I. INTEGRIRANJE FUNKCIJ

1. Nedoločeni integral

Poleg odvajanja funkcij je za uporabo pomembno, da jih znamo tudi integrirati. Z integralom računamo dolžine krivulj, površine krivočrtnih likov, prostornine teles omejenih s ploskvami. Brez integriranja npr. ne bi mogli reševati diferencialnih enačb (glej zadnji razdelek), veliko fizikalnih količin je podanih v integralski obliki itd.

Osnovni pojmi

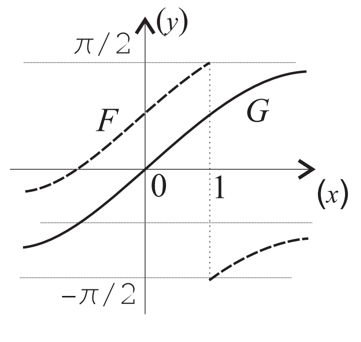
Iskanje nedoločenega integrala neke funkcije je obraten problem kot iskanje odvoda: Dana je (zvezna) funkcija f, iščemo tako odvedljivo funkcijo F, da je $F'(x) = f(x)$ za vsak x. Tej funkciji rečemo *primitivna funkcija* ali *nedoločeni integral* (dane funkcije f).

Nedoločeni integral ni enolično določen, funkciji F lahko prištejemo katerokoli konstanto, saj velja $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)$. Poleg tega se poljubna dva nedoločena integrala za isto funkcijo f na danem intervalu I lahko razlikujeta le za aditivno konstanto. Res, če je $G'(x) = F'(x)$ za $x \in I$, je $(G(x) - F(x))' = 0$ in zato $G(x) = F(x) + C$ po posledici Lagrangevega izreka.

Nedoločeni integral zapišemo z integralskim znakom: $F(x) = \int f(x)dx$. Zapis izhaja iz Leibnizove pisave odvoda $y' = \frac{dy}{dx}$. Če je $\frac{dy}{dx} = f(x)$, je $dy = f(x)dx$ in $y = \int f(x)dx$. Funkcijo, ki jo integriramo, imenujemo na kratko *integrand*.

ZGLED. $\int 2xdx = x^2 + C$, $\int \cos xdx = \sin x + C$. Tu je C poljubna konstanta.

Opomba. Če za dana integrala F in G velja $F'(x) = G'(x)$ za vsak $x \in [a, b]$ razen za $c \in (a, b)$, je njuna razlika $F(x) - G(x)$ konstanta, ki pa je na posameznih podintervalih $[a, c)$ in $(c, b]$ lahko različna. Zgled sta npr. funkciji $F(x) = \text{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ in $G(x) = \text{arctg}x$, ko je $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = G'(x)$ za $x \neq 1$, vendar pa je $F(x) - G(x) = \pi/4$ za $x < 1$ in $F(x) - G(x) = -3\pi/4$ za $x > 1$ (glej sliko 1).



Slika 1

Za preproste funkcije lahko njihov integral kar uganemo in ga zapišemo v tabelo.

Tabela elementarnih integralov

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ 1 \neq a > 0 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C, \ a \neq 0$$

V zadnjem primeru lahko z odvajanjem naknadno preverimo, da je dobljena funkcija res nedoločen integral dane funkcije. Pri nekaterih integrandih z ugibanjem ne gre. Potrebno je poznati nekatera splošna pravila za integriranje. Oglejmo si tri osnovne metode.

Metoda dekompozicije

Integrand skušamo preoblikovati, največkrat prevesti na vsoto ali razliko znanih integralov. Pri tem upoštevamo, da velja:
1) $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$
2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
Ti dve pravili preverimo z odvajanjem (upoštevamo, da podobno velja za odvode).

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int ((2x-1)^2 + 3x^2)dx = \int (7x^2 - 4x + 1)dx = 7\int x^2 dx - 4\int x dx + \int dx = 7x^3/3 - 2x^2 + x + C$
(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+1}\, dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = x + 3\,\mathrm{arctg}\, x + C$

Metoda substitucije

Uvedemo novo integracijsko spremenljivko t, tako da je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Pri tem se spremeni tudi diferencial $dx = x'(t)dt$ in s tem celoten integrand:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Če smo substitucijo $x = x(t)$ izbrali pametno, je novi integral preprostejši od prejšnjega in ga znamo rešiti direktno.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$; uvedli smo substitucijo $x = \frac{1}{2}t + 1$ oziroma $2x - 1 = t$. Na sploh je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, če je $\int f(x)dx = F(x)$ in $a \neq 0$.
(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$. Zdaj je dobra izbira $x = \arccos t$ oziroma $\cos x = t$, saj je $-\sin x\, dx = dt$.
(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^3+1} + C$. Tu smo izbrali $x^3 + 1 = t$ in dobili $3x^2 dx = dt$. Še bolje bi bilo izbrati $x^3 + 1 = t^2$. S tem bi hkrati odpravili tudi kvadratni koren iz drugega integrala in dobili še bolj preprost integral.

Metoda integracije po delih (per partes)

Formula za integracijo per partes je $\int udv = uv - \int vdu$, kjer sta u in v funkciji spremenljivke x. Izpeljemo jo iz dejstva, da je $uv = \int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu$. Integriranje po delih uporabljamo, kadar je integrand produkt dveh raznorodnih funkcij, npr. produkt polinoma in eksponentne (logaritemske, trigonometrične) funkcije ali produkt eksponentne in trigonometrične funkcije.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Izbrali smo $u = \ln x$ in $dv = xdx$.

(b) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C =$ $(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C$. Zdaj smo morali dvakrat integrirati per partes. Prvič smo izbrali $u = x^2$, drugič $u = x$, obakrat pa $dv = \mathrm{e}^x dx$.

Pri nekaterih tipih integralov, npr. pri integriranju racionalnih funkcij, ali pri integralih, kjer nastopajo kvadratni koreni iz kvadratnih izrazov, so potrebni posebni prijemi. V teorijo integriranja takih funkcij se tu ne bomo resneje spuščali, podali pa bomo nekaj preprostih napotkov in zgledov.

Metode za integriranje racionalnih funkcij

Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov: $f(x) = p(x)/q(x)$. Če je stopnja števca večja ali enaka stopnji imenovalca, oba polinoma najprej med seboj delimo, da dobimo celi del in ostanek: $p(x)/q(x) = s(x) + r(x)/q(x)$. Polinom znamo integrirati (členoma), preostalo racionalno funkcijo pa po potrebi razstavimo na ti. *parcialne ulomke*, nato pa integriramo vsak parcialni ulomek posebej. (Uporabimo torej neko varianto metode dekompozicije.)

ZGLED. Zaradi $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$ je $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C$.

V tem primeru je bila razčlenitev na parcialne ulomke zelo enostavna. Imenovalec pa ima v splošnem večkratne linearne in večkratne v realnem nerazcepne kvadratne faktorje, npr.

$q(x) = q_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}...(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}$

Razčlenitev na parcialne ulomke je zdaj oblike:

$$\begin{gathered}
\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\
\frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + ... \\
\frac{A_{m1}}{x-a_m} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^2} + ... + \frac{A_{mk_m}}{(x-a_m)^{k_m}} + \\
\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \\
\frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + ... + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + ... \\
+ \frac{B_{n1}x + C_{n1}}{x^2+p_nx+q_n} + \frac{B_{2n}x + C_{2n}}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + ... + \frac{B_{nl_n}x + C_{nl_n}}{(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}}.
\end{gathered}$$

Koeficiente moramo še določiti z odpravljanjem ulomkov.

Člen oblike $A/(x-a)^k$ je enostavno integrirati; dobimo $A\ln|x-a|$, če je $k=1$, in $(A/(1-k))/(x-a)^{k-1}$, če je $k>1$. Člen $(Bx+C)/(x^2+px+q)$ z nerazcepnim imenovalcem zapišemo v obliki $(Bx+C)/(x^2+px+q)=(B/2)(2x+p)/(x^2+px+q)+D/(x^2+px+q)$, kjer je $D=C-Bp/2$. Integral prvega člena se izraža z $(B/2)\ln(x^2+px+q)$. Imenovalec drugega člena pa preoblikujemo v popolni kvadrat: $x^2+px+q=\frac{1}{4}((2x+p)^2+(4q-p^2))=\frac{4q-p^2}{4}(1+(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2)$, saj je $4q-p^2>0$, in uvedemo novo spremenljivko $t=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$. Rezultat integriranja je potem $\frac{2D}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$. Če pa nastopajo nerazcepni faktorji tudi na višjo potenco l, so integrali poleg teh dveh oblik tudi oblike $h(x)/(x^2+px+q)^{l-1}$, kjer je h polinom stopnje $2l-3$.

Najbolje je torej za integral splošne racionalne funkcije $p(x)/q(x)$, kjer je stopnja imenovalca vsaj tolikšna kot stopnja števca in je imenovalec razstavljen v zgornji obliki, vzeti nastavek:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}+A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+...+A_m\ln|x-a_m|+$$

$$B_1\ln(x^2+p_1x+q_1)+B_2\ln(x^2+p_2x+q_2)+...+B_{2n}\ln(x^2+p_nx+q_n)+$$

$$\frac{2C_1}{\sqrt{4q_1-p_1^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_1}{\sqrt{4q_1-p_1^2}}+\frac{2C_2}{\sqrt{4q_2-p_2^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_2}{\sqrt{4q_2-p_2^2}}+...+\frac{2C_n}{\sqrt{4q_n-p_n^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p_n}{\sqrt{4q_n-p_n^2}},$$

kjer je $\tilde{q}(x)$ polinom z istimi linearnimi in kvadratnimi faktorji, kot so večkratni faktorji v $q(x)$, vendar nastopa vsak na potenco, ki je za ena manj kot pri polinomu $q(x)$, polinom $\tilde{p}(x)$ pa naj ima stopnjo za eno manjšo kot polinom $\tilde{q}(x)$. Koeficiente potem določimo tako, da obe strani najprej odvajamo, nato pa odpravimo ulomke in primerjamo dobljene koeficiente pri različnih potencah spremenljivke x na obeh straneh enabe. Kadar tako ravnamo, rečemo, da smo integral izračunali z *metodo nedoločenih koeficientov.*

ZGLED. Integral $I=\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ uženemo z zgornjim nastavkom

$$I=A\ln|x-1|+B\ln(x^2+x+1)+\frac{2C}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{D}{x-1}.$$

Najprej določimo A,B,C in D iz primerjave odvajane leve in desne strani. Po odpravi ulomkov dobimo $x=(A+2B)x^3+(-3B+C-D)x^2-(2C+D)x+(-A+B+C-D)$, rešimo ustrezen sistem linearnih enačb in najdemo $A=B=0$, $C=D=-1/3$. Končni rezultat integriranja je potem $I=-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1$, kjer je C_1 poljubna konstanta.

Metode za integriranje korenskih funkcij

Najprej si oglejmo primer, ko pod korenom nastopa linearna ali lomljena linearna funkcija. Lahko so različni koreni, le radikand mora biti vedno isti. Če je npr. pod korenom izraz $\frac{ax+b}{cx+d}$ pišemo $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$, kjer je p taka potenca, da po zamenjavi spremenljivke odpadejo vsi koreni. Problem prevedemo na integracijo racionalnih funkcij, kar že poznamo (je pa z integracijo lahko še veliko dela).

ZGLED. S substitucijo $\frac{1-x}{1+x}=t^3$ oziroma $x=\frac{1-t^3}{1+t^3}$, od koder je $dx=\frac{-6t^2dt}{(1+t^3)^2}$, dobimo $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx=-6\int\frac{t^3dt}{(1+t^3)^2}$, ki jo lahko potem integriramo po metodah za integriranje racionalnih funkcij.

Naslednji primer, ko se da integral popopolnoma izračunati, je primer, ko nastopa pod *kvadratnim korenom* kvadratni trinom ax^2+bx+c, $a\neq0$. Označimo $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, integrand pa naj bo racionalna funkcija spremenljivk x in y, torej

$$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{P_1(x)+P_2(x)y}{Q_1(x)+Q_2(x)y},$$

kjer so P_1,P_2,Q_1,Q_2 polinomi v x. Odpravmo koren iz imenovalca, pa imamo

$$R(x,y)=\frac{P_1(x)Q_1(x)-P_2(x)Q_2(x)y^2}{Q_1(x)^2-Q_2(x)^2y^2}+\frac{P_2(x)Q_1(x)-P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)^2-Q_2(x)^2y^2}y.$$

Prvi člen je racionalna funkcija, ki jo znamo integrirati, drugi pa je produkt racionalne funkcije in korena y oziroma racionalna funkcija, deljena s korenom y, torej oblike

$$\frac{H(X)}{G(x)y}=\frac{F(x)}{y}+\frac{R(x)}{G(x)y},$$

če polinoma G in H po potrebi med sebj še delimo.

Oglejmo si najprej, kako izračunamo integral $I=\int\frac{F(x)dx}{y}=\int\frac{F(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Z metodo nedoločenih koeficientov (odvajanje obeh strani in primerjanje ulomkov) ugotovimo, da lahko vedno zapišemo

$$\int\frac{F(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=F_1(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kjer je $F_1(x)$ polinom, stopnje za eno manjše od stopnje polinoma F, in K neka konstanta. Odtod vidimo, da je treba znati izračunati samo zadnji člen. V ta namen zapišimo kvadratni trinom v drugi obliki: $4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2-D$, kjer je $D=b^2-4ac$ njegova diskriminanta. Pri izračunu ustreznega integrala uvedemo novo integracijsko spremenljivko $t=2ax+b$, $dt=2adx$, upoštevati pa moramo tri možnosti: (a) $D\neq 0$, $a>0$, (b) $D>0$, $a<0$ (možnost $D<0$, $a<0$, ne pride v poštev, ker mora biti $ax^2+bx+c>0$) in (c) $D=0$.

V prvem primeru je $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-D}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(t+\sqrt{t^2-D})+C$ oziroma izraženo s starimi spremenljivkami $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)})+C$.

V drugem primeru je $I=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{D-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{D}}+C$ oziroma s starimi spremenljivkami $I=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$.

V tretjem primeru je pod korenom popolni kvadrat, zato dobimo $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{|t|}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t|$ za $t<0$ in $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t|$ za $t>0$, torej $I=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|$ za $2ax+b<0$ in $I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|$ za $2ax+b>0$.

ZGLEDI. (a) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}=\ln(t+\sqrt{t^2-2})+C=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})+C$.
(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+c=\arcsin(x-1)+C$.
(c) $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=(Ax+B)\sqrt{a^2-x^2}+C\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (nastavek); odvajamo in primerjamo koeficiente, da dobimo $A=1/2$, $B=0$ in $C=a^2/2$, torej je

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C_1.$$

Preostane še izračun integrala oblike $\int\frac{R(x)}{G(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Polinom $G(x)$ razčlenimo na same linearne faktorje (predpostavimo, da to gre), ulomek $R(x)/G(x)$ pa na parcialne ulomke. Potem je treba izračunati integrale oblike $I=\int\frac{dx}{(x-e)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

V ta integral vpeljemo substitucijo $x - e = 1/t$, tako da je $dx = -dt/t^2$ in dobimo $I = -\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(ae^2+be+c)t^2+(2ae+b)t+a}}$, se pravi integral take vrste, kakršno smo že obravnavali.

ZGLED. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C.$

Kadar so pred korenom tudi nerazcepni kvadratni, je integracija težja. Vendar je vedno možno napraviti ustrezno substitucijo, s katero integral s korenom prevedemo na integral racionalne funkcije.
(a) Če je $a > 0$, pišemo $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x+t)\sqrt{a}$ in dobimo

$$x = \frac{at^2-c}{b-2at};\ dx = -2a\frac{at^2-bt+c}{(b-2at)^2}\,dt \text{ ter } y = \sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}\ \frac{at^2-bt+c}{b-2at}.$$

(b) Če je $a < 0$, mora imeti enačba $ax^2+bx+c = 0$ dva različna realna korena x_1 in x_2, sicer bi bil izraz pod kvadratnim korenom vedno negativen alii nič. V tem primeru lahko pišemo $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}(x-x_1)t$ in dobimo

$$x = \frac{x_1t^2+x_2}{t^2+1};\ dx = \frac{2(x_1-x_2)tdt}{(t^2+1)^2}\,dt \text{ ter } y = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\ \frac{(x_2-x_1)t}{t^2+1}.$$

Opomba. Kadar nastopa pod kvadratnim korenom polinom tretje ali četrte stopnje, govorimo o *eliptičnih integralih.* V splošnem se jih ne da elementarno izračunati, tj. izraziti z elementarnimi funkcijami, pač pa jih lahko z ustrezno transformacijo vedno prevedemo na eno od naslednjih osnovnih treh oblik (a, k konstanti, $0 < k < 1$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx,\quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Integrali transcendentnih funkcij

Med transcendentne funkcije spadajo eksponenta in logaritemska funkcija, trigonometrične in ciklometrične funkcije. Racionalne ali korenske izraze, v katerih nastopa ena od teh funkcij, včasih integriramo tako, da se s primerno substitucijo teh funkcij znebimo in prevedemo postopek na integracijo racionalnih funkcij.

ZGLEDI. (a) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})\,dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln \frac{|t|}{|t+1|} + C = \ln \frac{e^x}{e^x+1} + C.$
(b) $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \int t^2dt = t^3/3 + C = (\ln x)^3/3 + C.$
(c) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = -\frac{1}{2}\ln\cos^2 x + C = -\ln|\cos x| + C.$

Za trigonometrične funkcije substitucija $t = \operatorname{tg}(x/2)$ vedno privede do integrala racionalne funkcije, saj je tedaj $x = 2\operatorname{arctg} t$ in $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, poleg tega pa je tedaj tudi $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ in $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Je pa ta substitucija precej dolgovezna, pogosto pridemo do rezultata hitreje s kakšno drugo zamenjavo. Če je npr. integrand oblike $R(\cos^2 x)\cos x$, kjer je R racionalna funkcija, je uspešna substitucija $t = \sin x$. Če je integrand oblike $R(\cos^2 x)$ ali $R(\sin^2 x)$, pa pomaga substitucija $t = \operatorname{tg} x$.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{|\sqrt{2}+t|}{|\sqrt{2}-t|} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{|\sqrt{2}+\sin x|}{|\sqrt{2}-\sin x|} + C.$
(b) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(a\mathrm{tg}^2 x + b)} = \int \frac{dt}{at^2+b}.$ Če imata konstanti a, b isti predznak, je $\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{a/b}) + C = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x) + C.$ Če pa imata konstanti a, b nasproten predznak, dobimo
$\displaystyle I = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|u+1|}{|u-1|} + C = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|t\sqrt{-ab}+b|}{|t\sqrt{-ab}-b|} + C = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{|(\operatorname{tg} x)\sqrt{-ab}+b|}{|(\operatorname{tg} x)\sqrt{-ab}-b|} + C.$

Sode potence sinusne in kosinusne funkcije ali njihove produkte integriramo tako, da uvedemo dvojne kote.

ZGLED. $\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Produkte različnih trigonometričnih funkcij (pri različnih argumentih) preoblikujemo najprej z uporabo adicijskih izrekov v vsote ali razlike.

ZGLED. Naj bo $a \neq \pm b$. Potem je
$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C.$$

Včasih nastopa transcendentna funkcija kot faktor v produktu s polinomom ali racionalno funkcijo. Tedaj je potrebno uporabiti metodo integriranja po delih (per partes).

ZGLEDI. (a) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$
(b) $\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$
(c) $\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x\, dx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x) + C = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C.$
(d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$
(e) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx)$ in odtod $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)/2 + C.$

2. Določeni integral

Radi bi (z aproksimacijo) računali tudi ploščine krivočrtnih likov, tj. likov, ki jih omejujejo krivulje. Kako bi npr. poiskali ploščino množice

$$A = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

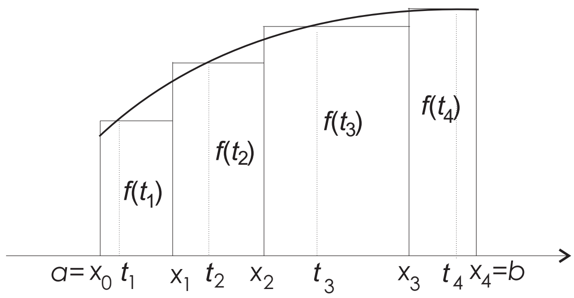
kjer je $f > 0$ zvezna pozitivna funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$? Če je f konstantna ali linearna funkcija, bi še nekako šlo, sicer pa bi morali funkcijo f (po koščkih) aproksimirati z odsekoma konstantnimi ali odsekoma linearnimi funkcijami.

Riemannove vsote in definicija Riemannovega integrala.

Postopek za poljubno realno funkcijo f, definirano na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$, je naslednji. Izberemo delitev intervala $[a, b]$, $a < b$, na n podintervalov z $n-1$ vmesnimi točkami: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Delitev je torej podana z urejenim naborom točk, zato jo označimo z $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Dolžina k-tega podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ naj bo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, maksimalno dolžino označimo z $|D|$, torej $|D| = \max_{1\leq k\leq n} \Delta x_k$ in ji recimo *norma* razdelitve. Na vsakem podintervalu si izberimo poljubno točko $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; množico tako izbranih točk označimo s T_D, saj je podrejena delitvi D.

Naj bo f realna funkcija, definirana na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$. Za vsak par (D, T_D), kjer je D delitev intervala $[a, b]$ in T_D podrejena množica točk, sestavimo t.i. *integralsko* ali *Riemannovo vsoto* funkcije f s predpisom (glej sliko 14):

$$S(f; D, T_D) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$



SLIKA 2

DEFINICIJA 1. Število I imenujemo *določeni* ali *Riemannov integral* realne funkcije f na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$, če velja

$$I = \lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k.$$

Natančneje ta limita pomeni, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev D, za katero velja $|D| < \delta$ in za poljubno podrejeno množico izbranih točk T_D velja $|I - S(f; D, T_D)| < \epsilon$.

Zgornja limita ne obstaja vedno. Kadar obstaja, rečemo, da je funkcija f na intervalu $[a, b]$ *Riemannovo integrabilna*, limito, se pravi določeni (Riemannov) integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ pa označimo z $I = \int_a^b f(x)dx$.

Opomba. Ta oznaka nas spomni, da izhaja določeni integral v limiti iz integralskih vsot $S(f; D, T_D) = \sum_k f(t_k)\Delta x_k$, in tudi sam integralski znak je modificirana črka S, začetna črka latinske besede *summa* (vsota).

ZGLED. (a) Izračunajmo po definiciji določeni integral $\int_a^b xdx$. Ker vnaprej vemo, da je funkcija $f(x) = x$ Riemannvo integrabilna (glej zgornjo opombo), lahko pri poljubni delitvi za izbrano točko na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ izberemo karkoli, npr. aritmetično sredino podintervala, tj. $\xi_k = (x_k + x_{k-1})/2$. Dobimo

$$S(f; D, T_D) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{b^2 - a^2}{2} = (b-a)(a+b)/2$$

in zato tudi $\int_a^b x dx = (b-a)(a+b)/2$. Ker smo na ta način dobili ploščino trapeza pod linearno funkcijo $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$, če je $0 < a < b$, vidimo, da je vsaj v tem primeru rezultat pravilen. Če je $a < b < 0$, dobimo $-$ ploščino ustreznega trapeza; če pa je $a < 0 < b$, pa razliko ploščine dveh trikotnikov (nad in pod abscisno osjo), t.i. *predznačeno ploščino.* Izračun je bil v tem primeru dokaj enostaven, ker je bil integrand preprost. V bolj zapletenih primerih to ne bi delovalo.

(b) Izračunajmo še integral $\int_a^b x^2 dx$. Zdaj pa najprej izberimo posebno (enakomerno) delitev intervala $[a, b]$ z delilnimi točkami $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, za izbrane točke pa vzemimo kar desna krajišča podintervalov $t_k = x_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Potem je

$$S(f; D, T_D) = \sum_{k=1}^{n}(a+k(b-a)/n)^2(b-a)/n = (b-a)(a^2+\frac{2a(b-a)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{(b-a)^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2) =$$

$$(b-a)(a^2 + a(b-a)(1-1/n) + \frac{1}{3}(b-a)^2(1+1/n)(1+1/2n)).$$

V limiti ($n \to \infty$) dobimo $\displaystyle\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)/3 = \frac{b^3-a^3}{3}.$

TRDITEV. *Vsaka na $[a, b]$ Riemannovo integrabilna realna funkcija je omejena.*

Dokaz. Denimo, da funkcija f na intervalu $[a, b]$ ni omejena. Potem za poljubno konstanto $M > 0$ in za vsako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a, b]$ s podrejeno množico točk $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ obstaja tak k in taka točka $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da velja $|f(t_k) - f(s_k)| \geq M/\Delta x_k$. V nasprotnem primeru, če bi za vsak k in vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$ veljala nasprotna neenakost $|f(t_k) - f(x)| < M/\Delta x_k$, bi takoj ugotovili, da je funkcija f omejena na $[a, b]$, saj bi za vsak k in vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$ veljalo $|f(x)| \leq |f(t_k)| + |f(t_k) - f(x)| < |f(t_k)| + M/\Delta x_k$ oziroma $|f(x)| \leq \max_k(|f(t_k)| + M/\Delta x_k)$ za vsak $x \in [a, b]$.

Izberimo delitvi D podrejeno podmnožico točk $T'_D = \{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$, kjer je $t'_j = t_j$ za $j \neq k$ in $t'_k = s_k$. Potem je $|S(f; D, T_D) - S(f; D, T'_D)| = |f(t_k) - f(s_k)|\Delta x_k \geq M/\Delta x_k$. To pa že pomeni, da funkcija f ni Riemannovo integrabilna, sicer bi obstajal Riemannov integral I in bi bila razlika $|S(f; D, T_D) - S(f; D, T'_D)| \leq |S(f; D, T_D) - I| + |I - S(f; D, T'_D)|$ pri dovolj drobni delitvi D poljubno majhna.

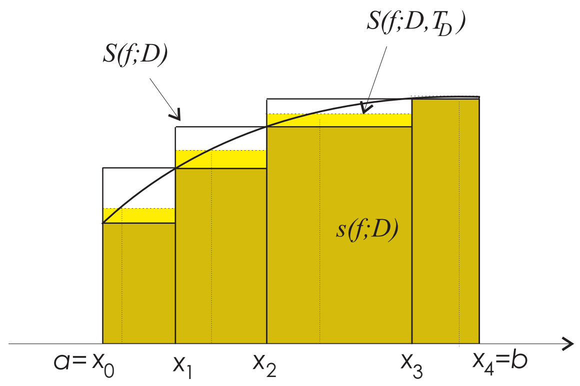
Samo omejene realne funkcije so torej lahko integrabilne. V bodoče bomo večinoma integrirali samo preproste funkcije. Ker je vsaka elementarna funkcija zvezna na vsakem intervalu, na katerem je definirana, za zvezne funkcije pa bomo posebej dokazali, da so Riemannovo inegrabilne, bodo praktično vse naše funkcije integrabilne.

Zgornje in spodnje Darbouxove vsote

Imejmo dano poljubno delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a, b]$. Posebna izbira točke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ je pri zvezni funkciji f tista, kjer doseže funkcija na tem podintervalu svoj maksimum M_k ali svoj minimum m_k. Pri nezvezni *omejeni* funkciji namesto tega vzamemo $M_k = \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ in $m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. V prvem primeru imenujemo ustrezno vsoto *zgornjo Darbouxovo vsoto* in jo označimo z $S(f; D)$, v drugem primeru pa *spodnjo Darbouxovo vsoto* in jo označimo z $s(f; D)$. Torej

$$S(f; D) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad s(f; D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

Opomba. Te vsote se imenujejo po G. Darbouxu, ki je ta pristop prvi uporabil in z njimi definiral svoj integral. Včasih pa jih najdemo tudi pod imenom *zgornje in spodnje Riemannove vsote.*



SLIKA 3

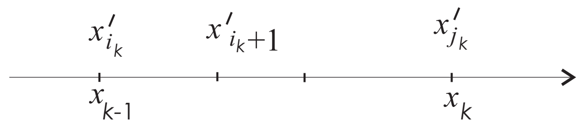
Očitno za poljubno delitev D s podrejeno množico točk T_D velja

$$s(f;D) \leq S(f;D,T_D) \leq S(f;D).$$

Rekli bomo, da je $D' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$ *finejša* delitev intervala $[a,b]$, kot je delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, če je $D \subset D'$. Dve poljubni delitvi D_1 in D_2 istega intervala $[a,b]$ imata vedno skupno finejšo delitev $D = D_1 \cup D_2$).

TRDITEV 1. *Če je D' finejša delitev intervala $[a,b]$ kot delitev D, velja*

$$s(f;D) \leq s(f;D') \leq S(f;D') \leq S(f;D).$$



SLIKA 4

Dokaz. Podinterval $[x_{k-1}, x_k]$, ki pripada delitvi D lahko s točkami finejše delitve D' razdelimo naprej: $x_{k-1} = x'_{i_k} < ... < x'_{j_k} = x_k$. Količinam $M_k = M_k(D)$ in $m_k = m_k(D)$ glede na delitev D in indeks k ustrezajo glede na finejšo delitev D' in indeks l količine M'_l in m'_l. Če upoštevamo, da je infimum, vzet po manjši množici, večji, supremum pa manjši, imamo za vsak indeks l, $i_k + 1 \leq l \leq j_k$, neenakosti

$$m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \inf\{f(x');\ x' \in [x'_{l-1}, x'_l]\} = m'_l$$

in

$$M_l = \sup\{f(x');\ x' \in [x'_{l-1}, x'_l]\} \leq \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = M'_k.$$

Torej je

$$m_k \Delta x_k \leq \sum_{l=i_k+1}^{j_k} m'_l \Delta x'_l \quad \text{in} \quad \sum_{l=i_k+1}^{j_k} M'_l \Delta x'_l \leq M_k \Delta x_k.$$

Če seštejemo vse te neenakosti po indeksu k od 1 do n (po vseh podintervalih v delitvi D), dobimo iskano neenakost.

POSLEDICA. *Za poljubni delitvi D_1 in D_2 intervala $[a,b]$ velja $s(f;D_1) \leq S(f;D_2)$.*

Dokaz. Naj bo D skupna finejša delitev za D_1 in D_2. Potem je po zgornji trditvi $s(f;D_1) \leq s(f;D) \leq S(f;D) \leq S(f;D_2)$.

Darbouxova integrabilnost

Odtod vidimo, da je (neprazna) množica $\{s(f;D_1)\}$ vseh spodnjih Darbouxovih vsot glede na delitev D_1 omejena navzgor s poljubno zgornjo Darbouxovo vsoto glede na (katerokoli drugo) delitev D_2, se pravi da obstaja supremum $s(f) = \sup_{D_1}\{s(f;D_1)\}$ in da velja $s(f) \leq S(f;D_2)$. Toda to hkrati pomeni, da je tudi (neprazna) množica $\{S(f;D_2)\}$ vseh zgornjih Darbouxovih vsot glede na delitev D_2 omejena navzdol, da obstaja infimum $S(f) = \inf_{D_2} S(f;D_2)$ in da velja $s(f) \leq S(f)$.

TRDITEV 2. *Za omejeno funkcijo f na intervalu $[a,b]$ so pri zgornjih oznakah ekvivalentne naslednje trditve*:
(i) $s(f) = S(f)$,
(ii) *Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka delitev D intervala $[a,b]$, da velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.*
(iii) *Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.*

Dokaz. Očitno iz točke (iii) sledi točka (ii). Naj bo zdaj D taka delitev, da pri danem $\epsilon > 0$ velja točka (ii). Potem zaradi ocene $s(f;D) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f;D)$ velja $S(f) - s(f) \leq S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$. To pomeni, da je $s(f) = S(f)$ in velja točka (i).

Predpostavimo, da je izpolnjena točka (i), torej $s(f) = S(f) = I$, in naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstajata taki delitvi D_1, D_2 intervala $[a,b]$, da je $S(f;D) < I + \epsilon/4$ in $s(f;D) > I - \epsilon/4$. Naj bo $D_0 = D_1 \cup D_2$ skupna finejša delitev intervala $[a,b]$ na n podintervalov. Po trditvi 1 je zato tudi $I - \epsilon/4 < s(f;D_0) \leq S(f;D_0) < I + \epsilon/4$. Definirajmo še $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$ in $\delta = \epsilon/(8nM)$.

Naj bo zdaj D poljubna druga delitev intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ in naj bo $D' = D_0 \cup D$ skupna finejša delitev. Po trditvi 1 velja tudi

$$I - \epsilon/4 < s(f;D') \leq S(f;D') < I + \epsilon/4.$$

Ker je vmesnih točk delitve D_0 ravno $n-1$, je največ $n-1$ podintervalov, pripadajočih razdelitvi D še naprej razdeljenih s točkami iz D_0. Torej se v vsotah $s(f;D')$ in $s(f;D)$ ujemajo vsi členi razen tistih na teh največ $n-1$ intervalih. Razliko vsot lahko potem ocenimo z

$$s(f;D') - s(f;D) \leq (n-1)(2M)|D| < 2nM\epsilon/(8nM) = \epsilon/4.$$

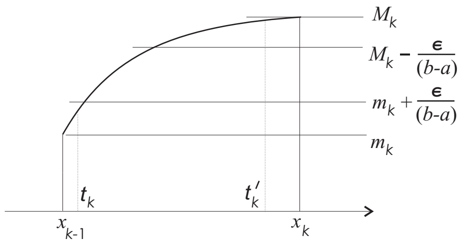
Odtod vidimo, da je $s(f;D) > s(f;D') - \epsilon/4 > I - \epsilon/2$. Podobno spoznamo, da je $S(f;D) < I + \epsilon/2$, tako da imamo končno $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$ in velja točka (iii).

Opomba. Kadar je izpolnjena točka (i) zgornje trditve (in s tem tudi vsaka druga točka), tj. kadar velja $s(f) = S(f)$, rečemo, da je omejena funkcija f na intervalu $[a,b]$ *Darbouxovo integrabilna*. Vendar ta integrabilnost ni v resnici nič drugačna od dosedanje, Riemannove integrabilnosti, kot pove naslednji izrek.

IZREK 1. *Omejena realna funkcija f, definirana na intervalu $[a,b]$, je Riemannovo integrabilna natanko takrat, ko je Darbouxovo integrabilna.*

Dokaz. Riemannova integrabilnost pomeni, da lahko najdemo tako število $I \in \mathbb{R}$, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta >$, tako da za vsako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$ z lastnostjo $\delta_D < \delta$ in za *vsako* izbiro podrejene množice točk $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, velja $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon/4$. Vemo tudi, da je vsaka Riemannovo integrabilna funkcija omejena.

Izberimo tako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ z lastnostjo $|D| < \delta$, da je hkrati $s(f) - \epsilon/8 < s(f;D)$ in $S(f;D) < S(f) + \epsilon/8$. To lahko storimo, če po potrebi preidemo na finejšo delitev. Za vsak k naj bo $m_k = \inf\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = \sup\{f(x);\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ter $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ taki točki, da je $f(t_k) < m_k + \epsilon/8(b-a)$ in $f(t'_k) > M_m - \epsilon/8(b-a)$.



Slika 5

Naj bo $T_D = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ in $T_D' = \{t_1', t_2', ..., t_n'\}$. Potem je

$$s(f;D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = S(f;D,T_D) <$$

$$\sum_{k=1}^{n}(m_k + \epsilon/8(b-a))\Delta x_k = s(f;D) + \epsilon/8,$$

$$S(f;D) - \epsilon/8 = \sum_{k=1}^{n}(M_k - \epsilon/8(b-a))\Delta x_k < S(f;D,T_D') =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k')\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(f;D).$$

To pomeni, da je $|S(f;D,T_D) - s(f;D)| < \epsilon/8$, zato tudi $|S(f;D,T_D) - s(f)| < \epsilon/4$, in $|S(f;D,T_D') - S(f;D)| < \epsilon/8$, zato tudi $|S(f;D,T_D') - S(f)| < \epsilon/4$. Odtod skupaj z $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon/4$ in $|I - S(f;D,T_D')| < \epsilon/4$ dobimo $|I - s(f)| < \epsilon/2$ in $|S(f) - I| < \epsilon/2$, se pravi $S(f) - s(f) < \epsilon$. Po trditvi 2 to pomeni $S(f) = s(f)$.

Obratno, naj bo funkcija f Darbouxovo integrabilna, se pravi, naj velja $S(f) = s(f) = I$. Po trditvi 2 za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D intervala $[a,b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$ velja $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$. Potem pa za vsako tej delitvi D podrejeno množico točk T_D velja $s(f;D) \leq S(f;D,T_D) \leq S(f;D) < s(f;D) + \epsilon$. Seveda velja tudi $s(f;D) \leq I \leq S(f;D) < s(f;D) + \epsilon$, tako da imamo skupaj $|I - S(f;D,T_D)| < \epsilon$. To pomeni, da je funkcija f Riemannovo integrabilna in da je njen integral enak $\int_a^b f(x)dx = I = s(f) = S(f)$.

Izrek 1 nam zagotavlja učinkovit kriterij, kdaj je funkcija na danem intervalu Riemannovo integrabilna, saj je enakost $s(f) = S(f)$ dostikrat preprosto preveriti, upoštevajoč, da je po trditvi 2 za vsak $\epsilon > 0$ dovolj najti delitev D z lastnostjo $S(f;D) - s(f;D) < \epsilon$.

Namesto o Riemannovi ali Darbouxovi integrabilnosti omejene funkcije bomo odslej govorili kar o njeni integrabilnosti.

Primeri integrabilnih funkcij

IZREK 2. *Vsaka monotona funkcija na intervalu $[a,b]$ je integrabilna.*

Dokaz. Vsaka monotona funkcija je na omejenem zaprtem intervalu $[a,b]$ omejena. Privzemimo, da je funkcija f naraščajoča, in si izberimo enakomerno delitev intervala $[a,b]$ s točkami $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0,1,2,...,n$. Zaradi naraščanja funkcije f je $m_k = f(x_{k-1})$ in $M_k = f(x_k)$, tako da imamo

$$S(f;D) - s(f;D) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(b-a)/n - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(b-a)/n = (b-a)(f(b) - f(a))/n.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ lahko izberemo dovolj velik n tako, da je desna stran manjša od ϵ. Po trditvi 2 je potem $s(f) = S(f)$ in po izreku 1 je funkcija f integrabilna.

IZREK 3. *Vsaka zvezna funkcija na intervalu* $[a, b]$ *je integrabilna.*

Dokaz. Vsaka zvezna funkcija je na intervalu $[a, b]$ omejena. Ker je po izreku iz analize 1 zvezna funkcija na kompaktnem intervalu $[a, b]$ tudi enakomerno zvezna (glej 3. razdelek v 2. poglavju), za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubni dve točki $s, t \in [a, b]$ z lastnostjo $|s - t| < \delta$ velja $|f(s) - f(t)| < \epsilon/(b - a)$. Naj bo D delitev intervala $[a, b]$ z lastnostjo $|D| < \delta$, tako da za poljubni točki $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ velja $|f(s) - f(t)| < \epsilon/(b-a)$. Torej je tudi $M_k - m_k \leq \epsilon/(b - a)$, zato imamo oceno (ki takoj implicira integrabilnost funkcije f)

$$S(f; D) - s(f; D) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \epsilon.$$

ZGLEDI. (a) Obstajajo omejene (nezvezne) funkcije, ki niso integrabilne; taka je npr. karakteristična funkcija $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$, definirana na intervalu $[a, b]$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Tu je $m_k = 0$ in $M_k = 1$ za vsako delitev D in vsak k, torej je $s(f; D) = 0$ in $S(f; D) = b-a$ oziroma tudi $s(f) = 0$ in $S(f) = b - a$, tako da funkcija f ni inegrabilna.

(b) Po drugi strani obstajajo omejene nezvezne funkcije, ki pa so integrabilne. Zgled so nezvezne monotone funkcije, npr.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, 1/2] \\ 1 & , \quad x \in (1/2, 1] \end{cases} .$$

(b) Nezveznost omejenih integrabilnih funkcij je lahko še hujša. Za zgled si vzemimo dobro znano funkcijo f, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & , \quad x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Vemo, da ta funkcija v točki 0 nima limite. Pokažimo, da je kljub temu integrabilna.

Za vsak $\epsilon > 0$ si izberimo delitev D z lastnostjo, da je prva delilna točka enaka $x_1 = \epsilon/4$. Ker je f zvezna na intervalu $[\epsilon/4, 1]$, je tam integrabilna in obstaja taka delitev D_1 intervala $[\epsilon/4, 1]$, da je $S(f|_{[x_1,1]}; D_1) - s(f|_{[x_1,1]}; D_1) < \epsilon/2$. Zdaj naj bo $D = \{x_0\} \cup D_1$ delitev intervala $[0, 1]$. Ker je $m_1 = -1$ in $M_1 = 1$, imamo $s(f; D) = -\Delta x_1 + s(f|_{[x_1,1]}; D_1) = -\epsilon/4 + s(f|_{[x_1,1]}; D_1)$ in $S(f; D) = \Delta x_1 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1) = \epsilon/4 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1)$. Torej je funkcija f integrabilna, saj je

$$S(f; D) - s(f; D) = \epsilon/2 + S(f|_{[x_1,1]}; D_1) - s(f|_{[x_1,1]}; D_1) < \epsilon.$$

Zadnji zgled je poseben primer bolj splošne zakonitosti.

TRDITEV 3. *Če je funkcija* f *omejena na* $[a, b]$ *in zvezna na* (a, b)*, je na zaprtem intervalu* $[a, b]$ *integrabilna.*

Dokaz. Naj bo $m \leq f \leq M$ na $[a, b]$ in naj bo $\epsilon > 0$. Izberimo tako delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ intervala $[a, b]$, da je (1) $\Delta x_1 = x_1 - x_0 < \epsilon/4(M - m)$ in $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} < \epsilon/4(M - m)$; (2) delitev $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ intervala $[x_1, x_{n-1}]$, na katerem je zvezna funkcija f integrabilna, taka, da je razlika med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto $\sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon/2$. Potem pa je tudi za celoten interval $S(f; D) - s(f; D) = (M_1 - m_1)\Delta x_1 + (M_n - m_n)\Delta x_n + \sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon$. Po trditvi 2 in izreku 1 to pomeni, da je funkcija f na intervalu $[a, b]$ integrabilna.

Lastnosti integrabilnih funkcij in integrala

TRDITEV 4. *Konstantna funkcija* $f(x) = c$ *za vsak* $x \in [a, b]$ *je integrabilna in velja* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b-a)$.

Dokaz. Riemannova vsota je $\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n c\Delta x_k = c(b-a)$, isto v limiti.

TRDITEV 5. *Naj bosta* f *in* g *integrabilni funkciji na intervalu* $[a, b]$ *in* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *poljubni konstanti. Potem je na* $[a, b]$ *integrabilna tudi funkcija* $\alpha f + \beta g$ *in velja*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Poljubno Riemannovo vsoto za funkcijo $\alpha f + \beta g$ lahko zapišemo v obliki $S(\alpha f + \beta g; D, T_D) = \alpha S(f; D, T_D) + \beta S(g; D, T_D)$. Pri dovolj drobni delitvi leva stran dobro aproksimira integral $\int_a^b(\alpha f + \beta g)(x)dx$, desna stran pa $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

Opomba. Rečemo, da je določeni integral *linearen funkcional* na prostoru integrabilnih funkcij na intervalu $[a, b]$.

TRDITEV 6. *Naj bo funkcija* f *omejena na intervalu* $[a, b]$*, in naj velja* $a < c < b$*. Funkcija* f *je integrabilna na intervalu* $[a, b]$ *natanko takrat, ko je integrabilna na podintervalih* $[a, c]$ *in* $[c, b]$*. Poleg tega velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dokaz. Če je f integrabilna na $[a, b]$ lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tako delitev D intervala $[a, b]$, da velja $S(f; D) - s(f; D) < \epsilon$. Lahko privzamemo, da je c ena od delilnih točk (sicer jo dodamo, razlika med zgornjo in spodnjo vsoto se pri tem le zmanjša). Potem pa lahko zapišemo $S(f; D) - s(f; D) = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k$, kjer ustreza prva vsota delitvi podintervala $[a, c]$ in druga delitvi podintervala $[c, b]$. Ker sta vsoti nenegativni, sta obe manjši od ϵ, kar pomeni integrabilnost na vsakem podintervalu posebej.

Obratno je še lažje: delitvi podintervalov, ki dasta majhno razliko med zgornjo in spodnjo vsoto, združimo v delitev intervala $[a, b]$, in dobimo

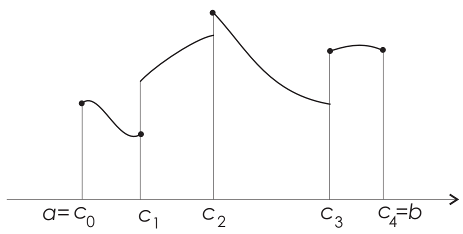
$$\sum_k(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Zdaj ko vemo, da je funkcija integrabilna tudi na podintervalih, lahko po definiciji izbiramo vedno bolj drobne delitve intervala $[a, b]$, pri čemer ves čas ohranjamo c kot eno izned delilnih točk. Ker Riemannova integralska vsota razpade v dve integralski vsoti $S(f; D, T_D) = \sum_k f(t_k)\Delta x_k = \sum_k' f(t_k)\Delta x_k + \sum_k'' f(t_k)\Delta x_k = S(f|_{[a,c]}; D', T_{D'}) + S(f|_{[c,b]}; D'', T_{D''})$, dobimo v limiti, da je integral funkcije f po vsem intervalu $[a, b]$ enak vsoti integralov funkcije f po obeh podintervalih $[a, c]$ in $[c, b]$.

Opomba. Doslej smo zahtevali, da je spodnja meja a integrala $\int_a^b f(x)dx$ manjša od zgornje meje b. Pa naj bo $b < a$. V tem primeru definirajmo $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Dodatno definirajmo za vsak $a \in \mathbb{R}$ še $\int_a^a f(x)dx = 0$. Potem lahko uporabljamo formulo iz trditve 4 ne glede na to, kje leži točka c, se pravi tudi zunaj intervala $[a, b]$, da je le funkcija definirana na maksimalnem intervalu (od $\min\{a, b, c\}$ do $\max\{a, b, c\}$). Če je npr. $a < b < c$, imamo po formuli iz trditve 4 relacijo $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ oziroma $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Zaradi te lastnosti pravimo, da je določeni integral *aditivna funkcija integracijskega območja.*

DEFINICIJA 2. Rečemo, da je funkcija f *odsekoma zvezna* na intervalu $[a, b]$, če obstaja taka števila c_i, $i = 0, 1, 2, ..., r$, da je $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_r = b$ in da je f zvezna funkcija na vsakem odprtem podintervalu (c_{i-1}, c_i), $i = 1, 2, ..., r$. Kot posledico zadnjih dveh trditev imamo naslednji rezultat.



SLIKA 6

TRDITEV 7. *Vsaka na $[a, b]$ omejena in odsekoma zvezna funkcija f je integrabilna.*

Dokaz. Po trditvi 3 je f integrabilna na vsakem podintervalu $[c_{i-1}, c_i]$, iz trditve 6 pa potem sledi (s preprosto indukcijo), da je integrabilna tudi na celotnem intervalu $[a, b]$.

Opomba. Odsekoma zvezna funkcija ima po definiciji končno mnogo točk nezveznosti. Trditev 7 potemtakem pove, da je vsaka omejena funkcija, ki ima kvečjemu končno mnogo točk nezveznosti, integrabilna. Kot zanimivost povejmo, da velja isto tudi za omejene funkcije, ki imajo kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti (zato je npr. integrabilna tudi Thomaejeva funkcija).

Še več, pokazati se da, da je omejena funkcija integrabilna natanko takrat, ko ima množica njenih točk nezveznosti mero nič. (Rečemo, da ima podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ *mero nič*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka števna - končna ali neskončna - družina odprtih intervalov $\{(c_n, d_n);\ n \geq 1\}$, da je $A \subset \cup_{n\geq 1}(c_n, d_n)$ in da je njihova skupna dolžina $\sum_{n\geq 1}(d_n - c_n) < \epsilon$.) Vsaka števna množica ima mero nič.

IZREK 4. *Naj bo f omejena integrabilna funkcija na $[a, b]$ in g zvezna funkcija na intervalu $[m, M]$, kjer je $m = \inf\{f(x);\ x \in [a, b]\}$ in $M = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}$. Potem je tudi kompozitum $h = g \circ f$ integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Če je $M = m$, je funkcija f konstantna, zato je konstantna tudi funkcija h in po trditvi 4 integrabilna.

Naj bo $M \neq m$ in $\epsilon > 0$ poljubno pozitivno število. Označimo $A = \inf g$ in $B = \sup g$ na intervalu $[m, M]$ in $K = b - a + B - A > 0$. Zaradi enakomerne zveznosti funkcije g na intervalu $[m, M]$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $u, u' \in [m, M]$ in $|u - u'| < \delta$ sledi $|g(u) - g(u')| < \epsilon/K$.

Ker je f integrabilna na $[a, b]$, obstaja taka delitev D, da je $S(f; D) - s(f; D) < \delta\epsilon/K$. Zapišimo $S(f; D) - s(f; D) = \sum_k'(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k$, kjer se prva vsota $\sum_k'$ nanaša na tiste delilne intervale, za katere je $M_k - m_k < \delta$, druga vsota $\sum_k''$ pa na ostale. Ker je torej $\sum_k'' \delta\Delta x_k \leq \sum_k''(M_k - m_k)\Delta x_k \leq S(f; D) - s(f; D) < \delta\epsilon/K$, dobimo $\sum_k'' \Delta x_k < \epsilon/K$.

Označimo še $h_k = \inf h$ in $H_k = \sup h$ na k-tem podintervalu delitve D. Če je ta podinterval prve vrste (tako da je $M_k - m_k < \delta$), je za poljubna x, x' iz tega intervala in za $u = f(x)$, $u' = f(x')$ res $|u - u'| = |f(x) - f(x')| \leq M_k - m_k < \delta$, zato $|h(x) - h(x')| = |g(u) - g(u')| < \epsilon/K$ in potem tudi $H_k - h_k \leq \epsilon/K$ oziroma tudi

$$\sum_k'(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (\epsilon/K) \sum_k' \Delta x_k = (b - a)\epsilon/K.$$

Če pa je k-ti podinterval druge vrste (tako da je $M_k - m_k \geq \delta$), velja $H_k - h_k \leq B - A$ in zato tudi

$$\sum_k''(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (B - A)\sum_k'' \Delta x_k \leq (B - A)\epsilon/K.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ smo torej našli tako delitev D, da je $S(h; D) - s(h; D) =$

$$\sum_k'(H_k - h_k)\Delta x_k + \sum_k''(H_k - h_k)\Delta x_k \leq (b - a)\epsilon/K + (B - A)\epsilon/K = \epsilon,$$

kar pomeni, da je funkcija h integrabilna na intervalu $[a, b]$.

POSLEDICA. *Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a, b]$, so na $[a, b]$ integrabilne tudi funkcije $|f|$, f^n za vsak $n \in \mathbb{N}$ in fg, kjer je $|f|(x) = |f(x)|$, $f^n(x) = f(x)^n$ in $(fg)(x) = f(x)g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$.*

Dokaz. Funkciji $u \mapsto |u|$ in $u \mapsto u^n$ (za $n \in \mathbb{N}$)) sta zvezni, tako da lahko uporabimo izrek 4. Poleg tega je $fg = [(f + g)^2 - f^2 - g^2]/2$ in zaradi trditve 5 je potem integrabilna tudi funkcija fg.

Opomba. Obrat posledice ne velja: naj bo npr. $f = g = \chi_{\mathbb{Q}}$, karakteristična funkcija množice racionalnih števil. Vemo, da ta funkcija ni integrabilna na nobenem intervalu, njena absolutna vrednost in njen kvadrat pa sta integrabilni funkciji, saj sta obe enaki konstantni funkciji 1.

TRDITEV 8. *Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a, b]$ in velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, velja tudi $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)$.*

Dokaz. Ta neenakost velja za poljubno Riemannovo vsoto $S(f; D, T_D) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(t_k)\Delta x_k = S(g; D, T_D)$, torej tudi v limiti.

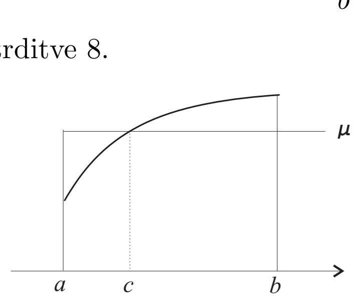
Rečemo, da je določeni integral *monotoni funkcional*.

POSLEDICA 1. *Če je $a < b$, velja $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Če je $a > b$, pa velja $|\int_a^b f(x)dx| \leq -\int_a^b |f(x)|dx$.*

Dokaz. Takoj sledi iz trditve 8 ob upoštevanju opombe za trditvijo 6.

POSLEDICA 2. *Iz $m \leq f(x) \leq M$ na $[a, b]$ sledi $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$.*

Dokaz. Tudi to dobimo iz trditve 8.



SLIKA 7

DEFINICIJA 3. Izraz $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ imenujemo *povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$. Vidimo, da leži μ med $m = \inf\{f(x); a \leq x \leq b\}$ in $M = \sup\{f; a \leq x \leq b\}$.

Omenimo še pomembno posledico točke 8.

TRDITEV 9. *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, obstaja taka točka $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*

Dokaz. Povprečna vredost μ funkcije f zadošča po posledici 2 pogoju $m \leq \mu \leq M$. Potem pa rezultat sledi iz znanega dejstva, da zavzame zvezna funkcija na zaprtem in omejenem intervalu vsako vrednost med najmanjšo in največjo.

IZREK 5 (**Prvi izrek o povprečni vrednosti**). *Naj bosta funkciji f, g integrabilni na intervalu $[a,b]$ in naj za vsak $x \in [a,b]$ velja $m \leq f(x) \leq M$. Poleg tega naj bo na intervalu $[a,b]$ funkcija g povsod istega predznaka. Tedaj obstaja tako število $\mu \in [m,M]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Naj bo npr. $g(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a,b]$. Iz $m \leq f(x) \leq M$ dobimo $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ za vsak $x \in [a,b]$ in zato tudi

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Če je $\int_a^b g(x)dx = 0$, je tudi $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ in vsak μ je dober. Če pa je $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, je

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

Srednji ulomek označimo z μ, pa imamo $m \leq \mu \leq M$ in hkrati $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Podobno, samo z obrnjenimi neenačaji, dokažemo izrek, če je $g(x) \leq 0$ za vsak $x \in [a,b]$.

POSLEDICA. *Če je funkcija f zvezna in funkcija g integrabilna in povsod istega predznaka na intervalu $[a,b]$, obstaja tako število $c \in [a,b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Vemo, da zavzame zvezna funkcija na kompaktnem intervalu $[a,b]$ vsako vrednost med $m = \inf\{f(x); a \leq x \leq b\}$ in $M = \max\{f(x); a \leq x \leq b\}$, torej tudi vrednost $\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx$ iz dokaza prejšnjega izreka.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala po definiciji je zelo komplicirano, tudi v primeru, ko integriramo zvezno funkcijo, zato je ugodno poznati še druge načine. Izpeljimo osnovno povezavo med določenim in nedoločenim integralom.

IZREK 6. *Naj bo f omejena integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$. Definirajmo $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$. Tedaj je G:*
(a) *zvezna funkcija zgornje meje na intervalu $[a,b]$;*
(b) *odvedljiva funkcija zgornje meje v vsaki točki x, v kateri je f zvezna funkcija, in velja $G'(x) = f(x)$.*

Dokaz. (a) Hitro se lahko prepričamo, da je $G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$, torej po posledici 1 trditve 7 $|G(x+h) - G(x)| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leq M|h|$, kjer je $M \geq |f(t)|$ za vsak $t \in [a,b]$. Odtod takoj sledi, da je G zvezna funkcija v vsaki točki $x \in [a,b]$.

(b) Izračunajmo $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dx$. Ker je funkcija f zvezna v točki x, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(t)-f(x)| < \epsilon$, čim je $|t-x| < \delta$. Zato lahko ocenimo

$$|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)| \leq \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dx| < \epsilon$$

za vsak $|h| < \delta$. To pomeni, da je limita diferenčnega kvocienta funkcije G (ko $h \to 0$) enaka $f(x)$. Torej je funkcija G odvedljiva v točki x in njen odvod enak $G'(x) = f(x)$.

POSLEDICA. *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, je funkcija G, definirana s predpisom $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, povsod na $[a,b]$ odvedljiva in velja $G'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Torej je G je nedoločeni integral (primitivna funkcija) zvezne funkcije f. Če je F poljuben drug nedoločeni integral funkcije f, je kot znano, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Ker je $F(a) = C$, velja $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$.

Vstavimo točko $x = b$, pa dobimo *osnovno formulo integralskega računa*:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

To formulo imenujemo tudi *Leibnizova formula*. Včasih zapišemo krajše $\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b$, kjer pomeni $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. To pomeni, da določeni integral izračunamo tako, da najprej poiščemo nedoločeni integral (primitivno funkcijo) F, če le-ta obstaja, vanjo vstavimo najprej zgornjo mejo b, nato spodnjo mejo a in oboje odštejemo.

V zgornji posledici smo videli, da primitivna funkcija obstaja za vsako zvezno funkcijo f. Za zvezne funkcije torej osnovna formula velja in največkrat bo to dejstvo za naše izračune zadoščalo. Velja pa za vsako integrabilno funkcijo, za katero obstaja primitivna funkcija (tj. odvedljiva funkcija F z lastnostjo $F' = f$).

IZREK 7 (**Osnovni izrek integralskega računa**). *Naj bo f taka integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$, ki ima na $[a,b]$ primitivno funkcijo F. Tedaj velja*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Za poljubno delitev $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervala $[a,b]$ lahko po Lagrangevem izreku poiščemo na odprtih intervalih (x_{k-1}, x_k) take točke t_k, da velja $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)\Delta x_k$. Seštejmo obe strani teh enakosti po k od 1 do n, pa dobimo $F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k$ oziroma $F(b) - F(a) = S(f; D, T_D)$. To velja za vsako delitev D in ustrezno izbiro podrejene množice T_D. Ker vemo, da je funkcija f Riemannovo integrabilna, konvergirajo desne strani proti integralu $\int_a^b f(x)dx$, kakor hitro konvergira $|D| = \max_k \Delta x_k$ proti nič. V limiti torej dobimo $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Metode za računanje določenega integrala

1. **Uporaba osnovne (Leibnizove) formule**. Najprej izračunamo nedoločeni integral, nato pa vstavimo meje.

ZGLED. (a) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x)|_{-1}^1 = \ln 3$.

2. **Metoda zamenjave spremenljivke (substitucija)**. Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, ni problema. Izberemo (ne nujno monotono) zvezno odvedljivo funkcijo $x = x(t)$, ki preslika interval $[\alpha, \beta]$ na interval $[a,b]$, tako da je $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$. Dobimo $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

Dokaz. Ker je f zvezna funkcija na $[a,b]$, obstaja po osnovnem izreku integralskega računa primitivna funkcija F, tako da je $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Definirajmo funkcijo $G(t) = F(x(t))$ za vsak $t \in [\alpha, \beta]$. Ker je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, je po verižnem pravilu tudi $G'(t) = f(x(t))x'(t)$ za vsak $t \in [\alpha, \beta]$. Torej je

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Iz postopka vidimo naslednje: ko nadomestimo x s funkcijo $x = x(t)$, nadomestimo tudi diferencial dx z $dx = x'(t)dt$, tako da je $f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt$.

ZGLED: (a) V integral $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ uvedemo substitucijo $\sqrt{x+1} = t$ oziroma $x = t^2 - 1$. Dobimo $dx = 2tdt$, integral pa je enak $2\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2(2\sqrt{2}-1)/3$.
(b) Če v integral $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}dx$ uvedemo substitucijo $x = \mathrm{e}^t,\ 0 \le t \le 1$, oziroma $\ln x = t$ in $dx/x = dt$, dobimo $I = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$.
(c) Za integralu $I = \int_0^{3\pi} \frac{\sin t\,dt}{2+\cos t}$ postavimo $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$ in najdemo $I = -\int_1^{-1} \frac{dx}{2+x} = \ln(2+x)|_{-1}^1 = \ln 3$.

Če je substitucijska funkcija $x = x(t)$ monotona (naraščajoča ali padajoča), velja enaka formula za izračun integrala z zamenjavo spremenljivk tudi v splošnejšem primeru.

IZREK 8 (**o zamenjavi integracijske spremenljivke**). *Naj bo zvezno odvedljiva $x = x(t)$ naraščajoča funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$ in naj preslika interval $[\alpha, \beta]$ surjektivno na interval $[a,b]$. Potem je za poljubno realno funkcijo f, definirano na intervalu $[a,b]$, funkcija $g(t) = f(x(t))x'(t)$ integrabilna na $[\alpha, \beta]$ natanko takrat, ko je f integrabilna na $[a,b]$, in tedaj velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

Dokaz. Izberimo poljubno delitev $D_t = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ intervala $[\alpha, \beta]$ in naj bo $x_k = x(t_k)$ za $k = 0, 1, ..., n$. Potem definira množica $D_x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ zaradi naraščanja funkcije $x = x(t)$ delitev intervala $[a,b]$ (nekatere zaporedne točke x_k lahko sovpadajo, toda to samo pomeni, da so v ustrezni Riemannovi vsoti nekateri členi lahko enaki nič). Riemannova vsota za funkcijo g je enaka $S(g; D_t, T_t) = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k))x'(\tau_k)\Delta t_k$, kjer je $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ (in zato $\xi_k = x(\tau_k) \in [x_{k-1}, x_k]$) za vsak k. Potem pa po Lagrangevem izreku za vsak k obstaja tak $\tau_k' \in (t_{k-1}, t_k)$, da je $x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\tau_k')\Delta t_k$ in imamo tudi

$$S(f; D_x, T_x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x(t_k) - x(t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(x(\tau_k))x'(\tau_k')\Delta t_k.$$

Naj bo f integrabilna funkcija na $[a,b]$; torej je f omejena na $[a,b]$ in naj velja $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$. Če odštejemo obe Riemannovi vsoti med seboj in upoštevamo, da je funkcija $x' = x'(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ enakomerno zvezna, tako da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ z lastnostjo $|x'(\tau) - x'(\tau')| < \epsilon/(2M(\beta - \alpha))$, če $|\tau - \tau'| < \delta$, dobimo (za dovolj fino delitev D_t) pri pogoju $|D_t| < \delta$ oceno

$$|S(g; D_t, T_t) - S(f; D_x, T_x)| \le \sum_{k=1}^n |f(x(\tau_k))|\,|x'(\tau_k) - x'(\tau_k')|\Delta t_k < \epsilon/2.$$

Ker je odvod $x' = x'(t)$ zvezna in zato omejena funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$, imamo pri dovolj majhnem $\delta > 0$ tudi

$$|D_x| = \max_k \Delta x_k = \max_k (x(t_k) - x(t_{k-1}) = \max_k |x'(\tau_k')|\Delta t_k \leq \max_k |x'(\tau_k')||D_t|$$

tako majhen, da velja zaradi integrabilnosti funkcije f tudi $|S(f; D_x, T_x) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon/2$. Torej je pri takem δ veljavna neenakost $|S(g; D_t, T_t) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$, kar pomeni, da je tudi funkcija g integrabilna na intervalu $[\alpha, \beta]$ in da velja $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

Iz integrabilnosti funkcije f na $[a, b]$ smo dokazali integrabilnost funkcije g na $[\alpha, \beta]$. Obratno pokažemo na enak način in izrek je dokazan.

Podobno velja v primeru, ko je $x = x(t)$ zvezno odvedljiva padajoča funkcija na $[\alpha, \beta]$ z zalogo vrednosti $[a, b]$.

3. **Metoda integracije po delih (per partes)**. Formula za integracijo po delih je podobna kot pri nedoločenem integralu, le da upoštevamo tudi meje: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$. Poglejmo, pri kašnih pogjih na u in v velja ta formula.

IZREK 9. *Naj bosta funkciji u in v odvedljivi na intervalu $[a, b]$ in naj imata integrabilna odvoda u' in v'. Potem sta tudi funkciji uv' in $u'v$ intgrabilni na $[a, b]$ in velja*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Dokaz. Ker sta funkciji u in v povsod odvedljivi, sta zvezni in zato tudi integrabilni na $[a, b]$. Njuna odvoda u' in v' sta po predpostavki integrabilni funkciji, zato sta integrabilna tudi produkta uv' in $u'v$. Ker je $(uv)' = u'v + uv'$ je po osnovni formuli integralskega računa $\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b$, od koder sledi zaradi aditivnosti integrala zgornja formula.

ZGLED. (a) $\int_0^\pi x \sin x dx = (-x \cos x)_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi$.
(b) $\int_1^2 \ln x\, dx = x \ln x|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1$.

Kot zgled za uporabo itegracije po delih izpeljimo naslednji pomembni izrek o povprečni vrednosti.

IZREK 10 (**Drugi izrek o povprečni vrednosti**). *Naj bo f odvedljiva monotona funkcija z integrabilnim odvodom f' in g poljubna zvezna funkcija na $[a, b]$. Potem je produkt fg integrabilna funkcija na $[a, b]$ in obstaja taka točka $c \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx.$$

Dokaz. Ker je funkcija f odvedljiva povsod na intervalu $[a, b]$, je tam zvezna, tako da je produkt fg z zvezno funkcijo g tudi zvezen in zato integrabilen na $[a, b]$. Naj bo $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, tako da je $G'(x) = g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Po formuli za integracijo per partes (za funkciji $u = f$ in $v = G$) imamo

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)dx.$$

Ker je v zadnjem integralu funkcija $f'(x)$ integrabilna in povsod istega predznaka, G pa zvezna funkcija, obstaja po posledici izreka 5 taka točka $c \in [a, b]$, da velja formula $\int_a^b f'(x)G(x)dx = G(c) \int_a^b f'(x)dx$. Seveda je $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, tako da imamo

$\int_a^b f'(x)G(x)dx = (f(b) - f(a))G(c)$ oziroma iskano zvezo:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(c) = f(a)G(c) + f(b)(G(b) - G(c)).$$

POSLEDICA. *Naj bo funkcija f nenegativna in odvedljiva z integrabilnim odvodom, funkcija g pa zvezna povsod na intervalu $[a, b]$.*
(a) *Če je f padajoča na $[a, b]$, obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^d g(x)dx.$$

(b) *Če je f naraščajoča na $[a, b]$, obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da velja*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_d^b g(x)dx.$$

Dokaz. (a) V dokazu izreka 10 smo videli, da za neko točko $c \in [a, b]$ velja

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - (f(b) - f(a))G(c) = f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(c).$$

Naj bo $m = \min G(x)$ in $M = \max G(x)$ na intervalu $[a, b]$. Potem je zaradi zadnje enakosti

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a).$$

Če je $f(a) = 0$, je zaradi nenegativnosti in padanja funkcije f tudi $f(b) = 0$, tako da je $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ in iskana formula velja za poljuben d. Če pa je $f(a) > 0$, je $m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M$ in zaradi zveznosti funkcije G obstaja taka točka $d \in [a, b]$, da je $G(d) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx$ oziroma $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^d g(x)dx$ (točka (a)).

Za dokaz točke (b) ravnamo enako, le namesto $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ vzamemo kot primitivno funkcijo za g funkcijo $G(x) = \int_b^x g(t)dt$.

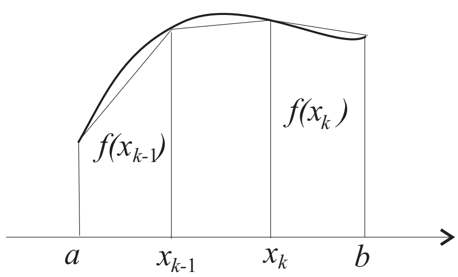
ZGLED. Naj bo $0 < a < b$, $p > 0$, $f(x) = 1/x^p$ in $g(x) = \sin x$. Tedaj je po točki (a) zgornje posledice za neko število $d \in [a, b]$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x^p} dx = \frac{1}{a^p} \int_a^d \sin x dx = \frac{1}{a^p}(\cos a - \cos d),$$

se pravi, da velja ocena $|\int_a^b \frac{\sin x}{x^p} dx| \leq \frac{2}{a^p}$.

Numerično računanje določenih integralov

Ogledali si bomo dve osnovni metodi za numerično (približno) računanje določenih integralov. Osnovna ideja je pri obeh metodah ista: integrand aproksimiramo s funkcijo, katere integral je preprosto izračunati.



Slika 8

(A) **Trapezna metoda**. Razdelimo interval $[a,b]$ na n enakih delov, tako da je dolžina vsakega od njih enaka $h=(b-a)/n$. Delilne točke so $x_k=a+kh$, $k=0,1,2,...,n$, pri čemer je $x_0=a$ in $x_n=b$. Na vsakem podintervalu $[x_{k-1},x_k]$ aproksimirajmo integrabilno funkcijo f z linearno funkcijo $f_k(x)=f(x_{k-1})+(f(x_k)-f(x_{k-1}))(x-x_{k-1})/h$, integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ pa z integralom (linearne funkcije)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)dx = h(f(x_{k-1})+f(x_k))/2$$

(za $f(x_{k-1}),f(x_k)>0$ je to ploščina trapeza, odtod ime metode). Približek za integral po celotnem intervalu $[a,b]$ dobimo potem kot vsoto integralov po posameznih podintervalih:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(f(x_{k-1}+f(x_k))/2 = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

oziroma, če raje pišemo $y_k=f(x_k)$ za $k=0,1,2,...,n$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(y_{k-1}+y_k)/2 = \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+...+2y_{n-1}+y_n).$$

Zgornjo formulo imenujemo *trapezna formula*; spada med najbolj preproste formule za numerično integriranje funkcij, ki jim skupnim izrazom rečemo *kvadraturne formule*.

Izpeljimo še oceno napake, ki jo naredimo pri uporabi trapezne formule za dovolj gladko funkcijo.

IZREK. *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$ in $A_n=\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n))$ desna stran trapezne formule pri enakomerni razdelitvi intervala $[a,b]$ na n enakih delov, tako da je $h=(b-a)/n$. Potem velja ocena*:

$$|A_n-\int_a^b f(x)dx| \le \frac{h^2(b-a)}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Dokaz. Naj bo $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ za vsak $x\in[a,b]$ ter $B_k=h(f(x_k)+f(x_{k-1}))/2-F(x_k)+F(x_{k-1})$ in $c_k=(x_{k-1}+x_k)/2$ za vsak $k=1,2,...,n$. Definirajmo funkcijo

$$G_k(t)=t(f(c_k+t)+f(c_k-t))-F(c_k+t)+F(c_k-t)-8B_kt^3/h^3.$$

Opazimo, da je $G_k(0)=0$ in $G_k(h/2)=h(f(x_k)+f(x_{k-1}))/2-F(x_k)+F(x_{k-1})-B_k=0$. Po Rolleovem izreku obstaja taka točka $d_k\in(0,h/2)$, da je $G_k'(d_k)=0$. Ker je $G_k'(t)=t(f'(c_k+t)-f'(c_k-t))-24B_kt^2/h^3$, imamo $0=G_k'(d_k)=d_k(f'(c_k+d_k)-f'(c_k-d_k))-24B_kd_k^2/h^3$. Odtod lahko izrazimo B_k in z upoštevanjem Lagrangevega izreka obstaja taka točka $t_k\in(c_k-d_k,c_k+d_k)$, da je

$$B_k=\frac{h^3}{12d_k}((f'(c_k+d_k)-f'(c_k-d_k))=\frac{h^3}{12}f''(t_k)$$

in zato $|B_k|\le h^3\max_{a\le x\le b}|f''(x)|/12$.

Ker je $A_n-\int_a^b f(x)dx=(h/2)\sum_{k=1}^n(f(x_{k-1})+f(x_k))-\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\sum_{k=1}^n(h(f(x_k)+f(x_{k-1}))/2-F(x_k)+F(x_{k-1})=\sum_{k=1}^n B_k$, velja ocena

$$|A_n-\int_a^b f(x)dx| \le \sum_{k=1}^n|B_k| \le \frac{nh^3}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)| = \frac{h^2(b-a)}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)| =$$

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

ZGLED. Izračunajmo npr. po trapezni metodi približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

na dve decimalki natančno. Ker je sedaj $f''(x) = 2/(1+x)^3$ in $\max_{a\le x\le b}|f''(x)| = 2$, moramo zaradi ocene napake $|A_n - \int_a^b f(x)dx| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)| = 1/6n^2$ vzeti $n \ge 6$, če želimo, da je napaka pod 0.005. Pri $n = 6$ imamo $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 2/3$, $x_5 = 5/6$ in $x_6 = 1$ ter $y_0 = 1$, $y_1 = 6/7 = 0.8571$, $y_2 = 3/4 = 0.7500$, $y_3 = 2/3 = 0.6667$, $y_4 = 3/5 = 0.6000$, $y_5 = 6/11 = 0.5455$ in $y_6 = 1/2 = 0.5000$. Trapezna formula za $n = 6$ nam torej da približek

$$A_6 = (1.0000{+}1.7142{+}1.5000{+}1.3334{+}1.2000{+}1.0910{+}0.5000)/12 = 8.3386/12 = 0.6949.$$

Prava vrednost je 0.6931, napaka pa manjša od 0.002.

(B) **Simpsonova metoda**. Tudi zdaj razdelimo interval $[a,b]$ na enake podintervale, vendar jih mora biti $2n$ (sodo mnogo) in so dolžine $h/2$, kjer je kot prej $h = (b-a)/n$. Pri tej metodi aproksimiramo na vsakem paru sosednjih podintervalov funkcijo f s kvadratno funkcijo $f_k(x) = \alpha_k(x-x_{2k-2})^2 + \beta_k(x-x_{2k-2}) + \gamma_k$, kjer koeficiente α_k, β_k in γ_k določimo tako, da je $f_k(x_{2k-2}) = f(x_{2k-2}) = y_{2k-2}$, $f_k(x_{2k-1}) = f(x_{2k-1}) = y_{2k-1}$) in $f_k(x_{2k}) = f(x_{2k}) = y_{2k}$. Ti trije pogoji pomenijo, da je $y_{2k-2} = \gamma_k$, $4y_{2k-1} = \alpha_k h^2 + 2\beta_k h + 4\gamma_k$ in $y_{2k} = \alpha_k h^2 + \beta_k h + \gamma_k$; z njimi so koeficienti α_k, β_k in γ_k enolično določeni.

Integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ se pri tem aproksimira z integralom kvadratne funkcije

$$\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f_k(x)dx = \int_0^h (\alpha_k t^2 + \beta_k t + \gamma_k)dt = \alpha_k h^3/3 + \beta_k h^2/2 + \gamma_k h =$$

$$\frac{h}{6}(2\alpha_k h^2 + 3\beta_k h + 6\gamma_k) = \frac{h}{6}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Če to storimo za vsak $k = 1, 2, ..., n$ in vse skupaj seštejemo, dobimo aproksimacijo integrala funkcije f na vsem intervalu $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n h(y_{2k-2} + 4x_{2k-1} + y_{2k})/6 =$$

$$\frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

To je t.i. *Simpsonova kvadraturna formula*. Je zelo natančna in že pri majhnih vrednostih za n daje dobre približke. Brez dokaza povejmo, da velja za napako R_n ocena

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|.$$

ZGLED. Pri računanju prejšnjega integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ po Simpsonovi formuli zadošča vzeti $n = 2$, saj je po zgornji oceni napaka manjša od $2/(2880\cdot 16) \approx 0.00004$. Po Simpsonu dobimo

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{h}{2}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = (1 + 16/5 + 4/3 + 16/7 + 1/2)/12 \approx 0.6932.$$

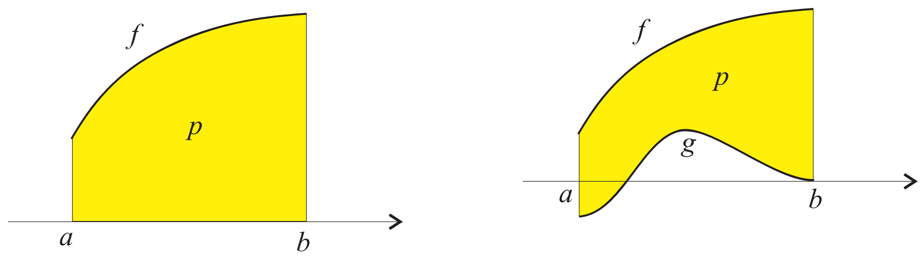
Opomba. Numerično sicer računamo integrale, ki se jih ne da izraziti z elementarnimi funkcijami, npr. $I = \int_0^1 e^{-x^2/2}$. Po trapezni formuli dobimo pri $n = 5$ približek $I \approx 0.8536$, Simpsonova formula pa nam da že pri $n = 2$ približek $I \approx 0.8557$. Prava vrednost je $I = 0.8556$ (glej [**?**]).

3. Uporaba določenega integrala v geometriji

Integriranje funkcij je zelo uporabno v naravoslovju, tehniki, ekonomiji in tudi drugje, kjer se uporabljajo moderne matematične metode. Večine zahtevnejših fizikalnih količin in izrekov npr. ni mogoče niti formulirati niti obravnavati brez integralov. Tu se v uporabo integrala v drugih vedah ne bomo spuščali, ogledali si bomo le nekaj bolj preprostih geometrijskih aplikacij.

(A) Računanje ploščin likov.

Vemo že, da je določeni integral tesno povezan s ploščino krivočrtnih likov. Če je npr. $f(x) \geq 0$ na $[a,b]$, je ploščina lika, ki ga na intervalu $[a,b]$ oklepajo krivulja $y = f(x)$, abscisna os in obe ordinati v krajiščih (slika 9), enaka $p = \int_a^b f(x)dx$.



Slika 9

Če je $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$ (slika 29b), je ploščina med njima na $[a,b]$ enaka $p = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Nekoliko bolj zapletena situacija nastopi, če se obe krivulji prepletata. Tedaj moramo izračunati del ploščine med njima na posameznih odsekih in potem te posamezne prispevke sešteti.

ZGLED. (a) Ploščino (polovice) kroga izračunamo z integralom $p = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Uvedemo substitucijo $x = a\sin t$. Torej je $dx = a\cos t dt$ in

$$p = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = a^2\pi.$$

(b) Ploščino med sinusom in kosinusom na intervalu $[0, 2\pi]$ izračunamo z vsoto integralov

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx = 4\sqrt{2}.$$

Včasih lahko na ta način izračunamo tudi ploščino lika, ki ga omejuje parametrično podana krivulja.

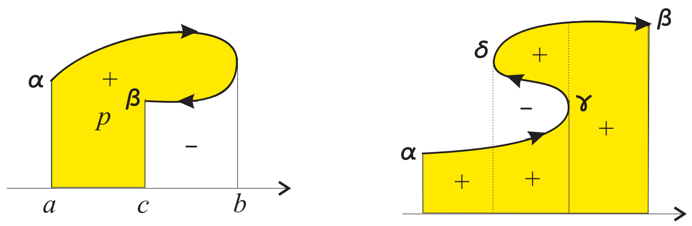
ZGLED. Ploščino pod enim lokom cikloide izračunamo z

$$p = \int_0^{2a\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt =$$

$$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 4a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 t)dt = 3a^2\pi.$$

Upoštevali smo, da je $y = a(1 - \cos t)$ in $dx = a(1 - \cos t)dt$.

Oglejmo si nekoliko podrobneje računanje ploščin pri parametrično podanih krivuljah. Če je $y(t) \geq 0$ in je tudi $\dot{x}(t) > 0$ (in zato x narašča) za $\alpha < t < \beta$ (tako kot pri zadnjem zgledu), je ploščina enaka $p = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$. To velja, tudi če $\dot{x}$ nima stalnega predznaka na intervalu $[\alpha, \beta]$. Kjer je $\dot{x} > 0$, potuje točka (x, y) po krivulji v desno in prispevek k ploščini pod krivuljo je pozitiven. Kjer pa je $\dot{x} < 0$, potuje točka (x, y) po krivulji v levo in prispevek k ploščini pod krivuljo je negativen (slika 10).



Slika 10

Parametrizacija ravninske krivulje je dana s parom zvezno odvedljivih preslikav $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, ali kar z eno vektorsko funkcijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, kjer je $\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t))$. Vektorsko funkcijo odvajamo po komponentah: $\dot{\boldsymbol{F}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ za vsak t. Tej funkciji $\boldsymbol{F}$ rečemo *pot* (točke (x, y) po ravnini $\mathbb{R}^2$), njeni zalogi vrednosti $\{\boldsymbol{F}(t);\ \alpha \leq t \leq \beta\}$ pa *krivulja* v ravnini (ali *lok* krivulje v ravnini).
Seveda imata dve različni funkciji lahko isto zalogo vrednosti, torej ima dana krivulja na sploh različne parametrizacije. Če je npr. $\phi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ poljubna druga zvezno odvedljiva funkcija, ki preslika interval $[\gamma, \delta]$ surjektivno na interval $[\alpha, \beta]$, je $\boldsymbol{F} \circ \phi$ druga parametrizacija iste krivulje. Da se pokazati, da lahko poljubno drugo parametrizacijo dane krivulje dobimo na ta način.

Kritične so točke t, kjer je $\dot{x}(t) = 0$ in $\dot{y}(t) = 0$; v njih smer ni določena, (pri cikloidi so npr. take točke $t = \pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, kjer nastopi ost). Da se temu izognemo, zahtevamo, da je parametrizacija povsod regularna.

DEFINICIJA 1. Rečemo, da je parametrizacija $\boldsymbol{F}$ dane krivulje je v točki t *regularna*, če je $\dot{\boldsymbol{F}}(t) \neq (0, 0)$. Če je to res za vsak $t \in [\alpha, \beta]$, rečemo, da je parametrizacija $\boldsymbol{F}$ *regularna povsod.*

Regularna parametrizacija določa *usmerjenost* krivulje, podana je s smerjo potovanja točke $\boldsymbol{F}(t)$ po krivulji. Pogosto tvorijo krivulje zaključeno zanko (pot se vrne v začetno točko), ki omejuje nek lik. Tedaj rečemo, da je usmerjenost *pozitivna*, če je ta lik pri potovanju po krivulji na levi strani.

DEFINICIJA 2. *Gladka enostavno sklenjena* krivulja je krivulja z regularno parametrizacijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja:
(i) $\dot{\boldsymbol{F}}(\alpha) = \dot{\boldsymbol{F}}(\beta)$ (gladkost);
(ii) $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\beta)$ (sklenjenost);
(iii) $\boldsymbol{F}(s) \neq \boldsymbol{F}(t)$ za $s, t \in [\alpha, \beta)$, $s \neq t$ (enostavnost).

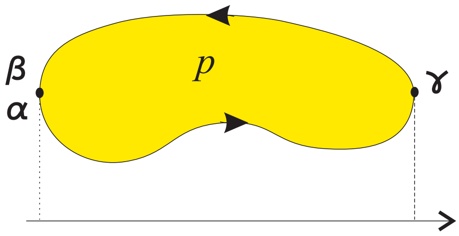
Zadnja točka (iii) pove, da je funkcija $\boldsymbol{F}$ na intervalu $[\alpha, \beta)$ injektivna; torej se točka na krivulji $\boldsymbol{F}(t)$ za noben $t < \beta$ ne vrne v nobeno prejšnjo točko, ampak se to zgodi šele pri $t = \beta$ (ii). Izpeljali bomo formulo za izračun ustrezne ploščine.

TRDITEV 1. *Ploščina območja, ki ga omejuje gladka enostavno sklenjena krivulja z regularno parametrizacijo in s pozitivno usmerjenostjo, je enaka*

$$p = \int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)dt = -\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt.$$

Dokaz. Oglejmo si npr. integral $\int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$. Ker je $x = x(t)$ zvezna funkcija na kompaktnem intervalu, doseže na njem svoj globalni minimum, npr. v točki γ, in svoj globalni maksimum, npr. v točki τ. Brez škode lahko predpostavimo, da je $\gamma = \alpha$ (sicer izberemo novo regularno parametrizacijo, ki ustreza temu in vsem drugim pogojem, s preprostim premikom). Potem pomeni $\int_\alpha^\tau y(t)\dot{x}(t)dt$ ploščino med abscisno osjo in med spodnjim delom krivulje (predznačeno, če je krivulja kje pod abscisno osjo), integral $\int_\tau^\beta y(t)\dot{x}(t)dt$ pa negativno ploščino med abscisno osjo in zgornjim delom krivulje. Skupaj dobimo ravno negativno ploščino lika, ki ga krivulja omejuje (glej sliko 11).

Prvo formulo $p = \int_\alpha^\beta x(t)\dot{y}(t)dt$ dokažemo podobno, če zamenjamo vlogo obeh osi, ali pa jo izpelejmo z integracijo pod delih; tretja formula $p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt$ je povprečje prvih dveh.



Slika 11

Pogosto zadnjo formulo za ploščino zapišemo na kratko $p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta (xdy - ydx)$.

ZGLED. Izračunajmo ploščino elipse, podane v parametrični obliki z enačbama $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Potem je npr.

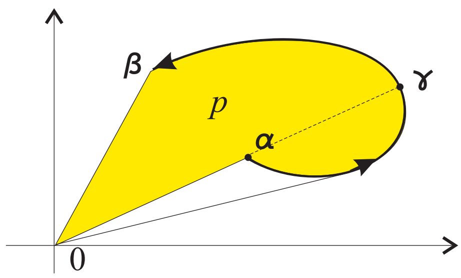
$$p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((a\cos t)(b\cos t) + (a\sin t)(b\sin t))dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$

V posebnem primeru dobimo pri $a = b$ ploščino kroga.

Opomba. Če $\boldsymbol{F}(\alpha) \neq \boldsymbol{F}(\beta)$, izračunamo po tej formuli samo ploščino izseka, ki ga omejuje krivulja in zveznici od koordinatnega izhodišča do začetne in končne točke krivuljnega loka. Čeprav rob tega izseka zdaj ni povsod gladek, formula velja, saj so tudi odsekoma zvezne funkcije integrabilne. Ploščino četrtine elipse npr. izračunamo z integralom

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}((a\cos t)(b\cos t) + (a\sin t)(b\sin t))dt =$$

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = ab\pi/4.$$



Slika 12

TRDITEV 2. *Če je krivulja podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\phi)$, kjer je $\alpha \le \phi \le \beta$, je ploščina krivuljnega izseka podana s formulo*:

$$p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)d\phi.$$

Dokaz. To formulo takoj izpeljemo iz formule za izračun ploščine krivuljnega izseka v parametrični obliki, saj je zdaj parameter $t = \phi$, spremenljivki pa $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ in $xdy - ydx = r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)d\phi = r^2 d\phi$. Lahko tudi upoštevamo, da je izraz $\frac{1}{2}r^2 d\phi$ enak ploščini enakokrakega trikotnika s krakom r in vmesnim kotom $d\phi$.

ZGLED. (a) Ploščino kroga bi lažje izračunali s formulo $p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2 d\phi = a^2\pi$.

(b) Ploščina enega polnega zavoja Arhimedove spirale $r = a\phi$ je enaka $p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2\phi^2 d\phi = 4a^2\pi^3/3$.

(c) Ploščina srčnice (kardioide) s polarno enačbo $r = a(1 + \cos\phi)$ pa je

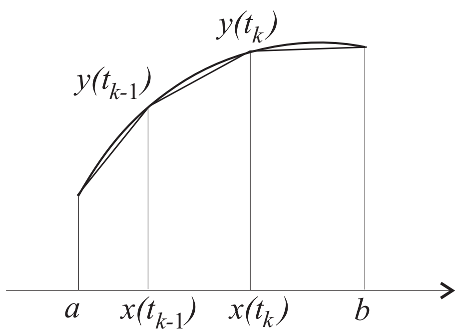
$$p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\phi)^2 d\phi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi)d\phi = 3a^2\pi/2.$$

(B) Računanje ločnih dolžin.

Kot prej naj bo krivulja parametrizirana z zvezno funkcijo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Interval $[\alpha, \beta]$ razdelimo na n podintervalov s točkami $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$. Tej delitvi $D = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ priredimo vsoto $\lambda(D) = \sum_{k=1}^n \|\boldsymbol{F}(t_k) - \boldsymbol{F}(t_{k-1})\|$, ki pomeni dolžino poligonske črte s krajišči v izbranih točkah $\boldsymbol{F}(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ na krivulji. Pri finejši delitvi se ta izraz kvečjemu poveča. Če so vse te vsote navzgor omejene, obstaja njihov supremum. V tem primeru rečemo, da je pot (tj. zvezna funkcija $\boldsymbol{F}$) *izmerljiva* in da je njena dolžina enaka temu supremumu. Imamo torej naslednjo definicijo.

DEFINICIJA 3. *Dolžina poti*, tj. zvezne funkcije $\boldsymbol{F}$, je enaka

$$l(\boldsymbol{F}) = \sup\{\lambda(D);\ D \text{ delitev intervala } [\alpha, \beta]\}.$$



SLIKA 13

TRDITEV 3. *Naj bo $\boldsymbol{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva parametrizacija dane krivulje. Potem je pot $\boldsymbol{F}$ izmerljiva in njena dolžina je dana z integralom*

$$l(\boldsymbol{F}) = \int_\alpha^\beta \|\dot{\boldsymbol{F}}(t)\|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Dokaz. Po definiciji za vsako delitev $D = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ velja

$$\lambda(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Po Lagrangeu je $x(t_k)-x(t_{k-1})=\dot{x}(c_k)(t_k-t_{k-1})$ in $y(t_k)-y(t_{k-1})=\dot{y}(d_k)(t_k-t_{k-1})$, kjer je $t_{k-1}<c_k,d_k<t_k$. Torej je $\lambda(D)=\sum_{k=1}^n\sqrt{\dot{x}(c_k)^2+\dot{y}(d_k)^2}\Delta t_k$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ za vsak k. To spominja na Riemannovo vsoto $S(h;D,T_D)=\sum_{k=1}^n\sqrt{\dot{x}(c_k)^2+\dot{y}(c_k)^2}\Delta t_k$ za funkcijo $h(t)=\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}$, ki je tako blizu integralu $I=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$ kot želimo, če je le delitev D dovolj drobna, npr. $|I-S(h;D,T_D)|<\epsilon/2$.

Po drugi strani so točke c_k in d_k z istega podintervala. Zaradi zveznosti funkcije h, lahko pri dovolj drobni delitvi dosežemo, da je tudi $|S(h;D,T_D)-\lambda(D)|<\epsilon/2$, skupaj torej $|I-\lambda(D)|\le|I-S(h;D,T_D)|+|S(h;D,T_D)-\lambda(D)|<\epsilon$.

TRDITEV 4. *Naj bo* $\boldsymbol{F}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ *zvezno odvedljiva funkcija in* $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *strogo monotono naraščajoča in zvezno odvedljiva funkcija, ki preslika interval* $[\gamma,\delta]$ *bijektivno na interval* $[\alpha,\beta]$*. Potem je dolžina poti* $\boldsymbol{F}\circ\phi$ *enaka dolžini poti* $\boldsymbol{F}$.

Dokaz. Izračunajmo

$$l(\boldsymbol{F}\circ\phi)=\int_\gamma^\delta\sqrt{\dot{x}(\phi(s))^2\dot{\phi}(s)^2+\dot{y}(\phi(s))^2\dot{\phi}(s)^2}\,ds=$$

$$\int_\gamma^\delta\sqrt{\dot{x}(\phi(s))^2+\dot{y}(\phi(s))^2}\,\dot{\phi}(s)\,ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Na koncu smo zamenjali spremenljivko v določenem integralu: $t=\phi(s),\ dt=\dot{\phi}(s)ds$.

Zadnja trditev pove, da je izračun dolžine dane poti neobčutljiv za zvezno odvedljive bijekcije. To pomeni, da je smiselno definirati tudi pojem dolžine dane krivulje, ki bo neodvisen od dane regularne parametrizacije.

DEFINICIJA 4. *Dolžina krivulje* ziroma *ločna dolžina* s je enaka dolžini katerekoli njene zvezno odvedljive regularne parametrizacije $\boldsymbol{F}$, torej $s=l(\boldsymbol{F})$.

Regularnost pomeni, da nikjer na poti ni odvod parametrizacije enak nič, torej potuje točka po krivulji vedno v isto smer. Samo tedaj dobimo pravo (geometrijsko) dolžino krivulje.

Oglejmo si dva posebna primera:

(1) Naj bo krivulja podana z enačbo $y=f(x)$, torej predstavlja graf funkcije f. Tedaj je parameter kar enak x in za dolžino grafa funkcije f na intervalu $[a,b]$ imamo formulo

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

(2) Za krivuljo v polarni obliki je parameter polarni kot ϕ, $x=r\cos\phi$ in $y=r\sin\phi$, zato je $\dot{x}=r'\cos\phi-r\sin\phi$, $\dot{y}=r'\sin\phi+r\cos\phi$, zato dobimo $\dot{x}^2+\dot{y}^2=(r'\cos\phi-r\sin\phi)^2+(r'\sin\phi+r\cos\phi)^2=r^2+r'^2$ oziroma

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r(\phi)^2+r'(\phi)^2}\,d\phi.$$

Vse te formule si lahko nazorno lažje zapomnimo, če upoštevamo, da za *diferencial* ločne dolžine s velja $ds^2=dx^2+dy^2$, od koder dobimo $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ oziroma $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ za parametrično podano krivuljo, $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ oziroma $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$ za eksplicitno podano krivuljo in na koncu $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi$ oziroma $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,dx$ za krivuljo v polarni obliki.

ZGLED. (a) Obseg krožnice je enak štirikratni dolžini krivulje $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[0, a]$. Po kratkem računu dobimo $s = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin 1 = 2a\pi$. Seveda je veliko lažje izračunati obseg krožnice, podane v parametrični obliki z $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, ko je $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 2a\pi$. Še najhitreje pa ga izračunamo v polarni obliki. Krožnica ima zdaj najbolj preprosto enačbo $r = a$ (torej je $r' = 0$) in dobimo $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} d\phi = 2a\pi$.

(b) Dolžina enega loka cikloide z enačbo $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ je

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8a.$$

To predstavlja štiri premere kotaleče se krožnice.

ZGLED. Poskusimo na podoben način izračunati obseg elipse v parametrični obliki $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, kjer je $a > b > 0$. Zdaj je $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = b \cos t$ in zato $\dot{s}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t = a^2(1 - \epsilon^2 \cos^2 t)$, kjer pomeni $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ numerično ekscentričnost elipse. Za obseg elipse torej dobimo

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t}\, dt.$$

Ta integral seveda obstaja, saj je integrand zvezna funkcija, vendar se ga ne da izraziti z elementarnimi funkcijami. Imenuje se *eliptični integral druge vrste* in ga lahko poljubno natančno izračunamo numerično.

Naravni parameter

Dolžina krivulje na intervalu $[\alpha, t]$ je dana s formulo

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Ker je tu $s = s(t)$ strogo naraščajoča zvezna in zvezno odvedljiva funkcija parametra t, obstaja tudi strogo naraščajoča in zvezno odvedljiva inverzna funkcija $t = t(s)$ ločne dolžine s. Vstavimo to v enačbi $x = x(t)$ in $y = y(t)$, pa dobimo $x = x(t(s))$ in $y = y(t(s))$. Če je $\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t))$, je zdaj $s \mapsto F(x(t(s)), y(t(s)))$ nova parametrizacija iste krivulje. Parameter je zdaj kar *dolžina krivulje* od začetne točke $F(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ do točke $F(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$. Ta parameter se imenuje *naravni parameter.*

Da je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom, spoznamo iz dejstva, da tedaj zaradi $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ in $dx/ds = \dot{x}/\dot{s}$, $dy/ds = \dot{y}/\dot{s}$, velja tudi $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$ oziroma $x'^2 + y'^2 = 1$, kjer črtica pomeni odvod na naravni parameter. Obratno pa tudi iz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ dobimo za ločno dožino $s = t - \alpha$. Torej je parameter $t = s + \alpha$ samo premaknjen naravni parameter.

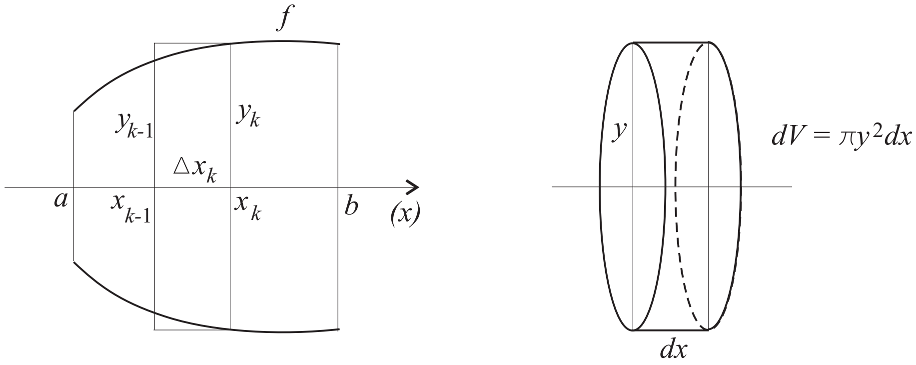
Pogosto je zelo ugodno imeti izmerljivo krivuljo parametrizirano z naravnim parametrom. Nekatere formule se pri tem poenostavijo. Za ukrivljenost ravninske krivulje smo npr. pri analizi 1 izpeljali formulo

$$\kappa = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

Če je tu t naravni parameter, je imenovalec enak 1 in ukrivljenost dobi bolj preprosto obliko: $\kappa = y''x' - x''y'$ (črtica zdaj pomeni odvod na naravni parameter).

(C) Računanje prostornine rotacijskih teles.

Kadar se krivulja $y = f(x)$ zavrti okrog abscisne osi, lahko z določenim integralom izračunamo tudi prostornino dobljene vrtenine (rotacijskega telesa), ki nastane nad intervalom $[a, b]$.



Slika 14

TRDITEV 5. *Naj bo f zvezna funkcija, ki je na intervalu $[a, b]$ povsod pozitivna (enaka nič kvečjemu v krajiščih). Potem je prostornina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ okrog abscisne osi enaka*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Dokaz. Razdelimo interval $[a, b]$ na podintervale s točkami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b$. V vsaki točki x_k postavimo ravnino pravokotno na abscisno os. S temi ravninami smo rotacijsko telo razrezali na tanke plošče debeline Δx_k. Če je Δx_k majhen, ima taka plošča (med ravninama skozi x_{k-1} in x_k) približno obliko valja s polmerom osnovne ploskve $y_k = f(x_k)$ in višino Δx_k, zato je njena prostornina približno enaka $\pi y_k^2 \Delta x_k$. Ta približek je tem bolj natančen, čim manjši je Δx_k. Prostornina celotnega rotacijskega telesa je potem približno enaka vsoti prostornin posameznih plošč, tj. vsoti

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

Toda to je ena od integralskih (Riemannovih) vsot funkcije $x \mapsto \pi f(x)^2$ na intervalu $[a, b]$. Ker je funkcija f zvezna, je tudi ta nova funkcija zvezna, zato njene integralske vsote pri pogoju $\max_k \Delta x_k \to 0$ konvergirajo proti ustreznemu integralu. Torej res dobimo zgornjo formulo za prostornino vrtenine.

ZGLED. (a) Prostornino stožca s polmerom r in višino h dobimo z vrtenjem premice $y = rx/h$ okrog abscisne osi na intervalu $[0, h]$. Torej je $V = \dfrac{\pi r^2}{h^2} \displaystyle\int_0^h x^2 dx = \pi r^2 h/3$.

(b) Prostornino rotacijskega elipsoida, ki ga dobimo tako, da se zgornja veja elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ zavrti na intervalu $[-a, a]$ okrog abscisne osi, dobimo z integralom $V = \dfrac{\pi b^2}{a^2} \displaystyle\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = \dfrac{4\pi ab^2}{3}$.

V posebnem primeru, ko je $a = b$, dobimo prostornino krogle s polmerom a, torej $V = 4\pi a^3/3$.

Prostornino vrtenine lahko izračunamo tudi, če se zavrti parametrično podana krivulja, podana z enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$. Pri tem uporabljamo formulo $V = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx$, kjer je seveda $y = y(t)$ in $dx = \dot{x}(t)dt$ (paziti moramo, da je $\dot{x}(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$ pozitiven oziroma da je $x = x(t)$ naraščajoča funkcija parametra t).

ZGLED. (a) Prostornina telesa, ki nastane z vrtenjem enega loka cikloide $x = a(t - \sin\, t)$, $y = a(1 - \cos\, t)$ je

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos\, t)^3 dt = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\, t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$a^3\pi(2\pi + 3\pi) = 5a^3\pi^2.$$

Upoštevil smo, da je integral po periodi (od 0 do 2π) lihe potence funkcije kosinus enak 0, integral kvadrata kosinusa pa polovica periode).

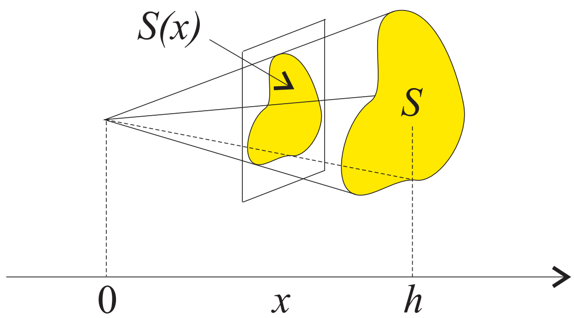
(b) Prostornina svitka (torusa) z enačbama $x = a\cos\, t$, $y = b - a\sin\, t$ pa je

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = -a\pi \int_0^{2\pi} (b - a\sin\, t)^2 \sin t\, dt =$$

$$-a\pi \int_0^{2\pi} (b^2 \sin\, t - 2ab\sin^2 t + a^2 \sin^3 t)dt = 2a^2 b\pi^2.$$

Prostornina telesa z znanim presekom. Še eno formulo za izračun prostornine lahko izpeljemo brez težav, čeprav telo ni rotacijsko. Denimo, da poznamo ploščino $S(x)$ vsakega na os x pravokotnega preseka telesa, ki se razteza od $x = a$ do $x = b$ (slika 15). Potem podobno kot pri vrteninah z razrezom na tanke vzporedne valje brez težav spoznamo, da velja za prostornino takega telesa naslednja formula.

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



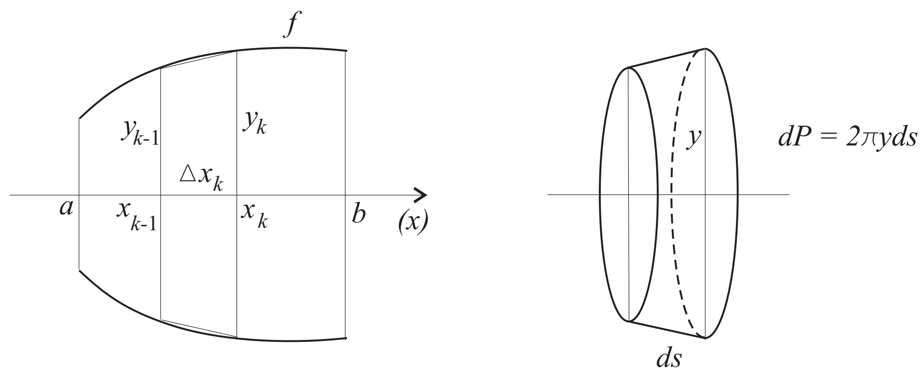
Slika 15

ZGLED. Imejmo pokončno piramido z višino h, katere osnovna ploskev je lik s ploščino S. Zaradi lažjega računa naj ima piramida vrh v koordinatnem izhodišču in osnovno ploskev v ravnini, pravokotni na abscisno os pri $x = h$ (glej sliko 15). Opazujmo pravokotne preseke v oddaljenosti x od izhodišča ($0 \le x \le h$). Ker je razmerje njihovih ploščin premo sorazmerno razmerju kvadratov oddaljenosti, imamo formulo $S(x) = S(h)x^2/h^2 = Sx^2/h^2$. Zato je prostornina piramide enaka $V = \int_0^h S(x)dx = (S/h^2)\int_0^h x^2 dx = Sh/3$.

(D) Računanje površine rotacijskih teles.

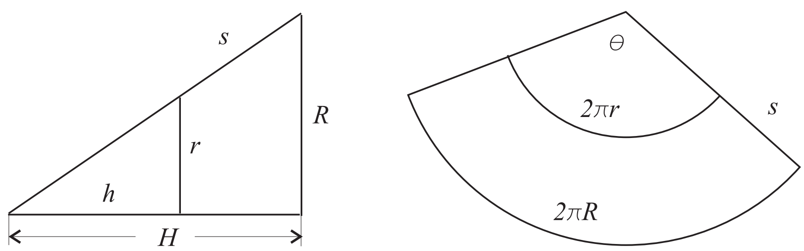
Približno površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ okrog abscisne osi, izračunamo tako, da seštejemo plašče vseh tankih plošč, na katere smo (tako kot prej) razrezali telo (glej sliko 16).

Zdaj moramo upoštevati, da je tanka plošča v resnici prisekani valj s polmeroma osnovnih ploskev y_{k-1} in y_k ter stranskim robom $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$, kjer je $x_{k-1} < c_k < x_k$. Uporabili smo Lagrangev izrek.



SLIKA 16

Formula za plašč prisekanega stožca z polmeroma osnovnih ploskev R in r ter stranskim robom s se glasi $pl = \pi(R+r)s$. Izpeljemo jo iz relacij $R/r = H/h = \sqrt{R^2+H^2}/\sqrt{r^2+h^2}$, $\theta = 2\pi r/\sqrt{r^2+h^2} = 2\pi R/\sqrt{R^2+H^2}$ in $s = \sqrt{R^2+H^2} - \sqrt{r^2+h^2}$, kjer sta H in h velika in mala višina ter θ središčni kot pri razgrnitvi valjevega plašča v ravnino (glej sliko 17). Velja namreč $pl = \frac{1}{2}(R^2+H^2)\theta - \frac{1}{2}(r^2+h^2)\theta = \pi(R\sqrt{R^2+H^2} - r\sqrt{r^2+h^2}) = \pi((R+r)\sqrt{R^2+H^2} - (R+r)\sqrt{r^2+h^2}) = \pi(R+r)s$.



SLIKA 17

Torej je plašč naše tanke ploščе enak $\pi(y_{k-1}+y_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$. To pa je približno enako $2\pi f(c_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k$, saj za zvezno funkcijo f velja ocena $|y_{k-1}+y_k-2f(c_k)| \leq |f(x_{k-1})-f(c_k)| + |f(x_k)-f(c_k)| < \epsilon$, če je le $\Delta x_k < \delta$ (vse točke x_{k-1}, x_k in c_k ležijo na istem podintervalu z dolžino pod δ). Torej je tudi površina celotnega rotacijskega telesa približno enaka vsoti plaščev posameznih tankih plošč, tj. vsoti

$$P_n = 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\sqrt{1+f'(c_k)^2}\,\Delta x_k,$$

ki je ena od integralskih vsot za integral funkcije $x \mapsto 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$. Dokazali smo naslednjo trditev.

TRDITEV 6. *Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija, ki je na intervalu $[a,b]$ povsod pozitivna. Potem je površina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ okrog abscisne osi enaka*

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

ZGLED. (a) Površina paraboloida $y = \sqrt{x}$ na intervalu [0,1] je

$$P = 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3\sqrt{3}-1).$$

Vpeljali smo substitucijo $\sqrt{2x+1} = t$.

(b) Površina krogle s polmerom a je enaka $P = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{1 + x^2/(a^2 - x^2)}\,dx = 4\pi a^2$.

Podobno kot prej pri prostorninah vidimo, da lahko uporabljamo formulo

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

za izračun površine tudi v primeru, ko je krivulja, ki se vrti okrog abscisne osi, podana v parametrični obliki.

ZGLED. Če se zavrti cikloidni lok, je $y = a(1 - \cos\, t)$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4a^2 \sin^2(t/2)$ in zato površina dobljene vrtenine enaka

$$2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\, t)\sin(t/2)dt = 64\pi a^2/3.$$

4. Posplošeni integral

Vemo, da je na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$ integrabilna funkcija f nujno omejena. Neomejene funkcije torej ne moremo integrirati (v Riemannovem smislu). Prav tako smo v definiciji potrebovali omejen interval $[a, b]$; za poltrak ali za celo realno os ne moremo definirati delitve D na končno mnogo omejenih podintervalov.

Kljub temu si včasih tudi v takih primerih lahko pomagamo še z enim limitnim procesom, ki bo funkciji in intervalu priredil določeno vrednost. Ta vrednost bo pomenila posploštev integrala in ji bomo zato rekli posplošeni integral funkcije f na danem (omejenem ali neomejenem) intervalu.

Potrebovali bomo naslednjo definicijo.

DEFINICIJA 1. Naj bo I kakršenkoli interval s krajiščema a, b, $-\infty \le a < b \le \infty$ (odprt, zaprt, polodprt, omejen ali neomejen). Rečemo, da je realna funkcija f *lokalno integrabilna* na intervalu I, če je f integrabilna na vsakem kompaktnem (tj. omejenem in zaprtem) podintervalu $[c, d] \subset I$.

Če je npr. $I = (a, b]$, kjer sta a in b realni števili, $a < b$, lokalna integrabilnost pomeni, da je funkcija f integrabilna na vsakem podintervalu $[c, b] \subset (a, b]$. Podobno mora biti v primeru lokalne integrabilnosti na intervalu $I = [a, b)$ funkcija f integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[a, d] \subset [a, b)$. Seveda je v primeru intervala $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, lokalna integrabilnost isto kot integrabilnost.

Ločili bomo dva osnovna primera: (A), ko je funkcija neomejena na omejenem intervalu in (B), ko integriramo funkcijo po neomejenem intervalu (poltraku ali vsej realni osi).

(A) Neomejena funkcija

Posplošeni integral neomejene lokalno integrabilne funkcije na omejenem intervalu lahko definiramo v primeru, ko obstaja na intervalu $[a, b]$ samo končno mnogo točk c_i, v okolici katerih je funkcija f neomejena. Tedaj interval razdelimo na končno mnogo podintervalov tako, da vsak od njih vsebuje kvečjemu eno teh singularnih točk in sicer kot (levo ali desno) krajišče, izračunamo integral po vsakem takem podintervalu posebej, nato pa posamezne rezultate seštejemo v skupni integral funkcije f na vsem prvotnem intervalu $[a, b]$. Zadošča torej obravnavati samo dva primera: ko ima funkcija f singularno točko (v bližini katere je neomejena) kvečjemu v levem krajišču ali kvečjemu v desnem krajišču intervala $[a, b]$.

DEFINICIJA 2. Če je funkcija f lokalno integrabilna na intervalu $(a, b]$ (tj. integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[c, b] \subset (a, b]$) in zato neomejena kvečjemu v okolici točke a, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)dx.$$

Če je f lokalno integrabilna na intervalu $[a, b)$ (tj. integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu $[a, c] \subset [a, b)$) in zato neomejena kvečjemu v okolici točke b, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

Kadar je morebitna singularnost v vmesni točki c, $a < c < b$, integral seveda zapišemo v obliki $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ in problem prevedemo na oba prejšnja primera.

Če (ena ali druga) limita iz definicije 1 obstaja, rečemo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ v *posplošenem smislu* in da je $\int_a^b f(x)dx$ njen *posplošeni* (*nepravi*) ali *izlimitirani* Riemannov integral. Namesto da integral obstaja v smislu zgornje limite, včasih tudi rečemo, da integral *konvergira*.

Opomba. Tudi posplošeni integral je linearen funkcional: če sta funkciji f in g na intervalu integrabilni v posplošenem smislu in sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti, je

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

To sledi iz dejstva, da po trditvi 5 iz prejšnjega razdelka isto velja na zaprtih podintervalih $[c, b]$ oziroma $[a, c]$, kjer je $a < c < b$, in da je tudi limita linearen funkcional.

TRDITEV 1. *Denimo, da je f integrabilna na celem intervalu $[a, b]$, se pravi, da obstaja njen (pravi) Riemannov integral. Potem obstaja tudi* nepravi *integral funkcije f v smislu definicije 1 in je enak Riemannovemu integralu.*

Dokaz. Zaradi zveznosti funkcije $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ imamo enakost $\lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c\uparrow b} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Podobno vidimo, da je tudi $\lim_{c\downarrow a} \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (zdaj vzamemo $F(x) = \int_x^b f(t)dt$).

Vsak pravi integral imamo torej lahko za posplošeni integral. Seveda pa včasih obstaja posplošeni integral tudi v primerih, ko pravega integrala ne moremo definirati.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0}(-\ln c) = \infty,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\uparrow 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\lim_{c\uparrow 1}(1 - \sqrt{1-c}) = 2,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{c\downarrow 0} \int_c^1 \ln x\, dx = \lim_{c\downarrow 0}(c - c\ln c - 1) = -1.$

Zgleda iz točk (a) in (b) sta oblike $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ($a = 0$, $b = 1$, $p = 1$) in $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($a = 0$, $b = 1$, $p = 1/2$). Obravnavajmo npr. prvega za primer $p \neq 1$, uvedimo novo spremenljivko $x - a = t$ in izračunajmo (pri $a < c < b$)

$$\int_c^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_{c-a}^{b-a} \frac{dt}{t^p} = t^{1-p}/(1-p)|_{c-a}^{b-a} = ((b-a)^{1-p} - (c-a)^{1-p})/(1-p).$$

Ker je $x \mapsto x^{1-p}$ zvezna funkcija, če je $p < 1$, dobimo v tem primeru v limiti, ko $c \to a$, da posplošeni integral obstaja in je enak $\displaystyle\int_c^b \frac{dx}{(x-a)^p} = (b-a)^{1-p}/(1-p).$

Ob upoštevnju izreka 8 v prejšnjem razdelku se lahko hitro prepričamo, da velja tudi za posplošene integrale izrek o zamenjavi naslednji integracijske spremenljivke.

IZREK 1. *Naj bo zvezno odvedljiva $x = x(t)$ naraščajoča funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$ in naj preslika interval $[\alpha, \beta]$ surjektivno na interval $[a, b]$. Potem je za funkcijo f, ki je lokalno integrabilna vsaj na intervalu (a, b), funkcija $g(t) = f(x(t))x'(t)$ lokalno integrabilna vsaj na (α, β), posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja natanko takrat, ko obstaja posplošeni integral $\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$ in oba integrala sta enaka.*

Dokaz. Brez škode lahko predpostavimo, da je $x = x(t)$ strogo naraščajoča zvezno odvedljiva funkcija in da je problem na spodnji meji. Ker v tem primeru velja $\int_c^b f(x)dx = \int_\gamma^\beta f(x(t))x'(t)dt$ za vsak $\alpha < \gamma < \beta$ in $a = x(\alpha) < c = x(\gamma) < b = x(\beta)$ ter je $x = x(t)$ zvezna funkcija, velja isto tudi v limiti.

Tudi metodo integracije po delih (per partes) lahko uporabljamo pri posplošenih integralih v naslednjem smislu.

TRDITEV 2. *Kadar obstajata limiti $\lim_{x\to a} u(x)v(x)$ in $\lim_{x\to b} u(x)v(x)$ ter posplošeni integral $\int_a^b v(x)u'(x)dx$, obstaja tudi posplošeni integral $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ in velja formula*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - \lim_{x\to a} u(x)v(x) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Dokaz izpustimo, formulo dokažemo z aproksimacijo, podobno kot prej. Seveda lahko formulo per partes pišemo tudi na običajen način $\displaystyle\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$, če le razumemo $uv|_a^b$ v smislu razlike limit in integrala v smislu posplošenih integralov.

Opomba. Lahko se zgodi, da niti kakšna od limit niti posplošeni integral na desni strani ne obstajajo. Kljub temu lahko obstaja posplošeni integral na levi strani. V tem primeru ga moramo izračunati po definiciji kot limito pravih integralov, npr. $\int_c^b udv$, za katere pa lahko uporabimo formulo per partes. Potem je

$$\int_a^b udv = \lim_{c\to a} \int_c^b udv = \lim_{c\to a}(uv|_c^b - \int_c^b vdu).$$

ZGLED. Če formalno izračunamo po metodi per partes, dobimo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Tu noben člen na desni ni končen. Prvi je neskončen v limiti, ko pošljemo $x \to 0$, drugi je posplošeni integral, ki po točki (b) izreka 2, ki ga bomo vsak hip dokazali, ne obstaja. Po drugi strani pa posplošeni integral na levi strani obstaja po istem izreku, točka (a).

Pri obravnavi zadnjih zgledov smo poznali primitivno funkcijo vsaj na odprtem intervalu (a, b). Včasih pa se da vnaprej, in ne da bi poznali primitivno funkcijo, povedati, ali bo integral konvergiral ali ne.

IZREK 2. *Naj bo g na $[a, b]$ zvezna funkcija. Potem posplošeni integral*

$$\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$$

(a) *obstaja, če je $p < 1$;*
(b) *ne obstaja, če je $p \geq 1$ in velja $g(a) \neq 0$.*

Dokaz. (a) V integral $\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$ uvedemo po izreku 1 substitucijo $x-a=t^n$, kjer je n tako velik, da je $n(1-p)>1$. Dobimo

$$\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx = n\int_0^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)t^{n(1-p)-1}dt.$$

Ker je na desni strani integrand zvezna funkcija na intervalu $[0, \sqrt[n]{b-a}]$, obstaja ta integral kot pravi (Riemannov) integral. Torej obstaja tudi posplošeni integral na levi strani.

(b) Naj bo npr. $g(a)>0$ (sicer dokazujemo neobstoj integrala za funkcijo $-g$). Zaradi zveznosti funkcije g obstaja d, $a<d<b$, in $m>0$, tako da je $g(x)\geq m$ za vsak $x\in[a,d]$. Ker je zdaj $p\geq 1$, imamo za vsak c, $a<c<d$, oceno

$$\int_c^d g(x)/(x-a)^p dx \geq m\int_c^d 1/(x-a)^p dx = m(\ln(d-a)-\ln(c-a)).$$

V limiti, ko pošljemo $c\to a$, narašča desna stran v $+\infty$, zato velja isto za levo stran in $\lim_{c\downarrow a}\int_c^d g(x)/(x-a)^p dx$ ne obstaja. Potem pa ne obstaja niti integral $\int_a^b g(x)/(x-a)^p dx$.

Analogen izrek velja za integral $\int_a^b g(x)/(b-x)^p dx$.

ZGLED. Preverimo, kdaj obstaja posplošeni integral $\displaystyle\int_0^1 x^r(1-x)^s dx$. Interval $[0,1]$ razdelimo na pol, in si ogledamo integrala po vsaki polovici posebej. Prvi je oblike:

$$\int_0^{1/2} x^r(1-x)^s dx = \int_0^{1/2}\frac{g(x)}{x^{-r}}dx,$$

kjer je $g(x)=(1-x)^s$ zvezna funkcija na $[0,1/2]$ in $g(0)=1$, zato obstaja po izreku 1 natanko takrat, ko je $r>-1$. Drugi pa je podobne oblike, saj lahko napravimo zamenjavo spremenljivk $t=1-x$, tako da je

$$\int_{1/2}^1 x^r(1-x)^s dx = \int_0^{1/2} t^s(1-t)^r dt = \int_0^{1/2}\frac{g(t)}{t^{-s}}dx,$$

kjer je $g(t)=(1-t)^r$ zvezna funkcija, $g(0)=1$, tako da obstaja po izreku 1 natanko takrat, ko je $s>-1$. Prvotni integral $\displaystyle\int_0^1 x^r(1-x)^s dx$ torej obstaja natanko takrat, ko je $r,s>-1$.

Kadar je singularna točka c, v okolici katere je funkcija f neomejena, znotraj intervala $[a,b]$, moramo paziti, da oba integrala $\int_a^c f(x)dx$ in $\int_c^b f(x)dx$ izračunamo neodvisno. Vsak zase morata obstajati. Včasih pa se zgodi, da ta dva posplošena integrala sicer ne obstajata, obstaja pa naslednja limita:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right).$$

(Okrog singularne točke smo odstranili simetrično epsilonsko okolico.) Tedaj govorimo o t.i. *Cauchyjevi glavni vrednosti* integrala $\int_a^b f(x)dx$ in jo označimo z *v.p.* pred integralom (*v.p.* je okrajšava za francoski izraz *valeur principal*, ki pomeni glavno vrednost), torej:

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right).$$

ZGLED. Glavna vrednost integrala $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ je ln 2, čeprav posplošena integrala $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ in $\int_0^2 \frac{dx}{x}$ ne obstajata. Imamo namreč

$$v.p.\int_{-1}^2\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x} + \int_\epsilon^b \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\epsilon\to 0}(\ln\epsilon + \ln 2 - \ln\epsilon) = \ln 2.$$

(B) Neomejen integracijski interval

Ponovno lahko obravnavamo samo posplošeno integrabilnost funkcije, ki je definirana na desnem poltraku $[a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, ali na levem poltraku $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Integrabilnost na vsej realni osi $\mathbb{R}$ potem ugotavljamo z razdelitvijo realne osi na dva poltraka (npr. od $-\infty$ do 0 in od 0 do ∞).

DEFINICIJA 3. Če je funkcija f lokalno integrabilna na poltraku $[a,\infty)$ (tj. na vsakem kompaktnem podintervalu $[a,c] \subset [a,\infty)$) oziroma na poltraku $(-\infty,b]$ (tj. na vsakem kompaktnem podintervalu $[c,b] \subset (-\infty,b]$), definiramo

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx \quad \text{oziroma} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Kadar zgornja limita obstaja, spet rečemo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,\infty)$ oziroma $(-\infty,b]$ v *posplošenem smislu* in da je $\int_a^\infty f(x)dx$ oziroma $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ njen *posplošeni* (*nepravi*) ali *izlimitirani* Riemannov integral, oziroma rečemo, da ustrezni integral *konvergira*. Podobno kot prej vidimo, da je tudi ta posplošeni integral linearen funkcional.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}(1-e^{-c}) = 1,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty}\ln(c^2+1) = \infty.$

Kadar sta obe integracijski meji neskončni, razdelimo integracijsko območje, tj.realno os, na dva dela, ali pa zapišemo $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{c\to-\infty,d\to\infty}\int_c^d f(x)dx$. Paziti moramo, da vsako limito izračunamo neodvisno od druge. Če namesto tega najprej integriramo samo po simetričnem intervalu $[-c,c]$ in potem pošljemo c v neskončnost, spet govorimo le o glavni vrednosti integrala $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, torej

$$v.p.\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_{-c}^c f(x)dx\right).$$

V zadnjem zgledu smo videli, da integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ ne konvergira. Obstaja pa njegova glavna vrednost

$$v.p.\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{c\to\infty}\left(\int_c^c \frac{2xdx}{x^2+1}\right) = 0.$$

IZREK 3. *Če je funkcija f lokalno integrabilna na poltraku $[a,\infty)$, obstaja $\int_a^\infty f(x)dx$ natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $b > a$, da za poljubna $c,d > b$ velja $|\int_c^d f(x)dx| < \epsilon$.*

Dokaz. Naj bo $F(c) = \int_a^c f(t)dt$ za vsak $c > a$. Potem obstaja $\int_a^\infty f(x)dx$ natanko takrat, ko obstaja limita $\lim_{c\to\infty}F(c)$, to pa je spet res natanko takrat, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $b > a$, da za poljubna $c,d > b$ velja $|F(d) - F(c)| < \epsilon$ (za vsako zaporedje $x_n \to \infty$, je zaporedje $F(x_n)$ konvergentno, natanko takrat, ko je Cauchyjevo). Zadnja neenakost ravno pomeni $|\int_c^d f(x)dx| < \epsilon$.

ZGLED. Pokažimo, da obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Kot posledico drugega izreka o povprečni vrednosti smo že ugotovili, da za poljubna c, d, $1 < c < d$, velja $\displaystyle|\int_c^d \frac{\sin x}{x^p}\,dx| < \frac{2}{c^p}$. Desna stran postane poljubno majhna, če je le c (in s tem d) dovolj velik. Torej obstaja po izreku 3 tudi integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$.

Brez dokazov povejmo, da tudi za posplošeni integral na neomejenem intervalu lahko uporabimo substitucijo (z monotono zvezno odvedljivo funkcijo) ali metodo per partes (kadar na desni strani formule vse limite in posplošeni integrali obstajajo). Pri zamenjavi spremenljivk se neomejeni interval lahko preslika na omejenega (ali obratno), tako da se ene vrste posplošeni integral transformira v posplošeni integral druge vrste.

ZGLED. (a) Če v integral $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ vpeljemo substitucijo $x = \sqrt{t}$, se integracijsko območje ohranja in zaradi $dx = dt/(2\sqrt{t})$ dobimo

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

V bližini točke 0, npr. na intervalu $(0, 1]$ ta integral obstaja (izrek 2). Pravkar pa smo videli, da obstaja tudi na neskončnem poltraku $[1, \infty)$.

(b) Naj bo $p \in \mathbb{R}$ poljuben. V integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ uvedimo substitucijo s padajočo funkcijo $x = 1/t$, tako da je $dx = -dt/t^2$ in

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 t^{p-2}\,dt.$$

Vemo, da integral na desni strani konvergira natanko takrat, ko je $2 - p < 1$ oziroma $p - 2 > -1$. Torej konvergira integral na levi strani natanko takrat, ko je $p > 1$. To bi lahko ugotovili tudi direktno po definiciji posplošenega integrala.

IZREK 4. *Naj bo funkcija g zvezna in omejena na poltraku $[a, \infty)$, kjer je $a > 0$. Potem posplošeni integral*

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$$

(a) *obstaja, če je $p > 1$;*
(b) *ne obstaja, če je $p \le 1$ in za števili $m, b > 0$ velja $|g(x)| \ge m$ za vsak $x > b$.*

Dokaz. (a) Naj bo $|g(x)| \le M$ za $x \ge a$ in $p > 1$. Potem je za poljubna $c, d \ge a$ veljavna ocena

$$|\int_c^d \frac{g(x)}{x^p}\,dx| \le M\int_c^d \frac{dx}{x^p} = M(c^{1-p} - d^{1-p})/(p-1) \le Mc^{1-p}/(p-1).$$

Torej lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tak $b > a$ (npr. $b > (M/\epsilon(p-1))^{1/(p-1)}$), da je $|\int_c^d \frac{g(x)}{x^p}\,dx| < \epsilon$ za $c, d > b$. Po izreku 3 posplošeni integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}dx$ konvergira.

(b) Naj bo $p \le 1$ in naj za funkcijo g velja npr. $g(x) \ge m > 0$ za vsak $x > b$. Brez škode lahko predpostavimo, da je hkrati $b > a$ in $b > 1$. Izberimo še poljuben $c > b$. Potem je

$$\int_a^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx = \int_a^b \frac{g(x)}{x^p}\,dx + \int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx,$$

kjer je prvi integral pravi, drugega pa lahko ocenimo:

$$\int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx \ge m\int_b^c \frac{1}{x}\,dx = m(\ln c - \ln b).$$

Desna stran konvergira pri pogoju $c \to \infty$ prosti $+\infty$, zato velja isto za levo stran in limita $\lim_{c\to\infty} \int_b^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ ne obstaja. Torej tudi limita $\lim_{c\to\infty} \int_a^c \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ ne obstaja, se pravi da ne obstaja integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$.

ZGLED. Z uporabo izreka 4 pokažimo konvergenco integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Težava je zdaj ta, da funkcija $\ln x$ ni omejena na poltraku $[1,\infty)$, ampak (počasi) narašča v neskončnost. Zato jo nekoliko popravimo tako, da pišemo $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}$, ki je gotovo zvezna funkcija na $[1,\infty)$. Poleg tega je $g(x) < h(x)$, kjer je funkcija $h(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$ na poltraku $[1,\infty)$ omejena z $2/e$ (prepričajte se, da ima maksimum enak $2/e$ v točki $x = e^2$). Potem je

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{3/2}}\,dx,$$

zato po izreku 4 integral konvergira.

V ta posplošeni integral lahko uvedemo novo spremenljivko s funkcijo $x = 1/t$, ki je na poltraku $[1,\infty)$ strogo padajoča. Po zamenjavi spremenljivke in preureditvi integrala dobimo

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

Torej obstaja tudi posplošeni integral na desni strani, kjer je integrand (isti kot prej) neomejena funkcija na intervalu $(0,1]$. Če namesto integracijske spremenljivke t pišemo kar x in upoštevamo, da je vsak integral aditivna funkcija integracijskega območja, vidimo, da je

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Če pa prejšnji integral obdelamo še per partes, dobimo še eno zanimivo zvezo:

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\operatorname{arctg} x\,\ln x|_0^1 + \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Zadnji integral je celo pravi, saj je funkcija na intervalu $(0,1]$ zvezna in omejena.

ZGLED. Kot naslednji zgled uporabe teh izrekov si oglejmo t.i. *Eulerjevo funkcijo gama*, definirano s posplošenim integralom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Poglejmo si, kdaj ta funkcija sploh obstaja, se pravi, kadaj integral konvergira. Na intervalu $(0,\infty)$ je integrand zvezna funkcija (za $s \ge 1$ tudi v točki 0). Po izreku 2 posplošeni integral na intervalu $[0,1]$ obstaja natanko takrat, ko je $s > 0$. Na poltraku $[1,\infty)$ pa definirajmo $g(x) = x^{s+1}e^{-x}$ in ugotovimo, da je tam funkcija omejena (ker je zvezna in zato omejena na vsakem omejenem podintervalu ter ima limito $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ v neskončnosti). Torej po izreku 4 posplošeni integral

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^2}\,dx$$

obstaja za vsak $s > 0$. To pomeni, da je funkcija gama definirana za vsak $s > 0$.

Z integriranjem per partes dobimo za funkcijo gama rekurzivno formulo

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

ki velja za vsak $s > 0$. Res:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \frac{x^s}{s}e^{-x}|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx = \Gamma(s+1)/s.$$

Ker je $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, iz rekurzivne formule z matematično indukcijo takoj sledi $\Gamma(n) = (n-1)!$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej je funkcija gama posplošitev aritmetične (diskretne) funkcije $n \mapsto (n-1)!$ na vsa pozitivna realna števila.

Posplošeni integrali nenegativnih funkcij

Zdaj naj bo $b \in \mathbb{R}$ ali $b = +\infty$. Če je f lokalno integrabilna funkcija na $[a,b)$, hitro vidimo, da integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira natanko takrat, ko je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ omejena na $[a,b)$. Tedaj je $\int_a^b f(x)dx = \sup_{x\in[a,b)} F(x)$, saj je zdaj funkcija F naraščajoča. Namesto konvergence integrala pišemo kar relacijo $\int_a^b f(x)dx < \infty$. V nasprotnem primeru je $\int_a^b f(x)dx = \infty$.

Za nenegativne funkcije je koristen *primerjalni test*.

IZREK 5. *Če sta f in g lokalno integrabilni funkciji na $[a,b)$ in je $0 \le f(x) \le g(x)$ za $a \le x < b$, je v primeru $\int_a^b g(x)dx < \infty$ tudi $\int_a^b f(x)dx < \infty$ in v primeru $\int_a^b f(x)dx = \infty$ tudi $\int_a^b g(x)dx = \infty$.*

Dokaz. Za vsak x je $\int_a^x f(t)dx \le \int_a^x g(t)dt$ in zato tudi $\int_a^b f(x)dx = \sup \int_a^x f(t)dx \le \sup \int_a^x g(t)dt = \int_a^b g(x)dx$, od koder sledi trditev.

ZGLED. (a) Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ smo obravnavali v enem od prejšnjih zgledov. Ker je integrand nenegativen, ga lahko navzgor ocenimo z integralom $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, ki ga brez težav izračunamo per partes $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$. Torej je tudi prvotni integral končen.

(b) Pri integralu $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}dx$ ocenimo integrand z $\mathrm{e}^{-x^2} \le 1/(1+x^2)$ (uporabili smo neenakost $e^t \ge 1+t$, ki velja za vsak $t \in \mathbb{R}$). Ker sta obe funkciji pozitivni in je $I \le \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, je tudi prvi integral končen.

DEFINICIJA 4. Naj bo realna funkcija f lokalno integrabilna na $[a,b)$. Rečemo, da je f na $[a,b)$ *absolutno integrabilna*, njen posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ pa *absolutno konvergenten*, če je integral $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$.

Kadar integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira, integral $\int_a^b |f(x)|dx$ pa ne, rečemo, da je funkcija f samo *pogojno integrabilna* na $[a,b)$ oziroma da je integral $\int_a^b f(x)dx$ samo *pogojno konvergenten.*

Vsaka nenegativna funkcija, za katero obstaja posplošeni integral, je absolutno integrabilna. Zaradi ocene $|\int_c^d f(x)dx| \le \int_c^d |f(x)|dx$ za $a \le c < d < b$ pa vidimo, da iz absolutne kovergence integrala $\int_a^b f(x)dx$ sledi njegova navadna konvergenca. Po izreku 3 namreč v tem primeru za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $b > a$, da za $c,d > b$ velja $\int_c^d |f(x)|dx < \epsilon$. Potem pa velja tudi $|\int_c^d f(x)dx| < \epsilon$.

To vidimo tudi z uporabo primerjalnega testa:

Definirajmo $g(x) = |f(x)| - f(x)$ za $x \in [a,b)$; ker je $0 \leq g(x) \leq 2|f(x)|$ za vsak $x \in [a,b)$ in velja $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, velja tudi $\int_a^b g(x)dx < \infty$. Odtod sledi tudi obstoj (konvergenca) integrala

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx - \int_a^b g(x)dx.$$

ZGLED. Pokazali smo že, da konvergira integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Za $p > 1$ je ta konvergenca celo absolutna, kar vidimo iz ocene $|\dfrac{\sin x}{x^p}| \leq \dfrac{1}{x^p}$ na $[1,\infty)$ in primerjalnega testa. Ni pa absolutna za $p \leq 1$. Oglejmo si najprej primer $p = 1$. Tedaj je

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx >$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{n+1}{2}.$$

Odtod vidimo, da je $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty$ in isto velja tudi za integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx = \infty$ zaradi ocene $\dfrac{|\sin x|}{x^p} \geq \dfrac{|\sin x|}{x}$, veljavne za $p \leq 1$ in $x \leq 1$.

Torej je za $0 < p \leq 1$ konvergenca samo pogojna. Konvergenco spoznamo tudi z integracijo per partes $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \cos 1 - p\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx$. Zaradi primerjave $\dfrac{|\cos x|}{x^{p+1}} \leq \dfrac{1}{x^{p+1}}$ je zdaj zadnji integral absolutno konvergenten, saj je $p + 1 > 1$, torej konvergenten. Zato obstaja tudi prvotni integral za vsak $p > 0$.

Zadnjo metodo za dokaz konvergence integrala lahko posplošimo.

IZREK 6 (**Dirichletov test**). *Naj bo funkcija f zvezna in naj bo njena primitivna funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ omejena na $[a,b)$, tj. $|F(x)| \leq M$ za neko pozitivno konstanto M in vsak $x \in [a,b)$. Zvezno odvedljiva funkcija g pa naj bo taka, da je njen odvod g' absolutno integrabilen na $[a,b)$ in da je $\lim_{x\uparrow b} g(x) = 0$. Potem integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ konvergira.*

Dokaz. Zvezna funkcija fg je lokalno integrabilna na $[a,b)$. Z integracijo po delih dobimo

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Zaradi omejenosti funkcije F in limite $\lim_{x\uparrow b} g(x) = 0$ je $F(x)g(x)|_a^b = 0$. Torej je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = -\int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Zaradi ocene $|F(x)g'(x)| \leq M|g'(x)|$ in absolutne integrabilnosti funkcije g', konvergira zadnji integral absolutno. Torej konvergira tudi prvotni integral.

ZGLED. Oglejmo si še enkrat integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ za vsak $p > 0$. Funkcija $f(x) = \sin x$ je zvezna na $[1,\infty)$ in ima omejeno primitivno funkcijo $F(x) = \cos 1 - \cos x$, funkcija $g(x) = 1/x^p$ pa je zvezno odvedljiva in ima (absolutno) integrabilen odvod $g'(x) = -p/x^{p+1}$, saj je zdaj $p + 1 > 1$, poleg tega pa je očitno $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Po Dirichletovem testu torej prvotni integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ konvergira.