (ii) $a_n = (-1)^n/n,\ b_n = (-1)^n$, (iii) $a_n = 1/n,\ b_n = 1$. V nobenem od teh primerov vrsta $\sum_n a_n b_n$ ne konvergira.

Računske operacije z vrstami

Dve vrsti seštejemo (odštejemo) tako, da seštejemo (odštejemo) istoležne člene. Podobno pomnožimo vrsto s konstanto tako, da s to konstantno pomnožimo vsak člen vrste. Torej je npr. *vsota* vrst $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ enaka vrsti $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ in produkt vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s konstanto c enaka vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$.

Poskušajmo ugotoviti, kako je s konvergenco vsote dveh konvergentnih vrst in s konvergenco produkta konvergentne vrste s konstanto.

TRDITEV 5. *Če sta vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni in imata vsoti A oziroma B, je konvergenta tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ in ima vsoto $A + B$. Prav tako je konvergentna tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ in ima vsoto cA. Če sta prvotni vrsti absolutno konvergentni, sta absolutno konvergentni tudi dobljeni vrsti.*

Dokaz. Označimo delni vsoti vrst z A_n in B_n, torej $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ in $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Potem je $A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ delna vsota sestavljene vrste in zato velja tudi $\lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B$. Podobno je $cA_n = \sum_{k=1}^{n} ca_k$ in $\lim_{n\to\infty} cA_n = cA$. Absolutna konvergenca za vsoto dveh vrst sledi iz trikotniške neenakosti $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ in primerjalnega kriterija za vrste s pozitivnimi členi. Absolutna konvergenca za produkt vrste s konstanto ugotovimo še lažje: $\sum_k |ca_k| = |c| \sum_k |a_k|$.

Opomba. Ko smo že pri oznakah $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ in $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ za delne vsote dveh vrst, povejmo, da velja naslednja diskretna analogija formule za integracijo po delih.

Sumacija po delih: Za vsak m je

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n b_{n+1} = A_m B_{m+1}.$$

Dokaz. Postavimo $A_0 = 0$. Potem je

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n b_{n+1} = \sum_{n=1}^{m}(A_n - A_{n-1})B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n(B_{n+1} - B_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{m} A_n B_n - \sum_{n=1}^{m} A_{n-1} B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n B_{n+1} - \sum_{n=1}^{m} A_n B_n = A_m B_{m+1}.$$

Kot posledico trditve 5 si oglejmo naslednji izrek, ki ga včasih imenujejo tudi *Abelov test* za konvergenco.

IZREK 9. *Naj bo* (a_n) *monotono konvergentno zaporedje pozitivnih števil, vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ...$ *pa naj konvergira. Potem je konvergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Dokaz. Naj bo npr. zaporedje (a_n) padajoče in naj konvergira proti številu a. Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vsota dveh konvergentnih vrst (prva vrsta konvergira po izreku 8, saj konvergirajo členi $a_n - a$ monotono proti nič, delne vsote vrste $\sum_k b_k$ pa so seveda omejene), torej tudi sama konvergentna vrsta.

S seštevanjem vrst nismo imeli težav, množenje pa ni tako preprosto. Končni vsoti zmnožimo tako, da vsak člen prve vsote zmnožimo z vsakim členm druge vsote in dobljene produkte seštejemo. Ali se da to pravilo razširiti tudi na neskončne vsote, tj. na vrste?

Najprej definirajmo, kaj bomo šteli za *produkt* dveh vrst.

DEFINICIJA 4. Pri danih vrstah $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ označimo za vsak $n = 0, 1, 2, ...$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vrsti $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ rečemo (Cauchyjev) *produkt* vrst $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

S konvergenco produkta so še večje težave. Če je npr. $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ in če vemo, da $A_n \to A$ in $B_n \to B$, nasploh ni jasno, zakaj bi potem konvergiral tudi C_n in, če že konvergira, zakaj bi konvergiral ravno proti AB. Naslednji zgled pokaže, da produkt dveh konvergentnih vrst lahko divergira.

ZGLED 12. Imejmo konvergentno (alternirajočo) vrsto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + ...$$

in izračunajmo njen kvadrat (produkt vrste s samo seboj). Hitro se lahko prepričamo, da je po formuli iz definicije 4

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Ker je $(n-k+1)(k+1) = (n/2+1)^2 - (n/2-k)^2 \le (n/2+1)^2$, dobimo odtod

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2.$$

Potreben pogoj $c_n \to 0$ za konvergenco vrste $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ni izpolnjen, vrsta ne konvergira.

Naslednji izrek, ki ga je dokazal Mertens, to pomanjkljivost odpravlja, vendar potrebujemo absolutno konvergenco vsaj ene od obeh vrst.

IZREK 10. *Denimo, da vrsta* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergira absolutno in da je njena vsota enaka* A*, vrsta* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergira in ima vsoto* B *ter je* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *za vsak* $n = 0, 1, 2, ...$ *Potem tudi vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergira in ima vsoto* $C = AB$.

Dokaz. Označimo $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ in $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$. Potem je

$$C_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ... + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0) = a_0B_n + a_1B_{n-1} + ... + a_nB_0 =$$

$$a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + ... + a_n(B_0 - B) + A_nB = s_n + A_nB,$$

kjer je $s_n = a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + ... + a_n(B_0 - B)$. Naj bo $s = \sum_{k=0}^\infty |a_k|$ in pokažimo, da $s_n \to 0$. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da je $|B_n - B| < \epsilon$ za vsak $n \geq m$. Torej je za vsak $n \geq m$

$$|s_n| \leq |a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + |a_{n-m-1}(B_{m+1} - B) + ... + a_0(B_n - B)| \leq$$

$$|a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + |a_{n-m-1}||B_{m+1} - B| + ... + |a_0||B_n - B| \leq$$

$$|a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + s\epsilon.$$

Pošljimo $n \to \infty$ pa dobimo $\limsup_{n\to\infty} |s_n| \leq s\epsilon$. To velja za vsak $\epsilon > 0$, torej je $\limsup_{n\to\infty} |s_n| = 0$, se pravi, da s_n konvergira proti nič. Potem pa je tudi

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} A_nB = AB.$$

Kasneje bomo (kot posledico Abelovega izreka iz teorije potenčnih vrst) pokazali, da velja $C = AB$ tudi brez absolutne konvergence ene od vrst, vendar moramo v tem primeru vedeti, da poleg konvergence vrst $\sum_k a_k$ proti A in $\sum_k b_k$ proti B, konvergira tudi vrsta $\sum_k c_k$, s členi $c_n = \sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$, proti C.

Preureditev vrst

Če v končni vsoti spremenimo vrstni red členov, dobimo zaradi komutativnosti seštevanja realnih števil isti rezultat. Kako pa je s tem pri neskončnih vrstah? Če spremenimo vrstni red samo končno mnogo členom, to na konvergenco in končno vsoto vrste ne vpliva. Kaj pa če spremenimo položaj neskončno mnogo členov, če torej vrsto popolnoma preuredimo? Najprej moramo povedati, kaj razumemo s tem pojmom.

DEFINICIJA 5. Naj bo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poljubna bijekcija (permutacija) naravnih števil. Potem imenujemo vrsto $\sum_{k=1}^\infty a_{\pi(k)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + ...$ *preureditev dane vrste.*

Ker so delne vsote preurejene vrste lahko popolnoma druga števila kot delne vsote prvotne vrste, ni jasno, ali iz konvergence prvotne vrste sledi tudi konvergenca preurejene vrste. Vprašanje je tudi, ali ima preurejena vrsta, tudi če konvergira, isto vsoto kot prvotna. Nasploh slednje ni res, kot pove naslednji preprost zgled.

ZGLED 13. Vemo, da ima alternirajoča vrsta $1-1/2+1/3+...$ vsoto $\ln 2$. Pa preuredimo to vrsto tako, da bomo po vrsti zapisovali en pozitivni člen in dva zaporedna negativna člena. Preurejena vrsta se torej glasi: $1-1/2-1/4+1/3-1/6-1/8+....$ Potem je delna vsota te vrste z indeksom $n = 3m$ enaka

$$s_{3m} = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}) =$$

$$\frac{1}{2}[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m})].$$

Torej je $\lim_{m\to\infty} s_{3m} = (\ln 2)/2$ in isto velja za $s_{3m+1} = s_{3m} + 1/(2m+1)$ in za $s_{3m+2} = s_{3m+1} - 1/(4m+2)$. Torej preurejena vrsta tudi konvergira, vendar ima vsoto $(\ln 2)/2$, pol manjšo od vsote prvotne vrste.

Vrsta iz zadnjega zgleda je bila samo pogojno konvergentna. Pri absolutno konvergentnih vrstah pa preureditev (zamenjava vrstnega reda členov) ne vpliva niti na konvergenco niti na vrednost vsote.

IZREK 11. *Pri absolutno konvergentni vrsti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je za vsako permutacijo* π *naravnih števil tudi preurejena vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *konvergentna in ima isto vsoto.*

Dokaz. Delne vsote vrst $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ označimo z s_n oziroma s'_n. Zaradi absolutne konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja za vsak $\epsilon > 0$ tak indeks m, da za $n \geq m$ velja $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$. Izberimo tako velik p, da je $\{1, 2, ..., m\} \subset \{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(p)\}$. Če je $n \geq p$ se v razliki delnih vsot $s_n - s'_n$ krajšajo vsi členi $a_1, a_2, ..., a_m$, zato je $|s_n - s'_n| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$. To pomeni, da $s_n - s'_n \to 0$; zato konvergira tudi zaporedje delnih vsot preurejene vrste s'_n in velja $\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Videli smo, da za pogojno konvergentne vrste podoben sklep ne velja. Celo več, pri teh vrstah lahko s primerno preureditvijo dosežemo, da vrsta več ne konvergira, ali pa da konvergira in ima za vsoto poljubno vnaprej izbrano realno število.

IZREK 12 (Riemann). *Če je* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *pogojno konvergentna vrsta, obstaja za vsak* $t \in \mathbb{R}$ *taka permutacija* π *naravnih števil, da ima preurejena vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *vsoto* t.

Dokaz. Pogojno konvergentna vrsta ima neskončno mnogo pozitivnih in neskončno mnogo negativnih členov, sicer bi bila njena konvergenca absolutna. Zapišimo njeno n-to delno vsoto v obliki $s_n = p_n - q_n$, kjer pomeni p_n vsoto pozitivnih in q_n vsoto absolutnih vrednosti negativnih členov v s_n. Za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ iz absolutnih vrednosti členov je n-ta delna vsota enaka $S_n = p_n + q_n$. Zaradi pogojne konvergence konvergirajo delne vsote s_n proti neki limiti s, medtem ko delne vsote S_n vrste iz absolutnih vrednosti členov naraščajo v neskončnost. Odtod sledi, da tudi števila p_n in q_n naraščajo v neskončnost.

Naj bo $b_1 + b_2 + ...$ vrsta iz pozitivnih členov prvotne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, tako da je $p_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ njena n-ta delna vsota, in $c_1 + c_2 + ...$ vrsta iz absolutnih vrednosti negativnih členov vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z n-to delno vsoto $q_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$. Kljub divergenci teh dveh vrst pa velja $b_k \to 0$ in $c_k \to 0$, saj vrsta s členi a_k konvergira. Naj bo npr. $t > 0$ poljubno pozitivno število. in naj bo n najmanjši indeks, pri katerem je $p_n > t$. Zaporedje $p_n - q_1, p_n - q_2, ...$ je padajoče in divergira proti $-\infty$. Naj bo m najmanjši indeks, pri katerem je $p_n - q_m < t$. Sedaj prištejmo izrazu $p_n - q_m$ toliko nadaljnjih zaporednih členov vrste $\sum_k b_k$, da bo skupna vsota večja od t, nato pa isto ponovimo z odštevanjem nadaljnjih zaporednih členov vrste $\sum_k c_k$ itd. Na koncu dobimo neskončno vrsto, v kateri so zajeti (v spremenjenem vrstnem redu) vsi členi tako vrste $\sum_k b_k$ kot vrste $\sum_k c_k$, torej tudi vrste $\sum_k a_k$. Ker se členi b_k in c_k manjšajo proti nič, se dovolj pozna delna vsota tako dobljene preurejene vrste razlikuje od števila t tako malo, kot želimo. Torej preurejena vrsta konvergira in ima vsoto t.

Opomba. V izreku 12 je t lahko tudi $\pm\infty$ (v tem primeru preurejena vrsta divergira). To dokažemo enako kot zgoraj, le da npr. na j-tem koraku prištejemo toliko pozitivnih členov b_k, da pridemo čez j, nato pa odštejemo toliko pozitivnih členov c_k, da spet pademo pod j. Ker je $j = 1, 2, 3, ...$, pridemo v limiti v $+\infty$ (ali v $-\infty$, če zamenjamo vlogo b_k in c_k in na j-tem koraku skušamo doseči število $-j$).

Vrste s kompleksnimi členi

Doslej smo obravnavali realna zaporedja in vrste z realnimi členi. Ampak prav enako bi lahko študirali tudi konvergenco zaporedij in vrst s kompleksnimi členi.

Konvergenca zaporedja (c_n) s kompleksnimi členi je enaka kot v realnem. Kompleksno število c je limita tega zaporedja, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $|c_k - c| < \epsilon$. Razlika je le ta, da tu uporabimo absolutno vrednost za kompleksna števila. Če je npr. $c_k = a_k + ib_k$, $c = a + ib$ kanonski zapis števil c_k in c, je $|c_k - c| = \sqrt{|a_k - a|^2 + |b_k - a|^2}$. Odtod tudi vidimo, da $c_k \to c$ natanko takrat, ko $a_k \to a$ in $b_k \to b$.

Pri vrstah je čisto podobno: vrsta s kompleksnimi členi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot s_n, ki so zdaj tudi kompleksna števila. Vrsta konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ iz absolutnih vrednosti členov. S kanonskim zapisom členov $\sum_k c_k = \sum_k a_k + i \sum_k b_k$, kjer so zdaj členi a_k in b_k realni, vidimo, da vrsta $\sum_k c_k$ konvergira (absolutno) natanko takrat ko konvergirata (absolutno) vrsti $\sum_k a_k$ in $\sum_k b_k$. Za absolutno konvergenco vrste s kompleksnimi členi lahko uporabimo iste kriterije kot za absolutno konvergenco vrst z realnimi členi.

2. Funkcijska zaporedja in funkcijske vrste

V tem razdelku si bmo ogledali pomembne lastnosti v zvezi z zaporedji funkcij, ki konvergirajo proti neki funkciji. Raziskali bomo, kako zveznost, integrabilnost ali odvedljivost posameznih členov vpliva na zveznost, integrabilnost ali odvedljivost limitne funkcije. Kasneje bomo te ugotovitve uporabili tudi pri vrstah, katere členi so posebne funkcije.

Imejmo zdaj zaporedje realnih funkcij f_n, ki so vse definirane na skupni podmnožici $S \subset \mathbb{R}$. Na kratko govorimo o funkcijskem zaporedju (f_n).

DEFINICIJA 1. Rečemo, da funkcijsko zaporedje (f_n) *konvergira po točkah* proti funkciji f, če za vsak $x \in S$ zaporedje realnih števil $(f_n(x))$ konvergira proti številu $f(x)$, tj. če za vsak $x \in S$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ker je pri vsakem $x \in S$ limita $f(x)$ natančno določena, dobimo na ta način spet neko realno funkcijo f, definirano na podmnožici $S \subset \mathbb{R}$.

ZGLED 1. (a) $f_n(x) = x^n$, $S = [0, 1]$; Za $0 \le x < 1$ velja $f_n(x) = x^n \to 0$, za $x = 1$ pa je $f_n(x) = 1$. Torej konvergira zaporedje teh funkcij na množici S po točkah proti funkciji f, za katero velja $f(x) = 0$ za $0 \le x < 1$ in $f(1) = 1$.

(b) $f_n(x) = 2nx/(1 + n^2x^2)$, $S = \mathbb{R}$; ni težko videti, da konvergira zdaj funkcijsko zaporedje (f_n) na vsej realni osi po točkah proti funkciji $f(x) = 0$.

(c) $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$; tudi zdaj velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(d) Naj bo $f_n(x)$ enako n^2x za $0 \le x < 1/n$, $n^2(2/n - x)$ za $1/n \le x < 2/n$ in 0 za $x \ge 2/n$. Potem je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za vsak $x \ge 0$, saj je $f_n(0) = 0$ za vsak n, pri poljubnem $x > 0$ pa je $f_n(x) = 0$, če je le $1/n < x$ oziroma $n > 1/x$.

Enakomerna konvergenca funkcijskih zaporedij

Konvergenca funkcijskega zaporedja (f_n) po točkah proti funkciji f pomeni, da za vsak $x \in S$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \ge m$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Indeks m je tu odvisen od števila ϵ in tudi od točke $x \in S$. Konvergenca po točkah je najpreprostejša vrsta konvergence funkcij. Zahtevnejša pa je naslednja definicija.

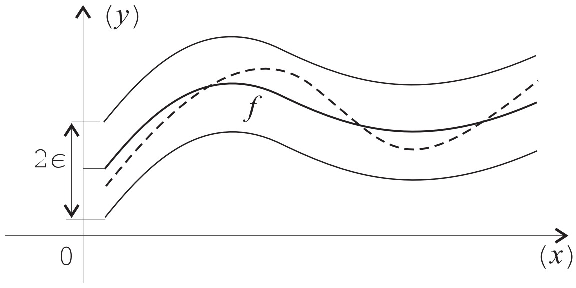
DEFINICIJA 2. Rečemo, da funkcijsko zaporedje (f_n) konvergira na podmnožici S *enakomerno* proti funkciji f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \ge m$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ za vse $x \in S$.

V tej definiciji pa je indeks m odvisen samo od števila ϵ in nič od točke x. Kadar gre za enakomerno konvergenco je isti m je dober za vsak $x \in S$. Drugače rečeno, če npr. pri nekem $\epsilon > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo tako točko $x_n \in S$, da velja $|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \epsilon$ (tj. če obstaja zaporedje točk (x_n) z lastnostjo, da $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne konvergira proti 0), konvergenca ne more biti enakomerna.

ZGLED 2. Konvergenca zaporedja (f_n) iz točke (b) v zgledu 1 ni enakomerna. Če je npr. $\epsilon = 1$, je za vsak n izpolnjena enakost $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$ in $f_n(1/n) \not\to 0$.

Prav tako ni enakomerna konvergenca iz točke (a) istega zgleda niti na podmnožici $[0,1)$, saj pri $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ zaporedje $f_n(x_n) = 1/2$ ne konvergira proti nič, ali iz točke (d), saj je tedaj $f_n(1/n) = n$.

Pač pa je konvergenca zaporedja iz točke (c) zgleda 1 enakomerna na vsej realni osi. Velja namreč ocena $|f_n(x) - f(x)| = |\sin nx|/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{n}$. Ker za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $m > 1/\epsilon^2$, da je $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{m} < \epsilon$ za $n \geq m$, velja za take indekse n tudi $|\sin nx|/\sqrt{n} < \epsilon$ in to za vsak $x \in \mathbb{R}$.



SLIKA 19

Opomba. 1. Geometrijsko pomeni enakomerna konvergenca dejstvo, da ležijo v epsilonskem pasu $\{(x,y);\ x \in S,\ f(x) - \epsilon < y < f(x) + \epsilon\}$ okrog grafa limitne funkcije f grafi vseh funkcij f_n z indeksom n, večjim od nekega indeksa m.

2. Dejstvo, da je $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ za vsak $x \in S$, pomeni, da je $\sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, zato lahko enakomerno konvergenco definiramo tudi tako: za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \geq m$ velja $\sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

DEFINICJA 3. Funkcijsko zaporedje (f_n) je *enakomerno Cauchyjevo* na množici S, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$ velja $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$.

Kot pri definiciji enakomerne konvergence je treba poudariti, da je tu m odvisen le od števila ϵ, ne pa od točke x. Tako kot pri običajnih številskih vrstah je mogoče pokazati, da je funkcijsko zaporedje (f_n) na množici S enakomerno Cauchyjevo natanko takrat, ko je enakomerno knvergentno.

TRDITEV 1. *Funkcijsko zaporedje* (f_n) *je* enakomerno Cauchyjevo *na množici* S *natanko takrat, ko je na* S *enakomerno konvergentno.*

Dokaz. Iz enakomerne konvergence takoj sledi enakomerna Cauchyjeva lastnost. Če namreč $f_n \to f$ enakomerno na S, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak m, da za $n \geq m$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$ za vsak $x \in S$. Potem za vsak $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$ velja tudi $|f_n(x) - f_k(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| < \epsilon$.

Obratno, če velja $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$ za vsak $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$, pošljimo v tej neenakosti $k \to \infty$, da dobimo $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, kjer je $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (limita po točkah $f_k \to f$ obstaja, ker je številsko zaporedje $(f_k(x))$ Cauchyjevo). Ker velja zadnja ocena za vsak $x \in S$, če je le $n \geq m$, je konvergenca enakomerna na množici S.

Funkcijsko zaporedje iz zgleda 1(a), katerega členi so funkcije f_n, definirane z $f_n(x) = x^n$, konvergira na množici $S = [0,1]$ proti nezvezni funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} ,$$

čeprav so vsi členi zvezne funkcije (potence). Tu konvergenca funkcijskega zaporedja, kot smo videli, ni enakomerna. Pokažimo, da se pri enakomerni konvergenci kaj takega ne more primeriti.

IZREK 1. *Naj bo* (f_n) *zaporedje zveznih funkcij, ki na množici* S *enakomerno konvergira proti funkciji* f. *Tedaj je tudi limita* f *zvezna funkcija.*

Dokaz. Izberimo si poljubno točko $a \in S$ in pokažimo, da je limitna funkcija zvezna v točki a. Za vsak $\epsilon > 0$ moramo poiskati tak $\delta > 0$, da bo za $|x-a| < \delta$ veljalo $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Najprej ocenimo po trikotniški neenakosti: $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$. Zaradi enakomerne konvergence obstaja tak dovolj pozen indeks n, da sta tako prvi kot zadnji člen pod $\epsilon/3$, ne glede na to, kje smo izbrali $x \in S$. Pri tako izbranem indeksu n pa zaradi zveznosti funkcije f_n obstaja tak $\delta > 0$, da iz $|x-a| < \delta$ sledi tudi $|f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon/3$. Torej je skupaj $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, če je le $|x-a| < \delta$, kar je bilo treba videti.

Iz tega izreka ponovno vidimo, da funkcijsko zaporedje (f_n) iz zgleda 1(a) ne more biti enakomerno konvergentno.

POSLEDICA. *Če zaporedje zveznih funkcij* f_n *na množici* S *enakomerno konvergira, velja za vsak* $a \in S$ *enakost*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Dokaz. Označimo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ za vsak $x \in S$. Po izreku 1 je zaradi enakomerne konvergence zaporedja (f_n) funkcija f zvezna. Torej po definiciji zveznosti funkcij f in f_n velja $\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$.

Iz enakomerne konvergence funkcijskega zaporedja f_n seveda sledi njegova konvergenca po točkah. Obratno pa nasploh ne drži, tudi če vemo, da je limitna funkcija zvezna (glej npr. zgled 1(b)). Je pa ob dodatnih predpostavkah možno doseči tudi to.

IZREK (Dini). *Imejmo zaporedje zveznih funkcij* (f_n), *ki je na kompaktni podmnožici* $K \subset \mathbb{R}$ *monotono padajoče (tj. za vsak* $x \in K$ *velja* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$) *in po točkah konvergira proti zvezni funkciji* f. *Potem je konvergenca* $f_n \to f$ *na intervalu* $[a, b]$ *enakomerna.*

Dokaz. Če za vsak n označimo $g_n = f_n - f$, je (g_n) padajoče zaporedje, ki na K po točkah konvergira proti 0. Izberimo poljuben $\epsilon < 0$. Množica $K_n = \{x \in K;\ g_n(x) \geq \epsilon\}$ je zaprta podmnožica v K, saj zaradi zveznosti funkcije g_n vsebuje vse svoje limitne točke (iz $x_k \to x$ in $g_n(x_k) \geq \epsilon$ sledi $g_n(x) \geq \epsilon$). Vsaka zaprta podmnožica kompaktne množice K pa je tudi sama kompaktna. Poleg tega zaradi padanja funkcijskega zaporedja g_n velja tudi $K_{n+1} \subset K_n$. Torej je K_n padajoče zaporedje kompaktnih množic. Če bi bile vse te množice neprazne, bi bile po neki trditvi iz analize 1 (glej zadnjo trditev 4. razdelka v 1. poglavju) tudi njihov presek $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ neprazen. Toda element x iz preseka bi bil vsebovan v K_n za vsak n, se pravi, da bi za vsak n veljalo $g_n(x) \geq \epsilon$, kar pa je v nasprotju s predpostavko $g_n(x) \to 0$. To pomeni, da je ena od množic, npr. K_m prazna. Potem so prazne tudi nadaljnje množice, tako da za vsak $n \geq m$ velja $0 \leq g_n(x) < \epsilon$ za vsak $x \in K$. Dobimo enakomerno konvergenco zaporedja g_n proti 0 oziroma zaporedja f_n proti f.

Oglejmo si še povezavo funkcijskega zaporedja z integrali in odvodi posameznih členov in morebitne limitne funkcije.

Imejmo zaporedje integrabilnih funkcij f_n na intervalu $[a, b]$, ki npr. konvergira po točkah proti funkciji f. Z integracijo posameznih členov dobimo zaporedje integralov $\int_a^b f_n(x)dx$. Ali je potem tudi limitna funkcija integrabilna? Ali tudi zaporedje integralov konvergira in če konvergira ali morebiti konvergira proti integralu limitne funkcije?

Na ta vprašanja odgovorja naslednji izrek.

IZREK 2. *Če zaporedje integrabilnih funkcij f_n na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, je tudi limitna funkcija f integrabilna na $[a,b]$ in zaporedje funkcij $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ za vsak $c \in [a,b]$ konvergira proti funkciji $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ enakomerno na $[a,b]$.*

Dokaz. Zaradi enakomerne konvergence za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za $n \geq m$ in za vsak $t \in [a,b]$ velja $f_n(t) - \epsilon < f(t) < f_n(t) + \epsilon$. Potem pa je res tudi

$$\int_a^b (f_n(t) - \epsilon)dt = s(f_n - \epsilon) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f_n + \epsilon) = \int_a^b (f_n(t) + \epsilon)dt,$$

kjer sta $s(f)$ in $S(f)$ spodnji oziroma zgornji Darbouxov integral funkcije f. Torej velja $0 \leq S(f) - s(f) \leq 2\epsilon(b-a)$. Ker velja to za vsak $\epsilon > 0$, je $s(f) = S(f)$ in funkcija f je integrabilna na intervalu $[a,b]$. Poleg tega lahko za vsak $x \in [a,b]$ in za vsak $n \geq m$ ocenimo

$$|F_n(x) - F(x)| = |\int_c^x (f_n(t) - f(t))dx| \leq |\int_c^x |f_n(t) - f(t)|dx| \leq \epsilon|x - c| \leq \epsilon(b-a),$$

kar pomeni, da $F_n \to F$ enakomerno na $[a,b]$.

POSLEDICA 1. *Če zaporedje zveznih funkcij f_n na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, konvergira zaporedje funkcij $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ za vsak $c \in [a,b]$ proti funkciji $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ enakomerno na $[a,b]$.*

Dokaz. Zdaj že vemo, da je tudi limitna funkcija zvezna (izrek 1), ostalo sledi iz izreka 2.

POSLEDICA 2. *Če zaporedje zveznih funkcij f_n na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Opomba. Brez enakomerne konvergence izrek ne velja. Vemo, da v primeru iz zgleda 1(d) zaporedje funkcij f_n konvergira proti ničelni funkciji $f(x) = 0$, vendar konvergenca ni enakomerna npr. na intervalu $[0,1]$. V tem primeru je $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ za vsak n, torej tudi $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$, medtem ko je $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Še ena posledica izreka 2 je izrek o odvajanem funkcijskem zaporedju. Enakomerna konvergenca zaporedja odvedljivih funkcij f_n ničesar ne pove o konvergenci zaporedja njihovih odvodov f_n', kot se lahko poučimo iz zgleda 1(c). Tam je $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$ za vsak n in vsak $x \in \mathbb{R}$, zato je $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. V zgledu 2 smo videli, da je konvergenca $f_n \to 0$ enakomerna na vsej realni osi, vendar pa za podzaporedje (f_n') velja $f_n'(\pi) = (-1)^n\sqrt{n}$, kar ni omejeno (v resnici zaporedje (f_n') v nobeni točki x ne konvergira). Zato so za konvergenco odvodov potrebne močnejše predpostavke.

IZREK 3. *Naj bo (f_n) zaporedje zvezno odvedljivih funkcij, ki konvergira vsaj v eni točki $c \in [a,b]$. Če poleg tega zaporedje odvodov f_n' konvergira enakomerno na $[a,b]$, konvergira tudi zaporedje (f_n) na $[a,b]$ enakomerno proti neki odvedljivi funkciji f, pri čemer velja $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Dokaz. Po osnovni formuli integralskega računa je zaradi zveznosti odvodov f_n' za vsak n in za vsak $x \in [a,b]$ izpolnjena enakost

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt.$$

Zaradi enakomerne konvergence odvodov f_n' proti neki zvezni funkciji g, konvergirajo po izreku 2 funkcije $F_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt$ enakomerno na $[a, b]$ proti funkciji $F(x) = \int_c^x g(t)dt$. Naj bo $d = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja torej tak indeks m, da za $n \geq m$ velja $|f_n(c) - d| < \epsilon/2$ in za vsak $x \in [a, b]$ tudi $|F_n(x) - F(x)| < \epsilon/2$. Zaradi ocene

$$|f_n(x) - d - F(x))| = |f_n(c) - d + F_n(x) - F(x)| \leq |f_n(c) - d| + |F_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

konvergira potem tudi prvotno zaporedje (f_n) enakomerno na $[a, b]$ proti funkciji $f(x) = d + \int_c^x g(t)dt$. Odtod vidimo, da je tudi funkcija f odvedljiva in da velja $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Opomba. Podoben izrek (z enakim sklepom) velja tudi za zaporedje funkcij f_n, ki so na intervalu $[a, b]$ zgolj odvedljive (ne pa nujno zvezno odvedljive). Dokaz izreka s temi šibkejšimi predpostavki pa je nekoliko bolj zapleten (glej npr. [5], str. 152).

TRDITEV 2. *Naj bo $f(x, t)$ zvezna funkcija dveh spremenljivk na pravokotniku $[a, b] \times [c, d]$ in $F(x) = \int_c^d f(x, t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je F zvezna funkcija na $[a, b]$.*

Dokaz. Ker je f zvezna funkcija na kompaktni množici $[a, b] \times [c, d]$ je tam enakomerno zvezna (glej zadnji izrek v II. poglavju Analize 1). Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x, y \in [a, b]$, $t \in [c, d]$ in $|x - y| < \delta$ sledi $|f(x, t) - f(y, t)| < \epsilon/(d - c)$. Torej je

$$|F(x) - F(y)| = |\int_c^d (f(x, t) - f(y, t))dt| \leq \int_c^d |f(x, t) - f(y, t)|dt \leq \epsilon.$$

TRDITEV 3. *Naj bosta f in $\frac{\partial f}{\partial x}$ zvezni funkciji na $[a, b] \times [c, d]$ in $F(x) = \int_c^d f(x, t)dt$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je funkcija F odvedljiva in za vsak $x \in [a, b]$ velja*

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt.$$

Dokaz. Fiksirajmo $x \in [a, b]$ in $h \neq 0$. Diferenčni kvocient za funkcij F v točki x je enak

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} dt.$$

Ker je f parcialno odvedljiva funkcija (glede na prvo spremenljivko), po Lagrangevem izreku glede na to spremenljivko obstaja taka točka $x(t)$ z lastnostjo $|x(t) - x| < |h|$, da velja

$$\frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t).$$

Ker je tu leva stran zvezna funkcija spremenljivke t, velja isto za desno stran. Poleg tega je $\frac{\partial f}{\partial x}$ zvezna funkcija na kompaktni množici $[a, b] \times [c, d]$, zato je tam enakomerno zvezna. To pomeni, da za za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x, y \in [a, b]$, $t \in [c, d]$ in $|x - y| < \delta$ sledi $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(y, t)| < \epsilon/(d - c)$. Torej je pri pogoju $|h| > \delta$ res $|x(t) - x| < \delta$ in velja

$$|\frac{F(x + h) - F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt| = |\int_c^d (\frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t))dt| \leq$$

$$\int_c^d |\frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)|dt \leq \epsilon.$$

Ker je tu $\epsilon > 0$ poljuben, vidimo, da je funkcija F odvedljiva in da za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt.$$

Enakomerna konvergenca funkcijskih vrst

Vse, kar smo doslej povedali o konvergenci funkcijskega zaporedja na dani množici S, velja tudi za konvergenco funkcijske vrste, se pravi vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kjer so f_k funkcije, definirane na množici S, saj v tem primeru delne vsote $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ tvorijo funkcijsko zaporedje. Zaporedje delnih vsot pa odloča o konvergenci vrste.

DEFINICIJA 3. Funkcijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira na množici S proti funkciji f:
(i) *po točkah*, če na S po točkah konvergira proti f zaporedje delnih vsot s_n;
(ii) *enakomerno*, če na S enakomerno konvergira proti f zaporedje delnih vsot s_n.

Točka (i) pomeni, da konvergira številska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + ...$ za vsak $x \in S$ in ima vsoto $f(x)$. Točka (ii) pa poleg tega še, da je konvergenca vrste enakomerna.

IZREK 4 (Weierstrassov M-test). *Naj za člene funkcijske vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ velja za vsak $x \in S$ in za vsak $k \geq 1$ ocena $|f_k(x)| \leq a_k$. Če številska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...$ konvergira, konvergira funkcijska vrsta enakomerno na množici S.*

Dokaz. Za vsak par indeksov n, k imamo oceno $|\sum_{j=n}^{n+k} f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+k} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+k} a_j$. Ker številska vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergira, zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da je za $n \geq m$ in za vsak k desna stran zadnje neenakosti manjša od ϵ. Torej imamo pri pogoju $n \geq m$ za vsak k in za vsak $x \in S$ tudi oceno $|\sum_{j=n}^{n+k} f_j(x)| < \epsilon$. Ker je tu m neodvisen od x, je funkcijska vrsta enakomerno Cauchyjeva, torej po trditvi 1 enakomerno konvergentna.

ZGLED. Vrsta s členi $f_n(x) = (\sin nx)/n^2$ je enakomerno konvergentna na vsej realni osi $\mathbb{R}$, saj imamo za vsak $n \geq 1$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ oceno $|f_n(x)| = |(\sin nx)/n^2| \leq 1/n^2$ in vemo, da številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ konvergira.

Naslednji izreki v zvezi z zveznostjo, integrabilnostjo in odvedljivostjo vsote dane funkcijske vrste so samo posebni primeri ustreznih izrekov 1, 2 in 3 za funkcijska zaporedja, zato jih navedimo brez dokazov.

IZREK 1′. *Vsota f enakomerno konvergentne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ zveznih funkcij na podmnožici $S \subset \mathbb{R}$ je zvezna funkcija na množici S.*

IZREK 2′. *Vsota f enakomerno konvergentne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ na intervalu $[a, b]$ integrabilnih funkcij je integrabilna funkcija na $[a, b]$. Tudi vrsta iz integralov funkcij f_n konvergira, njena vsota je enaka integralu funkcije f:*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ...$$

IZREK 3′. *Vsota f vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ zvezno odvedljivih funkcij, ki konvergira po točkah na intervalu $[a, b]$, vrsta iz odvodov $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k = f'_1 + f'_2 + ...$ pa konvergira na $[a, b]$ enakomerno, je tudi sama odvedljiva funkcija, njen odvod f' pa je vsota odvajane vrste:*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k = f'_1 + f'_2 + ...$$

Vse tri izreke dokažemo tako, kot izreke 1,2,3, če obravnavamo zaporedje delnih vsot.

Potenčne vrste

Poseben primer funkcijskih vrst so vrste, katerih členi so sestavljeni iz potenc, pomnoženih s konstantami. To so t.i. potenčne vrste, ki jih bomo zdaj definirali.

DEFINICIJA 4. Imejmo zaporedje (c_k) realnih števil in še eno točko $a \in \mathbb{R}$. Potem je (splošna) *potenčna vrsta* funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$$

Rečemo, da je potenčna vrsta razvita okrog točke a. Z vpeljavo nove spremenljivke $t = x - a$ lahko vedno dosežemo razvoj okrog točke nič ($a = 0$). V tem primeru ima potenčna vrsta obliko

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$$

Odslej bomo delali samo s takimi potenčnimi vrstami.

Potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ vedno konvergira vsaj v točki $x = 0$. Lahko pa se zgodi, da ne konvergira za noben $x \neq 0$. Zgled je npr. vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$. kjer za $x \neq 0$ členi sploh ne konvergirajo k nič. Po drugi strani je vrsta lahko konvergentna prav za vsak $x \in \mathbb{R}$. Tak je primer pri vrsti $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, ki absolutno konvergira na vsej realni osi, kot se lahko hitro prepričamo npr. s kvocientnim kriterijem. Kako je s konvergenco v drugih primerih, pove naslednja trditev.

TRDITEV 4. *Če potenčna vrsta* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ *konvergira v točki* $x_0 \neq 0$, *konvergira absolutno za vse* x *z lastnostjo* $|x| < |x_0|$.

Dokaz. Ker je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ konvergentna, konvergirajo njeni členi $c_k x_0^k$ proti nič in so zato omejeni z neko konstanto $M > 0$, torej $|c_k x_0^k| \leq M$ za vsak k. Člene prvotne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ lahko potem ocenimo po absolutni vrednosti z $|c_k x^k| = |c_k x_0^k||x/x_0|^k \leq Mq^k$, kjer je $q = |x/x_0| < 1$. Ker je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$ geometrijska in zaradi $q < 1$ konvergentna, konvergira po primerjalnem kriteriju absolutno tudi prvotna vrsta.

POSLEDICA. *Če potenčna vrsta* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ *divergira v točki* $x_0 \neq 0$, *divergira tudi za vsak* x *z lastnostjo* $|x| > |x_0|$.

Dokaz. Iz konvergence vrste pri x, bi sledila njena absolutna in zato tudi običajna konveregenca pri x_0.

DEFINICIJA 5. Naj bo $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ potenčna vrsta, ki konvergira vsaj v eni točki $x_0 \neq 0$, ne pa povsod na $\mathbb{R}$. Pozitivno število $R = \sup\{r > 0;\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \text{ konvergira}\}$ imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.

To je torej tako število, da potenčna vrsta konvergira za vsak x z lastnostjo $|x| < R$ in divergira za vsak x z lastnostjo $|x| > R$. Pri $|x| = R$ lahko vrsta v točki x konvergira ali divergira.

ZGLED. Potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k$ konvergira (absolutno) za $|x| < 1$ in divergira za $|x| > 1$ (kvocientni kriterij). Torej je konvergenčni polmer enak $R = 1$. Toda vemo, da je za $x = 1$ vrsta harmonična, torej divergentna, za $x = -1$ pa konvergentna alternirajoča vrsta (Leibnizov kriterij).

Opomba. Pri vrsti, ki konvergira samo v točki 0, rečemo, da je konvergenčni polmer enak nič, pri vrsti, ki konvergira povsod, pa je konvergenčni polmer neskončen. Tako imamo pokrite vse primere in za konvergenčni polmer R poljubne potenčne vrste velja $0 \le R \le \infty$.

TRDITEV 5. *Naj bo za potenčno vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergenčni polmer $R > 0$ in naj velja $0 < r < R$. Potem potenčna vrsta konvergira na intervalu $[-r, r]$ enakomerno.*

Dokaz. To sledi iz Weierstreassovega testa za enakomerno konvergenco, saj lahko člene vrste za $x \in [-r, r]$ po absolutni vrednosti ocenimo z $|c_k x^k| \le |c_k| r^k$. Ker številska vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konvergira, saj je $0 < r < R$, konvergira potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ po izreku 4 enakomerno na intervalu $[-r, r]$.

TRDITEV 6. *Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ velja*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

Dokaz. Če je $R = 0$, potenčna vrsta ne konvergira absolutno v nobeni točki $x = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots.$ Torej je po Cauchyjevem korenskem kriteriju (posledica izreka 6. v prvem razdelku) $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(1/n)^k|} \ge 1$ za vsak n. Odtod dobimo $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \ge n$ za vsak n.
Če je $R = \infty$, dobimo iz konvergence vrste v vsaki točki $x = n$ na isti način pogoj $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \le 1/n$ za vsak n, torej $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$.

Naj bo zdaj $0 < R < \infty$ in $\epsilon > 0$. Potem konvergira potenčna vrsta v točki $x = R - \epsilon$ in divergira za $x = R + \epsilon$. Torej velja po Cauchyjevem korenskem kriteriju ocena

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(R-\epsilon)^k|} \le 1 \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(R+\epsilon)^k|}.$$

Odtod dobimo

$$(R-\epsilon)\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \le 1 \le (R+\epsilon)\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Ker je tu $\epsilon > 0$ poljuben, velja $R \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1$, kar je bilo treba pokazati.

POSLEDICA. *Naj bo $R \in [0, \infty]$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Če obstaja limita, je $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \dfrac{1}{R}$.*

Dokaz. Denimo, da omenjena limita obstaja. Potem po trditvi 2 iz razdelka 1 tega poglavja obstaja tudi limita $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ in velja $\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1/R$.

ZGLEDI. (a) Za potenčno vrsto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k^2}$ je $c_k = 2^{-k}/k^2$ in zato je kvocient $|c_{k+1}|/|c_k| = 2^{-k-1}k^2/2^{-k}(k+1)^2 = k^2/2(k+1)^2 \to 1/2$. Torej je konvergenčni polmer enak $R = 2$. Poglejmo, kako je s konvergenco vrste na robu konvergenčnega intervala. Za $x = \pm 2$ imamo vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ in $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$, ki obe konvergirata.

(b) Za podobno vrsto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k}$ s koeficienti $c_k = 2^{-k}/k$ dobimo kvocient $|c_{k+1}|/|c_k| = 2^{-k-1}k/2^{-k}(k+1) = k/2(k+1) \to 1/2$, se pravi spet $R = 2$. Zdaj je za $x = 2$ vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ harmonična, torej divergentna. Za $x = -2$ pa je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ alternirajoča in konvergentna.

(c) Za potenčno vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k}$ je $c_{2k+1} = 0$ in $c_{2k} = 2^{-k}/k$ za $k \geq 0$. Limiti $\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$ in $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ ne obstajata, pač pa obstaja $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty}(1/2^k k)^{1/2k} = 1/\sqrt{2}$. Torej je konvergenčni polmer enak $\sqrt{2}$. Za $x = \pm\sqrt{2}$ dobimo divergentno harmonično vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$.

Vsota potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ obstaja in je zvezna funkcija na intervalu $(-R, R)$. Recimo, da vrsta konvergira tudi na robu, v točki $x = R$ (ali $x = -R$). Ali je potem vsota zvezna funkcija tudi še v tej točki? Če je konvergenca tam absolutna, velja $|c_k x^k| \leq |c_k| R^k$ za vsak $x \in [-R, R]$, zato je po izreku 4 na tem intervalu konvergenca enakomerna. Torej je vsota zvezna funkcija tudi v točki $x = R$ (ali $x = -R$).

Če je konvergenca v točki $x = R$ (ali $x = -R$) zgolj pogojna, je to še vedno res, kot pove naslednji izrek.

IZREK 5 (Abel). *Naj bo $R \in [0, \infty]$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, katere vsota je zvezna funkcija f na intervalu $(-R, R)$. Če vrsta konvergira v točki $x = R$ (ali $x = -R$)* in ima tam vsoto s, *velja* $s = \lim_{x\to R} f(x)$ (ali $s = \lim_{x\to -R} f(x)$).

Dokaz. Dokažimo samo primer, ko vrsta konvergira v točki $x = R$ (za primer $x = -R$ si namesto prvotne vrste ogledamo potenčno vrsto s koeficienti $(-1)^k c_k$, ki ima isti konvergenčni polmer in konvergira v točki $x = R$). Poleg tega smemo brez škode vzeti $R = 1$, sicer raje gledamo potenčno vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} c_k R^k x^k$.

Denimo torej, da potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergira za $x = 1$ in da ima tam vsoto s, torej imamo $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = s$. Za vsak k definirajmo $s_k = c_0 + c_1 + ... + c_k$ in $c_{-1} = 0$. Potem je za vsak n res

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+1} = s_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k.$$

Za $-1 < x < 1$ pošljimo $n \to \infty$ pa dobimo

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak m, da za $k > m$ velja $|s - s_k| < \epsilon/2$. Poleg tega je $s = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s x^k$ za $-1 < x < 1$, zato imamo za $0 < x < 1$ oceno

$$|f(x) - s| = |(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{m} |s_k - s| x^k + (1-x) \sum_{k=m+1}^{\infty} |s_k - s| x^k \leq$$

$$(1-x) \sum_{k=0}^{m} |s_k - s| x^k + (\epsilon/2)(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^k \leq (1-x) \sum_{k=0}^{m} |s_k - s| + \epsilon/2.$$

Število $\delta > 0$ lahko izberemo tako majhno, da iz $1 - x < \delta$ sledi $(1-x)\sum_{k=0}^{m} |s_k - s| < \epsilon/2$. V tem primeru velja $|f(x) - s| < \epsilon$, kar pomeni, da je $s = \lim_{x\to R} f(x)$.

Kot posledico tega izreka dokažimo še en rezultat v zvezi s produktom številskih konvergentnih vrst, ki smo ga obravnavali v razdelku 1 (glej izrek 12, kjer je ena od vrst konvergirala absolutno).

IZREK 6. *Imejmo konvergentne številske vrste* $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ *in* $\sum_k c_k$, *pri čemer je* $c_k = a_0 b_k + ... + a_k b_0$ *za vsak* k. *Če so njihove vsote* A, B *in* C, *velja* $C = AB$.

Dokaz. Za $0 \le x \le 1$ definirajmo funkcije $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ in $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Hitro vidimo, da je vrsta za $h(X)$ ravno Cauchyjev produkt vrst za $f(x)$ in $g(x)$. Ker za $0 \le x < 1$ ti dve vrsti po trditvi 4 konvergirata absolutno, konvergira po izreku 12 iz prvega razdelka tudi vrsta za $h(x)$ in za njihove vsote dobimo zvezo $f(x)g(x) = h(x)$, $0 \le x < 1$. Ker vse tri vrste v točki $x = 1$ še konvergirajo, velja pri pogoju $x \to 1$ po Abelovem izreku $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ in $h(x) \to C$. Zaradi zveze $f(x)g(x) = h(x)$ velja tudi $AB = C$.

Potenčne vrste se lepo obnašajo tudi v zvezi z odvajanjem in integracijo vrst. Če potenčno vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ členoma odvajamo, dobimo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$; če pa jo členoma integriramo, dobimo vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}/(k+1)$. Kako je s konvergenčnim polmerom dobljenih vrst?

IZREK 7. *Členoma odvajana in členoma integrirana potenčna vrsta imata isti konvergenčni polmer kot prvotna vrsta. Če je ta polmer* R *in je* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *velja za vsak* $x \in (-R, R)$ *tudi*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}/(k+1).$$

Dokaz. Po trditvi 6 je recipročna vrednost konvergenčnega polmera za odvajano vrsto enaka

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|kc_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R},$$

za integrirano vrsto pa

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k/(k+1)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

Ker odvajana vrsta konvergira enakomerno na vsakem kompaktnem podintervalu $[a, b] \subset (-R, R)$ in prvotna potenčna vrsta konvergira na $(-R, R)$, lahko uporabimo izrek $3'$, po katerem je $f'(x)$ vsota členoma odvajane vrste za vsak $x \in (-R, R)$. Podobno po izreku $2'$ konvergira, celo enakomerno na vsakem kompaktnem podintervalu $[a, b] \subset (-R, R)$, tudi členoma integrirana vrsta in ima vsoto $\int_0^x f(t)dt$ za vsak $x \in (-R, R)$.

Z odvajanjem ali integriranjem po členih lahko pogosto določimo vsoto dane vrste, skupaj z Abelovim izrekom tudi na robu konvergenčnega območja, kjer sicer vrste ne smemo odvajati ali integrirati.

ZGLED. (a) Izračunajmo npr. vsoto $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$. Vemo, da ima potenčna vrsta konvergenčni polmer 1, zato vrsta konvergira za vsak $x \in (-1, 1)$. Vrsto na tem območju odvajajmo in dobimo geometrijsko vrsto $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1/(1-x)$. Ker poznamo odvod funkcije f, poznamo tudi

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)|_0^x = -\ln(1-x).$$

Če odvajana vrsta konvergira samo znotraj konvergenčnega intervala, pa vidimo, da prvotna vrsta konvergira tudi še v robni točki $x = -1$, saj je v tem primeru alternirajoča in ima absolutno proti nič padajoče koeficiente (Leibnizov kriterij). Po Abelovem izreku (izreku 5) je potem v tej točki njena vsota enaka $s = \lim_{x\to-1} f(x) = -\lim_{x\to-1} \ln(1-x) = -\ln 2$. Tako smo še enkrat izračunali vsoto alternirajoče harmonične vrste.

(b) Podobno obravnavajmo potenčno vrsto $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$, ki ima tudi konvergenčni polmer 1. Pišimo $f(x)/x = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$. Z integriranjem od 0 do x je

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k.$$

Postopek ponovimo:

$$\int_0^x \frac{F(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1/(1-x).$$

Odtod z dvakratnim zaporednim z odvajanjem dobimo $F(x) = x/(1-x)^2$ in

$$f(x) = x(x/(1-x)^2)' = (x+x^2)/(1-x)^3.$$

Opomba. Nobenega razloga ni, da ne bi v potenčno vrsto namesto realne spremenljivke x vstavili kompleksno spremenljivko z (v splošni potenčni vrsti, bi tudi za a vzeli kompleksno števil). Vse kar smo povedali o (absolutni in enakomerni) konvergenci potenčnih vrst, velja tudi v kompleksnem. Konvergenčno območje je zdaj točka 0, krog $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ ali cela kompleksna revnina. Konvergenčni polmer je res polmer; izračuna se ga na isti način. Seveda na svojem območju konvergence take vrste definirajo funkcijo s kompleksnimi vrednostmi.

3. Taylorjeva vrsta

Še enkrat si bomo (z uporabo metode integracije po delih) izpeljali Taylorjevo formulo, ki jo poznamo iz analize 1.

Če je funkcija f poljubnokrat odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$ je po osnovni formuli integralskega računa

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Na desni strani lahko večkrat uporabimo integracijo po delih, npr.:

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \frac{1}{3!}\int_a^x (x-t)^3 f^{(4)}(t) dt.$$

Splošno dobimo odtod *Taylorjevo formulo* v obliki

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Prvi del te formule je dobro znani *Taylorjev polinom*

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

drugi del pa *ostanek Taylorjeve formule* (zdaj v t.i. *integralski obliki*)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Ostanek lahko za $(n+1)$-krat zvezno odvedljive funkcije zapišemo tudi v znani *Lagrangevi obliki.* Ker je $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$, pri čemer sta m in M natančni meji, je

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \leq R_n(x) \leq \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$$

oziroma

$$\frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ker je $f^{(n+1)}(t)$ zvezna funkcija na $[a,x]$ in je torej $m \leq R_n(x)(n+1)!\,/(x-a)^{n+1} \leq M$, obstaja vsaj ena točka $c \in [a,x]$, tako da velja $f^{(n+1)}(c) = R_n(x)(n+1)!\,/(x-a)^{n+1}$ oziroma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Če je za funkcijo f odvod reda $n+1$ zvezen, lahko ostanek zapišemo še v eni obliki. Po prvem izreku o povprečni vrednosti oziroma njegovi posledici (glej tudi trditev 9 v drugem razdelku prvega poglavja) dobimo iz integralske oblike

$$R_n(x) = \frac{x-a}{n!}(x-c)^n f^{(n+1)}(c)$$

za neko točko c, ki leži med a in x. To je t.i. *Cauchyjeva oblika* ostanka.

Kadar se da funkcija v točki a odvajati poljubnokrat, lahko zgornji postopek nadaljujemo v neskončnost. V tem primeru dobimo namesto končne Taylorjeve formule $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ z ostankom *Taylorjevo vrsto*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

To je poseben primer potenčne vrste, razvite okrog točke a, zato pravimo, da smo funkcijo f *razvili* okrog točke a v potenčno oziroma Taylorjevo vrsto. V posebnem primeru, kadar je $a = 0$, govorimo raje o *McLaurinovi vrsti*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Delne vsote Taylorjeve vrste so ravno Taylorjevi polinomi $P_n(x)$, ostanek vrste (od n-tega člena dalje) pa ravno ostanek Taylorjeve formule $R_n(x)$. Včasih se da pokazati, da za nekatere vrednosti x (vsaj v bližini točke a) z naraščanjem n preko vsake meje ostanek $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ konvergira proti 0. V tem primeru Taylorjeva vrsta očitno konvergira in ima vsoto $f(x)$. Taylorjeva vrsta vedno konvergira v točki a in sicer proti vrednosti $f(a)$, lahko pa se zgodi, da nimamo konvergence v nobeni drugi točki $x \neq a$.

ZGLED. Funkcijo $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ že poznamo (glej razdelek 1 v tretjem poglavju analize 1). Njena vrednost v točki 0 je $f(0) = 0$ in je povsod poljubnokrat zvezno odvedljiva. Zanimajo nas njeni odvodi v točki 0. Prvi odvod je tam po definiciji enak $f'(0) = \lim_{x\to 0} e^{-1/|x|}/x = 0$. Ker je prvi odvod za $x \neq 0$ enak $x^{-2}e^{-1/x}$, če je $x > 0$, in $-x^{-2}e^{1/x}$, če je $x < 0$, vidimo, da je tudi $f''(0) = 0$. Podobno lahko sklepamo tudi za višje odvode. Izkaže se, da so vsi višji odvodi v točki 0 enaki nič. Taylorjeva vrsta za f je torej trivialna (vsi členi so enaki nič), zato povsod na realni osi konvergira proti nič. Ker je $f(x) \neq 0$ za $x \neq 0$ in $f(0) = 0$, konvergira Taylorjeva vrsta proti funkciji, iz katere smo jo dobili, samo v točki 0.

DEFINICIJA. Če Taylorjeva vrsta funkcije f konvergira tudi v okolici točke a proti funkciji f, rečemo, da je funkcija f v okolici točke a *analitična.*

Razvoj analitične funkcije f v potenčno vrsto okrog točke a je en sam. Če je namreč funkcija f v okolici točke a enaka vsoti neke konvergentne potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, lahko vrsto po izreku 7 iz prejšnjega razdelka poljubnokrat členoma odvajamo. Odvajana vrsta je v okolici točke a tudi konvergentna in ima za vsoto ustrezni odvod funkcije. Brez težav se na ta način lahko prepričamo, da je $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots$. Torej je razvoj en sam, namreč Taylorjev.

Primeri Taylorjevih (McLaurinovih) razvojev

Oglejmo si razvoje osnovnih transcendentnih funkcij okrog točke 0. Za vsako funkcijo bomo izračunali njeno vrednost in vrednost njenih odvodov poljubno visokega reda v točki 0, ugotovili, kje vrsta (absolutno) konvergira, in nazadnje z oceno Taylorjevega ostanka pokazali, da je na danem konvergenčnem območju njena vsota res funkcija, ki določa vrsto.

1. **Eksponentna funkcija in vrsta**

Za funkcijo $f(x) = \mathrm{e}^x$ je $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ in $f^{(n)}(0) = 1$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Torej dobimo

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

S kvocientnim kriterijem se npr. lahko hitro prepričamo, da ta vrsta absolutno konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker pa je Taylorjev ostanek v Lagrangevi obliki enak $R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, kjer je c med 0 in x, in ga lahko ocenimo z $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} \to 0$ $(n \to \infty)$, konvergira eksponentna vrsta (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$ proti $f(x) = \mathrm{e}^x$. Da gre ostanek proti nič, lahko sklepamo tudi iz dejstva, da je $|x|^{n+1}/(n+1)!$ splošni člen konvergentne vrste.

2. **Vrsti za sinus in za kosinus**

Za funkcijo $f(x) = \sin x$ velja $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ in $f^{(2n)}(0) = 0$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tako imamo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Podobno kot prej vidimo, da vrsta konvergira (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ostanek v Lagrangevi obliki lahko zdaj ocenimo z $|R_n(x)| \leq |x|^{2n+3}/(2n+3)! \to 0$, $n \to \infty$. Torej je vsota Taylorjeve vrste povsod enaka $f(x) = \sin x$.

Za funkcijo $f(x) = \cos x$ pa imamo $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \sin x$ in zato

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Vrsta spet konvergira (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$ proti $f(x) = \cos x$.

3. **Vrsta za logaritemsko funkcijo**

Sedaj vzemimo funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$, za katero je $f(0) = 0$. Odvodi pa so po vrsti $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, itd. Splošno je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{in} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Torej dobimo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Ta vrsta pa konvergira samo za $-1 < x \leq 1$, kar najlažje spoznamo s kvocientnim kriterijem za absolutno konvergenco v primeru $-1 < x < 1$. V točki -1 dobimo divergentno harmonično vrsto, v točki 1 pa konvergentno alternirajočo vrsto. Da bi pokazali, da je vsota vrste res začetna logaritemska funkcija, moramo obravnavati dva primera, vsakega posebej.

Za $0 \leq x \leq 1$ uporabimo ostanek Taylorjeve vrste v Lagrangevi obliki:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^n x^{n+1}/(n+1)(1+c)^{n+1}$$

in dobimo oceno $|R_n(x)| \leq x^{n+1}/(n+1) \to 0$, $(n \to \infty)$, saj je tudi $c \geq 0$.

Za $-1 < x < 0$ pa potrebujemo ostanek v Cauchyjevi obliki:

$$R_n(x) = x(x-c)^n f^{(n+1)}(c)/n! = (-1)^n x(x-c)^n/(1+c)^{n+1}.$$

Dobimo oceno $|R_n(x)| \leq |x||x-c|^n/(1+c)^{n+1}$. Ker je zdaj $-1 < x \leq c \leq -cx < 0$, je $|x-c| \leq |x+cx| = (1+c)|x|$ in zato $|R_n(x)| \leq |x|^n/(1+c) \leq |x|^n/(1-|x|) \to 0$.

Ne glede na to, kje je $x \in (-1,1)$, Taylorjeva vrsta torej konvergira (absolutno) proti $f(x) = \ln(1+x)$. Ker imamo konvergenco vrste tudi v točki $x = 1$, je njena vsota po Abelovem izreku tudi v točki 1 enaka $f(1) = \ln 2$ (kar sicer že vemo).

4. **Binomska vrsta**

Vzemimo funkcijo $f(x) = (1+x)^r$, kjer je r poljubno realno število. Sedaj je $f^{(n)}(x) = r(r-1)...(r-n+1)(1+x)^{r-n}$ in $f^{(n)}(0) = r(r-1)...(r-n+1)$. Torej dobimo vrsto

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + ...$$

Tu smo z $\binom{r}{n}$ označili *posplošeni binomski koeficient*, ki je definiran za vsako realno število r (in ne samo za naravna števila kot klasični binomski koeficient) in sicer je

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}.$$

Očitno se ta definicija v primeru $r \in \mathbb{N}$ in $r \geq n$ ujema s klasično: $\binom{r}{n} = \dfrac{r!}{n!\,(r-n)!}$. Za $r \in \mathbb{N}$ in $r < n$ pa je $\binom{r}{n} = 0$, tako da je v tem primeru binomska vrsta v bistvu razvoj potence $(1+x)^r$ po binomskem obrazcu.

Vrsta sedaj konvergira (absolutno) za $-1 < x < 1$, kar najhitreje vidimo s kvocientnim kriterijem. V krajiščih -1 in 1 binomska vrsta nasploh ne konvergira. Da pri omenjenem konvergenčnem pogoju konvergira ostanek proti 0, je nekoliko težje videti, razen za $x = 0$ in za $r = 0, 1, 2, ...$, ko imamo namesto neskončne vrste samo polinom. Odslej naj bo $x \neq 0$ in $r \notin \mathbb{N}$. Podobno kot pri logaritemski vrsti moramo ločiti dva primera.

Za $0 \leq x < 1$ uporabimo ostanek Taylorjeve vrste v Lagrangevi obliki. Tedaj je za neko število c z lastnostjo $0 \leq c \leq x$ in za vsak $n \geq 0$ res

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{r}{n+1}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1} =$$

$$\frac{r(1+c)^r}{(n+1)(1+c)^{n+1}}(r-1)(\frac{r}{2}-1)(\frac{r}{3}-1)...(\frac{r}{n}-1)x^{n+1},$$

od koder dobimo najprej oceno $|R_n(x)| \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/n)x^{n+1}$.

Ker je $0 < x < 1$, je $(1+x)/2x > 1$ in $1+|r|/m < (1+x)/2x$ oziroma $x(1+|r|/m) < (1+x)/2$ za dovolj veliko naravno število m, zato lahko za $n > m$ naprej ocenimo:

$$|R_n(x)| \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/m)(1+|r|/(m+1))...(1+|r|/n)x^{n+1} \leq$$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)^m(1+|r|/m)^{n-m}x^{n-m} \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)^m((1+x)/2)^{n-m}.$$

Desna stran konvergira pri fiksnem m z rastočim n proti nič, zato velja isto za $R_n(x)$.

V primeru $-1 < x < 0$ pa moramo spet uporabiti Cauchyjevo obliko ostanka. Tedaj je

$$R_n(x) = x(x-c)^n f^{(n+1)}(c)/n! = (n+1)\binom{r}{n+1}(1+c)^{r-n-1}x(x-c)^n =$$

$$r(1+c)^r(r-1)(\frac{r}{2}-1)(\frac{r}{3}-1)...(\frac{r}{n}-1)x(x-c)^n/(1+c)^{n+1}$$

in zato kot prej za dovolj velik m in ob upoštevanju neenakosti $|x-c| \leq |x+cx| = (1+c)|x| < 1+c$, ki velja v tem primeru (glej podobno oceno pri logaritemski funkciji) dobimo $|R_n(x)| \leq$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/m)(1+|r|/(m+1))...(1+|r|/n)|x-c|^n|x|/(1+c)^{n+1} \leq$$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)^m(1+|r|/m)^{n-m}|x|/(1+c) \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)^m((1+|x|)/2)^{n-m}|x|/(1-|x|).$$

Desna stran spet konvergira proti nič, zato velja isto tudi za ostanek $R_n(x)$. V vsakem primeru torej binomska vrsta za $|x| < 1$ konvergira proti funkciji $f(x) = (1+x)^r$.

ZGLED. 1. V primeru $r = -1$ zaradi $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ dobimo

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...,$$

se pravi geometrijsko vrsto, ki, kot vemo, konvergira pri $|x| < 1$. Če v njej zamenjamo x z $-x$, pridemo do običajne vrste

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

2. Za $r = 1/2$ dobimo vrsto $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ...$, za $r = -1/2$ pa vrsto $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...$ Obakrat velja konvergenca pri $-1 < x < 1$ in tudi pri $x = 1$ (po Leibnizovem kriteriju).

Uporaba Taylorjeve vrste

Taylorjevo vrsto (oziroma formulo) lahko s pridom uporabimo pri nekaterih standardnih matematičnih postopkih.

(a) Pri risanju funkcij si lokalno lahko pomagamo z aproksimativnimi formulami (začetnimi odseki Taylorjeve vrste ziroma Taylorjevimi polinomi), npr. $\mathrm{e}^x \approx 1+x$, $\mathrm{e}^{-x} \approx 1-x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\sin x \approx x$, ali $\sin x \approx x - x^3/6$ itd. To so približki za funkcijo. Z rastočim n čedalje bolje opisujejo vedenje funkcije f v bližini začetne točke a.

(b) Z začetnimi členi Taylorjeve vrste si lahko pomagamo tudi pri računanju limit velikokrat odvedljivih funkcij (namesto L'Hospitalovega pravila), npr.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - (x - x^3/6 + ...)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/6 - ...}{x^3} = 1/6.$$

(c) Vrsta za eksponentno funkcijo je ugodna za računanje njenih vrednosti na veliko decimalk natančno, ker razmeroma hitro konvergira. Izkoristimo jo lahko tudi za izpeljavo znamenite *Eulerjeve formule*, ki povezuje eksponentno funkcijo (s kompleksnimi vrednostmi) in trigonometrični funkciji sinus in kosinus:

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Levo stran definiramo s potenčno vrsto v kompleksnem $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, ki konvergira absolutno za vsako kompleksno število z. To vidimo npr. s kvocientnim kriterijem. Njena vsota je po definiciji vrednost eksponentne funkcije $f(z) = e^z$ v točki z. Če v vrsto za e^z vstavimo $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ (i je imaginarna enota), dobimo po združitvi realnih in imaginarnih členov

$$\mathrm{e}^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...) = \cos x + i \sin x.$$

To formulo bomo uporabili pri diferencialnih enačbah.

(d) *Računanje logaritmov na več decimalk natančno.* Uporabljamo razvoje v vrsto

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...)$$

(za $-1 < x < 1$) in

$$\ln(a+1) + \ln(a-1) - 2\ln a = \ln(1 - a^{-2}) = \ln \frac{1 - (2a^2-1)^{-1}}{1 + (2a^2-1)^{-1}} =$$

$$= -2(\frac{1}{2a^2-1} + \frac{1}{3(2a^2-1)^3} + ...)$$

za $a > 1$. V prvega vstavimo npr. $x = 1/3$ pa dobimo $\ln 2$, vrednost $\ln 3$ nato izračunamo iz drugega, če vstavimo $a = 2$. Po istih formulah izračunamo tudi logaritme večjih naravnih števil. Če bi npr. $\ln 2$ računali iz osnovne logaritemske vrste, bi dobili $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Na desni imamo tu znano alternirajočo vrsto, za katero sicer vemo, da je konvergentna, vendar je njena konvergenca silno počasna.

(e) *Računanje korenov.* Npr. vrsta $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + 1/2 - 1/8 + ...$ prepočasi konvergira, zato raje zapišemo

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 7\sqrt{\frac{50}{49}} = 7(1 - \frac{1}{50})^{-1/2} = 7(1 + 1/100 + 3/8.100^2 + ...).$$

Zdaj je konvergenca veliko hitrejša.

4. Fourierove vrste

Poseben primer funkcijskih vrst so t.i. *trigonometrične vrste.* To so vrste, v katerih nastopata kot člen trigonometrični funkciji sinus in kosinus večkratnih kotov. Natančneje, vsako trigonometrično vrsto lahko pri poljubnem $x \in \mathbb{R}$ zapišemo v obliki

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

kjer so koeficienti a_n in b_n ($n = 0, 1, 2, ...$) realna števila in $b_0 = 0$. Koeficient pri prvem členu smo delili z dve zaradi lepšega, da bodo kasnejše formule imele bolj enotno obliko.

Trigonometrične vrste so analogija potenčnih vrst, ki smo jih obravnavali v enem od prejšnjih razdelkov. Namesto da so členi večkratniki potenc x^n, $n = 0, 1, 2, ...$, imamo sedaj člene, ki so linearne kombinacije funkcij $\cos nx$ in $\sin nx$, $n = 0, 1, 2, ...$

Zaradi Eulerjeve formule $e^{it} = \cos t + i \sin t$, lahko izrazimo $\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2$, $\sin nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i$. Če to formalno vstavimo v vrsto, dobimo

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

kjer smo označili $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ in $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c}_n$ za vsak $n \geq 0$. S temi oznakami lahko trigonometrično vrsto prepišemo iz "realne" v t.i. "kompleksno" obliko oziroma v dvostransko vrsto, kjer seštevamo po vseh celih številih od $-\infty$ do ∞:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Tako kot pri potenčnih vrstah nas bo seveda tudi zdaj zanimala konvergenca trigonometričnih vrst po točkah ali enakomerna konvergenca, potem njihova vsota, vprašanje ali jih smemo členoma odvajati in integrirati ipd. Trigonometrično (funkcijsko) vrsto v realni ali kompleksni obliki bomo označili z S, ustrezno številsko vrsto v točki x pa z $S(x)$.

Delne vsote trigonometrične vrste S v realni ali kompleksni obliki so funkcije

$$S_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

ki jih imenujemo *trigonometrični polinomi* (stopnje n). Rečemo, da trigonometrična vrsta konvergira na realni osi $\mathbb{R}$ (ali na kakšni njeni podmnožici) po točkah oziroma enakomerno proti funkciji f, če velja $S_n \to f$ $(n \to \infty)$ po točkah oziroma enakomerno na $\mathbb{R}$ (ali na podmnožici). Pri tem opazimo naslednje: ker so realne funkcije $\cos kx$, $\sin kx$ in tudi kompleksne funkcije e^{ikx} vse periodične s periodo 2π in velja isto za njihove linearne kombinacije (trigonometrične polinome), je tudi limitna funkcija f, če obstaja, periodična s periodo 2π. To pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Periodično funkcijo f zadošča poznati na katerem koli intervalu $[a, b)$, kjer je $b - a = 2\pi$ (perioda), npr. na intervalu $[-\pi, \pi)$ ali $[0, 2\pi)$. Obratno, poljubno funkcijo f, definirano npr. na intervalu $[-\pi, \pi)$ dolžine 2π, lahko s tega intervala razširimo do periodične funkcije (s periodo 2π) na vsej realni osi. Če je npr. funkcija f zvezna ali odvedljiva na odprtem intervalu $(-\pi, \pi)$, ima razširjena funkcija enake lastnosti tudi na vseh homolognih odprtih intervalih $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, ne pa nujno v krajiščih. Vsekakor pa to velja, kadar je za osnovno funkcijo $\lim_{x\downarrow -\pi} f(x) = \lim_{x\uparrow\pi} f(x)$ (in $\lim_{x\downarrow -\pi} f'(x) = \lim_{x\uparrow\pi} f'(x)$). Tedaj bomo preprosto rekli, da ima funkcija f *zvezno periodično razširitev* (oziroma *zvezno odvedljivo periodično razširitev*) na vso realno os.

Poljubnokrat odvedljivi funkciji f smo lahko priredili posebno potenčno vrsto, namreč njeno Taylorjevo vrsto (razvoj okrog dane točke a). Le-ta je v okolici točke a konvergirala (ali pa tudi ne) in njena vsota je bila enaka prvotni funkciji (ali pa tudi ne). Nekaj podobnega velja za integrabilne periodične funkcije na realni osi. Njim bomo priredili trigonometrično vrsto in se vprašali, kdaj ta vrsta konvergira in kaj je v tem primeru njena vsota. To prireditev pa ne bomo naredili z odvajanjem (kot pri Taylorjevi vrsti) ampak z integriranjem po ustreznem intervalu z dolžino 2π.

Pri tem ni več pomembno, po katerem intervalu $[a, b)$ dolžine 2π računamo integral periodične funkcije. Denimo, da je npr. $2k\pi \leq a < 2(k+1)\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, in $b = a - 2k\pi$. Potem je $0 \leq b < 2\pi$ in (zaradi periodičnosti funkcije f)

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(a+s)ds = \int_0^{2\pi} f(b+2k\pi+s)ds = \int_0^{2\pi} f(b+s)ds = \int_b^{b+2\pi} f(t)dt =$$

$$\int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{2\pi+b} f(t)dt = \int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_0^b f(u+2\pi)du = \int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-2\pi)dt =$$

$$\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{0} f(s)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Največkrat pa bomo vzeli poljubno funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$, in si jo mislili periodično razširjeno na vso realno os.

DEFINICIJA 1. Naj bo f integrabilna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi)$. *Fourierove koeficiente* funkcije f definiramo v *kompleksni obliki* s predpisom:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ali v *realni obliki* s predpisoma:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2...$$

Ker je funkcija f realna, so tudi števila a_n, b_n res realna, števila c_n pa v splošnem kompleksna. Hitro se lahko prepričamo, da kompleksne in realne koeficente povezujejo formule: $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ oziroma $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ $(n \geq 0)$.

DEFINICIJA 2. *Fourierova vrsta* za integrabilno funkcijo f v točki $x \in \mathbb{R}$ je trigonometrična vrsta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

katere koeficienti so ravno Fourierovi koeficienti funkcije f, dobljeni po zgornjih formulah.

Da poudarimo odvisnost koeficientov c_n od funkcije f, pogosto označimo $c_n = \widehat{f}(n)$, ustrezno Fourierovo vrsto pa označimo z $S(f)$ in njeno vrednost v točki x z izrazom $S(f, x)$. Hitro lahko preverimo, da se trigonometričnemu polinomu

$$f(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

pripadajoča Fourierova vrsta ujema s polinomom, torej $S(f, x) = f(x)$. Za vsak $m, n \in \mathbb{Z}$ veljajo namreč naslednje preproste formule:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases},$$

oziroma za vsak $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}$$

in

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt \, dt = 0.$$

Iz integralskih formul za računanje Fourierovih koeficientov takoj vidimo naslednje:

(a) Če je integrabilna funkcija f, definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, *soda*, so vsi koeficienti $b_n = 0$; v tem primeru je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz kosinusov večkratnih kotov (*kosinusna vrsta*):

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kjer je} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (n \geq 0).$$

(b) Če je integrabilna funkcija f, definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, *liha*, so vsi koeficienti $b_n = 0$; v tem primeru je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz sinusov večkratnih kotov (*sinusna vrsta*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kjer je} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n \geq 1).$$

Funkcijo f, ki je definirana samo na intervalu $(0, \pi)$, lahko torej razvijemo tako v kosinusno kot v sinusno vrsto. Najprej jo npr. dopolnimo s poljubnimi vrednostmi v krajiščih, nato nadaljujemo na interval $[-\pi, 0]$ do sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ in nazadnje periodično s periodo 2π razširimo na vso realno os. Fourierova vrsta take funkcije je po zgornjem sestavljena samo iz kosinusov. Podobno dobimo razvoj v sinusno vrsto za poljubno funkcijo f, ki je definirana na intervalu $[0, \pi)$ in je $f(0) = 0$, če jo najprej liho nadaljujemo na $(-\pi, 0)$ do lihe funkcije na $(-\pi, \pi)$.

ZGLED 1. V naslednjih primerih je funkcija f, definirana na intervalu $[-\pi, \pi)$ z danim predpisom, liha, zato je njena Fourierova vrsta sinusna. V poljubni točki x je za funkcijo:

(a) $f(x) = \text{sign}(x)$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

(b) $f(x) = x$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$;

(c) $f(x) = (\pi \text{sign}(x) - x)/2$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;

Opomba. Doslej smo govorili samo o funkcijah s periodo 2π in njihovem razvoju v vrsto po trigonometričnih funkcijah večkratnega argumenta x. Postopek pa bi lahko posplošili ter katerokoli integrabilno funkcijo s poljubnega intervala $[a, b)$ nadaljevali periodično na vso realno os s periodo $b - a$ in jo razvili v trigonometrično vrsto po kosinusih in sinusih drugačnega argumenta.

Naj bo npr. f funkcija, definirana na intervalu $[a, b)$, $a < b$, in $t = \dfrac{2\pi}{b-a}(x - \dfrac{a+b}{2})$ za $a \leq x < b$. Potem je $-\pi \leq t < \pi$ in $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(b-a)t}{2\pi}$, tako da lahko definiramo funkcijo g na intervalu $[-\pi, \pi)$ s predpisom $g(t) = f(x)$. Razvijmo funkcijo g v običajno Fourierovo vrsto, pa dobimo

$$f(x) = g(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}) + b_n \sin \frac{2n\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}),$$

torej razvoj funkcije f v trigonometrično vrsto, pri čemer koeficiente izračunamo po zgornjih formulah

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}) \, dx, \ n = 0, 1, 2, ...$$

in

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}) \, dx, \ n = 1, 2, ...$$

Zgled. Funkcija f, ki je definirana na intervalu $[0,1)$ in jo nadaljujemo na vso realno os periodično s periodo 1, ima po zgornjih formulah Fourierov razvoj

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi(x-\frac{1}{2}) + b_n \sin 2n\pi(x-\frac{1}{2}) =$$

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x).$$

Konkretno je za funkcijo $f(x) = x$ na intervalu $[0,1)$ njena Fourierova vrsta enaka $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin 2n\pi x$.

Prirejanje Fourierove vrste dani integrabilni funkciji je zaenkrat zgolj formalno. O konvergenci vrste v tem ali onem smislu bomo govorili kasneje.

Cesárove delne vsote in izrek o enoličnosti

Naj bo f integrabilna funkcija na $[-\pi,\pi)$, razširjena do periodične funkcije na vsej realni osi. Delno vsoto Fourierove vrste lahko izrazimo tudi z integralom:

$$S_n f(x) = \sum_{|k|\le n} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}dt\mathrm{e}^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{|k|\le n}\mathrm{e}^{ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Tu smo z D_n označili t.i. *Dirichletovo jedro*:

$$D_n(x) = \sum_{|k|\le n}\mathrm{e}^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $D_n(0) = 2n+1$. Dirichletovo jedro je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje n). Za njegove Fourierove koeficiente očitno velja $\widehat{D}_n(k) = 1$ za $|k| \le n$ in $\widehat{D}_n(k) = 0$ za $|k| > n$.

Različne izražave delnih vsot Fourierove vrste nam koristijo pri obravnavi konvergence Fourierovih vrst. Poleg njih pomembno vlogo igrajo tudi t.i. *Cesárove delne vsote*, ki jih definiramo preprosto kot aritmetične sredine običajnih delnih vsot:

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f.$$

Torej so tudi trigonometrični polinomi stopnje N. V vsaki točki x jih lahko zapišemo v obliki:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{|k|\le n} c_k\mathrm{e}^{ikx} = \frac{1}{N+1}\sum_{|k|\le N}\sum_{n=|k|}^{N} c_k\mathrm{e}^{ikx} =$$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{|k|\le N}(N-|k|+1)c_k\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{|k|\le N}(1-\frac{|k|}{N+1})c_k\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{|k|\le N}(1-\frac{|k|}{N+1})\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx}.$$

Ob tem naj omenimo, da se iz te izražave Cesárovih delnih vsot vidi, da je

$$\widehat{\sigma_N f}(k) = (1-\frac{|k|}{N+1})\widehat{f}(k)$$

za $|k| \leq N$ in 0 sicer, zato konvergira $\widehat{\sigma_N f}(k)$ proti $\widehat{f}(k)$ za vsak k, ko $N \to \infty$. To pomeni, da delne vsote $\sigma_N f$ enakomerno konvergirajo proti f za vsak trigonometrični polinom f. Spoznali bomo, da je to res celo za vsako zvezno funkcijo.

Tudi Cesárove delne vsote lahko izrazimo z integralom, če upoštevamo že znano integralsko izražavo navadnih delnih vsot $S_n f$:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)dt,$$

kjer smo z F_N označili ti. *Fejérjevo jedro*:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} =$$

$$\frac{1}{2(N+1)\sin^2(x/2)}\sum_{n=0}^{N} 2\sin(n+1/2)x\sin(x/2) =$$

$$\frac{1}{2(N+1)\sin^2(x/2)}(1-\cos(N+1)x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)}\right)^2$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $F_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = N+1$.

Fejérjevo jedro ima npr. naslednje koristne lastnosti:

1. F_N je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje N), ki je poleg tega pozitivna: $F_N \geq 0$.

2. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)dx = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1.$

3. $\displaystyle F_N(x) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2(x/2)} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)x^2} \leq \frac{\pi^2}{Nx^2} \leq \frac{\pi^2}{N\delta^2}$ za $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$.

TRDITEV 1. *Za zvezno periodično funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergirajo Cesárove delne vsote njene Fourierove vrste enakomerno na vsej realni osi proti f. Enakomerno po $x \in \mathbb{R}$ torej velja*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x).$$

Dokaz. Dovolj je opazovati vedenje Cesárovih delnih vsot pri $x \in [-\pi, \pi)$. Te vsote lahko v integralski obliki zapišemo tudi takole:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_N(t)dt.$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Če je δ dovolj majhen, zaradi enakomerne zveznosti funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ velja $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon/2$ za vsak $x \in [-\pi, \pi)$ in $|t| < \delta$. Upoštevajmo, da je zvezna funkcija f na kompaktnem intervalu $[-\pi, \pi]$ po absolutni vrednosti omejena, npr. s konstanto $M > 0$, in da za Fejérjevo jedro veljata oceni iz točk 2 in 3, torej $F_N(t) \leq \frac{\pi^2}{N\delta^2}$ za $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$. Izberimo še $N > 2M\pi^2/\epsilon\delta^2$. Potem je

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))F_N(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|<\delta}(f(x+t) - f(x))F_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0<\delta\leq|t|\leq\pi}(f(x+t) - f(x))F_N(t)dt$$

in zato

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x+t) - f(x)|F_N(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0<\delta\leq|t|\leq\pi}|f(x+t) - f(x)|F_N(t)dt <$$

$$\epsilon/2 + 2M\pi^2/N\delta^2 < \epsilon.$$

Torej velja $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$ enakomerno na $x \in [-\pi, \pi)$ oziroma zaradi periodičnosti kar na $\mathbb{R}$.

Zdaj lahko dokažemo **izrek o enoličnosti** za Fourierove vrste:

IZREK 1. *Če je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna periodična funkcija in $\widehat{f}(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, je $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če torej za dve zvezni funkciji velja $\widehat{f} = \widehat{g}$, je $f = g$.*

Dokaz. Za vsak N in vsak x namreč velja $\sigma_N f(x) = \sum_{|n|\le N}(1 - \frac{|n|}{N+1})\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{inx} = 0$. Potem pa je zaradi trditve 1 tudi $f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = 0$.

Opomba. Da se pokazati, da velja izrek o enoličnosti tudi za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$, tudi če ni povsod zvezna. Take so npr. nekatere funkcije iz zgleda 1).

TRDITEV 2 (**Riemann-Lebesguova lema**). *Za vsako zvezno periodično funkcijo f na realni osi $\mathbb{R}$ velja $\widehat{f}(n) \to 0$ ($|n| \to \infty$).*

Dokaz. Aproksimirajmo f s Cesárovo delno vsoto $\sigma_N f$, tako da bo $|f(x) - \sigma_N f(x)| < \epsilon$ za dovolj velik N, ne glede na to, kje je x. To lahko storimo zaradi enakomerne konvergence Cesarovih delnih vsot proti funkciji f na vsej realni osi. Naj bo naravno število $|n| > N$. Potem je $\widehat{\sigma_N f}(n) = 0$ in

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - \sigma_N f(x))\mathrm{e}^{-inx}dx| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - \sigma_N f(x)|dx < \epsilon.$$

To velja za vsak dovolj velik $|n|$, torej imamo konvergenco $\widehat{f}(n) \to 0$ ($|n| \to \infty$).

POSLEDICA. *Za zvezno funkcijo f tudi njeni realni Fourierovi koeficienti a_n,b_n konvergirajo proti nič, ko $n \to \infty$.*

Dokaz. Sledi iz enakosti $a_n = c_n + c_{-n} = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)$ in $b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$.

Riemann-Lebesguova lema velja tudi za integrabilne funkcije na $[-\pi, \pi)$. To lahko pokažemo kot posledico naslednje trditve, ki je zanimiva sama po sebi.

TRDITEV 3. *Za vsako integrabilno funkcijo $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ s Fourierovimi koeficienti c_k je vrsta $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$ konvergenta in velja*

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Dokaz. Označimo $g = f - S_n f$, kjer je $S_n f$ n-ta delna vsota Fourierove vrste za f. Ker je funkcija f realna, so realne tudi delne vsote $S_n f$, čeprav so koeficienti c_k kompleksni (spomnimo se, da je $\overline{c}_k = c_{-k}$). Zato je realna tudi funkcija g. Upoštevajmo, da je potem tudi g^2 integrabilna funkcija, in izračunajmo

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n f(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n f(x)^2 dx.$$

Ker je $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_nf(x)dx = \sum_{|k|\le n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = 2\pi \sum_{|k|\le n} |c_k|^2$ in $\int_{-\pi}^{\pi} S_nf(x)^2dx = \sum_{|k|\le n}\sum_{|j|\le n} c_kc_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+j)x}dx = 2\pi \sum_{|k|\le n} |c_k|^2$, dobimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx - 2\pi \sum_{|k|\le n} |c_k|^2.$$

Ker je $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2dx \ge 0$, dobimo iskano neenakost najprej za končno vsoto in v limiti tudi za vrsto.

POSLEDICA. *Za vsako integrabilno funkcijo* $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ *velja Riemann-Lebesguova lema, tj.* $\widehat{f}(k) \to 0$ $(|k| \to \infty)$.

Dokaz. Po trditvi 3 je $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, torej je vrsta konvergentna in zato velja $\widehat{f}(k) = c_k \to 0$, če $|k| \to \infty$.

Izreki o konvergenci Fourierovih vrst

Ni vsaka trigonometrična vrsta Fourierova za neko integrabilno funkcijo. Tako je npr. *kosinusna vrsta* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\, nx}{\ln\, n}$ Fourierova, ustrezna *sinusna vrsta* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\, nx}{\ln\, n}$ pa ne; vendar je to nekoliko težje videti. Včasih pa lahko iz lastnosti trignometrične vrste oziroma njenih koeficientov ugotovimo tudi njeno Fourierovo naravo.

TRDITEV 4. *Denimo, da trigonometrična vrsta* S *konvergira enakomerno na vsej realni osi. Potem je njena vsota* f *zvezna periodična funkcija, katere Fourierova vrsta je vrsta* S*, se pravi* $S(f) = S$.

Dokaz. Ker so členi vrste S zvezne in periodične funkcije s periodo 2π, je zaradi enakomerne konvergence na $\mathbb{R}$ tudi njena vsota f zvezna in periodična funkcija na $\mathbb{R}$ z isto periodo, torej $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_je^{ijx}$. Ko pomnožimo celo vrsto s funkcijo e^{-ikx}, dobimo vrsto $f(x)e^{-ikx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_je^{i(j-k)x}$. Dobljena vrsta še vedno konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$, torej tudi na podintervalu $[-\pi, \pi)$. Po izreku $2'$ iz razdelka 2 jo smemo členoma integrirati, integral njene vsote pa je enak vsoti vrste, sestavljene iz integralov členov. Za Fourierove koeficiente funkcije f torej dobimo za vsak k

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(j-k)x}dx = c_k.$$

To pomeni, da je S Furierova vrsta za svojo vsoto f.

ZGLED 2. Lahko se prepričamo, da je Fourierova vrsta za *zvezno* funkcijo

(a) $f(x) = |x|$, definirano na $[-\pi, \pi)$, enaka $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ in za *zvezno* funkcijo

(b) $f(x) = x^2$, definirano na $[-\pi, \pi)$, enaka $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Obe vrsti sta enakomerno konvergentni na $\mathbb{R}$, kar lahko takoj ugotovimo z Weierstrassovim kriterijem. Torej je po trditvi 4 vsaka od njiju Fourierova vrsta za njuno vsoto g, ki je zvezna periodična funkcija na $\mathbb{R}$. Po izreku o enoličnosti sledi od tod $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in [-\pi, \pi)$, se pravi, da je vsota vrste na intervalu $[-\pi, \pi)$ kar funkcija f, s katero smo začeli. To pomeni, da lahko pišemo:

(a) $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$,

(b) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$.

Poznamo torej vsoti teh dveh vrst. Če v vrsto (a) vstavimo $x = 0$, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

od koder lahko s prištetjem in odštetjem vrste $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ najdemo tudi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Isto odkrijemo tudi, če v vrsto (b) vstavimo $x = \pi$.

Če pa v vrsto (b) vstavimo $x = 0$, najdemo še vsoto alternirajoče vrste $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, ki jo lahko izpeljemo tudi iz njene absolutne predstavnice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Oglejmo si posebno preprost konvergenčni izrek za Fourierove vrste, ki pripadajo zvezno odvedljivim periodičnim funkcijam. Najprej potrebujemo naslednji rezultat o Fourierovih koeficientih takih funkcij.

TRDITEV 5. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.*

Dokaz. Z integracijo po delih dobimo za $n \neq 0$ enakost

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \mathrm{e}^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} dt = in\widehat{f}(n).$$

Upoštevali smo,da sta funkciji $f(t)$ in e^{-int} periodični, tako da zintegrirani del odpade. Za $n = 0$ pa uporabimo periodičnost funkcije f in osnovni izrek integralskega računa:

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

IZREK 2. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, velja $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.*

Dokaz. Za zvezno odvedljivo periodično funkcijo f je po zgornjem $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n) = inc_n$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Tedaj imamo po Cauchy-Schwarzovi neenakosti za vsak $m \in \mathbb{N}$ oceno

$$\sum_{0<|n|\le m} |\widehat{f}(n)| = \sum_{0<|n|\le m} \frac{1}{|n|} |nc_n| \le \left(\sum_{0<|n|\le m} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{0<|n|\le m} n^2 |c_n|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2 \right)^{1/2} \le \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Upoštevali smo zgled 2 in trditvi 3 in 5. Ker velja zgornja ocena za vsak $m \in \mathbb{N}$, dobimo iskano neenakost.

POSLEDICA. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, konvergira Fourierova vrsta $S(f)$ proti f absolutno in enakomerno na vsej realni osi.*

Dokaz. Pod danimi pogoji je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}| \le \sum_{n\neq 0} |c_n| < \infty,$$

torej je $\sum_{n\neq 0} |c_n|$ konvergentna številska majoranta Fourierove vrste, ki zato absolutno in (po Weierstrassu) enakomerno na $\mathbb{R}$ konvergira proti zvezni funkciji z istimi Fourierovimi koeficienti (glej trditev 4), se pravi proti f (izrek o enoličnosti).

V zgornji posledici je bila funkcija f zvezno odvedljiva. Če je samo zvezna, njena Fourierova vrsta ne konvergira nujno v vsaki točki, pač pa to velja, kot bomo videli, npr. za povsod odvedljivo periodično funkcijo, vendar konvergenca Fourierove vrste v tem primeru ni nujno enakomerna.

Najprej preoblikujmo Dirichletovo jedro in izpeljimo asimptotično vedenje delnih vsot Fourierove vrste za dano zvezno periodično funkcijo f. Ker za $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ velja

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} = 2\frac{\sin nt}{t} + \cos nt + (\operatorname{ctg}(t/2) - 2/t)\sin nt,$$

je za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)(\operatorname{ctg}(t/2) - 2/t)\sin nt dt.$$

Zadnja dva člena z rastočim n konvergirata proti nič po Riemannovi lemi. Upoštevjmo, da je $t \mapsto f(x+t)$ zvezna funkcija in da velja v bistvu isto za funkcijo $t \mapsto \operatorname{ctg}(t/2) - 2/t$ (z uporabo L'Hospitalovega pravila se lahko prepričamo, da limita te funkcije v točki 0 obstaja in da je $\lim_{t\to 0}(\operatorname{ctg}(t/2) - 2/t) = 0$). Zato imamo pri poljubnem $0 < \delta < \pi$ asimptotično oceno

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} \frac{f(x+t)}{t}\sin nt dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Oznaka $o(1)$ $(n \to \infty)$ pomeni, da je $\lim_{n\to\infty} o(1) = 0$. Drugi integral spet konvergira proti 0, ko $n \to \infty$, po Riemannovi lemi, saj je $t \to \frac{f(x+t)}{t}\chi_{\{t;|t|\ge\delta\}}(t)$ kot odsekoma zvezna funkcija integrabilna. Torej je končno

$$(a) \qquad S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Upoštevaje sodost funkcije $\sin nt/t$ lahko to formulo prepišemo v

$$(b) \qquad S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

V posebnem primeru $f(x) = 1$ za vsak x, ko je tudi $S_n f(x) = 1$ za vsak x, dobimo iz formule (b)

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \ (n \to \infty).$$

Odtod lahko izpeljemo naslednji rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Upoštevaje (b) lahko za poljuben $x \in \mathbb{R}$ zapišemo

$$(c) \qquad S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \ (n \to \infty).$$

Odtod dobimo potreben in zadosten pogoj za konvergenco delnih vsot Fourierove vrste funkcije f v točki x proti številu $f(x)$.

IZREK 3. *Fourierova vrsta zvezne periodične funkcije f je v točki $x \in \mathbb{R}$ konvergentna in ima vsoto $f(x)$ natanko takrat, ko za poljuben $\delta > 0$ velja*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt}{t} dt \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dokaz. Sledi takoj iz formule (c).

POSLEDICA. *Če je zvezna periodična funkcija f odvedljiva v točki $x \in \mathbb{R}$, njena Fourierova vrsta v tej točki konvergira in ima vsoto $f(x)$.*

Dokaz. Naj bo $g(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/t$ za $0 < t \leq \delta$. Ker v tem primeru obstaja limita $\lim_{t\to 0} g(t)$ in je f zvezna funkcija, je funkcija g integrabilna na intervalu $[0, \delta)$, funkcija $t \mapsto g(t)\chi_{(0,\delta]}$ pa na intervalu $[-\pi, \pi)$, zato je konvergenčni pogoj zgornjega izreka po Riemannovi lemi izpolnjen.

Druga preprosta posledica je ti. *Riemannov princip lokalizacije* za Fourierove vrste.

IZREK 4. *Če je zvezna periodična funkcija f enaka nič na intervalu $(x - \delta, x + \delta)$, je vsota njene Fourierove vrste v točki x enaka nič, tj. velja*

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = 0.$$

Dokaz. Iz (a) ali (b) dobimo v tem primeru relacijo $S_n f(x) = o(1)$ $(n \to \infty)$.

Princip lokalizacije pove, da je konvergenčno vedenje Fourierove vrste $S(f)$ v točki x odvisno samo od lokalnih lastnosti funkcije f v bližini točke x. Z dugimi besedami, dve funkciji, ki se ujemata v okolici točke x, imata Fourierovi vrsti, ki v točki x hkrati obe konvergirata ali obe divergirata.

Opomba. Zgornji izreki o konvergenci veljajo v resnici za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$ (dokaz ni bistveno težji), npr. za tako, ki je na njem omejena in odsekoma zvezna.

ZGLED. Upoštevaje zadnjo opombo lahko ugotovimo, da v zgledu 1(a),(b) ali (c) vse Fourierove vrste konvergirajo proti ustrezni $f(x)$ v vsaki točki x, kjer je ustrezna funkcija f odvedljiva. Če npr. vstavimo $x = \pi/2$, lahko v vsakem od primerov najdemo vsoto ustrezne številske vrste: $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n/(2n+1) = \pi/4$.

III. NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Pogosto opazujemo spreminjanje ene količine v odvisnosti od spreminjanja druge. Sprememba (rast) je matematično dana z odvodom ali diferencialom, torej so matematični model za določene pojave enačbe, v katerih nastopajo neznane funkcije in njihovi odvodi. Imenujemo jih *diferencialne enačbe*. Rešitve so odvedljive funkcije, ki tej enačbi zadoščajo.

Za začetek si oglejmo naslednje enačbe: $y' = \cos x$, $y' = 2y$, $y''+4y = 0$, $x^3y'''-2xy' = 1$. To so primeri *navadnih* diferencialnih enačb. Prvi dve sta prvega reda, ker nastopa samo prvi odvod; tretja enačba je drugega reda (najvišji odvod v njej je drugega reda) in četrta tretjega. Iščemo dovolj odvedljivo funkcijo, ki zadošča dani enačbi. Primer *parcialne* diferencialne enačbe drugega reda je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Tu iščemo funkcijo dveh spremenljivk $u = u(x, y)$, ki zadošča tej enačbi. Prvega izmed zgornjih primerov v resnici znamo rešiti, saj vemo, da je za poljubno konstanto C funkcija $y = \sin x + C$ taka, da je njen odvod enak funkciji kosinus. Preostale primere se bomo naučili reševati v tem in v naslednjem razdelku. Parcialne enačbe bomo pustili ob strani, obravnavali pa bomo nekaj najbolj preprostih tipov navadnih diferencialnih enačb, najprej prvega reda in kasneje drugega reda.

1. Diferencialna enačba prvega reda

To je navadna diferencialna enačba, v kateri nastopa samo prvi odvod neznane funkcije, torej enačba oblike $F(x, y, y') = 0$. Če od tod izrazimo y', dobimo enačbo v eksplicitni obliki:

$$y' = f(x, y),$$

kjer je na desni strani f znana (običajno zvezna) funkcija dveh spremenljivk. Kakšna od spremenljivk lahko tudi manjka, kot smo videli v prvih dveh primerih $y' = \cos x$ in $y' = 2y$ zgoraj.

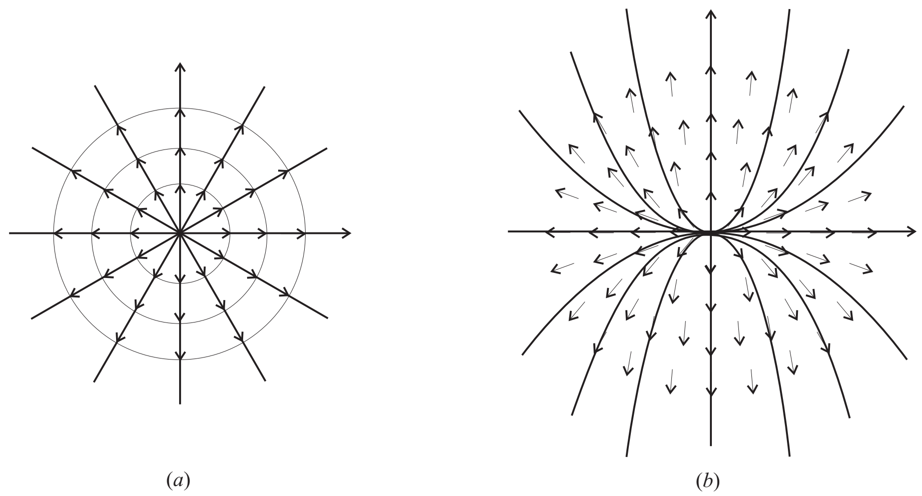
DEFINICIJA 1. Radi bi poiskali enkrat odvedljivo funkcijo, ki zadošča enačbi $y' = f(x, y)$. Vsako tako funkcijo imenujemo *rešitev* dane diferencialne enačbe, njen graf $y = y(x)$ pa *rešitvena krivulja*.

ZGLED 1. Rešitev enačbe $y' = \cos x$ je vsaka funkcija oblike $y = \sin x + C$, kjer je C konstanta, rešitev enačbe $y' = 2y$ pa funkcija oblike $y = Ce^{2x}$, o čemer se lahko takoj prepričamo z odvajanjem.

Geometrijski pomen enačbe $y' = f(x, y)$ je naslednji. Desno stran lahko izračunamo v vsaki točki (x, y) definicijskega območja funkcije f. Ker pomeni odvod naklon (smer) grafa iskane funkcije, rečemo, da je z enačbo podano *polje smeri*. To je, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri si lahko nazorno grafično predstavimo tako, da si načrtamo družino krivulj, vzdolž katerih je smer konstantna. Te krivulje imenujemo *izokline*. Če sledimo predpisani smeri od točke do točke, lahko vsaj približno narišemo tudi rešitvene krivulje. Vidimo, da je rešitvenih krivulj neskončno mnogo, odvisno od točke, v kateri začnemo.

ZGLED 2. (a) $y' = y/x$. Izokline so krivulje $y/x = k$, $k \in \mathbb{R}$, torej premice $y = kx$ skozi koordinatno izhodišče. To so hkrati tudi rešitvene krivulje, saj se smer na premici $y = kx$ ujema s k (glej sliko 20(a)).

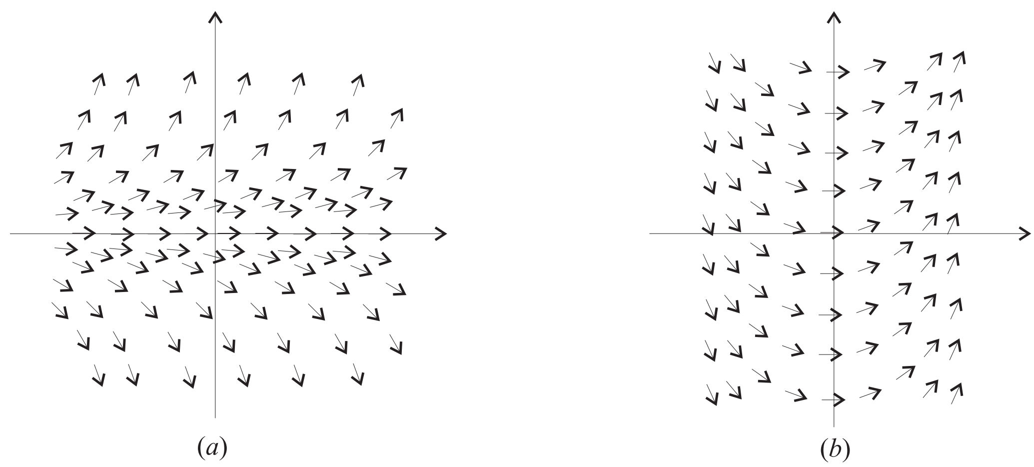
(b) $y' = 2y/x$. Tudi zdaj dobimo za izokline premice $y = kx/2$ skozi koordinatno izhodišče, same imajo naklon $k/2$, v vsaki točki na njih pa je smer rešitvenih krivulj diferencialne enačbe enaka k. Preverimo lahko, da je za vsak $C \in \mathbb{R}$ rešitev diferencialne enačbe enaka $y = Cx^2$; rešitvene krivulje torej tvorijo družino parabol skozi koordinatno izhodišče (glej sliko 20(b)).



SLIKA 20

(c) $y' = 2y$. Izokline so vodoravnene premice, rešitev diferencialne enačbe pa očitno vse funkcije oblike $y = Ce^{2x}$, rešitvene krivulje torej eksponentne (glej sliko 21(a)).

(d) $y' = 2x$. Izokline so tu navpične premice $x = k/2$, $k \in \mathbb{R}$, rešitve pa enake $y = x^2 + C$, kjer je C poljubna konstanta (glej sliko 21(b)).



SLIKA 21

Iz teh zgledov vidimo, da je rešitev diferencialne enačbe prvega reda odvisna še od ene splošne konstante C. V splošnem torej dobimo enoparametrično družino rešitvenih krivulj. Če poleg enačbe predpišemo še točko (x_0, y_0), skozi katero mora potekati rešitvena krivulja, oziroma pogoj $y(x_0) = y_0$, izberemo s tem iz dobljene enoparametrične družine eno samo rešitev, ki ustreza poleg enačbi tudi *začetnemu pogoju*.

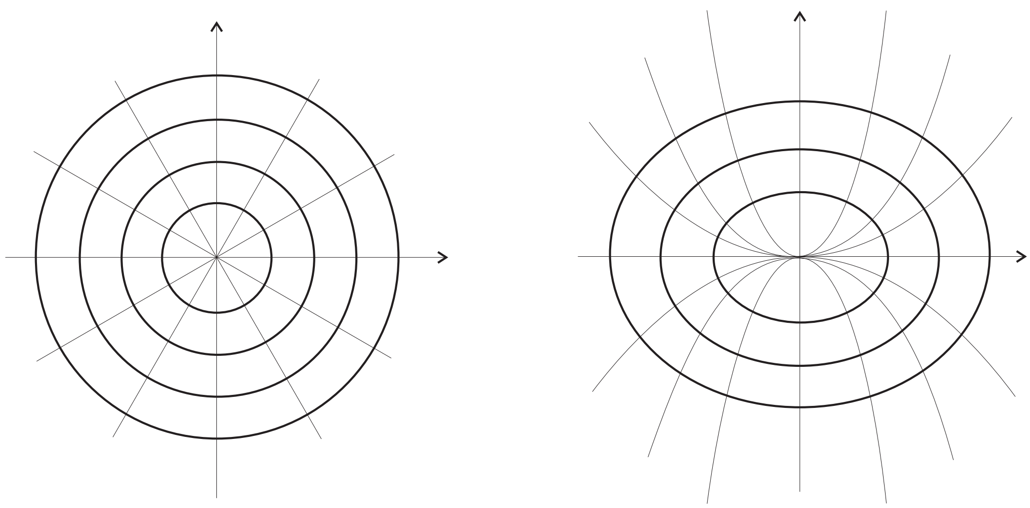
ZGLED 3. Če v prejšnjem zgledu 1(a) zahtevamo $y(1) = 1$, dobimo $k = 1$ oziroma rešitev $y = x$. Če isto zahtevamo v zgledu 1(b), dobimo $C = 1$ oziroma rešitev $y = x^2$; v zgledu 1(c) najdemo $C = e^{-2}$ in $y = e^{2(x-1)}$, v zgledu 1(d) pa $C = 0$ in $y = x^2$.

Tudi obratno vsaki enoparametrični družini krivulj ustreza diferencialna enačba 1. reda. Poiščemo jo tako, da krivulje odvajamo po spremenljivki x in iz obeh enačb izločimo konstanto C. Če npr. odvajamo funkcijo $y = Ce^{2x}$, dobimo $y' = 2Ce^{2x} = 2y$ (glej zgled 1(c)).

DEFINICIJA 2. *Ortogonalne trajektorije* dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo tisto od krivulj dane družine, ki poteka skozi to točko, pod pravim kotom.

Tej ortogonalni družini pripada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. Zaradi ortogonalnosti rešitvenih krivulj v dani točki je smer ortogonalne trajektorije v vsaki točki nasprotno obratna smeri rešitvene krivulje. Torej dobimo diferencialno enačbo za ortogonalne trajektorije tako, da v prvotni diferencialni enačbi odvod y' (ki določa smer rešitvene krivulje) nadomestimo z $-1/y'$ (ki določa pravokotno smer).

ZGLED 4. Diferencialna enačba za družino premic $y = kx$ je enačba $y' = y/x$. Diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij pa je po zgornjem $-1/y' = y/x$ oziroma $y' = -x/y$. Brez težav se s posrednim odvajanjem lahko prepričamo, da tej enačbi ustrezajo krivulje v implicitni obliki $x^2 + y^2 = r^2$, torej koncentrične krožnice s središčem v izhodišču, kar je tudi nazorno jasno (glej sliko 22(a)).



(*a*) (*b*)

SLIKA 22

Doslej še nismo spoznali nobene metode, kako diferencialno enačbo prvega reda res rešimo. Vedno to ne gre z elementarnimi analitičnimi sredstvi. Naslednji tip enačb je najpreprostejši primer enačb, ki jih lahko uženemo že z dvema integracijama.

Enačbe z ločljivimi spremenljivkami

To so enačbe oblike $y' = f(x)g(y)$, kjer sta f in g znani zvezni funkciji. Spremenljivki na desni strani sta ločeni v dva faktorja.

Naj bo $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in $G(y) = \int_{y_0}^{y} dt/g(t)$, kjer sta x_0 in y_0 poljubni realni števili, le y_0 naj bo tako, da je $g(y_0) \neq 0$, tako da je tudi $g(y) \neq 0$ za y v okolici točke y_0. Ker je $y'/g(y) = f(x)$ oziroma $y'G'(y) = F'(x)$, za vsako rešitev $y = y(x)$ diferencialne enačbe velja $[G(y(x)) - F(x)]' = 0$. Odtod vidimo, da zadošča rešitev enačbi $G(y(x)) - F(x) = C$, rešitev začetnega problema pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, od koder takoj dobimo $C = G(y_0) - F(x_0) = 0$, pa enačbi $G(y(x)) = F(x)$.

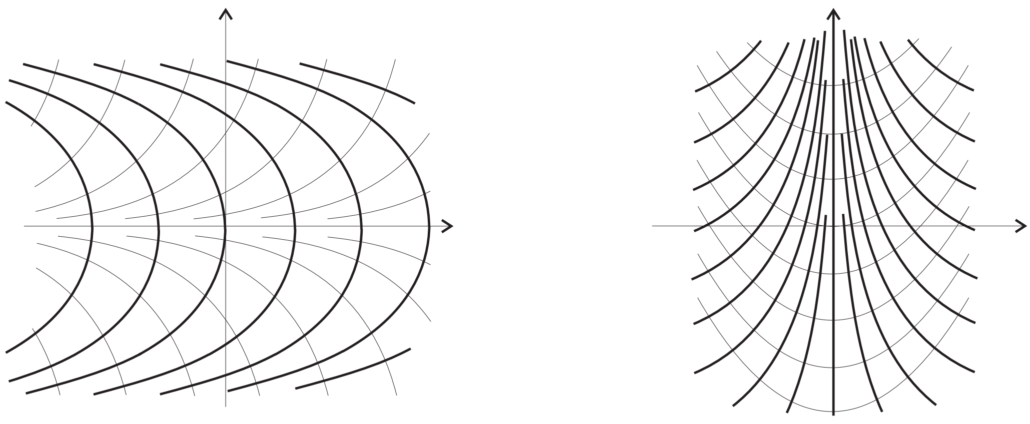
Ta premislek odkrije metodo, kako lahko rešimo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami. Če preidemo na zapis z diferenciali, lahko dosežemo, da sta spremenljivki x in y vsaka na svoji strani enačbe: $dy/g(y) = f(x)dx$. Integriramo na obeh straneh, na levi po spremenljivki y, na desni po spremenljivki x, in dobimo enačbo oblike $G(y) = F(x)+C$, kjer sta $F(x) = \int f(x)dx$ in $G(y) = \int dy/g(y)$ ustrezna nedoločena integrala. Dobljena enačba povezuje spremenljivki x in y, torej določa implicitno obliko rešitvene krivulje. Včasih, a ne vedno, nam uspe od tod eksplicitno izraziti y kot funkcijo spremenljivke x (in splošne konstante C).

ZGLED 5. Vse enačbe, ki smo jih spoznali v zgledu 2 so enačbe z ločljivimi spremenljivkami, zato jih lahko izračunamo po zgornji metodi z ločitvijo spremenljivk in z dvojno integracijo. Za enačbo $y' = y/x$ iz točke (a) npr. dobimo najprej $dy/y = dx/x$ in nato $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1$, kjer smo tudi splošno integracijsko konstanto označili z $\ln C_1$, $C_1 > 0$, tako da se potem rešitev lepše izraža kot $|y| = C_1|x|$. Ta enačba pomeni $y = \pm C_1 x$; ker pa lahko predznak skrijemo v splošno konstanto, zapišemo rešitev kar v obliki $y = Cx$. Podobno bi v primeru (b) hitro dobili $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C_1$ oziroma $y = Cx^2$.

Poiščimo še ortogonalne trajektorije rešitvenih krivulj iz tega zgleda. V primeru (a) ortogonalne trajektorije zadoščajo enačbi $y' = -x/y$, od koder najdemo $ydy = -xdx$ in z integracijo $y^2/2 = -x^2/2 + C/2$ oziroma $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, kar je družina koncentričnih krožnic. V primeru (b) je $y' = -x/2y$, od koder imamo $2ydy = -xdx$ in na koncu $x^2/2 + y^2 = C$, $C > 0$; ta enačba predstavlja družino elips z veliko polosjo $\sqrt{2C}$ in malo polosjo C (slika 22(b)).

Poseben primer enačbe z ločljivimi spremenljivkami je enačba, v kateri na desni strani nastopa samo spremenljivka x ali samo spremenljivka y, torej enačba $y' = f(x)$ ali enačba $y' = g(y)$. Rešitev prve je $y = F(x)+C$, druge pa $G(y) = x+C$, kjer sta $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in $G(y) = \int_{y_0}^{y} dt/g(t)$.

ZGLED 6. Primera sta enačbi iz zgleda 2(c) in (d). V primeru (c) je $\ln|y| = 2x + \ln C_1$ oziroma $y = Ce^{2x}$, v primeru (d) pa dobimo takoj $y = x^2 + C$, kar vse že poznamo. V primeru (c) dobimo iz enačbe $y' = -1/2y$ za ortogonalne trajektorije družino parabol $y^2 = C - x$ (slika 23(a)), v primeru (d) pa iz enačbe $y' = -1/2x$ družino krivulj $y = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$ (slika 23(b)).

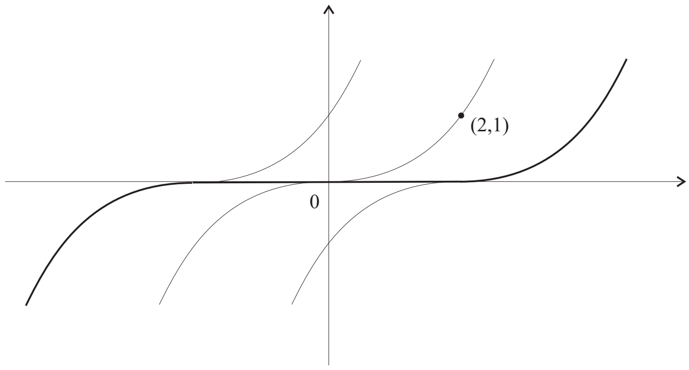


(a) (b)

SLIKA 23

Na začetku smo zahtevali, da je $g(y_0) \neq 0$ (da smo lahko integrirali funkcijo g v bližini točke y_0). Če pa je $g(y_0) = 0$, je očitno rešitev enačbe konstantna funkcija $y = y_0$. Ker je lahko funkcija $1/g(y)$ v posplošenem smislu vseeno integrabilna v okolici točke y_0, lahko dobimo več rešitev enačbe $y' = g(y)$, ki zadoščajo istemu začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$.

ZGLED 7. $y' = \sqrt{|y|}$. Tu je $g(y) = \sqrt{|y|}$ in $g(0) = 0$. Zato je poleg rešitve $y = (x - C_1)^2/4$ za $y > 0$ in $y = -(x + C_2)^2/4$ za $y < 0$ (ločiti moramo dva primera: $y \geq 0$, ko je $y' = \sqrt{y}$ in $y < 0$, ko je $y' = \sqrt{-y}$) rešitev tudi konstanta $y = 0$. Rešitve so potem tudi vse 'zlepljene' rešitve. Skozi točko $(0, 0)$ poteka npr. neskončno rešitvenih krivulj (glej sliko 24).



SLIKA 24

Vseh diferencialnih enačb seveda ne znamo rešiti analitično (z integracijo), zato je toliko bolj pomembno, da vsaj načelno vemo, da rešitev obstaja (in da je pri danem začetnem pogoju ena sama). O obstoju in enoličnosti rešitve začetnega problema za poljubno diferencialno enačbo prvega reda govori naslednji eksistenčni izrek, ki ga navajamo brez dokaza.

IZREK 1 (o eksistenci in enoličnosti): *Naj bo D odprta množica v ravnini, $(x_0, y_0) \in U$ poljubna točka in $f : D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija dveh spremenljivk, definirana na D.*
(a) *Če je f zvezna funkcija, obstaja tak odprt interval $I \subset \mathbb{R}$, in vsaj ena odvedljiva funkcija $y = y(x)$, definirana na I, da je*: (i) *$x_0 \in I$ in $y(x_0) = y_0$*, (ii) *$(x, y(x)) \in D$ za vsak $x \in I$ in* (iii) *$y'(x) = f(x, y(x))$ za vsak $x \in I$.*
(b) *Če poleg tega obstaja v okolici točke (x_0, y_0) tudi zvezen parcialni odvod $\partial f/\partial y$, je funkcija $y = y(x)$ z zgornjimi lastnostmi ena sama.*

V zgledu 7 je funkcija $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ zvezna, zato obstaja rešitev vsakega začetnega problema. Videli pa smo, da npr. pri pogoju $y(0) = 0$ rešitev ni ena sama. Razlog je v tem, da tu parcialni odvod $\partial f/\partial y = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{|y|}}$ (predznak je odvisen od predznaka za y) ne obstaja v nobeni točki $(x_0, 0)$.

Enačbe prvega reda, ki jih lahko prevedemo na enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Na enačbe z ločljivimi spremenjivkami lahko prevedemo tudi nekatere druge enačbe.

(a) V enačbo oblike

$$y' = g(y/x),$$

kjer je g poljubna zvezna funkcija, uvedemo novo spremenljivko $u = y/x$ in dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami $xu' + u = g(u)$ oziroma

$$xu' = g(u) - u.$$

Tako enačbo znamo potem rešiti po opisani metodi. Ko najdemo njeno rešitev $u = u(x)$, je potem $y = xu(x)$ rešitev prvotne diferencialne enačbe.

ZGLED 6. Rešimo na ta način diferencialno enačbo $y' = \dfrac{x^2+2y^2}{2xy}$. Ker lahko zapišemo $y' = \dfrac{1+2(y/x)^2}{2y/x}$, vidimo, da pomaga substitucija $u = y/x$ oziroma $y = xu$. Dobimo $xu' + u = \dfrac{1+2u^2}{2u} = \dfrac{1}{2u} + u$ oziroma $xu' = \dfrac{1}{2u}$. Ločimo spremenljivke in integriramo, pa je pred nami $2udu = dx/x$ in $u^2 = \ln|x| + C$. Ko spet izrazimo u z y, dobimo rešitev prvotne enačbe v implicitni obliki $y^2 = x^2(\ln|x| + C)$.

(b) Enačbo oblike
$$y' = g\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right),$$
kjer je g poljubna zvezna funkcija in $ad - bc \neq 0$, uženemo tako, da najprej poiščemo (edino) rešitev (x_0, y_0) sistema linearnih enačb $ax + by + e = 0$, $cx + dy + f = 0$ in v diferencialni enačbi zamenjamo obe spremenljivki: $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Tako dobimo novo enačbo, ki spada med enačbe iz točke (a) in jo znamo rešiti:
$$v' = g\left(\frac{au+bv}{cu+dv}\right) \quad \text{oziroma} \quad v' = g\left(\frac{a+b(v/u)}{c+d(v/u)}\right).$$

Poglejmo si še primer, ko je $ad-bc = 0$. Če je $c = d = 0$, mora biti $f \neq 0$. Tedaj je desna stran $g((ax+by+e)/f)$ konstantna (če je $a = 0$ in $b = 0$), funkcija samo spremenljivke x (če je $a \neq 0$ in $b = 0$), samo spremenljivke y (če je $a = 0$ in $b \neq 0$) ali izraza $ax + by$ (če je $a \neq 0$ in $b \neq 0$). V prvih treh primerih imamo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami, v zadnjem pa lahko nanjo takoj preidemo s substutucijo $u = ax + by$. Če pa je $c \neq 0$ (ali $d \neq 0$), pomnožimo števec in imenovalec ulomka na desni strani s c (ali z d), tako da postane desna stran funkcija samo izraza $cx + dy$, nakar uvedemo novo spremenljivko $u = cx + dy$.

ZGLED 7. Diferencialno enačbo $y' = \dfrac{x+y}{x+2y-1}$ s substitucijo $x = u - 1$ in $y = v + 1$ najprej prevedemo v enačbo $v' = \dfrac{u+v}{u+2v}$ in jo rešimo po prejšnji metodi. V enačbi $y' = \dfrac{x+y}{1-x-y}$ pa najprej pišemo $u = x + y$ in dobimo $u' = 1 + y'$ oziroma enačbo z ločljivimi spremenljivkami $u' = 1 + \dfrac{u}{1-u}$.

Primeri iz geometrije, fizike in drugih ved

1. Enačba za eksponentno rast je enačba oblike $y' = ay$ (glej zgled 1(c)). Tu pomeni y' odvod po času t, a pa je sorazmernostni faktor. Enačba pove, da je hitrost rasti dane količine y premosorazmerna sami količini. (Če je $a > 0$, gre za rast, če je $a < 0$ pa za upadanje.) Tako se vedejo (vsaj na omejenem intervalu) številni naravni pojavi; rečemo da gre za *naravno rast* (npr. rast populacije, rast lesne mase v gozdu itd.). Enačba ima ločljive spremenljivke, splošno rešitev že poznamo $y = C\mathrm{e}^t$. Začetnemu pogoju $y(0) = y_0$ pa ustreza le krivulja $y = y_0\mathrm{e}^t$.

Poseben primer take enačbe je npr. enačba
$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$
ki uravnava radioaktivni razpad. Tu je k pozitivna konstanta (npr. $1,4 \cdot 10^{-11} s^{-1}$ za radij). Rešitev $y = y_0\mathrm{e}^{-kt}$ pove, da se količina radioaktivne snovi s časom eksponentno zmanjšuje. Iz rešitve enačbe lahko npr. izračunamo *razpolovno dobo*, ko se količina radioaktivne snovi zmanjša na polovico. Vstavimo $y = y_0/2$ in dobimo $\mathrm{e}^{-kt_0} = 1/2$ oziroma $t_0 = (\ln 2)/k$ (pri radiju $\sim 5 \cdot 10^{10} s \approx 2000$ let).

2. Na enačbe z ločljivi spremenljivkami pogosto naletimo pri reševanju geometrijskih problemov. Poiščimo npr. krivulje, katerih odsek na normali je konstanten (enak a). Odsek na normali je dolžina daljice na normali med presečiščem normale s krivuljo $y = y(x)$ in presečiščem z abscisno osjo. Izračunamo ga po formuli $y\sqrt{1+y'^2}$, kjer je y ordinata ustrezne točke, v kateri potegnemo normalo. Diferencialna enačba se torej glasi $y\sqrt{1+y'^2} = a$, od koder najprej izrazimo y' in nato ločimo spremenljivke. Na koncu dobimo implicitno rešitev $(x+c)^2 + y^2 = a^2$, kjer je c poljubna konstanta. Iskane krivulje so torej krožnice s polmerom a in središčem $-c$ na abscisni osi.

3. V epidemiologiji nas zanima število zdravih osebkov $x(t)$ in število bolnih osebkov $y(t)$ v trenutku t v neki populaciji velikosti N. Predpostavimo, da je v začetku (v trenutku $t = 0$) v populaciji samo en bolan in $N-1$ zdravih osebkov. Hitrost okužbe je v vsakem trenutku premosorazmerna številu stikov med zdravimi in obolelimi osebki, torej (pri idealnem mešanju osebkov) produktu zdravih in bolnih osebkov. Obolevanje potemtakem uravnava diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami $\frac{dy}{dt} = kxy$, kjer je $k > 0$ oziroma

$$y' = k(N-y)y$$

(upoštevajmo, da je v vsakem trenutku $x + y = N$). Njena rešitev, ki zadošča tudi začetnemu pogoju $y(0) = 1$, je

$$y(t) = \frac{N\mathrm{e}^{kNt}}{N-1+\mathrm{e}^{kNt}}.$$

Graf te funkcije je t.i. *logistična krivulja* (v obliki ležeče črke S), ki se pojavi pri omejeni rasti. Sama enačba pa je poseben primer diferencialne enačbe oblike $y' = ay(1-y/K)$, $a, N > 0$, ki ji rečemo *logistična enačba.* Zakonitosti v zvezi z logistično enačbo in logistično funkcijo je odkril in raziskal belgijski matematik P.F. Verhulst že leta 1838.

Zanimiva je tudi krivulja $y = y'(t)$, ki meri hitrost obolevanja. Maksimum ima pri $t_1 = \frac{1}{kN}\ln(N-1)$, ko je $y(t_1) = N/2$, in je enak $kN^2/4$. To lahko vidimo kar iz diferencialne enačbe $y' = k(N-y)y$, saj ima funkcija $(N-y)y$ maksimum $N^2/4$ pri $y = N/2$. Torej je hitrost obolevanja največja takrat, ko je obolelih približno polovica osebkov (kar je logično).

2. Linearna diferencialna enačba prvega reda

To je enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kjer sta $f(x)$ in $g(x)$ dani zvezni funkciji. Enačba je *homogena*, če je $g(x) = 0$ in *nehomogena*, če je $g(x) \neq 0$. Homogena enačba ima ločljive spremenljivke in jo že znamo rešiti.

IZREK 2. *Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda je*

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}[\int_{x_0}^{x} g(s)e^{\int_{x_0}^{s} f(t)dt}ds + C].$$

Dokaz. Kot prej označimo $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in pomnožimo obe strani enačbe z $e^{F(x)}$. Dobimo: $[ye^{F(x)}]' = g(x)e^{F(x)}$, od koder najdemo z integracijo

$$y = e^{-F(x)}[\int_{x_0}^{x} g(s)e^{F(s)}ds + C] = \int_{x_0}^{x} g(s)e^{F(s)-F(x)}ds + Ce^{-F(x)}.$$

Vidimo, da je splošna rešitev oblike $y = y_1(x) + Cy_0(x)$, kjer je $y_1(x)$ *posebna* (*partikularna*) rešitev nehomogene enačbe in $y_0(x) = e^{F(x)}$ (ena izmed netrivialnih) rešitev homogene enačbe (ko je $g(x) = 0$).

Linearno diferencialno enačbo rešujemo tako, da najprej poiščemo splošno rešitev $y = Cy_0$ homogene enačbe. Nehomogeno enačbo potem lahko rešujemo na dva načina:

1. Če uganemo eno (partikularno) rešitev y_1, je splošna rešitev oblike $y = y_1 + Cy_0$. Razlika $y - y_1$ dveh rešitev nehomogene enačbe namreč vedno reši homogeno enačbo. Če npr. poznamo celo dve linearno neodvisni (se pravi, da ena ni večkratnik druge) partikularni rešitvi y_1 in y_2, lahko potem splošno rešitev nehomogene enačbe zapišemo kar brez integracije: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

2. Partikularno rešitev lahko poiščemo z metodo *variacije konstante*. Kot samo ime pove, variiramo konstanto, ki nastopa v splošni rešitvi $y = Cy_0(x)$ homogene enačbe, tj. C smatramo za funkcijo, in ta nastavek vstavimo v prvotno nehomogeno enačbo. Iz nje najprej izračunamo C' in z integracijo še $C = C(x) + C_1$. Torej je potem splošna rešitev nehomogenew enačbe prvega reda enaka $y = (C(x) + C_1)y_0(x) = C(x)y_0(x) + C_1y_0(x)$, kjer je C_1 sedaj prava konstanta, $y_1 = C(x)y_0(x)$ pa posebna (partikularna) rešitev nehomogene enačbe.

ZGLED 8. (a) Za enačbo $(1-x)y' + y = 1$ takoj uganemo dve rešitvi: $y_1 = 1$ in $y_2 = x$. Torej je potem njena splošna rešitev enaka $y = 1 + C(x-1)$, kjer je C poljubna konstanta.
(b) Enačba $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$ ima homogeni del enak $y' - y = 0$, kar je enačba z ločljivimi spremenljivkami in s splošno rešitvijo $y = C\mathrm{e}^x$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko takoj uganemo: $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$ (z odvajanjem se lahko prepričamo, da res zadošča prvotni enačbi). Torej je splošna rešitev $y = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.
Do iste rešitve bi lahko prišli tudi z variacijo konstante. Odvajamo funkcijo $y = C(x)\mathrm{e}^x$ in vstavimo v enačbo, pa dobimo $C'\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x - C\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$ oziroma $C' = \mathrm{e}^x$, se pravi $C(x) = \mathrm{e}^x + C$. Torej je $y = (\mathrm{e}^x + C)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.
(c) Homogeni del enačbe $xy' + y = \sin x$ hitro rešimo in dobimo $y = C/x$. Ker rešitve nehomogene enačbe zdaj ne moremo kar takoj uganiti, uporabimo metodo variacije konstante. Z nastavkom $y = C(x)/x$ gremo v enačbo in najdemo $C'(x) = \sin x$, $C(x) = -\cos x$ in $y = (-\cos x + C)/x = -\cos x/x + C/x$.
Konkretno diferencialno enačbo rešimo še hitreje, če opazimo, da velja $(xy)' = \sin x$, od koder z eno samo integracijo najdemo $xy = -\cos x + C$, kar nam da isto splošno rešitev kot prej.

Opomba. Včasih je koristno enačbo pomnožiti z ustreznim faktorjem, tako da na levi strani dobimo odvod neke funkcije. V primeru (b) npr. enačbo pomnožimo z e^{-x}, pa imamo $(ye^{-x})' = e^x$. Integriramo obe strani in dobimo $ye^{-x} = e^x + C$ oziroma $y = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.

Tako kot v zadnjem primeru lahko ravnamo pogosto tudi, ko enačba ni linearna.

ZGLED 9. Enačbo $y' = 1/y - y/2x$ npr. pomnožimo z $2xy$ in zadnji člen prenesimo na levo stran, da dobimo enačbo $2xyy' + y^2 = 2x$. Ker je leva stran zdaj enaka $(xy^2)'$, takoj sledi rešitev v implicitni obliki $xy^2 = x^2 + C$.

Bernoullijeva enačba.

Nekatere diferencialne enačbe se s primerno substitucijo prevedejo na linearne enačbe prvega reda, med njimi npr. ti. *Bernoullijeva enačba*

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \ n \neq 1.$$

Tu uvedemo novo odvisno spremenljivko $z = 1/y^{n-1}$.

ZGLED 10. (a) Iz enačbe $xy' + y = y^2$ dobimo z uvedbo spremenljivke $z = 1/y$ enačbo $-xz' + z = 1$, ki jo hitro uženemo, saj ima celo ločljive spremenljivke. Dobimo $z = 1 + Cx$ oziroma $y = 1/(1 + Cx)$.

(b) Tudi logistična enačba $y' = ay(1 - y/N)$ je take oblike, saj jo lahko zapišemo $y' - ay = -ay^2/N$. Delimo z $-y^2$ in uvedemo novo odvisno spremenljivko $z = 1/y$, pa dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda $z' + az = a/N$. Pri začetnem pogoju $z(0) = 1$ je njena rešitev $z = (1 + (N-1)\mathrm{e}^{-ax})/N$, od koder dobimo za y rešitev

$$y = \frac{N}{1 + (N-1)\mathrm{e}^{-ax}}.$$

Rešitve v parametrični obliki

Marsikatero implicitno podano diferencialno enačbo prvega reda lahko uženemo, če njeno rešitev poiščemo v parametrični obliki $x = x(t)$, $y = y(t)$.

ZGLED 11. (a) Enačbo $y'^2 + 4y^2 = 4A^2$ npr. lahko rešimo tako, da pišemo $y = A\cos t$, $y' = 2A\sin t$ in potem na dva načina izračunamo $dy = y'dx$. Dobimo $-A\sin t\,dt = 2A\sin t\,dx$ oziroma $-dt = 2dx$ in odtod $t = -2x + C$. Torej je $y = A\cos(2x + C)$. Parametrična oblika rešitve je torej $x = (C - t)/2$, $y = A\cos t$, eksplicitna pa $y = A\cos(2x + C)$. Iz začetnega pogoja $y(0) = A$, $y'(0) = 0$ npr. dobimo $\cos C = 1$, $\sin C = 0$, se pravi $C = 0$, in tako rešitev $y = A\cos 2x$.

(b) V nalogi o konstantnem odseku normale iz enega od prejšnjih primerov sprašujemo po funkciji y, za katero velja $y\sqrt{1 + y'^2} = a$. Enačba je izpolnjena, če pišemo $y = a\cos t$ in $y' = \mathrm{tg}\,t$. Zdaj dobimo $dx = -a\cos t\,dt$, od koder najdemo $x = -a\sin t + C$, $y = a\cos t$ oziroma $(y - C)^2 + y^2 = a^2$.

(c) Podobna naloga o konstantnem odseku tangente zahteva funkcijo y, ki zadošča diferencialni enačbi $ay' = y\sqrt{1 + y'^2}$. Zdaj vstavimo $y = a\sin t$, $y' = \mathrm{tg}\,t$ in dobimo $dx = dy/y' = a\cos^2 t\,dt/\sin t = a(1/\sin t - \sin t)dt$. Pri začetnem pogoju $x(0) = 0$, $y(0) = a$ dobimo

$$x = a(\ln|\mathrm{tg}(t/2)| + \cos t), \quad y = a\sin t.$$

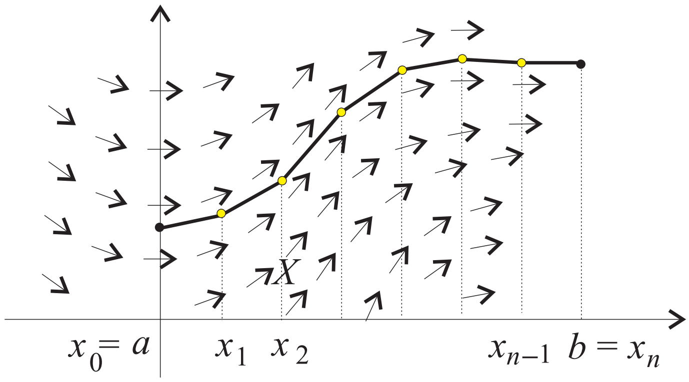
Ustrezna krivulja se imenuje *traktrisa.*

Numerično reševanje diferencialnih enačb

Omenili smo že, da diferencialne enačbe ne moremo vedno rešiti analitično, tj. z eno ali dvema intgracijama, čeprav vemo, da rešitev obstaja vsaj lokalno, v bližini začetnega pogoja (to nam npr. zagotavlja eksistenčni izrek). V tem primeru nam, podobno kot pri integriranju funkcij, preostanejo samo numerične metode.

Numeričnih metod za reševanje diferencialnih enačb je veliko in mnoge med njimi so zelo učinkovite. Tu si oglejmo le z najpreprostejšo in najstarejšo med njimi, ki temelji na ideji, kako narišemo rešitveno krivuljo sledeč polju smeri v ravnini.

Radi bi npr. poiskali približek rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ na intervalu $[a, b]$. Interval razdelimo na n podintervalov (običajno enake dolžine $h = (b - a)/n$). V začetni točki (x_0, y_0) imamo predpisano smer $f(x_0, y_0)$ in izračunamo $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$. Zdaj začnemo v točki (x_1, y_1) in tako nadaljujemo: vedno izračunamo naslednjo vrednost po formuli $y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Na novo izračunana točka nam določi novo smer, ki ji sledimo do naslednje točke, dokler ne prispemo do točke $x_n = b$ oziroma do konca intervala. Te vrednosti tabeliramo, lahko pa jih tudi predstavimo s ti. *Eulerjevim poligonom*, ki pomeni nazoren približek za rešitven krivuljo (glej sliko 25).



SLIKA 25

3. Diferencialna enačba drugega reda

Diferencialne enačbe drugega reda je veliko težje rešiti kot enačbe prvega reda. Obstaja pa nekaj metod, ki omogočajo, da jim znižamo red, in tudi nekaj tipov enačb, ki jih lahko rešimo neposredno.

Znižanje reda

Včasih lahko enačbi drugega reda znižamo red. To pomeni, da jo z ustrezno substitucij spremenimo v enačbo prvega reda, ki jo morda znamo rešiti in na ta način uženemo tudi prvotno enačbo. To gre v naslednjih primerih:

(a) $y'' = f(x)$; s substitucijo $y' = z$ dobimo $z' = f(x)$ in odtod $z = \int f(x)dx + C = F(x) + C$. S ponovno integracijo dobimo $y = \int F(x)dx + Cx + D$.

(b) $F(x, y', y'') = 0$; z enako izbiro $y' = z$ najdemo $y'' = z'$ in odtod enačbo prvega reda $F(x, z, z') = 0$. Ko enkrat poznamo $z = z(x; C)$, je $y = \int z(x; C)dx + D$.

(c) $F(y, y', y'') = 0$; ponovno vzamemo $y' = z$ in hkrati izberemo y za neodvisno spremenljivko, tako da iščemo $z = z(y)$ kot funkcijo spremenljivke y. Imamo $y'' = dz/dx = (dz/dy)(dy/dx) = z\dot{z}$ in zato rešujemo diferencialno enačbo $F(y, z, z\dot{z}) = 0$.

(d) $F(x, y, y', y'') = G(x, y, y')'$ (leva stran je odvod nekega izraza, kjer je najvišji odvod reda ena); tedaj preposto dobimo $G(x, y, y') = C$.

ZGLED 12. Oglejmo si npr. enačbo

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

ki opisuje lastno harmonično nihanje (npr. pri majhnih odklonih matematičnega nihala). Naj bosta začetna pogoja $y(0) = A$ in $y'(0) = 0$.

Pomnožimo enačbo z $2y'$, da najdemo $(y'^2)' + \omega_0^2(y^2)' = 0$ oziroma $y'^2 + \omega_0^2 y^2 = C^2$. Začetni pogoj nam da $C = \omega_0^2 A^2$. Ta enačba sicer ni linearna, vendar jo lahko skušamo rešiti z nastavkom $y = A\sin\phi$, ki ga vstavimo v enačbo in po krajšem računu dobimo $\phi' = \pm\omega_0$ oziroma $\phi = \omega_0 x + C_1$. Ker želimo, da je $y'(0) = 0$, mora biti $C_1 = \pi/2$ in zato rešitev $y = A\sin(\omega_0 + \pi/2) = A\cos\omega_0 x$.

Ob isti enačbi lahko ravnamo tudi drugače: v enačbo $y'' + \omega_0^2 y = 0$ uvedemo substitucijo $y' = z$ in ravnamo kot v točki (c). Dobimo $z\dot{z} + \omega_0^2 y = 0$; pomnožimo enačbo z 2 in členoma integriramo po y, da najdemo $z^2 + \omega_0^2 y^2 = C$ oziroma $y'^2 + \omega_0^2 y^2 = C$. Nadaljnje reševanje poteka kot prej.

Linearna diferencialna enačba drugega reda

Linearna enačba drugega reda je enačba oblike

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x),$$

kjer so koeficienti $a(x), b(x), c(x)$ in $d(x)$ znane zvezne funkcije neodvisne spremenljivke, pri čemer ne sme biti $a(x) = 0$ za vsak x. Običajno jo zapišemo v naslednji obliki, ki je bolj podobna standardni obliki linearne diferencialne enačbe prvega reda:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x).$$

Če je $h = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa nehomogena. Pri homogeni enačbi bi morali najprej poiskati dve primerni (tj. linearno neodvisni) rešitvi $y_1 = y_1(x)$ in $y_2 = y_2(x)$, kar je precej težje kot pri enačbi prvega reda. Splošna rešitev homogene enačbe je potem linearna kombinacija linearno neodvisnih rešitev: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Da rešimo nehomogeno enačbo moramo poznati poleg tega še eno posebno (partikularno) rešitev $y_0 = y_0(x)$. Potem je splošna rešitev nehomogene enačbe enaka $y = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

ZGLED 13. Za homogeno enačbo $x^2y'' - 2y = 0$ sta npr. linearno neodvisni rešitvi funkciji $y_1 = x^2$ in $y_2 = 1/x$; torej je njena splošna rešitev enaka $y = C_1x^2 + C_2/x$. Ker je posebna rešitev homogene enačbe $x^2y'' - 2y = 2$ enaka $y_0 = -1$, je potem njena splošna rešitev enaka $y = -1 + C_1x^2 + C_2/x$.

Linearni diferencialni enačbi lahko znižamo red, če poznamo eno rešitev homogene enačbe. Naj bo npr. z taka rešitev, torej $z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$.

Pišimo $y = uz$, odvajajmo dvakrat po x in vstavimo v prvotno linearno diferencialno enačbo. Dobimo
$y' = zu' + z'u$, $y'' = zu'' + 2z'u' + z''u$ in $zu'' + 2z'u' + z''u + f(x)(zu' + z'u) + g(x)zu = h(x)$ oziroma

$$zu'' + (2z' + f(x)z)u' + (z'' + f(x)z' + g(x))u = h(x).$$

Ker je zadnji oklepaj enak nič, dobimo enačbo $zu'' + (2z' + f(x)z)u' = h(x)$, ki ji lahko z vpeljavo spremenljivke $v = u'$ znižamo red kot v točki (b) in linearno enačbo prvega reda za v rešimo. Z integracijo dobimo u, tako da je potem $y = zu$.

ZGLED 14. (a) Od prej vemo, da ima enačba $y'' + \omega_0^2 y = 0$ eno rešitev (pri $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ enako $z = \cos\omega_0 x$. Vstavimo $y = u\cos\omega_0 x$ vanjo in dobimo enačbo $u''\cos\omega_0 x - 2\omega_0 u'\sin\omega_0 x = 0$, ki jo rešimo s substitucijo $v = u'$ in dvema integracijama: $u = C_1 \mathrm{tg}\omega_0 x + C_2$, tako da imamo na koncu splošno rešitev $y = C_1\sin\omega_0 x + C_2\cos\omega_0 x$.

(b) Podobno ima homogena enačba $x^2y'' - 2y = 0$ iz zgleda 13 eno rešitev enako $z = x^2$. Z zamenjavo $y = x^2u$ in pridemo do enačbe $x^4u'' + 4x^3u' = 2$ oziroma $(x^4u')' = 2$, ki jo zlahka rešimo in tako ponovno najdemo splošno rešitev nehomogene enačbe $x^2y'' - 2y = 2$.

Teorija linearnih diferencialnih enačb drugega (in višjega) reda je lepa in dobro razvita, s praktičnim reševanjem takih enačb pa je v splošnem veliko dela, zato se tu vanj ne bomo spuščali. Na kratko si bomo ogledali le metodo reševanja linearne diferencialne enačbe z razvojem v potenčno vrsto, kasneje pa še poseben razred linearnih enačb drugega reda s konstantnimi koeficienti, kjer lahko o rešitvah povemo več.

Iskanje rešitve v obliki potenčne vrste

Včasih lahko najdemo rešitev diferencialne enačbe, zlasti enačbe drugega reda, v okolici točke a v obliki potenčne vrste $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$. Koeficiente seveda določimo tako, da bo zadoščeno enačbi in začetnemu pogoju.

ZGLED 14. (a) Rešujmo npr. začetni problem $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. V enačbo vstavimo nastavek v obliki vrste $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Začetni pogoj seveda pomeni, da je $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$. Predpostavimo, da vrsta v okolici točke 0 konvergira, tako da jo smemo tam členoma dvakrat odvajati in rezultat vstaviti v enačbo. Dobimo

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 4\sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k = 0$$

oziroma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (4c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2})x^k = 0.$$

Iz rekurzivne formule $c_{k+2} = -4c_k/(k+2)(k+1)$, $k = 0, 1, 2, ...$, vidimo, da so vsi lihi koeficienti enaki nič: $c_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$, in sodi enaki $c_{2k} = (-1)^{k-1}4^k/(2k)!$, $k \geq 0$. Rešitev diferencialne enačbe je torej enaka potenčni vrsti

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^k x^{2k}/(2k)! = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2x)^{2k}/(2k)!,$$

v kateri hitro prepoznamo kosinusno vrsto. Torej je rešitev začetnega problema funkcija $y = \cos 2x$.

(b) Z nastavkom $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ poskušajmo rešiti tudi enačbo $xy'' + y' + xy = 0$ pri istem začetnem pogoju $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, kot v prvem primeru. Na podoben način kot prej, le z nekaj več dela, ugotovimo, da zadošča diferencialni enačbi funkcija, ki je podana s potenčno vrsto

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x/2)^{2k}/(k!)^2.$$

Tako ali drugače, najlaže pa s kvocientnim kriterijem za absolutno konvergenco vrste, spoznamo, da vrsta konvergira na vsej realni osi in zato definira poljubnokrat odvedljivo funkcijo na $\mathbb{R}$, ki pa je še ne poznamo. Ta nova, neelementarna, funkcija je pač rešitev danega začetnega problema.

Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

Kot pove samo ime, so to linearne diferencialne enačbe oblike

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in f znana zvezna funkcija neodvisne spremenljivke x. Če je $f = 0$, je enačba *homogena*, sicer *nehomogena*.

Homogeno enačbo rešujemo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Ko ga vstavimo v enačbo in krajšamo z eksponentnim faktorjem, dobimo t.i. *karakteristično enačbo*

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

ki ima v splošnem dva (lahko tudi enaka) kompleksna korena λ_1 in λ_2. Karakteristično enačbo dobimo iz diferencialne enačbe torej tako, da namesto i-tega odvoda neznane funkcije y zapišemo i-to potenco neznanke λ.

Splošna rešitev homogene enačbe je odvisna še od dveh poljubnih konstant in je oblike

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

če sta korena različna, in

$$y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

če sta korena enaka λ. Preprosto se je prepričati, da je to res rešitev enačbe. Za dokaz dejstva, da drugih rešitev ni, pa bi morali morali poznati nekaj več teorije takih enačb, čemur se odpovejmo.

Splošna rešitev nehomogene enačbe je potem oblike $y = y_1 + y_h$, kjer je y_h splošna rešitev homogene enačbe in y_1 ena od rešitev nehomogene enačbe. To posebno ali, kot rečemo *partikularno* rešitev včasih uganemo, ali pa pridemo do nje po podobni metodi *variacije konstant*, kot pri linearni enačbi 1. reda. Izpeljavi metode se tu odpovejmo, kasneje jo bomo ilustrirali na posebnem zgledu.

Kadar sta korena karakteristične enačbe kompleksna, sta konjugirano kompleksna $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ker ima enačba realne koeficiente. V tem primeru lahko namesto kompleksne oblike splošne rešitve homogene (ali nehomogene) enačbe zapišemo realno obliko:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) =$$
$$C_1' e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2' e^{\alpha x}\sin\beta x$$

kjer je $C_1' = C_1 + C_2$ in $C_2' = i(C_1 - C_2)$. S primerno transformacijo:

$$A = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} \text{ in } C_1' = A\cos\delta,\ C_2' = -A\sin\delta$$

lahko rešitev zapišemo tudi v obliki $y = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \delta)$.

ZGLED 15. (a) Rešimo npr. enačbo

$$y'' + 4y = \sin x.$$

Karakteristična enačba je $\lambda^2 + 4 = 0$, ki ima konjugirano kompleksni rešitvi $\lambda_1 = 2i$ in $\lambda_2 = -2i$. Splošna rešitev homogene enačbe je torej $y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko uganemo, saj mora biti v zvezi s sinusno funkcijo; z nastavkom $y_1 = a\sin x$ določimo $a = 1/3$ in dobimo $y_1 = \frac{1}{3}\sin x$. Torej je splošna rešitev $y = \frac{1}{3}\sin x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

Kako bi na tem primeru uporabili metodo variacije konstant? V formuli za splošno rešitev homogene enačbe imejmo C_1 in C_2 za funkciji spremenljivke t. Z odvajanjem na x dobimo

$$y' = C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x - 2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x.$$

Zahtevajmo $C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0$, pa imamo $y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$. S ponovnim odvajanjem najdemo

$$y'' = -2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x - 4c_1\cos 2x - 4c_2\sin 2x.$$

To vstavimo v prvotno enačbo, pa dobimo $-C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \sin x$, kar je še druga enačba za odvoda C_1' in C_2'. Iz sistema dveh linearnih enačb $C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0$ in $-C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \sin x$ izračunamo

$$C_1' = -\cos x\sin^2 x,\quad C_2' = \cos^2 x\sin x - \frac{1}{2}\sin x,$$

integriramo, da dobimo

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1,\quad C_2(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}\cos x + C_2$$

(kjer sta C_1,C_2 res konstanti) in končno

$$y = \frac{1}{3}\sin x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

(b) Enačba

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$$

opisuje lastno dušeno nihanje matematičnega nihala (pri majhnih odklonih iz mirovne lege). Tu je $\alpha > 0$ koeficient dušenja in ω_0 krožna frekvenca nihala. Korena karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ sta

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \alpha + i\beta \text{ in } \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - i\beta,$$

kjer je $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Lahko ločimo tri primere:

(i) $\alpha^2 > \omega_0^2$ (močno dušenje); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta realni, negativni in med seboj različni. Splošna rešitev je oblike $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$,

(ii) $\alpha^2 = \omega_0^2$ (mejni primer); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta realni: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Splošna rešitev je oblike $y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-\alpha x}$, .

(iii) $\alpha^2 < \omega_0^2$ (šibko dušenje); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta konjugirano kompleksni: $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$. Splošna rešitev je oblike $y = A\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\beta x + \delta)$,

Samo v zadnjem primeru gre za pravo (dušeno) nihanje. Če pa bi bil $\alpha = 0$, dušenja ne bi bilo in bi imeli harmonično nihanje.

Eulerjeva diferencialna enačba

Na diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko prevedemo naslednjo linearno diferencialno enačbo, ki se imenuje po Eulerju:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x).$$

Vpeljemo novo neodvisno spremenljivko $t = \ln x$. Potem je $y' = dy/dx = dy/dt{\cdot}dt/dx = \dot{y}/x$ oziroma $xy' = \dot{y}$ ter $x^2y'' = x(xy')' - xy' = \ddot{y} - \dot{y}$. Tako pridemo do linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$a\ddot{y} + (b - a)\dot{y} + cy = f(e^t),$$

ki jo znamo reševati po prejšnji metodi.

ZGLED 16. (a) Enačba $x^2y'' - 2y = 0$ iz zgleda 13 je Eulerjeva. Zzamenjavo neodvisne spremenljivke $t = \ln x$ dobimo enačbo s konstantnimo koeficienti $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima korena $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -1$, tako da je splošna rešitev enaka $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} = C_1x^2 + C_2/x$.

(b) S substitucijo $t = \ln x$ preoblikujmo enačbo $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ v enačbo $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$, ki ima karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ s koreni $\lambda = 1 \pm i$, kar nam da splošno rešitev $y = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$. Prvotno Eulerjevo diferencialno enačbo potem reši splošna funkcija oblike $y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)$.

(c) Enačba $x^3y''' - 2xy' = 1$, ki smo jo omenili čisto na začetku poglavja je sicer tretjega reda, vendar jo s substitucijo $y' = z$ takoj preoblikujemo v Eulerjevo enačbo drugega reda $x^2z'' - 2z = 1/x$. Še ena zamenjava $t = \ln x$ privede do enačbe $\ddot{z} - \dot{z} - 2z = e^{-t}$ s konstantnimi koeficienti in karakterističnim polinomom $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Splošna rešitev zadnje enačbe je $z = (C_1 - t)e^{-t}/3 + C_2e^{2t}$ oziroma $z = \dfrac{C_1 - \ln x}{3x} + C_2x^2$. splošna rešitev prvotne enačbe pa $y = -\dfrac{\ln^2 x}{6} + \dfrac{C_1\ln x}{3} + \dfrac{C_2x^3}{3} + C_3$.

Sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti

Pogosto se hkrati spreminja več količin v odvisnosti od časa in od teh količin samih. Denimo, da gre za dve količini x, y in da je hitrost spreminjanja od njiju linearno odvisna, pri čemer so koeficienti konstantni. Tedaj govorimo o sistemu dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. To je sistem oblike

$$x' = ax + by + f(t)$$

$$y' = cx + dy + g(t)$$

kjer so a, b, c, d znana realna števila in f, g znani zvezni realni funkciji. Neodvisno spremenljivko smo zdaj označili s t.

Če uvedemo vektorske oznake $z = (x,y)^{\perp}$, $z' = (x',y')^{\perp}$, $h(t) = (f(t),g(t))^{\perp}$ in $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, lahko sistem zapišemo v matrični obliki: $z' = Az + h(t)$. Kadar je $h(t) = 0$, govorimo o *homogenem* sistemu, sicer pa je sistem *nehomogen*.

Sistem dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda lahko takoj prevedemo na eno linearno diferencialno enačbo 2. reda. Oglejmo si npr. homogeni sistem:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy.$$

Če je $b = 0$, najprej rešimo prv enačbo, ki ne vsebuje spremenljivke y. Ko poznamo x kot funkcijo spremenljivke t, vstavimo to v drugo enačbo, ki postane nehomogena linearna enačba prvega reda, in jo rešimo.

Pa naj bo $b \neq 0$. Prvo enačbo odvajamo, nato iz obeh enačb prvega reda izločimo y, nazadnje pa iz te in iz odvajane enačbe izločimo še y', pa dobimo za x enačbo drugega reda

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

ki ima karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Brez posebnih težav se lahko prepričamo, da je ta enačba enaka enačbi $\det(\lambda I - A) = 0$, kjer je A matrika zgornjega sistema. Torej je leva stran karakteristične enačbe enaka karakterističnemu polinomu matrike A, kot ga poznamo iz linearne algebre, korena λ_1, λ_2 karakteristične enačbe pa sta lastni vrednosti matrike A.

Splošna rešitev za x je za $\lambda_1 \neq \lambda_2$ enaka

$$x = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

za $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ pa

$$x = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Rešitev za y potem poiščemo iz ene izmed prvotnih enačb, npr. iz prve. Dobimo:

$$y = (x' - ax)/b = D_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + D_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

kjer je $D_1 = (\lambda_1 - a)C_1/b$ in $D_2 = (\lambda_2 - a)C_2/b$, v primeru $\lambda_1 \neq \lambda_2$, in

$$x = (D_1 + D_2 t)e^{\lambda t},$$

kjer je $D_1 = (\lambda - a)C_1/b + C_2/b$ in $D_2 = (\lambda - a)C_2/b$, v primeru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

ZGLED 17. (a) Za sistem $x' = -y$, $y' = x$ takoj dobimo najprej enačbo $x'' = -x$ z rešitvijo $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Nato iz $y = -x'$ poiščemo še $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Od tod npr. vidimo, da je

$$x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 = C^2,$$

kjer je C pozitivna konstanta. Torej so rešitvene krivulje sistema koncentrične krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču. Slednje dobimo lahko tudi direktno iz diferencialne enačbe $dx/dy = -y/x$, ki jo dobimo z medsebojnim deljenjem obeh strani sistema (s tem izločimo pomožno spremenljivko t).

(b) Na podoben način uženemo homogeni sistem $x' = 3x - 2y$, $y' = 2x - 2y$. Ker sta karakteristični števili oziroma lastni vrednosti ustrezne matrike enaki -1 in 2, dobimo rešitev $x = 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}$, $y = 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + (C_2/2)\mathrm{e}^{2t}$.

Literatura

[1] K.R. Davidson, A.P. Donsig, *Real Analysis with Applications*, Prtentice Hall 2002.
[2] M. Dobovišek, *Matematika za farmacevte*, DMFA-založništvo, Ljubljana 2009.
[3] B. Drinovec Drnovšek, S. Strle, *Naloge iz analize 1 - z odgovori, nasveti in rešitvami*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2010.
[4] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.
[5] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraww-Hill 1976.
[6] G. Tomšič, Bojan Orel, Neža Mramor Kosta, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[7] N. Mramor Kosta, B. Jurčič Zlobec, *Zbirka nalog iz matematike I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[8] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA-založništvo, Ljubljana 1994.