III. NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Pogosto opazujemo spreminjanje ene količine v odvisnosti od spreminjanja druge. Sprememba (rast) je matematično dana z odvodom ali diferencialom, torej so matematični model za določene pojave enačbe, v katerih nastopajo neznane funkcije in njihovi odvodi. Imenujemo jih *diferencialne enačbe.* Rešitve so odvedljive funkcije, ki tej enačbi zadoščajo.

Za začetek si oglejmo naslednje enačbe: $y' = \cos x$, $y' = 2y$, $y''+4y = 0$, $x^3y'''-2xy' = 1$. To so primeri *navadnih* diferencialnih enačb. Prvi dve sta prvega reda, ker nastopa samo prvi odvod; tretja enačba je drugega reda (najvišji odvod v njej je drugega reda) in četrta tretjega. Iščemo dovolj odvedljivo funkcijo, ki zadošča dani enačbi. Primer *parcialne* diferencialne enačbe drugega reda je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Tu iščemo funkcijo dveh spremenljivk $u = u(x, y)$, ki zadošča tej enačbi. Prvega izmed zgornjih primerov v resnici znamo rešiti, saj vemo, da je za poljubno konstanto C funkcija $y = \sin x + C$ taka, da je njen odvod enak funkciji kosinus. Preostale primere se bomo naučili reševati v tem in v naslednjem razdelku. Parcialne enačbe bomo pustili ob strani, obravnavali pa bomo nekaj najbolj preprostih tipov navadnih diferencialnih enačb, najprej prvega reda in kasneje drugega reda.

1. Diferencialna enačba prvega reda

To je navadna diferencialna enačba, v kateri nastopa samo prvi odvod neznane funkcije, torej enačba oblike $F(x, y, y') = 0$. Če od tod izrazimo y', dobimo enačbo v eksplicitni obliki:

$$y' = f(x, y),$$

kjer je na desni strani f znana (običajno zvezna) funkcija dveh spremenljivk. Kakšna od spremenljivk lahko tudi manjka, kot smo videli v prvih dveh primerih $y' = \cos x$ in $y' = 2y$ zgoraj.

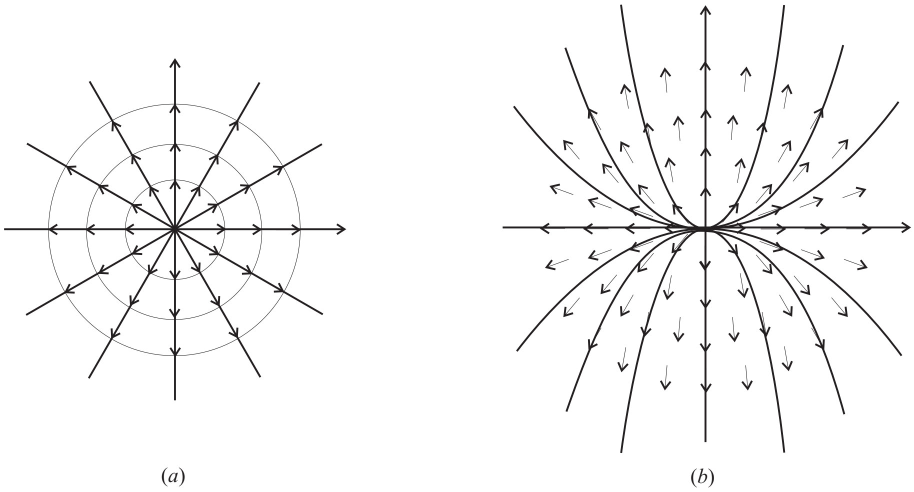
DEFINICIJA 1. Radi bi poiskali enkrat odvedljivo funkcijo, ki zadošča enačbi $y' = f(x, y)$. Vsako tako funkcijo imenujemo *rešitev* dane diferencialne enačbe, njen graf $y = y(x)$ pa *rešitvena krivulja.*

ZGLED 1. Rešitev enačbe $y' = \cos x$ je vsaka funkcija oblike $y = \sin x + C$, kjer je C konstanta, rešitev enačbe $y' = 2y$ pa funkcija oblike $y = Ce^{2x}$, o čemer se lahko takoj prepričamo z odvajanjem.

Geometrijski pomen enačbe $y' = f(x, y)$ je naslednji. Desno stran lahko izračunamo v vsaki točki (x, y) definicijskega območja funkcije f. Ker pomeni odvod naklon (smer) grafa iskane funkcije, rečemo, da je z enačbo podano *polje smeri.* To je, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri si lahko nazorno grafično predstavimo tako, da si načrtamo družino krivulj, vzdolž katerih je smer konstantna. Te krivulje imenujemo *izokline.* Če sledimo predpisani smeri od točke do točke, lahko vsaj približno narišemo tudi rešitvene krivulje. Vidimo, da je rešitvenih krivulj neskončno mnogo, odvisno od točke, v kateri začnemo.

ZGLED 2. (a) $y' = y/x$. Izokline so krivulje $y/x = k$, $k \in \mathbb{R}$, torej premice $y = kx$ skozi koordinatno izhodišče. To so hkrati tudi rešitvene krivulje, saj se smer na premici $y = kx$ ujema s k (glej sliko 1(a)).

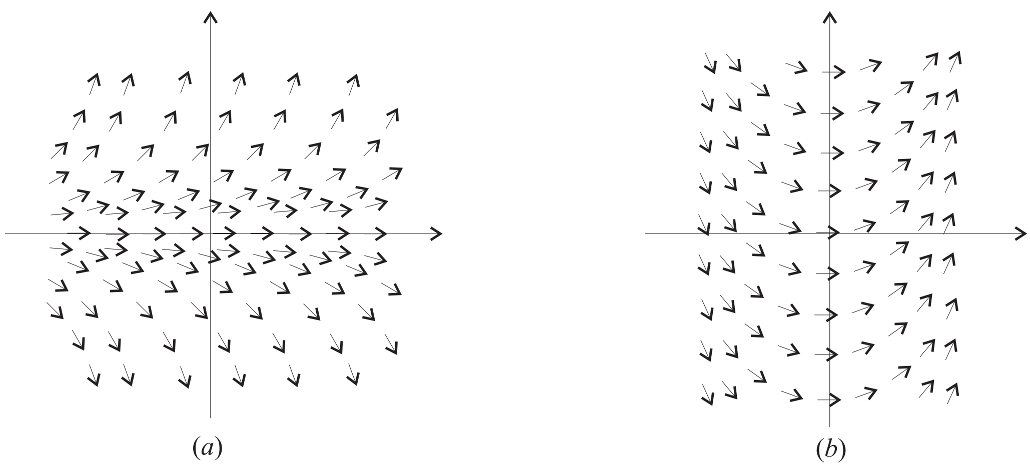
(b) $y' = 2y/x$. Tudi zdaj dobimo za izokline premice $y = kx/2$ skozi koordinatno izhodišče, same imajo naklon $k/2$, v vsaki točki na njih pa je smer rešitvenih krivulj diferencialne enačbe enaka k. Preverimo lahko, da je za vsak $C \in \mathbb{R}$ rešitev diferencialne enačbe enaka $y = Cx^2$; rešitvene krivulje torej tvorijo družino parabol skozi koordinatno izhodišče (glej sliko 1(b)).



SLIKA 1

(c) $y' = 2y$. Izokline so vodoravnene premice, rešitev diferencialne enačbe pa očitno vse funkcije oblike $y = Ce^{2x}$, rešitvene krivulje torej eksponentne (glej sliko 2(a)).

(d) $y' = 2x$. Izokline so tu navpične premice $x = k/2$, $k \in \mathbb{R}$, rešitve pa enake $y = x^2 + C$, kjer je C poljubna konstanta (glej sliko 2(b)).



SLIKA 2

Iz teh zgledov vidimo, da je rešitev diferencialne enačbe prvega reda odvisna še od ene splošne konstante C. V splošnem torej dobimo enoparametrično družino rešitvenih krivulj. Če poleg enačbe predpišemo še točko (x_0, y_0), skozi katero mora potekati rešitvena krivulja, oziroma pogoj $y(x_0) = y_0$, izberemo s tem iz dobljene enoparametrične družine eno samo rešitev, ki ustreza poleg enačbi tudi *začetnemu pogoju*.

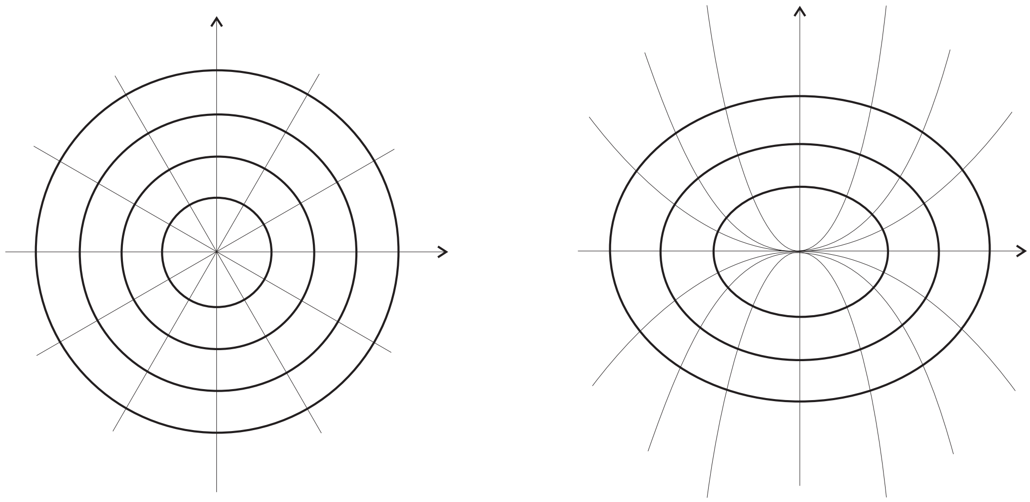
ZGLED 3. Če v prejšnjem zgledu 1(a) zahtevamo $y(1) = 1$, dobimo $k = 1$ oziroma rešitev $y = x$. Če isto zahtevamo v zgledu 1(b), dobimo $C = 1$ oziroma rešitev $y = x^2$; v zgledu 1(c) najdemo $C = e^{-2}$ in $y = e^{2(x-1)}$, v zgledu 1(d) pa $C = 0$ in $y = x^2$.

Tudi obratno vsaki enoparametrični družini krivulj ustreza diferencialna enačba 1. reda. Poiščemo jo tako, da krivulje odvajamo po spremenljivki x in iz obeh enačb izločimo konstanto C. Če npr. odvajamo funkcijo $y = Ce^{2x}$, dobimo $y' = 2Ce^{2x} = 2y$ (glej zgled 1(c)).

DEFINICIJA 2. *Ortogonalne trajektorije* dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo tisto od krivulj dane družine, ki poteka skozi to točko, pod pravim kotom.

Tej ortogonalni družini pripada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. Zaradi ortogonalnosti rešitvenih krivulj v dani točki je smer ortogonalne trajektorije v vsaki točki nasprotno obratna smeri rešitvene krivulje. Torej dobimo diferencialno enačbo za ortogonalne trajektorije tako, da v prvotni diferencialni enačbi odvod y' (ki določa smer rešitvene krivulje) nadomestimo z $-1/y'$ (ki določa pravokotno smer).

ZGLED 4. Diferencialna enačba za družino premic $y = kx$ je enačba $y' = y/x$. Diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij pa je po zgornjem $-1/y' = y/x$ oziroma $y' = -x/y$. Brez težav se s posrednim odvajanjem lahko prepričamo, da tej enačbi ustrezajo krivulje v implicitni obliki $x^2 + y^2 = r^2$, torej koncentrične krožnice s središčem v izhodišču, kar je tudi nazorno jasno (glej sliko 3(a)).



(*a*) (*b*)

SLIKA 3

Doslej še nismo spoznali nobene metode, kako diferencialno enačbo prvega reda res rešimo. Vedno to ne gre z elementarnimi analitičnimi sredstvi. Naslednji tip enačb je najpreprostejši primer enačb, ki jih lahko uženemo že z dvema integracijama.

Enačbe z ločljivimi spremenljivkami

To so enačbe oblike $y' = f(x)g(y)$, kjer sta f in g znani zvezni funkciji. Spremenljivki na desni strani sta ločeni v dva faktorja.

Naj bo $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in $G(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} dt/g(t)$, kjer sta x_0 in y_0 poljubni realni števili, le y_0 naj bo tako, da je $g(y_0) \neq 0$, tako da je tudi $g(y) \neq 0$ za y v okolici točke y_0. Ker je $y'/g(y) = f(x)$ oziroma $y'G'(y) = F'(x)$, za vsako rešitev $y = y(x)$ diferencialne enačbe velja $[G(y(x)) - F(x)]' = 0$. Odtod vidimo, da zadošča rešitev enačbi $G(y(x)) - F(x) = C$, rešitev začetnega problema pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, od koder takoj dobimo $C = G(y_0) - F(x_0) = 0$, pa enačbi $G(y(x)) = F(x)$.

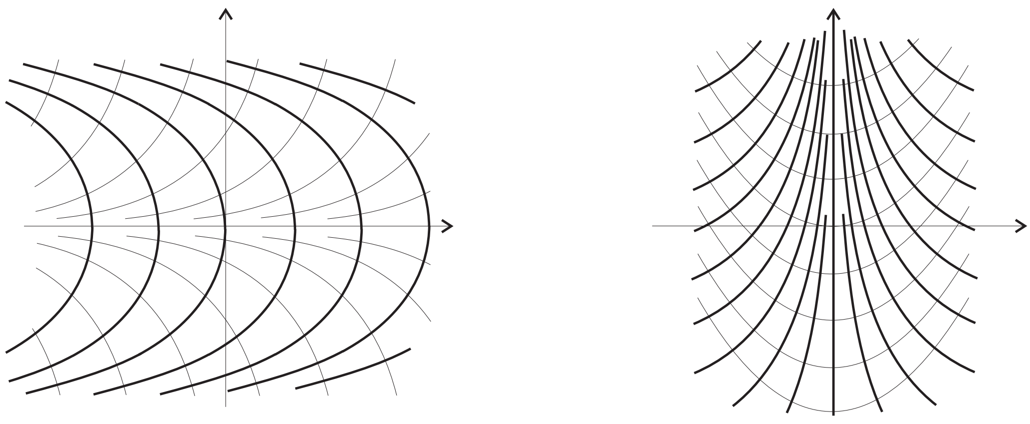
Ta premislek odkrije metodo, kako lahko rešimo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami. Če preidemo na zapis z diferenciali, lahko dosežemo, da sta spremenljivki x in y vsaka na svoji strani enačbe: $dy/g(y) = f(x)dx$. Integriramo na obeh straneh, na levi po spremenljivki y, na desni po spremenljivki x, in dobimo enačbo oblike $G(y) = F(x)+C$, kjer sta $F(x) = \int f(x)dx$ in $G(y) = \int dy/g(y)$ ustrezna nedoločena integrala. Dobljena enačba povezuje spremenljivki x in y, torej določa implicitno obliko rešitvene krivulje. Včasih, a ne vedno, nam uspe od tod eksplicitno izraziti y kot funkcijo spremenljivke x (in splošne konstante C).

ZGLED 5. Vse enačbe, ki smo jih spoznali v zgledu 2 so enačbe z ločljivimi spremenljivkami, zato jih lahko izračunamo po zgornji metodi z ločitvijo spremenljivk in z dvojno integracijo. Za enačbo $y' = y/x$ iz točke (a) npr. dobimo najprej $dy/y = dx/x$ in nato $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1$, kjer smo tudi splošno integracijsko konstanto označili z $\ln C_1$, $C_1 > 0$, tako da se potem rešitev lepše izraža kot $|y| = C_1|x|$. Ta enačba pomeni $y = \pm C_1 x$; ker pa lahko predznak skrijemo v splošno konstanto, zapišemo rešitev kar v obliki $y = Cx$. Podobno bi v primeru (b) hitro dobili $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C_1$ oziroma $y = Cx^2$.

Poiščimo še ortogonalne trajektorije rešitvenih krivulj iz tega zgleda. V primeru (a) ortogonalne trajektorije zadoščajo enačbi $y' = -x/y$, od koder najdemo $ydy = -xdx$ in z integracijo $y^2/2 = -x^2/2 + C/2$ oziroma $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, kar je družina koncentričnih krožnic. V primeru (b) je $y' = -x/2y$, od koder imamo $2ydy = -xdx$ in na koncu $x^2/2 + y^2 = C$, $C > 0$; ta enačba predstavlja družino elips z veliko polosjo $\sqrt{2C}$ in malo polosjo C (slika 3(b)).

Poseben primer enačbe z ločljivimi spremenljivkami je enačba, v kateri na desni strani nastopa samo spremenljivka x ali samo spremenljivka y, torej enačba $y' = f(x)$ ali enačba $y' = g(y)$. Rešitev prve je $y = F(x)+C$, druge pa $G(y) = x+C$, kjer sta $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in $G(y) = \int_{y_0}^{y} dt/g(t)$.

ZGLED 6. Primera sta enačbi iz zgleda 2(c) in (d). V primeru (c) je $\ln|y| = 2x + \ln C_1$ oziroma $y = Ce^{2x}$, v primeru (d) pa dobimo takoj $y = x^2 + C$, kar vse že poznamo. V primeru (c) dobimo iz enačbe $y' = -1/2y$ za ortogonalne trajektorije družino parabol $y^2 = C - x$ (slika 4(a)), v primeru (d) pa iz enačbe $y' = -1/2x$ družino krivulj $y = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$ (slika 4(b)).

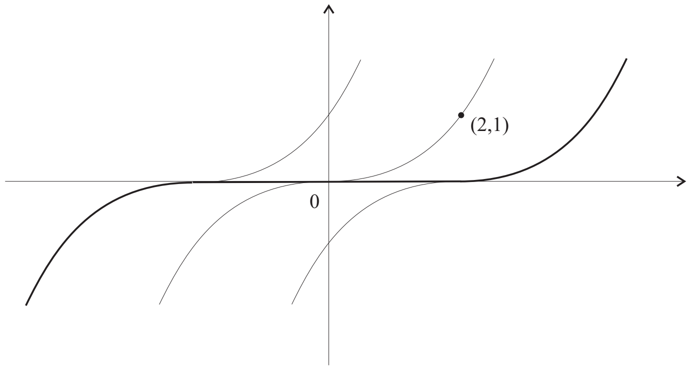


(a) (b)

SLIKA 4

Na začetku smo zahtevali, da je $g(y_0) \neq 0$ (da smo lahko integrirali funkcijo g v bližini točke y_0). Če pa je $g(y_0) = 0$, je očitno rešitev enačbe konstantna funkcija $y = y_0$. Ker je lahko funkcija $1/g(y)$ v posplošenem smislu vseeno integrabilna v okolici točke y_0, lahko dobimo več rešitev enačbe $y' = g(y)$, ki zadoščajo istemu začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$.

ZGLED 7. $y' = \sqrt{|y|}$. Tu je $g(y) = \sqrt{|y|}$ in $g(0) = 0$. Zato je poleg rešitve $y = (x - C_1)^2/4$ za $y > 0$ in $y = -(x + C_2)^2/4$ za $y < 0$ (ločiti moramo dva primera: $y \geq 0$, ko je $y' = \sqrt{y}$ in $y < 0$, ko je $y' = \sqrt{-y}$) rešitev tudi konstanta $y = 0$. Rešitve so potem tudi vse 'zlepljene' rešitve. Skozi točko $(0, 0)$ poteka npr. neskončno rešitvenih krivulj (glej sliko 5).



Slika 5

Vseh diferencialnih enačb seveda ne znamo rešiti analitično (z integracijo), zato je toliko bolj pomembno, da vsaj načelno vemo, da rešitev obstaja (in da je pri danem začetnem pogoju ena sama). O obstoju in enoličnosti rešitve začetnega problema za poljubno diferencialno enačbo prvega reda govori naslednji eksistenčni izrek, ki ga navajamo brez dokaza.

IZREK 1 (o eksistenci in enoličnosti): *Naj bo D odprta množica v ravnini, $(x_0, y_0) \in U$ poljubna točka in $f : D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija dveh spremenljivk, definirana na D.*
(a) *Če je f zvezna funkcija, obstaja tak odprt interval $I \subset \mathbb{R}$, in vsaj ena odvedljiva funkcija $y = y(x)$, definirana na I, da je*: (i) $x_0 \in I$ *in* $y(x_0) = y_0$, (ii) $(x, y(x)) \in D$ *za vsak* $x \in I$ *in* (iii) $y'(x) = f(x, y(x))$ *za vsak* $x \in I$.
(b) *Če poleg tega obstaja v okolici točke (x_0, y_0) tudi zvezen parcialni odvod $\partial f/\partial y$, je funkcija $y = y(x)$ z zgornjimi lastnostmi ena sama.*

V zgledu 7 je funkcija $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ zvezna, zato obstaja rešitev vsakega začetnega problema. Videli pa smo, da npr. pri pogoju $y(0) = 0$ rešitev ni ena sama. Razlog je v tem, da tu parcialni odvod $\partial f/\partial y = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{|y|}}$ (predznak je odvisen od predznaka za y) ne obstaja v nobeni točki $(x_0, 0)$.

Enačbe prvega reda, ki jih lahko prevedemo na enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Na enačbe z ločljivimi spremenjivkami lahko prevedemo tudi nekatere druge enačbe.

(a) V enačbo oblike

$$y' = g(y/x),$$

kjer je g poljubna zvezna funkcija, uvedemo novo spremenljivko $u = y/x$ in dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami $xu' + u = g(u)$ oziroma

$$xu' = g(u) - u.$$

Tako enačbo znamo potem rešiti po opisani metodi. Ko najdemo njeno rešitev $u = u(x)$, je potem $y = xu(x)$ rešitev prvotne diferencialne enačbe.

ZGLED 6. Rešimo na ta način diferencialno enačbo $y' = \dfrac{x^2+2y^2}{2xy}$. Ker lahko zapišemo $y' = \dfrac{1+2(y/x)^2}{2y/x}$, vidimo, da pomaga substitucija $u = y/x$ oziroma $y = xu$. Dobimo $xu' + u = \dfrac{1+2u^2}{2u} = \dfrac{1}{2u} + u$ oziroma $xu' = \dfrac{1}{2u}$. Ločimo spremenljivke in integriramo, pa je pred nami $2udu = dx/x$ in $u^2 = \ln|x| + C$. Ko spet izrazimo u z y, dobimo rešitev prvotne enačbe v implicitni obliki $y^2 = x^2(\ln|x| + C)$.

(b) Enačbo oblike
$$y' = g\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right),$$
kjer je g poljubna zvezna funkcija in $ad - bc \neq 0$, uženemo tako, da najprej poiščemo (edino) rešitev (x_0, y_0) sistema linearnih enačb $ax + by + e = 0$, $cx + dy + f = 0$ in v diferencialni enačbi zamenjamo obe spremenljivki: $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Tako dobimo novo enačbo, ki spada med enačbe iz točke (a) in jo znamo rešiti:
$$v' = g\left(\frac{au+bv}{cu+dv}\right) \quad \text{oziroma} \quad v' = g\left(\frac{a+b(v/u)}{c+d(v/u)}\right).$$

Poglejmo si še primer, ko je $ad-bc = 0$. Če je $c = d = 0$, mora biti $f \neq 0$. Tedaj je desna stran $g((ax + by + e)/f)$ konstantna (če je $a = 0$ in $b = 0$), funkcija samo spremenljivke x (če je $a \neq 0$ in $b = 0$), samo spremenljivke y (če je $a = 0$ in $b \neq 0$) ali izraza $ax + by$ (če je $a \neq 0$ in $b \neq 0$). V prvih treh primerih imamo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami, v zadnjem pa lahko nanjo takoj preidemo s substutucijo $u = ax + by$. Če pa je $c \neq 0$ (ali $d \neq 0$), pomnožimo števec in imenovalec ulomka na desni strani s c (ali z d), tako da postane desna stran funkcija samo izraza $cx + dy$, nakar uvedemo novo spremenljivko $u = cx + dy$.

ZGLED 7. Diferencialno enačbo $y' = \dfrac{x+y}{x+2y-1}$ s substitucijo $x = u - 1$ in $y = v + 1$ najprej prevedemo v enačbo $v' = \dfrac{u+v}{u+2v}$ in jo rešimo po prejšnji metodi. V enačbi $y' = \dfrac{x+y}{1-x-y}$ pa najprej pišemo $u = x + y$ in dobimo $u' = 1 + y'$ oziroma enačbo z ločljivimi spremenljivkami $u' = 1 + \dfrac{u}{1-u}$.

Primeri iz geometrije, fizike in drugih ved

1. Enačba za eksponentno rast je enačba oblike $y' = ay$ (glej zgled 1(c)). Tu pomeni y' odvod po času t, a pa je sorazmernostni faktor. Enačba pove, da je hitrost rasti dane količine y premosorazmerna sami količini. (Če je $a > 0$, gre za rast, če je $a < 0$ pa za upadanje.) Tako se vedejo (vsaj na omejenem intervalu) številni naravni pojavi; rečemo da gre za *naravno rast* (npr. rast populacije, rast lesne mase v gozdu itd.). Enačba ima ločljive spremenljivke, splošno rešitev že poznamo $y = Ce^t$. Začetnemu pogoju $y(0) = y_0$ pa ustreza le krivulja $y = y_0 e^t$.

Poseben primer take enačbe je npr. enačba
$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$
ki uravnava radioaktivni razpad. Tu je k pozitivna konstanta (npr. $1,4\cdot 10^{-11}s^{-1}$ za radij). Rešitev $y = y_0 e^{-kt}$ pove, da se količina radioaktivne snovi s časom eksponentno zmanjšuje. Iz rešitve enačbe lahko npr. izračunamo *razpolovno dobo*, ko se količina radioaktivne snovi zmanjša na polovico. Vstavimo $y = y_0/2$ in dobimo $e^{-kt_0} = 1/2$ oziroma $t_0 = (\ln 2)/k$ (pri radiju $\sim 5\cdot 10^{10}s \approx 2000$ let).

2. Na enačbe z ločljivi spremenljivkami pogosto naletimo pri reševanju geometrijskih problemov. Poiščimo npr. krivulje, katerih odsek na normali je konstanten (enak a). Odsek na normali je dolžina daljice na normali med presečiščem normale s krivuljo $y = y(x)$ in presečiščem z abscisno osjo. Izračunamo ga po formuli $y\sqrt{1+y'^2}$, kjer je y ordinata ustrezne točke, v kateri potegnemo normalo. Diferencialna enačba se torej glasi $y\sqrt{1+y'^2} = a$, od koder najprej izrazimo y' in nato ločimo spremenljivke. Na koncu dobimo implicitno rešitev $(x+c)^2 + y^2 = a^2$, kjer je c poljubna konstanta. Iskane krivulje so torej krožnice s polmerom a in središčem $-c$ na abscisni osi.

3. V epidemiologiji nas zanima število zdravih osebkov $x(t)$ in število bolnih osebkov $y(t)$ v trenutku t v neki populaciji velikosti N. Predpostavimo, da je v začetku (v trenutku $t = 0$) v populaciji samo en bolan in $N-1$ zdravih osebkov. Hitrost okužbe je v vsakem trenutku premosorazmerna številu stikov med zdravimi in obolelimi osebki, torej (pri idealnem mešanju osebkov) produktu zdravih in bolnih osebkov. Obolevanje potemtakem uravnava diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami $\frac{dy}{dt} = kxy$, kjer je $k > 0$ oziroma

$$y' = k(N-y)y$$

(upoštevajmo, da je v vsakem trenutku $x + y = N$). Njena rešitev, ki zadošča tudi začetnemu pogoju $y(0) = 1$, je

$$y(t) = \frac{N\mathrm{e}^{kNt}}{N-1+\mathrm{e}^{kNt}}.$$

Graf te funkcije je t.i. *logistična krivulja* (v obliki ležeče črke S), ki se pojavi pri omejeni rasti. Sama enačba pa je poseben primer diferencialne enačbe oblike $y' = ay(1-y/K)$, $a, N > 0$, ki ji rečemo *logistična enačba.* Zakonitosti v zvezi z logistično enačbo in logistično funkcijo je odkril in raziskal belgijski matematik P.F. Verhulst že leta 1838.

Zanimiva je tudi krivulja $y = y'(t)$, ki meri hitrost obolevanja. Maksimum ima pri $t_1 = \frac{1}{kN}\ln(N-1)$, ko je $y(t_1) = N/2$, in je enak $kN^2/4$. To lahko vidimo kar iz diferencialne enačbe $y' = k(N-y)y$, saj ima funkcija $(N-y)y$ maksimum $N^2/4$ pri $y = N/2$. Torej je hitrost obolevanja največja takrat, ko je obolelih približno polovica osebkov (kar je logično).

2. Linearna diferencialna enačba prvega reda

To je enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kjer sta $f(x)$ in $g(x)$ dani zvezni funkciji. Enačba je *homogena,* če je $g(x) = 0$ in *nehomogena,* če je $g(x) \neq 0$. Homogena enačba ima ločljive spremenljivke in jo že znamo rešiti.

IZREK 2. *Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda je*

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}[\int_{x_0}^{x} g(s)e^{\int_{x_0}^{s} f(t)dt}ds + C].$$

Dokaz. Kot prej označimo $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ in pomnožimo obe strani enačbe z $e^{F(x)}$. Dobimo: $[ye^{F(x)}]' = g(x)e^{F(x)}$, od koder najdemo z integracijo

$$y = e^{-F(x)}[\int_{x_0}^{x} g(s)e^{F(s)}ds + C] = \int_{x_0}^{x} g(s)e^{F(s)-F(x)}ds + Ce^{-F(x)}.$$

Vidimo, da je splošna rešitev oblike $y = y_1(x) + Cy_0(x)$, kjer je $y_1(x)$ *posebna* (*partikularna*) rešitev nehomogene enačbe in $y_0(x) = e^{F(x)}$ (ena izmed netrivialnih) rešitev homogene enačbe (ko je $g(x) = 0$).

Linearno diferencialno enačbo rešujemo tako, da najprej poiščemo splošno rešitev $y = Cy_0$ homogene enačbe. Nehomogeno enačbo potem lahko rešujemo na dva načina:

1. Če uganemo eno (partikularno) rešitev y_1, je splošna rešitev oblike $y = y_1 + Cy_0$. Razlika $y - y_1$ dveh rešitev nehomogene enačbe namreč vedno reši homogeno enačbo. Če npr. poznamo celo dve linearno neodvisni (se pravi, da ena ni večkratnik druge) partikularni rešitvi y_1 in y_2, lahko potem splošno rešitev nehomogene enačbe zapišemo kar brez integracije: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

2. Partikularno rešitev lahko poiščemo z metodo *variacije konstante*. Kot samo ime pove, variiramo konstanto, ki nastopa v splošni rešitvi $y = Cy_0(x)$ homogene enačbe, tj, C smatramo za funkcijo, in ta nastavek vstavimo v prvotno nehomogeno enačbo. Iz nje najprej izračunamo C' in z integracijo še $C = C(x) + C_1$. Torej je potem splošna rešitev nehomogenew enačbe prvega reda enaka $y = (C(x) + C_1)y_0(x) = C(x)y_0(x) + C_1y_0(x)$, kjer je C_1 sedaj prava konstanta, $y_1 = C(x)y_0(x)$ pa posebna (partikularna) rešitev nehomogene enačbe.

ZGLED 8. (a) Za enačbo $(1-x)y' + y = 1$ takoj uganemo dve rešitvi: $y_1 = 1$ in $y_2 = x$. Torej je potem njena splošna rešitev enaka $y = 1 + C(x-1)$, kjer je C poljubna konstanta.

(b) Enačba $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$ ima homogeni del enak $y' - y = 0$, kar je enačba z ločljivimi spremenljivkami in s splošno rešitvijo $y = C\mathrm{e}^x$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko takoj uganemo: $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$ (z odvajanjem se lahko prepričamo, da res zadošča prvotni enačbi). Torej je splošna rešitev $y = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.

Do iste rešitve bi lahko prišli tudi z variacijo konstante. Odvajamo funkcijo $y = C(x)\mathrm{e}^x$ in vstavimo v enačbo, pa dobimo $C'\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x - C\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$ oziroma $C' = \mathrm{e}^x$, se pravi $C(x) = \mathrm{e}^x + C$. Torej je $y = (\mathrm{e}^x + C)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.

(c) Homogeni del enačbe $xy' + y = \sin x$ hitro rešimo in dobimo $y = C/x$. Ker rešitve nehomogene enačbe zdaj ne moremo kar takoj uganiti, uporabimo metodo variacije konstante. Z nastavkom $y = C(x)/x$ gremo v enačbo in najdemo $C'(x) = \sin x$, $C(x) = -\cos x$ in $y = (-\cos x + C)/x = -\cos x/x + C/x$.

Konkretno diferencialno enačbo rešimo še hitreje, če opazimo, da velja $(xy)' = \sin x$, od koder z eno samo integracijo najdemo $xy = -\cos x + C$, kar nam da isto splošno rešitev kot prej.

Opomba. Včasih je koristno enačbo pomnožiti z ustreznim faktorjem, tako da na levi strani dobimo odvod neke funkcije. V primeru (b) npr. enačbo pomnožimo z e^{-x}, pa imamo $(ye^{-x})' = e^x$. Integriramo obe strani in dobimo $ye^{-x} = e^x + C$ oziroma $y = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.

Tako kot v zadnjem primeru lahko ravnamo pogosto tudi, ko enačba ni linearna.

ZGLED 9. Enačbo $y' = 1/y - y/2x$ npr. pomnožimo z $2xy$ in zadnji člen prenesimo na levo stran, da dobimo enačbo $2xyy' + y^2 = 2x$. Ker je leva stran zdaj enaka $(xy^2)'$, takoj sledi rešitev v implicitni obliki $xy^2 = x^2 + C$.

Bernoullijeva enačba.

Nekatere diferencialne enačbe se s primerno substitucijo prevedejo na linearne enačbe prvega reda, med njimi npr. ti. *Bernoullijeva enačba*

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \ n \neq 1.$$

Tu uvedemo novo odvisno spremenljivko $z = 1/y^{n-1}$.

ZGLED 10. (a) Iz enačbe $xy' + y = y^2$ dobimo z uvedbo spremenljivke $z = 1/y$ enačbo $-xz' + z = 1$, ki jo hitro uženemo, saj ima celo ločljive spremenljivke. Dobimo $z = 1 + Cx$ oziroma $y = 1/(1 + Cx)$.

(b) Tudi logistična enačba $y' = ay(1 - y/N)$ je take oblike, saj jo lahko zapišemo $y' - ay = -ay^2/N$. Delimo z $-y^2$ in uvedemo novo odvisno spremenljivko $z = 1/y$, pa dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda $z' + az = a/N$. Pri začetnem pogoju $z(0) = 1$ je njena rešitev $z = (1 + (N - 1)\mathrm{e}^{-ax})/N$, od koder dobimo za y rešitev

$$y = \frac{N}{1 + (N - 1)\mathrm{e}^{-ax}}.$$

Rešitve v parametrični obliki

Marsikatero implicitno podano diferencialno enačbo prvega reda lahko uženemo, če njeno rešitev poiščemo v parametrični obliki $x = x(t)$, $y = y(t)$.

ZGLED 11. (a) Enačbo $y'^2 + 4y^2 = 4A^2$ npr. lahko rešimo tako, da pišemo $y = A\cos t$, $y' = 2A\sin t$ in potem na dva načina izračunamo $dy = y'dx$. Dobimo $-A\sin t\,dt = 2A\sin t\,dx$ oziroma $-dt = 2dx$ in odtod $t = -2x + C$. Torej je $y = A\cos(2x + C)$. Parametrična oblika rešitve je torej $x = (C - t)/2$, $y = A\cos t$, eksplicitna pa $y = A\cos(2x + C)$. Iz začetnega pogoja $y(0) = A$, $y'(0) = 0$ npr. dobimo $\cos C = 1$, $\sin C = 0$, se pravi $C = 0$, in tako rešitev $y = A\cos 2x$.

(b) V nalogi o konstantnem odseku normale iz enega od prejšnjih primerov sprašujemo po funkciji y, za katero velja $y\sqrt{1 + y'^2} = a$. Enačba je izpolnjena, če pišemo $y = a\cos t$ in $y' = \mathrm{tg}\,t$. Zdaj dobimo $dx = -a\cos t\,dt$, od koder najdemo $x = -a\sin t + C$, $y = a\cos t$ oziroma $(y - C)^2 + y^2 = a^2$.

(c) Podobna naloga o konstantnem odseku tangente zahteva funkcijo y, ki zadošča diferencialni enačbi $ay' = y\sqrt{1 + y'^2}$. Zdaj vstavimo $y = a\sin t$, $y' = \mathrm{tg}\,t$ in dobimo $dx = dy/y' = a\cos^2 t\,dt/\sin t = a(1/\sin t - \sin t)dt$. Pri začetnem pogoju $x(0) = 0$, $y(0) = a$ dobimo

$$x = a(\ln|\mathrm{tg}(t/2)| + \cos t), \quad y = a\sin t.$$

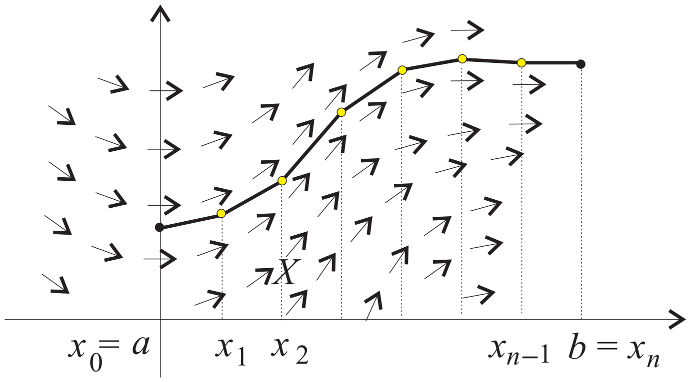
Ustrezna krivulja se imenuje *traktrisa.*

Numerično reševanje diferencialnih enačb

Omenili smo že, da diferencialne enačbe ne moremo vedno rešiti analitično, tj. z eno ali dvema intgracijama, čeprav vemo, da rešitev obstaja vsaj lokalno, v bližini začetnega pogoja (to nam npr. zagotavlja eksistenčni izrek). V tem primeru nam, podobno kot pri integriranju funkcij, preostanejo samo numerične metode.

Numeričnih metod za reševanje diferencialnih enačb je veliko in mnoge med njimi so zelo učinkovite. Tu si oglejmo le z najpreprostejšo in najstarejšo med njimi, ki temelji na ideji, kako narišemo rešitveno krivuljo sledeč polju smeri v ravnini.

Radi bi npr. poiskali približek rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ na intervalu $[a, b]$. Interval razdelimo na n podintervalov (običajno enake dolžine $h = (b - a)/n$). V začetni točki (x_0, y_0) imamo predpisano smer $f(x_0, y_0)$ in izračunamo $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$. Zdaj začnemo v točki (x_1, y_1) in tako nadaljujemo: vedno izračunamo naslednjo vrednost po formuli $y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Na novo izračunana točka nam določi novo smer, ki ji sledimo do naslednje točke, dokler ne prispemo do točke $x_n = b$ oziroma do konca intervala. Te vrednosti tabeliramo, lahko pa jih tudi predstavimo s ti. *Eulerjevim poligonom*, ki pomeni nazoren približek za rešitven krivuljo (glej sliko 6).



Slika 6

3. Diferencialna enačba drugega reda

Diferencialne enačbe drugega reda je veliko težje rešiti kot enačbe prvega reda. Obstaja pa nekaj metod, ki omogočajo, da jim znižamo red, in tudi nekaj tipov enačb, ki jih lahko rešimo neposredno.

Znižanje reda

Včasih lahko enačbi drugega reda znižamo red. To pomeni, da jo z ustrezno substitucij spremenimo v enačbo prvega reda, ki jo morda znamo rešiti in na ta način uženemo tudi prvotno enačbo. To gre v naslednjih primerih:

(a) $y'' = f(x)$; s substitucijo $y' = z$ dobimo $z' = f(x)$ in odtod $z = \int f(x)dx + C = F(x) + C$. S ponovno integracijo dobimo $y = \int F(x)dx + Cx + D$.

(b) $F(x, y', y'') = 0$; z enako izbiro $y' = z$ najdemo $y'' = z'$ in odtod enačbo prvega reda $F(x, z, z') = 0$. Ko enkrat poznamo $z = z(x; C)$, je $y = \int z(x; C)dx + D$.

(c) $F(y, y', y'') = 0$; ponovno vzamemo $y' = z$ in hkrati izberemo y za neodvisno spremenljivko, tako da iščemo $z = z(y)$ kot funkcijo spremenljivke y. Imamo $y'' = dz/dx = (dz/dy)(dy/dx) = z\dot{z}$ in zato rešujemo diferencialno enačbo $F(y, z, z\dot{z}) = 0$.

(d) $F(x, y, y', y'') = G(x, y, y')'$ (leva stran je odvod nekega izraza, kjer je najvišji odvod reda ena); tedaj preposto dobimo $G(x, y, y') = C$.

ZGLED 12. Oglejmo si npr. enačbo

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

ki opisuje lastno harmonično nihanje (npr. pri majhnih odklonih matematičnega nihala). Naj bosta začetna pogoja $y(0) = A$ in $y'(0) = 0$.

Pomnožimo enačbo z $2y'$, da najdemo $(y'^2)' + \omega_0^2(y^2)' = 0$ oziroma $y'^2 + \omega_0^2 y^2 = C^2$. Začetni pogoj nam da $C = \omega_0^2 A^2$. Ta enačba sicer ni linearna, vendar jo lahko skušamo rešiti z nastavkom $y = A \sin \phi$, ki ga vstavimo v enačbo in po krajšem računu dobimo $\phi' = \pm\omega_0$ oziroma $\phi = \omega_0 x + C_1$. Ker želimo, da je $y'(0) = 0$, mora biti $C_1 = \pi/2$ in zato rešitev $y = A \sin(\omega_0 + \pi/2) = A \cos \omega_0 x$.

Ob isti enačbi lahko ravnamo tudi drugače: v enačbo $y'' + \omega_0^2 y = 0$ uvedemo substitucijo $y' = z$ in ravnamo kot v točki (c). Dobimo $z\dot{z} + \omega_0^2 y = 0$; pomnožimo enačbo z 2 in členoma integriramo po y, da najdemo $z^2 + \omega_0^2 y^2 = C$ oziroma $y'^2 + \omega_0^2 y^2 = C$. Nadaljnje reševanje poteka kot prej.

Linearna diferencialna enačba drugega reda

Linearna enačba drugega reda je enačba oblike

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x),$$

kjer so koeficienti $a(x), b(x), c(x)$ in $d(x)$ znane zvezne funkcije neodvisne spremenljivke, pri čemer ne sme biti $a(x) = 0$ za vsak x. Običajno jo zapišemo v naslednji obliki, ki je bolj podobna standardni obliki linearne diferencialne enačbe prvega reda:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x).$$

Če je $h = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa nehomogena. Pri homogeni enačbi bi morali najprej poiskati dve primerni (tj. linearno neodvisni) rešitvi $y_1 = y_1(x)$ in $y_2 = y_2(x)$, kar je precej težje kot pri enačbi prvega reda. Splošna rešitev homogene enačbe je potem linearna kombinacija linearno neodvisnih rešitev: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Da rešimo nehomogeno enačbo moramo poznati poleg tega še eno posebno (partikularno) rešitev $y_0 = y_0(x)$. Potem je splošna rešitev nehomogene enačbe enaka $y = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

ZGLED 13. Za homogeno enačbo $x^2y'' - 2y = 0$ sta npr. linearno neodvisni rešitvi funkciji $y_1 = x^2$ in $y_2 = 1/x$; torej je njena splošna rešitev enaka $y = C_1x^2 + C_2/x$. Ker je posebna rešitev homogene enačbe $x^2y'' - 2y = 2$ enaka $y_0 = -1$, je potem njena splošna rešitev enaka $y = -1 + C_1x^2 + C_2/x$.

Linearni diferencialni enačbi lahko znižamo red, če poznamo eno rešitev homogene enačbe. Naj bo npr. z taka rešitev, torej $z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$.

Pišimo $y = uz$, odvajajmo dvakrat po x in vstavimo v prvotno linearno diferencialno enačbo. Dobimo
$y' = zu' + z'u$, $y'' = zu'' + 2z'u' + z''u$ in $zu'' + 2z'u' + z''u + f(x)(zu' + z'u) + g(x)zu = h(x)$ oziroma

$$zu'' + (2z' + f(x)z)u' + (z'' + f(x)z' + g(x))u = h(x).$$

Ker je zadnji oklepaj enak nič, dobimo enačbo $zu'' + (2z' + f(x)z)u' = h(x)$, ki ji lahko z vpeljavo spremenljivke $v = u'$ znižamo red kot v točki (b) in linearno enabo prvega reda za v rešimo. Z integracijo dobimo u, tako da je potem $y = zu$.

ZGLED 14. (a) Od prej vemo, da ima enačba $y'' + \omega_0^2y = 0$ eno rešitev (pri $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ enako $z = \cos\omega_0^2x$. Vstavimo $y = u\cos\omega_0x$ vanjo in dobimo enačbo $u''\cos\omega_0^2x - 2\omega_0u'\sin\omega_0^2x = 0$, ki jo rešimo s substitucijo $v = u'$ in dvema integracijama: $u = C_1\mathrm{tg}\omega_0x + C_2$, tako da imamo na koncu splošno rešitev $y = C_1\sin\omega_0x + C_2\cos\omega_0x$.

(b) Podobno ima homogena enačba $x^2y'' - 2y = 0$ iz zgleda 13 eno rešitev enako $z = x^2$. Z zamenjavo $y = x^2u$ in pridemo do enačbe $x^4u'' + 4x^3u' = 2$ oziroma $(x^4u')' = 2$, ki jo zlahka rešimo in tako ponovno najdemo splošno rešitev nehomogene enačbe $x^2y'' - 2y = 2$.

Teorija linearnih diferencialnih enačb drugega (in višjega) reda je lepa in dobro razvita, s praktičnim reševanjem takih enačb pa je v splošnem veliko dela, zato se tu vanj ne bomo spuščali. Na kratko si bomo ogledali le metodo reševanja linearne diferencialne enačbe z razvojem v potenčno vrsto, kasneje pa še poseben razred linearnih enačb drugega reda s konstantnimi koeficienti, kjer lahko o rešitvah povemo več.

Iskanje rešitve v obliki potenčne vrste

Včasih lahko najdemo rešitev diferencialne enačbe, zlasti enačbe drugega reda, v okolici točke a v obliki potenčne vrste $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$. Koeficiente seveda določimo tako, da bo zadoščeno enačbi in začetnemu pogoju.

ZGLED 14. (a) Rešujmo npr. začetni problem $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. V enačbo vstavimo nastavek v obliki vrste $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Začetni pogoj seveda pomeni, da je $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$. Predpostavimo, da vrsta v okolici točke 0 konvergira, tako da jo smemo tam členoma dvakrat odvajati in rezultat vstaviti v enačbo. Dobimo

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 4\sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k = 0$$

oziroma

$$\sum_{k=0}^{\infty}(4c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2})x^k = 0.$$

Iz rekurzivne formule $c_{k+2} = -4c_k/(k+2)(k+1)$, $k = 0, 1, 2, ...$, vidimo, da so vsi lihi koeficienti enaki nič: $c_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$, in sodi enaki $c_{2k} = (-1)^{k-1}4^k/(2k)!$, $k \geq 0$. Rešitev diferencialne enačbe je torej enaka potenčni vrsti

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 4^k x^{2k}/(2k)! = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (2x)^{2k}/(2k)!,$$

v kateri hitro prepoznamo kosinusno vrsto. Torej je rešitev začetnega problema funkcija $y = \cos 2x$.

(b) Z nastavkom $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ poskušajmo rešiti tudi enačbo $xy'' + y' + xy = 0$ pri istem začetnem pogoju $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, kot v prvem primeru. Na podoben način kot prej, le z nekaj več dela, ugotovimo, da zadošča diferencialni enačbi funkcija, ki je podana s potenčno vrsto

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x/2)^{2k}/(k!)^2.$$

Tako ali drugače, najlaže pa s kvocientnim kriterijem za absolutno konvergenco vrste, spoznamo, da vrsta konvergira na vsej realni osi in zato definira poljubnokrat odvedljivo funkcijo na $\mathbb{R}$, ki pa je še ne poznamo. Ta nova funkcija je pač rešitev danega začetnega problema.

Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

Kot pove samo ime, so to linearne diferencialne enačbe oblike

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in f znana zvezna funkcija neodvisne spremenljivke x. Če je $f = 0$, je enačba *homogena*, sicer *nehomogena*.

Homogeno enačbo rešujemo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Ko ga vstavimo v enačbo in krajšamo z eksponentnim faktorjem, dobimo t.i. *karakteristično enačbo*

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

ki ima v splošnem dva (lahko tudi enaka) kompleksna korena λ_1 in λ_2. Karakteristično enačbo dobimo iz diferencialne enačbe torej tako, da namesto i-tega odvoda neznane funkcije y zapišemo i-to potenco neznanke λ.

Splošna rešitev homogene enačbe je odvisna še od dveh poljubnih konstant in je oblike

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

če sta korena različna, in

$$y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

če sta korena enaka λ. Preprosto se je prepričati, da je to res rešitev enačbe. Za dokaz dejstva, da drugih rešitev ni, pa bi morali morali poznati nekaj več teorije takih enačb, čemur se odpovejmo.

Splošna rešitev nehomogene enačbe je potem oblike $y = y_1 + y_h$, kjer je y_h splošna rešitev homogene enačbe in y_1 ena od rešitev nehomogene enačbe. To posebno ali, kot rečemo *partikularno* rešitev včasih uganemo, ali pa pridemo do nje po podobni metodi *variacije konstant*, kot pri linearni enačbi 1. reda. Izpeljavi metode se tu odpovejmo, kasneje jo bomo ilustrirali na posebnem zgledu.

Kadar sta korena karakteristične enačbe kompleksna, sta konjugirano kompleksna $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ker ima enačba realne koeficiente. V tem primeru lahko namesto kompleksne oblike splošne rešitve homogene (ali nehomogene) enačbe zapišemo realno obliko:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) =$$
$$C_1' e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2' e^{\alpha x}\sin\beta x$$

kjer je $c_1' = C_1 + C_2$ in $C_2' = i(C_1 - C_2)$. S primerno transformacijo:

$$A = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} 1 \mathrm{in} C_1' = A\cos\delta,\ C_2' = -A\sin\delta$$

lahko rešitev zapišemo tudi v obliki $y = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \delta)$.

ZGLED 15. (a) Rešimo npr. enačbo

$$y'' + 4y = \sin x.$$

Karakteristična enačba je $\lambda^2 + 4 = 0$, ki ima konjugirano kompleksni rešitvi $\lambda_1 = 2i$ in $\lambda_2 = -2i$. Splošna rešitev homogene enačbe je torej $y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko uganemo, saj mora biti v zvezi s sinusno funkcijo; z nastavkom $y_1 = a\sin x$ določimo $a = 1/3$ in dobimo $y_1 = \frac{1}{3}\sin x$. Torej je splošna rešitev $y = \frac{1}{3}\sin x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

Kako bi na tem primeru uporabili metodo variacije konstant? V formuli za splošno rešitev homogene enačbe imejmo C_1 in C_2 za funkciji spremenljivke t. Z odvajanjem na x dobimo

$$y' = C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x - 2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x.$$

Zahtevajmo $C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0$, pa imamo $y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$. S ponovnim odvajanjem najdemo

$$y'' = -2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x - 4c_1\cos 2x - 4c_2\sin 2x.$$

To vstavimo v prvotno enačbo, pa dobimo $-C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \sin x$, kar je še druga enačba za odvoda C_1' in C_2'. Iz sistema dveh linearnih enačb $C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0$ in $-C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \sin x$ izračunamo

$$C_1' = -\cos x\sin^2 x,\quad C_2' = \cos^2 x\sin x - \frac{1}{2}\sin x,$$

integriramo, da dobimo

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1,\quad C_2(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}\cos x + C_2$$

(kjer sta C_1,C_2 res konstanti) in končno

$$y = \frac{1}{3}\sin x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

(b) Enačba

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$$

opisuje lastno dušeno nihanje matematičnega nihala (pri majhnih odklonih iz mirovne lege). Tu je $\alpha > 0$ koeficient dušenja in ω_0 krožna frekvenca nihala. Korena karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ sta

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \alpha + i\beta \ \text{ in }\ \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - i\beta,$$

kjer je $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Lahko ločimo tri primere:

(i) $\alpha^2 > \omega_0^2$ (močno dušenje); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta realni, negativni in med seboj različni. Splošna rešitev je oblike $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$,

(ii) $\alpha^2 = \omega_0^2$ (mejni primer); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta realni: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Splošna rešitev je oblike $y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-\alpha x}$, .

(iii) $\alpha^2 < \omega_0^2$ (šibko dušenje); števili $\lambda_1,\ \lambda_2$ sta konjugirano kompleksni: $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$. Splošna rešitev je oblike $y = A\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\beta x + \delta)$,

Samo v zadnjem primeru gre za pravo (dušeno) nihanje. Če pa bi bil $\alpha = 0$, dušenja ne bi bilo in bi imeli harmonično nihanje.

Eulerjeva diferencialna enačba

Na diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko prevedemo naslednjo linearno diferencialno enačbo, ki se imenuje po Eulerju:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x).$$

Vpeljemo novo neodvisno spremenljivko $t = \ln x$. Potem je $y' = dy/dx = dy/dt{\cdot}dt/dx = \dot{y}/x$ oziroma $xy' = \dot{y}$ ter $x^2y'' = x(xy')' - xy' = \ddot{y} - \dot{y}$. Tako pridemo do linearne enačbe s konstantnimi koeficienti

$$a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = f(e^t),$$

ki jo znamo reševati po prejšnji metodi.

ZGLED 16. (a) Enačba $x^2y'' - 2y = 0$ iz zgleda 13 je Eulerjeva. Zzamenjavo neodvisne spremenljivke $t = \ln x$ dobimo enačbo s konstantnimo koeficienti $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima korena $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -1$, tako da je splošna rešitev enaka $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} = C_1x^2 + C_2/x$.

(b) S substitucijo $t = \ln x$ preoblikujmo enačbo $x^2y'' - xy' + 2y = 0$ v enačbo $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$, ki ima karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ s koreni $\lambda = 1 \pm i$, kar nam da splošno rešitev $y = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t)$. Prvotno Eulerjevo diferencialno enačbo potem reši splošna funkcija oblike $y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)$.

(c) Enačba $x^3y''' - 2xy' = 1$, ki smo jo omenili čisto na začetku poglavja je sicer tretjega reda, vendar jo s substitucijo $y' = z$ takoj preoblikujemo v Eulerjevo enačbo drugega reda $x^2z'' - 2z = 1/x$. Še ena zamenjava $t = \ln x$ privede do enačbe $\ddot{z} - \dot{z} - 2z = e^{-t}$ s konstantnimi koeficienti in karakterističnim polinomom $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$. Splošna rešitev zadnje enačbe je $z = (C_1 - t)e^{-t}/3 + C_2e^{2t}$ oziroma $z = \dfrac{C_1 - \ln x}{3x} + C_2x^2$. splošna rešitev prvotne enačbe pa $y = -\dfrac{\ln^2 x}{6} + \dfrac{C_1\ln x}{3} + \dfrac{C_2x^3}{3} + C_3$.

Sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti

Pogosto se hkrati spreminja več količin v odvisnosti od časa in od teh količin samih. Denimo, da gre za dve količini x, y in da je hitrost spreminjanja od njiju linearno odvisna, pri čemer so koeficienti konstantni. Tedaj govorimo o sistemu dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. To je sistem oblike

$$x' = ax + by + f(t)$$

$$y' = cx + dy + g(t)$$

kjer so a, b, c, d znana realna števila in f, g znani zvezni realni funkciji. Neodvisno spremenljivko smo zdaj označili s t.

Če uvedemo vektorske oznake $z = (x, y)^{\perp}$, $z' = (x', y')^{\perp}$, $h(t) = (f(t), g(t))^{\perp}$ in $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, lahko sistem zapišemo v matrični obliki: $z' = Az + h(t)$. Kadar je $h(t) = 0$, govorimo o *homogenem* sistemu, sicer pa je sistem *nehomogen*.

Sistem dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda lahko takoj prevedemo na eno linearno diferencialno enačbo 2. reda. Oglejmo si npr. homogeni sistem:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy.$$

Če je $b = 0$, najprej rešimo prv enačbo, ki ne vsebuje spremenljivke y. Ko poznamo x kot funkcijo spremenljivke t, vstavimo to v drugo enačbo, ki postane nehomogena linearna enačba prvega reda, in jo rešimo.

Pa naj bo $b \neq 0$. Prvo enačbo odvajamo, nato iz obeh enačb prvega reda izločimo y, nazadnje pa iz te in iz odvajane enačbe izločimo še y', pa dobimo za x enačbo drugega reda

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

ki ima karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Brez posebnih težav se lahko prepričamo, da je ta enačba enaka enačbi $\det(\lambda I - A) = 0$, kjer je A matrika zgornjega sistema. Torej je leva stran karakteristične enačbe enaka karakterističnemu polinomu matrike A, kot ga poznamo iz linearne algebre, korena λ_1, λ_2 karakteristične enačbe pa sta lastni vrednosti matrike A.

Splošna rešitev za x je za $\lambda_1 \neq \lambda_2$ enaka

$$x = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

za $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ pa

$$x = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Rešitev za y potem poiščemo iz ene izmed prvotnih enačb, npr. iz prve. Dobimo:

$$y = (x' - ax)/b = D_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + D_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

kjer je $D_1 = (\lambda_1 - a)C_1/b$ in $D_2 = (\lambda_2 - a)C_2/b$, v primeru $\lambda_1 \neq \lambda_2$, in

$$x = (D_1 + D_2 t)e^{\lambda t},$$

kjer je $D_1 = (\lambda - a)C_1/b + C_2/b$ in $D_2 = (\lambda - a)C_2/b$, v primeru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

ZGLED 17. (a) Za sistem $x' = -y$, $y' = x$ takoj dobimo najprej enačbo $x'' = -x$ z rešitvijo $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Nato iz $y = -x'$ poiščemo še $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Od tod npr. vidimo, da je

$$x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 = C^2,$$

kjer je C pozitivna konstanta. Torej so rešitvene krivulje sistema koncentrične krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču. Slednje dobimo lahko tudi direktno iz diferencialne enačbe $dx/dy = -y/x$, ki jo dobimo z medsebojnim deljenjem obeh strani sistema (s tem izločimo pomožno spremenljivko t).

(b) Na podoben način uženemo homogeni sistem $x' = 3x - 2y$, $y' = 2x - 2y$. Ker sta karakteristični števili oziroma lastni vrednosti ustrezne matrike enaki -1 in 2, dobimo rešitev $x = 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}$, $y = 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + (C_2/2)\mathrm{e}^{2t}$.