

### III. ODVODI FUNKCIJ ENE REALNE SPREMENLJIVKE

#### 1. Odvajanje funkcij ene spremenljivke

Odvajanje je ena najpomembnejših operacij na funkcijah. Z uporabo odvoda, kadar le-ta obstaja, lahko veliko bolje spoznamo vedenje funkcije v bližini določene točke, kot lahko to storimo le z računanjem njenih vrednosti in njene limite.

#### Definicija in geometrijski pomen odvoda

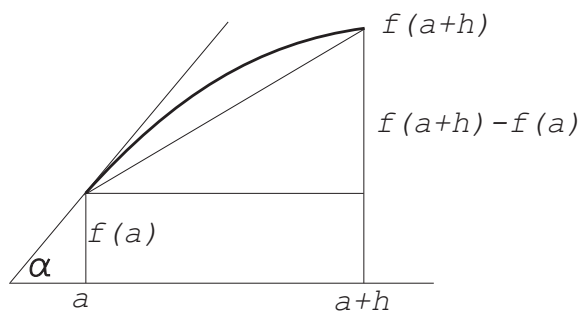
Naj bo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiran a v neki okolici točke  $a \in \mathbb{R}$ , tj. na intervalu  $(a-\delta, a+\delta)$ , kjer je  $\delta > 0$ . Za  $0 < |x-a| < \delta$  lahko izračunamo ulomek  $(f(x)-f(a))/(x-a)$  oziroma  $(f(a+h)-f(a))/h$ , če pišemo  $h = x-a$ . Ta ulomek imenujemo *diferenčni kvocient* funkcije  $f$  v točki  $a$ .

DEFINICIJA. Realna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je v točki  $a$  *odvedljiva*, če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

To limito imenujemo *odvod* funkcije  $f$  v točki  $a$ .

Geometrijsko pomeni odvod  $f'(a)$  tangens naklonskega kota tangente na krivuljo  $y = f(x)$  v točki  $(a, f(a))$  in določa strmino (smer grafa) funkcije v dani točki. Naklon tangente dobimo kot limitno lego naklona sekante skozi točki  $(a, f(a))$  in  $(a+h, f(a+h))$  (glej sliko 13).



Slika 13

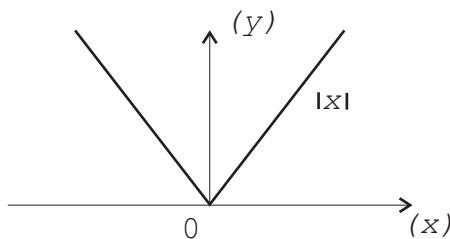
Smerni koeficient tangente v točki  $(a, f(a))$  torej znaša  $f'(a)$ , zato je *enačba tangente* na krivuljo  $y = f(x)$  v točki  $a$  enaka  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ . Premici, ki je pravokotna na tangento in poteka skozi njeno dotikališče, pa rečemo *normala*. Če tangenta ni vodoravna, se pravi, če  $f'(a) \neq 0$ , normala ni navpična in lahko zapišemo *enačbo normale* v obliki  $y = f(a) - (x - a)/f'(a)$ .

Včasih lahko izračunamo samo desno ali samo levo limito diferenčnega kvocienta. Tedaj imenujemo limito  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  *desni odvod* in limito  $\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$  *levi odvod* funkcije  $f$  v točki  $a$ . Rečemo, da je funkcija v  $a$  *odvedljiva z desne* oziroma *z leve*.

ZGLEDI. (a) Če je  $f(x) = kx + n$ , je  $f'(a) = k$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$ , saj je že diferenčni kvocient povsod enak  $k$ . Tangenta v katerikoli točki  $a$  se ujema s premico  $y = kx + n$ , ki je graf funkcije  $f$ .

(b) Če je  $f(x) = x^2$ , je  $f'(a) = 2a$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$ , saj je diferenčni kvocient enak  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = 2a+h$ . Tangenta na parabolo  $y = x^2$  v točki  $a$  ima enačbo  $y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$ .

(c) Funkcija  $f(x) = |x|$  v točki  $x = 0$  ni odvedljiva. Diferenčni kvocient v točki 0 je enak  $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = |h|/h$ . Zdaj je leva limita enaka  $-1$ , desna 1, limite pa ni. Odvod v točki 0 ne obstaja, obstajata pa levi in desni odvod v točki 0 in sta različna (glej sliko 14).



Slika 14

TRDITEV. Če je funkcija  $f$  v točki  $a$  odvedljiva, je tam tudi zvezna.

**Dokaz.** Zapišimo  $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h$ . Ker limita diferenčnega kvocienta obstaja, obstaja tudi limita razlike  $f(a+h) - f(a)$  pri pogoju  $h \rightarrow 0$  in je enaka 0. To pomeni, da je  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$  in funkcija  $f$  je v točki  $a$  zvezna.

Obratno ne drži, kot pove prejšnji zgled (c). Funkcija  $f(x) = |x|$  je v točki 0 (pravzaprav povsod) zvezna, ni pa tam odvedljiva. Prav tako je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

v točki 0 zvezna, vendar ne odvedljiva, ker limita  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$  ne obstaja.

DEFINICIJA. Funkcija  $f$  je na odprtem intervalu  $(a, b)$  odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki  $x \in (a, b)$ . Funkcija  $f$  je na zaprtem intervalu  $[a, b]$  odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki  $x \in (a, b)$  in je v levem krajišču  $a$  odvedljiva z desne, v desnem krajišču  $b$  pa z leve.

Odvod funkcije  $f(x)$  je odvisen od točke  $x$ , v kateri jo odvajamo; torej je  $f'$  spet funkcija. Njeno definicijsko območje  $D_{f'}$  je v splošnem manjše od definicijskega območja  $D_f$  funkcije  $f$ , saj funkcija  $f$  na  $D_f$  ni nujno zvezna, kaj šele odvedljiva. Obstajajo celo funkcije, ki so na vsej realni osi zvezne in v nobeni točki odvedljive.

DEFINICIJA. Rečemo, da je funkcija  $f$  na (odprtem ali zaprtem)  $I$  zvezno odvedljiva, če je odvedljiva na  $I$  (v krajiščih z ene strani) in je njen odvod  $f'$  na  $I$  zvezna funkcija (v krajiščih z ene strani).

Funkciji  $f(x) = kx + n$  in  $f(x) = x^2$  sta npr. zvezno odvedljivi povsod na realni osi. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

je odvedljiva povsod na  $\mathbb{R}$ , tudi v točki 0, vendar v točki 0 ni zvezno odvedljiva. Njen odvod

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

v točki 0 namreč ni zvezna funkcija.

### Pravila za odvajanje

Za odvajanje veljajo znana pravila:

1. *Odvod konstantne funkcije je 0.*

**Dokaz.** Že diferenčni kvocient konstante je enak 0.

2. *Odvod vsote in razlike:  $(u + v)' = u' + v'$ ,  $(u - v)' = u' - v'$ .*

**Dokaz.** Uporabimo definicijo odvoda in pravila za računanje limit. Zapišimo npr. diferenčni kvocient za vsoto  $u + v$ :

$$\frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

če na desni strani obstajata limiti obeh diferenčnih kvocientov, ko  $h \rightarrow 0$ , obstaja tudi limita na levi strani.

To lahko posplošimo na več členov:  $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + \dots + u_n'$ .

3. *Odvod produkta:  $(uv)' = u'v + uv'$ .*

**Dokaz.** Spet zapišimo diferenčni kvocient za produkt:

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

in izračunajmo na obeh straneh limito pri pogoju  $h \rightarrow 0$ . Upoštevajmo, da pri tem velja  $\lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x)$  zaradi zveznosti funkcije  $v$ .

Poseben primer je odvod funkcije pomnožene s konstanto:  $(cu)' = cu'$ .

Formulo za odvod produkta lahko posplošimo na več faktorjev, npr.  $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ .

4. *Odvod kvocienta:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$*

Dokaz izpustimo, ker je podoben kot dokaz za produkt, le nekoliko bolj zapleten.

5. *Odvod kompozituma:  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ .*

To formulo imenujemo tudi *formula za odvod sestavljene oziroma posredne funkcije ali verižno pravilo*. Tu je  $y = g(u)$ ,  $u = f(x)$ , tako da je  $y$  posredna funkcija spremenljivke  $x$ . Pogosto ne vpeljemo novih oznak, ampak pišemo kar  $y = y(u)$ ,  $u = u(x)$ , s čimer nakažemo, od česa so odvisne nastopajoče spremenljivke. V tem primeru se verižno pravilo glasi  $y'(x) = y'(u(x))u'(x)$ .

**Dokaz.** Označimo diferenčni kvocient funkcije  $u$  v točki  $x$  s  $k_x(h)$ , torej  $k_x(h) = (f(x+h) - f(x))/h$ . Torej je  $f(x+h) = f(x) + hk_x(h)$ . Če je  $k_x(h) = 0$  za vse dovolj majhne  $|h|$ , je  $f(x+h) = f(x)$ ; zato tudi  $g(f(x+h)) - g(f(x)) = 0$  in odvod sestavljene

funkcije je enak nič. Če pa je  $k_x(h) \neq 0$ , lahko zapišemo diferenčni kvocient sestavljene funkcije v obliki

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x) + hk_x(h)) - g(f(x))}{hk_x(h)} \cdot k_x(h).$$

Prvi faktor konvergira pri pogoju  $h \rightarrow 0$  proti  $g'(f(x))$ , drugi pa proti  $f'(x)$ .

**Zgled.** Če je  $y = (2x^2 + x)^3$ , je  $y' = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$ .

6. *Odvod inverzne funkcije:* Če je  $y = f^{-1}(x)$  inverzna funkcija k funkciji  $f$ , je  $y' = 1/f'(y)$ ,  $y = f^{-1}(x)$ , torej  $y' = 1/f'(f^{-1}(x))$ .

**Dokaz.** Uporabili bomo pravilo za odvod sestavljene funkcije, saj zdaj velja  $x = f(y)$ ,  $y = f^{-1}(x)$ . Potem z upoštevanjem točke 5 dobimo z odvajanjem na spremenljivko  $x$  na obeh straneh  $1 = f'(y)y'$  oziroma  $y' = 1/f'(y)$ , kjer je seveda  $y = f^{-1}(x)$ .

### Odvodi elementarnih funkcij

Vse elementarne funkcije so ne samo zvezne, ampak tudi odvedljive. Njihove odvode najdemo po definiciji, upoštevati pa je potrebno nekatere limite iz prejšnjega razdelka in splošna pravila za odvajanje.

1. *Odvod konstante je 0.* To smo že videli.

2. *Odvod potence je  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .*

Za potence z naravnim eksponentom  $n \in \mathbb{N}$  je ta formula poseben primer formule za odvod produkta več faktorjev. Za splošne potence bomo to formulo izpeljali takoj, ko bomo poznali odvod eksponentne in logaritemske funkcije.

3. *Odvod eksponentne funkcije je  $(e^x)' = e^x$ .*

**Dokaz.** Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta  $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$  pri pogoju  $h \rightarrow 0$  (upoštevajmo, da je limita zadnjega ulomka enaka 1).

Podobna formula velja tudi za eksponentne funkcije z drugo osnovo. Za  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  in  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  npr. dobimo po pravilu za odvod posredne funkcije  $f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$ .

4. *Odvod logaritemske funkcije je  $(\ln x)' = 1/x$ .*

**Dokaz.** Logaritemska funkcija  $y = \ln x$  je inverzna k eksponentni, zato iz  $x = e^y$  dobimo  $y' = 1/e^y = 1/x$ .

Odvajamo lahko tudi logaritme z drugo osnovo  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , če jih prej prevedemo na osnovo  $e$ . Dobimo  $\log_a x = \ln x / \ln a$  in zato  $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$ .

Zdaj se lahko lotimo tudi splošne potence ( $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{R}$ ), ki jo najprej zapišemo v obliki  $x^n = e^{n \ln x}$ . Torej je  $(x^n)' = e^{n \ln x} \cdot n/x = nx^{n-1}$ , se pravi formalno enaka formula kot za naravne eksponente.

5. *Odvodi kotnih funkcij so:*  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ,  $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ .

**Dokaz.** Za sinusno funkcijo je po definiciji

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = (2/h) \cos(x+h/2) \sin h/2$$

in ta diferenčni kvocient konvergira proti  $\cos x$ , ko  $h \rightarrow 0$ . Odvod kosinusa dobimo podobno ali z odvajanjem formule  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ . Odvoda za tangens in kotangens dobimo z odvajanjem ustreznih ulomkov,  $\sin x / \cos x$  in  $\cos x / \sin x$ .

6. *Odvodi krožnih funkcij so:*  $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ ,  $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ ,  
 $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ ,  $(\text{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$ .

**Dokaz.** Upoštevajmo pravila za odvod inverznih funkcij. Če je npr.  $y = \arcsin x$ , je  $x = \sin y$  in zato  $y' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$ . Podobno dobimo iz  $x = \text{tgy}$  odvod za arkus tangens:  $y' = 1/(1+\text{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$ .

### Diferencial in diferenciability funkcije

Diferenčni kvocient funkcije  $f$  (v poljubni točki  $a$ ) pogosto označimo z  $\Delta y/\Delta x$ , kjer je  $\Delta x = x - a$  razlika argumentov in  $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(a)$  razlika funkcijskih vrednosti. Pogosto pišemo kar  $\Delta x = dx$  in to razliko imenujemo *diferencial neodvisne spremenljivke*.

DEFINICIJA. *Diferencial (odvedljive) funkcije  $f$  v točki  $a$  je izraz oblike  $df = f'(a)dx$ , torej produkt odvoda funkcije  $f$  v točki  $a$  in diferenciala neodvisne spremenljivke  $dx$ .*

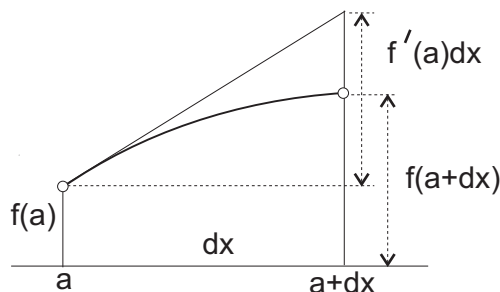
Če je  $f(x) = x$  za vsak  $x$ , je  $f'(a) = 1$  za vsak  $a$  in zato  $df = dx$ ; diferencial (identične) funkcije  $f(x) = x$  se v tem primeru ujema z diferencialom neodvisne spremenljivke  $x$ .

**Opomba.** Odvod dobimo kot limito diferenčnega kvocienta  $\Delta y/\Delta x$ , ko pošljemo  $\Delta x$  proti nič, zato se je za odvod funkcije že od Leibniza dalje uveljavil tudi izraz  $dy/dx$  oziroma  $df/dx$ .

Ker je diferenčni kvocient pri majhnem  $dx$  približno enak odvodu funkcije  $f$  v točki  $a$ , torej  $\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \approx f'(a)$ , imamo tudi približno formulo

$$f(a+dx) - f(a) \approx f'(a)dx.$$

To formulo pogosto uporabljamo, kadar želimo približno oceniti vrednost funkcije  $f$  v premaknjeni točki  $x + dx$  z vrednostjo funkcije  $f$  v točki  $x$ . Geometrijsko to pomeni, da vrednost funkcije v bližini dane točke  $x$  ocenimo z vrednostjo tangente na krivuljo  $y = f(x)$  v tej točki (glej sliko 15).



Slika 15

ZGLED. 1. Za  $f(x) = \sqrt{x}$  je  $f(a+dx) \approx \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$ , zato imamo npr. za točko  $a = 1$  in za premik  $dx = 0.1$  oceno  $\sqrt{1.02} \approx 1 + 0.02/2 = 1.01$ .

2. Zaradi  $\sin(a+dx) \approx \sin a + \cos a dx$  dobimo npr. za  $a = 0$  in  $dx = \pi/180$  vrednost  $\sin 1^\circ \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \pi/180 = \pi/180 \approx 0.018$ .

Aproksimativni formuli  $f(a + dx) - f(a) \approx f'(a)dx$  dajmo še natančnejšo obliko. Če pišemo  $dx = h$ , potem formula  $f(a + h) - f(a) \approx f'(a)h$  pravzaprav pomeni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

Tu je preslikava  $h \mapsto f'(a)h$  neka linearna funkcija iz  $\mathbb{R}$  v  $\mathbb{R}$ .

DEFINICIJA. Nasploh rečemo, da je funkcija  $f$  *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja tako realno število  $A$  (odvisno od funkcije  $f$  in točke  $a$ ), da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Ah}{h} = 0.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je število  $A$ , če obstaja, natanko določeno, da je funkcija  $f$  diferenciabilna v točki  $a$  natanko takrat, ko je odvedljiva v točki  $a$ , in da je  $A = f'(a)$ .

Res, če bi tudi število  $B$  ustrezalo zgornjemu pogoju, bi imeli

$$B - A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Bh - Ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Ah}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Bh}{h} = 0.$$

Poleg tega je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Ah}{h} = 0$  natanko takrat, ko je  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = A$ , se pravi, natanko takrat, ko je funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $a$  in njen odvod enak  $A$ .

## Višji odvodi

DEFINICIJA. Višje odvode funkcije  $f$  definiramo rekurzivno:  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ . Npr.  $f'' = (f')'$ . Druga oznaka za  $n$ -ti odvod funkcije  $f$  je  $d^n f/dx^n$ .

ZGLEDI. Višje odvode nekaterih funkcij, npr.  $f(x) = x^n$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $\ln x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$  izračunamo brez težav.

Tako je npr.  $(e^x)^{(n)} = e^x$  za vsak  $n$ ,  $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$  za  $k \leq n$  in  $(x^n)^{(k)} = 0$  za  $k > n$ . Tudi za vsak polinom  $f$  stopnje  $n$  je  $f^{(k)} = 0$  za  $k > n$ . Odvod logaritemske funkcije  $f(x) = \ln x$  je, kot vemo  $f'(x) = 1/x$ , zato je drugi odvod  $f''(x) = -1/x^2$ , tretji odvod  $f^{(3)}(x) = 2/x^3$ , četrti odvod  $f^{(4)}(x) = -6/x^4$  itd.; splošno ugotovimo (z indukcijo), da je  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$  za vsak  $n$ . Z indukcijo se lahko tudi prepričamo, da je  $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$  in  $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$  za vsak  $n$ .

Oglejmo si še, kako večkrat odvajamo produkt dveh funkcij  $uv$ . Vemo že, da je  $(uv)' = u'v + uv'$ . Potem je  $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$ . Z indukcijo potem najdemo splošno pravilo:

**Leibnizova formula:**  $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}$  ali na kratko  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$ .

Če je funkcija  $f$  na intervalu  $[a, b]$  odvedljiva, je  $f$  seveda tam zvezna (v krajiščih le z ene strani). Podobno velja: Če je funkcija  $f$  na intervalu  $[a, b]$  dvakrat odvedljiva, je prvi odvod  $f'$  tam zvezna funkcija in zato isto velja tudi za funkcijo  $f$ . Zato je smiselna naslednja definicija.

DEFINICIJA. Naj bo  $I$  odprti ali zaprti, omejeni ali neomejeni interval. Rečemo, da pripada funkcija  $f$  razredu  $C^n(I)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , če je funkcija  $f$  na  $I$   $n$ -krat odvedljiva in je  $n$ -ti odvod  $f^{(n)}$  na  $I$  zvezna funkcija.

Razred  $C^0(I) = C(I)$  je množica vseh zveznih, razred  $C^1(I)$  pa množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na intervalu  $I$ . Posebej pa definiramo še razred  $C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$  neskončnokrat odvedljivih funkcij na  $I$ . Elementarna funkcija  $f$  običajno spada v  $C^\infty(I)$ , če je  $I \subset D_f$ . Tako so npr. neskončnokrat odvedljivi vsi polinomi, eksponentna funkcija,

logaritemaska funkcija, vse trigonometrične in ciklometrične funkcije itd. Neskončkokrat so odvedljive tudi nekatere neelementarne funkcije, npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Pri tej funkciji je 0 edina kritična točka, kjer je treba preveriti odvedljivost. Npr. za prvi odvod iz  $|f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/|x|}}{|x|} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{e^{-1/y}}{y} = 0$  dobimo  $f'(0) = 0$ . Za drugi odvod moramo

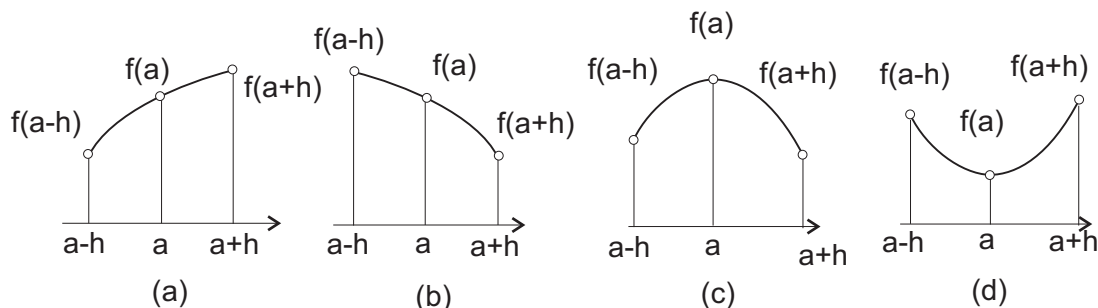
najprej izračunati odvod v točkah  $x \neq 0$ . Dobimo  $f'(x) = \pm \frac{e^{-1/|x|}}{x^2}$  (+, če je  $x > 0$  in -, če je  $x < 0$ ), zato je  $|f''(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f'(x)|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/|x|}}{|x|^3} = 0$ . Podobno velja tudi pri višjih odvodih, vsi so v točki 0 enaki nič.

### Uporaba odvoda pri proučevanju funkcij

Zdaj bomo naše znanje o odvajanju uporabili pri podrobnejši obravnavi vedenja funkcij v posamezni točki ali na vsem intervalu. Naj bo odslej  $I$  poljuben odprt interval in  $f$  realna funkcija, definirana in zvezna na  $I$ .

Spomnimo se, da je funkcija  $f$  strogo naraščajoča na intervalu  $I$ , če za vsak  $x, y \in I$  iz  $x < y$  sledi  $f(x) < f(y)$ . To je globalni pojem naraščanja funkcije na celem intervalu, potrebovali pa bomo tudi naslednji lokalni pojem naraščanja funkcije v eni sami točki.

DEFINICIJA. Pravimo, da je funkcija  $f$  v točki  $a \in I$  *naraščajoča*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za  $0 < h < \delta$  velja  $f(a - h) < f(a) < f(a + h)$  (glej sliko 16a).



Slika 16

Iz strogega naraščanja funkcije  $f$  na intervalu  $I$  seveda takoj sledi naraščanje funkcije  $f$  v vsaki točki tega intervala. Ni se težko prepričati, da velja za zvezne funkcije tudi obratno.

Res, če  $f$  na  $I$  ni strogo naraščajoča, obstaja taka točka  $a \in I$ , da množica  $A = \{x \in I; a < x \text{ in } f(x) \leq f(a)\}$  ni prazna. Ker je navzdol omejena z  $a$ , obstaja  $b = \inf A$ . Zaradi zveznosti funkcije  $f$  iz konvergence  $x_k \rightarrow b$ ,  $x_k \in A$ , sledi konvergenca  $f(x_k) \rightarrow f(b)$  in zato  $f(b) \leq f(a)$ . Če je  $a < b$ , za  $a < x < b$  velja  $f(b) \leq f(a) < f(x)$  po definiciji infimuma  $b$ , zato funkcija  $f$  ni naraščajoča v točki  $b$ . Če pa je  $a = b$ , obstajajo poljubno blizu  $a$  točke  $x_k > a$  z lastnostjo  $f(x_k) \leq f(a)$ , tako da funkcija  $f$  ni naraščajoča v točki  $a$ .

Podobno definiramo tudi padajoče funkcije (glej sliko 16b).

DEFINICIJA. Funkcija  $f$  je v točki  $a \in I$  *padajoča*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za  $0 < h < \delta$  velja  $f(a - h) > f(a) > f(a + h)$  (glej sliko 16b).

Spet je zvezna funkcija  $f$  padajoča v vsaki točki na  $I$ , če je strogo padajoča na  $I$  v smislu, da za vsak  $x, y \in I$  iz  $x < y$  sledi  $f(x) > f(y)$ .

Pri odvedljivih funkcijah lahko naraščanje in padanje funkcije v eni točki karakteriziramo z odvodom.

**TRDITEV 1.** Če je  $a \in I$  in za odvedljivo funkcijo  $f$  velja  $f'(a) > 0$ , je funkcija  $f$  v točki  $a$  naraščajoča. Če je  $f'(a) < 0$ , je funkcija  $f$  v točki  $a$  padajoča.

**Dokaz.** Če je odvod  $f'(a) > 0$ , obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$  in  $\frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} > 0$  za  $0 < h < \delta$ . Drugi del dokažemo podobno.

Poleg naraščanja ali padanja se funkcija v posamezni točki lahko vede tudi drugače.

**DEFINICIJA.** Funkcija  $f$  ima v točki  $a \in I$  *lokalni maksimum*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za  $0 < h < \delta$  velja  $f(a) \geq f(a \pm h)$ . Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogem lokalnem maksimumu* (glej sliko 16c).

**DEFINICIJA.** Funkcija  $f$  ima v točki  $a \in I$  *lokalni minimum*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za  $0 < h < \delta$  velja  $f(a) \leq f(a \pm h)$ . Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogem lokalnem minimumu* (glej sliko 16d).

Če ima funkcija  $f$  v točki  $a \in I$  svoj lokalni maksimum ali svoj lokalni minimum, potem rečemo, da ima v točki  $a$  *lokalni ekstrem*. Ta pojem moramo ločiti od globalnega ekstrema funkcije  $f$  na intervalu  $I$ . Vsak globalni ekstrem je tudi lokalni, obratno na sploh ni res. Zvezna funkcija na odprtem intervalu  $I$  morda nima niti lokalnih niti globalnih ekstremov, na zaprtem intervalu pa jih lahko ima v krajišču (npr. če je strogo naraščajoča).

Še na eno podrobnost opozorimo zvezi z gornjo definicijo: funkcija lahko ima v točki  $a$  lokalni ekstrem (maksimum ali minimum) natanko takrat, ko v  $a$  niti ne narašča niti ne pada. Tudi na intervalu  $I$  konstantna funkcija ima npr. v vsaki točki tega intervala svoj lokalni (in globalni) maksimum in hkrati svoj lokalni (in globalni) minimum. V tem primeru njene ekstremne točke niso izolirane.

Pri odvedljivih funkcijah imamo lep potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema.

**TRDITEV 2.** Če ima odvedljiva funkcija  $f$  v točki  $a \in I$  lokalni ekstrem (maksimum ali minimum), je  $f'(a) = 0$ .

**Dokaz.** Sledi iz trditve 1: če bi bil  $f'(a) > 0$  ali  $f'(a) < 0$ , bi v točki  $a$  funkcija  $f$  naraščala ali padala.

**DEFINICIJA.** Točko  $a$ , v kateri je  $f'(a) = 0$ , imenujemo *stacionarna točka* funkcije  $f$ .

Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka, obratno pa ni nujno.

**Zgled.** Funkcija  $f(x) = x^3$  ima v točki 0 ničlo 3. stopnje, zato velja  $f'(3)(0) = 0$ , vendar se hitro lahko prepričamo, da je funkcija v točki 0 naraščajoča.

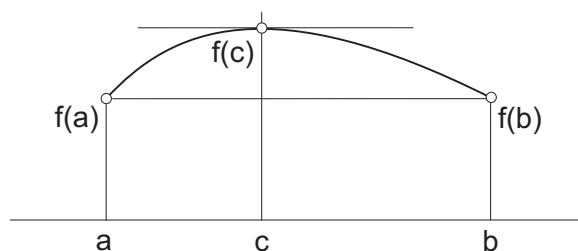
**Opomba.** Trditev 2 velja za odvedljive funkcije. Lahko pa se zgodi, da ima funkcija  $f$  lokalni ekstrem v točki, v kateri sploh ni odvedljiva. To je npr. res za funkcijo  $f(x) = |x|$ , ki ima minimum (koleno) v točki 0 (glej sliko 14).

## Izreki o odvedljivih funkcijah

Naslednji izrek zagotavlja funkciji pod določenimi pogoji vsaj eno stacionarno točko.

**IZREK (Rolle).** *Naj bo  $f$  zvezna funkcija na zaprtem intervalu  $[a, b]$  in odvedljiva na odprtem intervalu  $(a, b)$ . Če je  $f(a) = f(b)$ , obstaja taka točka  $c \in (a, b)$ , da je  $f'(c) = 0$ .*

**Dokaz.** Če je funkcija  $f$  na intervalu  $[a, b]$  konstantna, je odvedljiva na  $(a, b)$  in v vsaki točki  $c \in (a, b)$  velja  $f'(c) = 0$ . Denimo, da ni konstantna. Potem ima zaradi zveznosti na zaprtem intervalu  $[a, b]$  svoj globalni maksimum in svoj globalni minimum; vsaj eden od njiju zaradi nekonstantnosti funkcije  $f$  ni dosežen v krajišču intervala ampak v neki točki  $c \in (a, b)$ . Ker je v njej funkcija  $f$  odvedljiva, je po trditvi 2  $f'(c) = 0$  (slika 17).

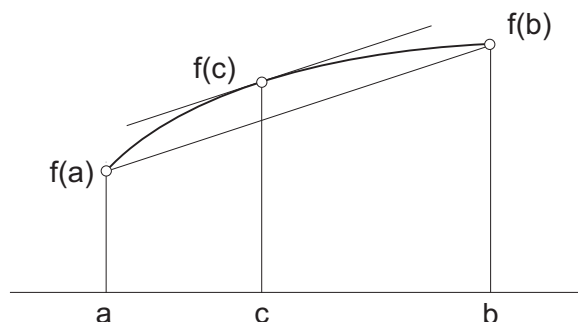


Slika 17

**IZREK (Lagrange).** *Naj bo  $f$  zvezna funkcija na zaprtem intervalu  $[a, b]$  in odvedljiva na odprtem intervalu  $(a, b)$ . Tedaj obstaja taka točka  $c \in (a, b)$ , da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Dokaz.** Pišimo  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . Funkcija  $g$  je zvezna na  $[a, b]$ , odvedljiva na  $(a, b)$  in velja  $g(a) = g(b) = f(a)$ . Po Rolleovem izreku obstaja taka točka  $c \in (a, b)$ , da je  $g'(c) = 0$ . Toda to pomeni, da je  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  (slika 18).



Slika 18

**POSLEDICA.** Če je za odvedljivo funkcijo  $f$ :

- (i)  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) > 0$ ) za vsak  $x \in I$ , je funkcija  $f$  na intervalu  $I$  naraščajoča (strogo naraščajoča);
- (ii)  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) < 0$ ) za vsak  $x \in I$ , je funkcija  $f$  na intervalu  $I$  padajoča (strogo padajoča);
- (iii)  $f'(x) = 0$  za vsak  $x \in I$ , je funkcija  $f$  na intervalu  $I$  konstantna.

**Dokaz.** Uprabimo Lagrangev izrek: za poljuben par točk  $a, b \in I$  z lastnostjo  $a < b$  imamo  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ , kjer je  $c \in (a, b)$ . Če je  $f'(c) > 0$  ali  $f'(c) < 0$ , je  $f(b) - f(a) > 0$  ali  $f(b) - f(a) < 0$ . Točka (iii) sledi podobno.

ZGLEDI. Lagrangevim izrekom lahko takoj izpeljemo različne neenakosti, npr.:

(a)  $|\sin x| \leq |x|$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$ . Res, iz  $\sin x - \sin 0 = (\cos c)(x - 0)$ , kjer je  $c$  med 0 in  $x$ , dobimo  $|\sin x| = |\cos c||x| \leq |x|$

(b)  $e^x \geq 1 + x$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$ . Res, iz  $e^x - e^0 = e^c(x - 0)$ , kjer je  $c$  med 0 in  $x$ , dobimo  $e^x = 1 + e^c x \geq 1 + x$ , ne glede na to, ali je  $x > 0$  ali  $x < 0$ .

(c)  $e^x \leq 1/(1-x)$  za  $0 \leq x < 1$ . Res, za funkcijo  $f(x) = (1-x)e^x$  z odvodom  $f'(x) = -xe^x$  za vsak  $x \geq 0$  velja  $f(x) - f(0) = -ce^c(x - 0)$  oziroma  $f(x) = 1 - xce^c \leq 1$ .

Posplošitev Lagrangevega izreka je naslednji rezultat. Tudi dokaz je podoben.

IZREK (Cauchy). Naj bosta  $f, g$  zvezni funkciji na zaprtem intervalu  $[a, b]$  in odvedljivi v odprtem intervalu  $(a, b)$ . Tedaj obstaja taka točka  $c \in (a, b)$ , da je

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

**Dokaz.** Oglejmo si funkcijo  $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ . Zanj velja zveznost na  $[a, b]$ , odvedljivost na  $(a, b)$  in  $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$ . Po Rolleovem izreku obstaja točka  $c \in (a, b)$  z lastnostjo  $h'(c) = 0$ , kar je ekvivalentno trditvi v izreku.

Lagrangev izrek dobimo, če v Cauchyjevem izreku izberemo  $g(x) = x$  za vsak  $x \in [a, b]$ . Posledica Cauchyjevega izreka pa je naslednji izrek, ki velikokrat pomaga pri računanju limit.

IZREK (L'Hospitalovo pravilo I). Naj bosta funkciji  $f$  in  $g$  odvedljivi v vsaki točki intervala  $(a, b)$ . Za neko točko  $c \in (a, b)$  naj velja  $f(c) = g(c) = 0$  in  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  za  $x$  blizu  $c$ . Poleg tega naj obstaja limita  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)/g'(x)$ . Tedaj je

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Dokaz.** Uporabimo Cauchyjev izrek za funkciji  $f$  in  $g$ :  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ . Ker je  $c < t < x$  (ali  $x < t < c$ ), konvergira hkrati s  $x \rightarrow c$  tudi  $t \rightarrow c$ , in ker obstaja limita  $\lim_{t \rightarrow c} f'(t)/g'(t)$ , obstaja tudi limita  $\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  in obe limiti sta enaki.

ZGLED. L'Hospitalovo pravilo lahko pogosto s pridom uporabimo. Preprosti zgledi so že znane limite:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

Včasih je potrebno pravilo uporabiti večkrat zapored, npr.:

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

L'Hospitalovo pravilo velja tudi za enostranske limite (ki so lahko limite v neskončnosti).

IZREK (L'Hospitalovo pravilo II). Naj bosta funkciji  $f$  in  $g$  odvedljivi v vsaki točki intervala  $(a, b)$ , kjer je  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  za  $x \in (a, b)$  in naj obstaja (končna ali neskončna) desna limita  $\lim_{x \downarrow a} f'(x)/g'(x)$ . Tedaj je

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

v naslednjih primerih:

- (a)  $f(x) \rightarrow 0$  in  $g(x) \rightarrow 0$ , ko  $x \downarrow a$ ;  
 (b)  $g(x) \rightarrow +\infty$ , ko  $x \downarrow a$ .

**Dokaz.** Če velja (a), razširimo funkciji  $f$  v točko  $a$  tako, da postavimo  $f(a) = g(a) = 0$ ; dokaz potem poteka tako kot pri osnovnem L'Hospitalovem pravilu, le da zdaj vzamemo

$c = a$ . Lahko pa tudi za vsak  $a < x < y < b$  zapišemo po Cauchyju  $\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ , kjer je  $x < t < y$ . Če velja (a) najprej pošljemo  $x \rightarrow a$  in dobimo  $\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ . Ker z  $y \rightarrow a$  velja tudi  $t \rightarrow a$ , dobimo odtod iskani rezultat. Če pa velja (b), pomnožimo obe strani enakosti  $\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$  z  $\frac{g(y) - g(x)}{g(x)}$  in dobimo v limiti (ko  $x \rightarrow a$ ) enakost  $\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ , odtod pa iskani rezultat, kot prej.

Podobno kot za desno limito v  $a$  velja pravilo tudi za levo limito v  $b$ . Dokaz je analogen.

Pogoja (a) ali (b) morata biti res izpolnjena, sicer nam L'Hospitalovo pravilo ne da pravega rezultata. Prav tako mora obstajati  $\lim_{x \downarrow a} f'(x)/g'(x)$ .

ZGLED. Limita kvocenta funkcij je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{3+x} = 2/3$ , limita kvocientov odvodov pa je enaka 1. Limita kvocenta funkcij  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{3x - \cos x} = 2/3$  obstaja, limita kvocienta odvodov  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x}$  pa ne obstaja.

### Aproksimacija s polinomi in Taylorjeva formula

Naj bo  $f$  odvedljiva funkcija na odprtem intervalu  $I$  in naj bosta točki  $a, x \in I$ . Če uporabimo Lagrangev izrek za interval  $[a, x]$  dobimo formulo

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a),$$

kjer je  $a < c < x$  ali  $x < c < a$ , odvisno kako ležita  $a$  in  $x$ . To formulo lahko imamo za napotek, kako lahko na  $I$  aproksimiramo odvedljivo funkcijo  $f$  s konstantno funkcijo  $f(a)$ , pri čemer predstavlja člen  $f'(c)(x - a)$  napako. Opazimo, da je formula eksaktna v točki  $a$  in dokaj natančna v njeni bližini.

Če je funkcija  $f$  večkrat odvedljiva, je možno zgornjo formulo posplošiti. Namesto s konstantno funkcijo, bi radi  $f$  aproksimirali s polinomom  $P$  višje stopnje, vendar tako, da bo aproksimacija v točki  $a$  eksaktna ne samo za vrednosti funkcije, ampak tudi za višje odvode. Radi bi torej, da bi veljalo  $P(a) = f(a)$ ,  $P'(a) = f'(a)$ ,  $P''(a) = f''(a)$  itd.

Naj bo funkcija  $f$  na intervalu  $I$  odvedljiva vsaj  $n$ -krat in iskani polinom  $P_n$  stopnje  $n$ . Ujemanje odvodov v točki  $a$  pa zahtevajmo do vključno  $n$ -tega reda, aproksimacija pa naj bo oblike  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , kjer je  $R_n(x)$  ostanek, katerega obliko bi tudi radi določili.

Polinom  $P_n$  iščimo v obliki

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n.$$

Koeficiente moramo še določiti tako, da bo  $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  za  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Najprej vidimo, da mora biti  $c_0 = f(a)$ . Ker je  $P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + \dots + n(x - a)^{n-1}$ , mora biti  $c_1 = f'(a)$ . Še z enim odvajanjem spoznamo, da mora biti  $c_2 = f''(a)/2!$  itd., postopoma najdemo, da mora za vsak  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  veljati  $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ . Iskani polinom je torej oblike

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Temu polinomu rečemo  $n$ -ti Taylorjev polinom (stopnje  $n$ ) za funkcijo  $f$  in točko  $a$ .

Glede ostanka oziroma celotne aproksimacijske formule velja naslednji izrek.

**IZREK (Taylor).** Za funkcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je  $(n + 1)$ -krat odvedljiva na odprtem intervalu  $I$ , naj bo  $P_n$  njen  $n$ -ti Taylorjev polinom za točko  $a \in I$ . Potem za vsak  $x \in I$  obstaja taka točka  $c$  med  $a$  in  $x$ , da velja naslednja Taylorjeva formula:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Dokaz izreka.** Če je  $x = a$ , je formula pravilna, zato privzemimo, da je  $x \neq a$  in definirajmo  $M = (f(x) - P_n(x))/(x-a)^{n+1}$ . Pokazali bi radi, da je  $M = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$  za nek  $c$  med  $a$  in  $x$ . Za  $t \in I$  vpeljimo oznako  $g(t) = f(t) - P_n(t) - M(t-a)^{n+1}$  in novo funkcijo  $(n+1)$ -krat odvajajmo, da izničimo polinom  $P_n(t)$ . Dobimo  $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$ . Ker je  $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  za  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , velja  $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$ .

Zdaj bomo večkrat zapored uporabili Rolleov izrek. Ker je  $g(a) = 0$  in zaradi definicije števila  $M$  tudi  $g(x) = 0$ , obstaja po Rolleovem izreku tak  $c_1$  med  $a$  in  $x$ , da je  $g'(c_1) = 0$ . Ker je tudi  $g'(a) = 0$ , obstaja po Rolleovem izreku tak  $c_2$  med  $a$  in  $c_1$ , da je  $g''(c_2) = 0$ . Postopek tako nadaljujemo; po  $n+1$  korakih najdemo tak  $c = c_{n+1}$ , da je  $g^{(n+1)}(c) = 0$ . To pa pomeni, da je  $f^{(n+1)}(c) = M(n+1)!$  oziroma  $M = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$ , kar smo potrebovali.

Drugemu členu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

na desni strani Taylorjeve formule rečemo *Taylorjev ostanek* (v Lagrangevi obliki) in pomeni napako aproksimacijske formule. Iz oblike ostanka vidimo, da lahko napako ocenimo, če poznamo omejitve za  $|f^{(n+1)}(c)|$ . To je res npr. tkrat, ko je  $f \in C^{n+1}(I)$  in je zato  $f^{(n+1)}$  tudi omejena funkcija na vsakem zaprtem podintervalu v  $I$ .

Pri  $n = 0$  je  $P_0(x) = f(a)$  in  $R_0(x) = f'(c)(x-a)$ , tako da dobimo že znano Lagrangeovo formulo  $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$  za  $x \in I$ . Pri  $n = 1$  je to formula  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)(x-a)^2/2$ , kjer smo funkcijo  $f$  aproksimirali z linearno funkcijo (oziroma njen graf s tangento v točki  $a$ ), itd.

**ZGLEDI.** Z uporabo Taylorjevega izreka lahko izpeljemo različne bolj natančne formule za aproksimacijo različnih funkcij in tudi različne zanimive ocene. npr.:

- (a)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  z napako  $R_1(x) = -x^2/4\sqrt{(1+c)^3}$ , torej  $|R_1(x)| \leq x^2/4$ , če  $x > 0$ ;
- (b)  $\cos x \approx 1 - x^2/2$  z napako  $R_3(x) = \cos(c)x^4/24$ , torej  $|R_4(x)| \leq |x|^4/24$ ;
- (c)  $e^x \approx 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n!$  z napako  $R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$ , torej  $|R_n(x)| \leq e|x|^{n+1}/(n+1)!$ , če je  $x \leq 1$ . Spomnimo se, da smo pri zaporedjih že ugotovili  $e \approx 1 + 1/1! + 1/2! + \dots + 1/n!$  za dovolj velik  $n$ .

### Zadostni pogoji za lokalni ekstrem

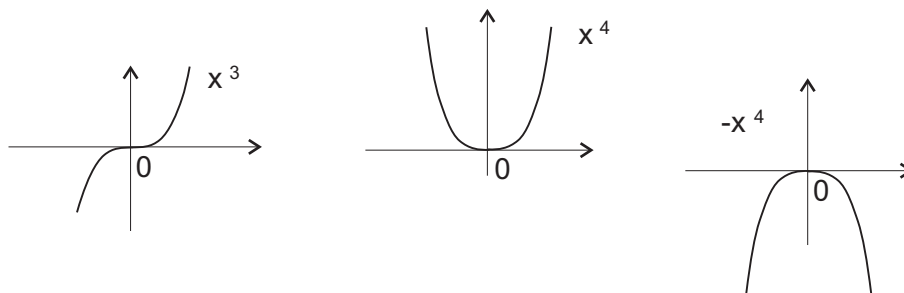
Vedenje odvedljive funkcije  $f$  v okolici stacionarne točke  $a$  lahko ugotovimo z naslednjim kriterijem, ki uporablja predznak odvoda  $f'$  levo in desno od točke  $a$ .

**TRDITEV.** Funkcija  $f$  naj bo na intervalu  $I$  zvezna in odvedljiva, točka  $a \in I$  pa stacionarna točka, torej  $f'(a) = 0$ . Če obstaja tak  $\delta > 0$ , da na intervalu  $(a - \delta, a + \delta)$  velja:

- (1)  $f'(x) > 0$  za  $x < a$  in  $f'(x) > 0$  za  $x > a$ , funkcija v točki  $a$  narašča,
- (2)  $f'(x) < 0$  za  $x < a$  in  $f'(x) < 0$  za  $x > a$ , funkcija v točki  $a$  pada,
- (3)  $f'(x) \leq 0$  za  $x < a$  in  $f'(x) \geq 0$  za  $x > a$ , ima funkcija  $f$  v točki  $a$  lokalni minimum,
- (4)  $f'(x) \geq 0$  za  $x < a$  in  $f'(x) \leq 0$  za  $x > a$ , ima funkcija  $f$  v točki  $a$  lokalni maksimum.

**Dokaz.** Za  $0 < h < \delta$  je po Lagrangevem izreku  $f(a+h) - f(a) = f'(c)h$ , kjer je  $a \leq c < a+h$ , in  $f(a) - f(a-h) = f'(d)h$ , kjer je  $a-h < d \leq a$ . V vsakem od štirih primerov ocenim odvoda v  $c$  in  $d$  pa dobimo ustrezen rezultat (naraščanje, padanje ali ekstrem funkcije  $f$  v točki  $a$ ).

**ZGLED.** Obravnavajmo funkcije  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x^4$  in  $h(x) = -x^4$  v stacionarni točki  $a = 0$ . Ugotovimo, da je predznak odvoda levo in desno od točke  $a$  za funkcijo  $f$  obakrat pozitiven, za funkcijo  $g$  negativen in pozitiven, za funkcijo  $h$  pozitiven in negativen. Zato prva funkcija v stacionarni točki narašča, druga ima minimum in tretja maksimum (glej sliko 19).



Slika 19

Za dvakrat odvedljive funkcije imamo za nastop ekstrema zadosten pogoj, pri katerem izračunamo vrednost prvega in drugega odvoda samo v točki  $a$ .

**IZREK.** Če je funkcija  $f$  na intervalu  $I$  dvakrat odvedljiva in je  $a \in I$  stacionarna točka za  $f$ , torej  $f'(a) = 0$ , velja naslednje:

- (a) Če je  $f''(a) > 0$ , ima funkcija  $f$  v točki  $a$  lokalni minimum.
- (b) Če je  $f''(a) < 0$ , ima funkcija  $f$  v točki  $a$  lokalni maksimum.

**Dokaz.** Če je  $f''(a) > 0$ , sta za vse dovolj majhne  $h > 0$  izpolnjeni neenakosti  $\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0$  in  $\frac{f'(a) - f'(a-h)}{h} > 0$ . Ker je  $f'(a) = 0$ , sledi od tod  $f'(a+h) > 0$  in  $f'(a-h) < 0$ . Po zgornji trditvi ima funkcija  $f$  v stacionarni točki  $a$  minimum. Podobno dokažemo točko (b).

**ZGLEDI.** (a) Edina stacionarna točka kvadratne funkcije  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , je točka  $-b/2a$ , v kateri ima parabola, ki je njen graf, teme. Funkcija  $f$  ima v tej točki maksimum, če je  $a < 0$ , in minimum, če je  $a > 0$ . To sledi iz dejstva, da je  $f''(x) = 2a$  za vsak  $x$ .

(b) Funkcija  $f(x) = \cos x$  ima v točki  $0$  maksimum, v točki  $\pi$  pa minimum, saj je  $f'(0) = f'(\pi) = 0$ ,  $f''(0) = -1$  in  $f''(\pi) = 1$ .

**Opomba.** Ta kriterij odpove, če je  $f''(a) = 0$ . Tedaj lahko nastopijo vse različne možnosti (zglej: funkcije  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x^4$  in  $h(x) = -x^4$  na sliki 19). V tem primeru si lahko včasih pomagamo z višjimi odvodi v stacionarni točki.

**IZREK.** Denimo, da za funkcijo  $f \in C^n(I)$  in točko  $a \in I$  velja

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{in} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Potem velja:

- (a) Če je  $n$  sodo število, ima funkcija  $f$  v točki  $a$  lokalni ekstrem in sicer minimum, če je  $f^{(n)}(a) > 0$ , in maximum, če je  $f^{(n)}(a) < 0$ .
- (b) Če je  $n$  liho število, je funkcija  $f$  v točki  $a$  naraščajoča, če je  $f^{(n)}(a) > 0$ , in padajoča, če je  $f^{(n)}(a) < 0$ .

**Dokaz.** Uporabimo Taylorjevo aproksimacijsko formulo  $f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$ , kjer je  $P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)$  zdaj Taylorjev polinom stopnje  $n-1$ . Ker je po predpostavki izreka  $P_{n-1}(x) = f(a)$ , je  $f(x) - f(a) = R_{n-1}(x)$  in od predznaka Taylorjevega ostanka je odvisno vedenje funkcije v bližini točke  $a$ . Vemo pa, da je ostanek oblike  $R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$  ( $c$  je neka vmesna točka med  $a$  in  $x$ ). Če je torej  $n$  sodo število, je predznak razlike  $f(x) - f(a)$  enak predznaku  $n$ -tega odvoda  $f^{(n)}$  v točki  $c$ , ne glede na to, ali je  $x < a$  ali  $x > a$ . Zaradi zveznosti tega odvoda pa je predznak  $f^{(n)}(c)$  isti kot predznak  $f^{(n)}(a)$ , če je le  $x$  (in s tem  $c$ ) dovolj blizu točki  $a$ . Tedaj ima funkcija  $f$  v točki  $a$  očitno lokalni ekstrem ustrezne vrste, v odvisnosti od predznaka za  $f^{(n)}(a)$ . Če pa je  $n$  liho število, je predznak razlike  $f(x) - f(a)$  odvisen tudi od tega, na kateri strani točke  $a$  je  $x$ . V tem primeru funkcija  $f$  v točki  $a$  narašča ali pada.

**ZGLEDI.** Za funkcijo  $f(x) = x^3$  je  $f'(0) = f''(0) = 0$  in  $f'''(0) = 6$ , zato je  $f$  v točki 0 naraščajoča funkcija. Po drugi strani pa za funkcijo  $g(x) = x^4$  velja  $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$  in  $g^{(4)}(0) = 24$ , zato ima funkcija  $g$  v točki 0 lokalni (in globalni) minimum.

**Opomba.** Lahko se zgodi, da ima neskončnokrat odvedljiva funkcija v izolirani točki lokalni ekstrem, vendar so v tej točki vsi njeni odvodi (poljubnega reda) enaki nič. V tem primeru si z zgornjim kriterijem seveda ne moremo pomagati. Zgled je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

ki ima v točki 0 (globalni) minimum, vsi njeni odvodi v 0 pa so enaki nič.

### Konveksnost in konkavnost funkcije

Naj bo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana na intervalu  $I$  in  $a, b \in I$ . Potem je enačba sekante skozi točki  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$ , ki ležita na grafu funkcije  $f$ , enaka  $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ .

**DEFINICIJA.** Rečemo, da je funkcija  $f$  na intervalu  $I$ :

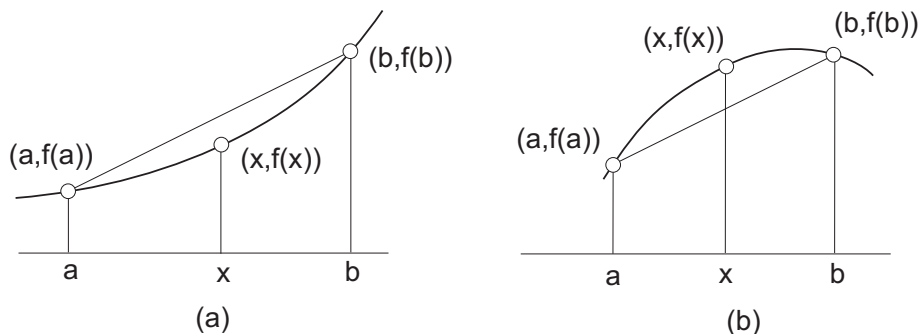
(a) *konveksna*, če za vsak par  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , in za  $a \leq x \leq b$  velja

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a);$$

(b) *konkavna*, če za vsak par  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , in za  $a \leq x \leq b$  velja

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Vidimo, da leži graf na intervalu  $I$  konveksne funkcije  $f$  na vsakem zaprtem podintervalu  $[a, b] \subset I$  pod sekanto skozi točki  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$  (slika 20a), graf konkavne funkcije pa nad njo (slika 20b).



Slika 20

Definicijo lahko povemo tudi nekoliko drugače: za vsak  $h$  z lastnostjo  $0 \leq h \leq b - a$  je  $a \leq a + h \leq b$  in  $a \leq b - h \leq b$  in zato  $f(a + h) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} h$ , če je  $f$  konveksna, in  $f(a + h) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} h$ , če je  $f$  konkavna.

Če pa zapišemo  $t = (x - a)/(b - a)$ , je  $0 \leq t \leq 1$  in  $x = (1 - t)a + tb$  (konveksna kombinacija točk  $a$  in  $b$ ). Neenakost za konveksnost se zdaj glasi

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b),$$

za konkavnost pa

$$f((1 - t)a + tb) \geq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

**Opomba.** Iz definicije je jasno, da razumemo konveksnost ali konkavnost v širšem smislu. Med konveksne (ali konkavne) štejemo npr. tudi linearne funkcije. Kadar enakost ni dopuščena, govorimo o *strogi konveksnosti* (ali *strogi konkavnosti*).

ZGLED. Kvadratna funkcija  $f(x) = x^2$  in eksponentna funkcija  $g(x) = e^x$  sta npr. (strogo) konveksni na vsej realni osi, logaritemska funkcija  $h(x) = \ln x$  pa je na svojem definicijskem območju (strogo) konkavna. Na vsej realni osi sta konveksni tudi funkciji  $x \mapsto x$  in  $x \mapsto |x|$ , ki pa nista strogo konveksni.

TRDITEV. Vsaka konveksna ali konkavna funkcija  $f$ , definirana na odprtem intervalu  $I$ , je zvezna.

**Dokaz.** Iz konveksnosti funkcije  $f$  na intervalu  $I$ , vidimo, da je

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leq \frac{f(b) - f(t)}{b - t}.$$

za poljubne štiri točke  $a, b, t, x \in I$  z lastnostjo  $a < t < x < b$ . Odtod je

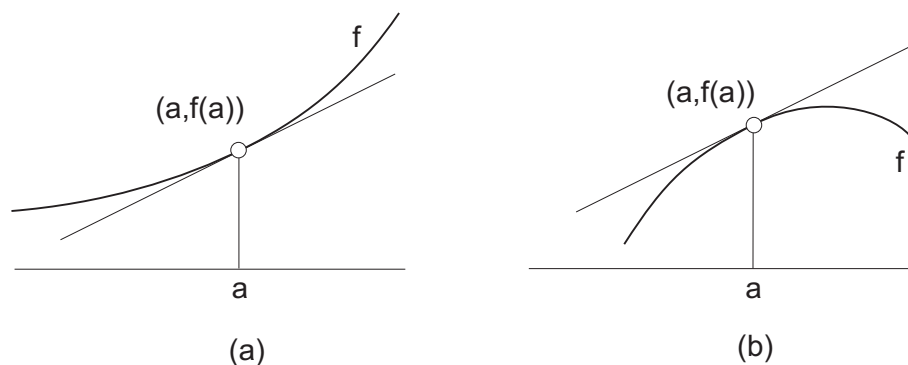
$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - t) \leq f(x) - f(t) \leq \frac{f(b) - f(t)}{b - t}(x - t).$$

Če pošljemo  $x \rightarrow t$ , dobimo  $f(x) \rightarrow f(t)$ , se pravi zveznost z desne funkcije  $f$  v točki  $t$ . Podobno dokažemo tudi zveznost z leve.

DEFINICIJA. Rečemo, da je na intervalu  $I$  odvedljiva funkcija:

(a) *konveksna v točki*  $a \in I$ , če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za vsak  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  velja  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ ;

(b) *konkavna v točki*  $a \in I$ , če obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  in da za vsak  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  velja  $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$ .



Slika 21

Graf funkcije  $f$ , ki je konveksna v točki  $a$ , leži torej v dovoju majhni okolici točke  $a$  nad tangento v tej točki, graf konkavne funkcije pa pod njo.

Nekoliko drugače, z običajno oznako  $h = x - a$ , lahko definicijo povemo tudi takole:

**DEFINICIJA.** Odvedljiva funkcija  $f$  je v točki  $a \in I$

- (a) *konveksna*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da za  $|h| < \delta$  velja  $f(a+h) - f(a) \geq f'(a)h$ , in  
 (b) *konkavna*, če obstaja tak  $\delta > 0$ , da za  $|h| < \delta$  velja  $f(a+h) - f(a) \leq f'(a)h$ .

**ZGLED.** Kvadratna funkcija  $f(x) = x^2$  in eksponenta funkcija  $g(x) = e^x$  sta konveksni v vsaki točki  $a \in \mathbb{R}$ . To sledi iz ocen

$$f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2 \geq 2ah = f'(a)h,$$

$$g(a+h) - g(a) = e^{a+h} - e^a = e^a(e^h - 1) \geq e^a h = f'(a)h.$$

Po drugi strani je logaritemska funkcija  $h(x) = \ln x$  v vsaki točki  $a > 0$  konkavna, kar vidimo iz ocene

$$h(a+h) - h(a) = \ln(a+h) - \ln a = \ln(1+h/a) \leq h/a = h'(a)h.$$

**TRDITEV.** *Odvedljiva funkcija  $f$  je konveksna v vsakem svojem lokalnem minimumu in konkavna v vsakem svojem lokalnem maksimumu.*

**Dokaz.** Res, če ima odvedljiva funkcija  $f$  lokalni minimum v točki  $a$ , obstaja  $\delta < 0$ , tako da za  $|h| < \delta$  velja  $f(a+h) - f(a) \geq 0$ , torej tudi  $f(a+h) - f(a) \geq f'(a)h$ , ker je v lokalnem ekstremu  $f'(a) = 0$ . Podobno dokažemo trditev glede lokalnega maksimuma.

Za odvedljive funkcije lahko konveksnost ali konkavnost definiramo na en ali drug način in dobimo isti rezultat. Velja namreč naslednja trditev.

**TRDITEV.** *Odvedljiva funkcija  $f$  je na intervalu  $I$  konveksna (konkavna) natanko takrat, ko je konveksna (konkavna) v vsaki točki  $a \in I$ .*

**Dokaz.** Dokažimo samo konveksnost. Naj bo funkcija  $f$  na  $I$  konveksna,  $a \in I$  poljubna točka in  $\delta > 0$  tak, da je  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ . Izberimo  $x \in I$  z lastnostjo  $0 < |x - a| < \delta$  in naj bo  $t \in I$  tak, da je  $a < t < x$ , če je  $x > a$ , in  $x < t < a$ , če je  $x < a$ . Zaradi konveksnosti funkcije  $f$  je potem v obeh primerih  $f(t) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(t - a)$ . Ker je  $\frac{t - a}{x - a} > 0$ , dobimo odtod  $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) \leq f(x) - f(a)$  in v limiti ( $t \rightarrow a$ ) tudi  $f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a)$ , kar pomeni, da je funkcija  $f$  konveksna v točki  $a$ .

Obratno, naj bo zdaj funkcija  $f$  konveksna v vsaki točki intervala  $I$  in pokažimo najprej vmesni rezultat, da velja potem neenakost  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$  za vsak par  $a, x \in I$  (tj. ne samo lokalno, v okolici točke  $a$ ). Dovolj je pri danem  $a \in I$  neenakost pokazati za  $x > a$  (za  $x < a$  poteka dokaz podobno). Če bi bila množica

$$A = \{x > a; f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)\}$$

neprazna, bi obstajal  $b = \inf A$  in za njega bi veljalo  $b \geq a$  in  $f(b) \leq f(a) + f'(a)(b - a)$ . V primeru  $b = a$ , funkcija  $f$  ne bi bila konveksna v točki  $a$ . V primeru  $b > a$  pa mora nujno veljati  $f(b) = f(a) + f'(a)(b - a)$ , sicer  $b$  ne bi bil infimum množice  $A$ . Za funkcijo  $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a)$  torej velja  $g(a) = g(b) = f(a)$ . Ker je zvezna, ima na zaprtem intervalu  $[a, b]$  globalni maksimum, ki je dosežen vsaj v eni točki tega intervala. Če je  $c$  supremum vseh takih točk, ima funkcija  $g$  v točki  $c$  tudi maksimum, zato je  $g'(c) = 0$  oziroma  $f'(c) = f'(a)$ , funkcija  $g$  pa je v točki  $c$  po prejšnji trditvi konkavna. Ker je  $g(x) < g(c)$  za  $x > c$ , velja v teh točkah tudi  $f(x) - f'(a)(x - a) < f(c) - f'(a)(c - a)$  oziroma  $f(x) < f(c) + f'(a)(x - c)$ . To pomeni, da funkcija  $f$  v točki  $c \in I$  ne bi bila konveksna.

Izberimo zdaj poljubni točki  $a, b \in I$ ,  $a < b$ . Če je  $a < x < b$ , ležita po pravkar dokazanem vmesnem rezultatu točki  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$  obe nad tangento na graf funkcije  $f$  v točki  $x$ . Torej velja isto za daljico skozi omenjeni točki, od koder sledi, da leži točka  $(x, f(x))$  pod sekanto skozi  $(a, f(a))$  in  $(b, f(b))$ . Torej je  $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a)$  za vsak  $a \leq x \leq b$  in funkcija  $f$  je na intervalu  $I$  konveksna.

**IZREK 1.** *Odvedljiva funkcija  $f$  je v točki  $a \in \mathbb{R}$  strogo konveksna, če odvod  $f'$  v točki  $a$  narašča, in strogo konkavna, če odvod  $f'$  v točki  $a$  pada.*

**Dokaz.** Če  $f'$  v točki  $a$  narašča, obstaja  $\delta > 0$ , da za  $0 < h < \delta$  velja  $f'(a-h) < f'(a) < f'(a+h)$ . Po Lagrangevem izreku potem obstajata točki  $c \in (a-h, a)$  in  $d \in (a, a+h)$ , tako da velja  $f(a) - f(a-h) = f'(c)h < f'(a)h$  in  $f(a+h) - f(a) = f'(d)h > f'(a)h$ . Torej je funkcija  $f$  v točki  $a$  konveksna. Podobno dokažemo konkavnost, kadar odvod v točki  $a$  pada.

**IZREK 2.** *Naj bo funkcija  $f$  dvakrat odvedljiva v točki  $a$ .*

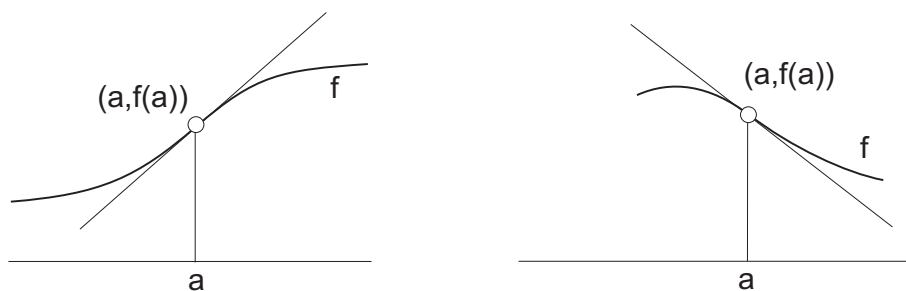
- (a) *Če je  $f''(a) > 0$ , je funkcija  $f$  v točki  $a$  strogo konveksna.*  
 (b) *Če je  $f''(a) < 0$ , je funkcija  $f$  v točki  $a$  strogo konkavna.*

**Dokaz.** Če je  $f''(a) > 0$ , odvod  $f'$  v točki  $a$  narašča, zato je funkcija  $f$  po izreku 1 konveksna in velja točka (a). Podobno dokažemo točko (b).

**DEFINICIJA.** Točka  $a$  je *prevoj* odvedljive funkcije  $f$ , če obstaja tak  $\delta > 0$ , da za  $0 < |h| < \delta$  velja:

- (a)  $f(a+h) - f(a) < f'(a)h$ , če je  $h > 0$ , in  $f(a+h) - f(a) > f'(a)h$ , če je  $h < 0$ , ali  
 (b)  $f(a+h) - f(a) > f'(a)h$ , če je  $h > 0$ , in  $f(a-h) - f(a) < -f'(a)h$ , če je  $h < 0$ .

Drugače rečeno, prevoj je taka točka  $a$ , v kateri ni odvedljiva funkcija  $f$  niti konveksna niti konkavna, ampak leži njen graf v bližini točke  $a$  tako na eni kot na drugi strani tangente v točki  $a$  (glej sliko 22).



Slika 22

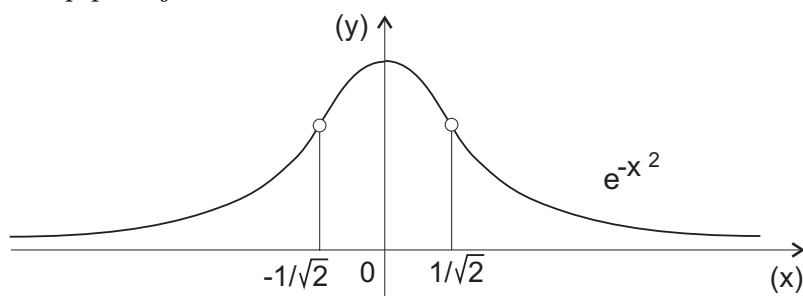
**IZREK 3.** *Potreben in zadosten pogoj za prevoj funkcije  $f$  v točki  $a$  je strogi lokalni ekstrem (maksimum ali minimum) odvoda  $f'$  v točki  $a$ .*

**Dokaz.** Če ima funkcija  $f$  v točki  $a$  prevoj, ni v točki  $a$  niti konveksna niti konkavna. Po izreku 1 potem prvi odvod  $f'$  v točki  $a$  niti ne narašča niti ne pada, ne more pa se niti zgoditi, da bi bil na eni ali na obeh straneh točke  $a$  konstanten. Se pravi, da ima  $f'$  v točki  $a$  strogi lokalni ekstrem.

Obratno, če ima  $f'$  v točki  $a$  npr. strogi lokalni maksimum, obstaja  $\delta > 0$ , tako da za  $0 < |x - a| < \delta$  velja  $f'(x) < f'(a)$ . Za  $0 < |h| < \delta$  je potem po Lagrangeu  $f(a+h) - f(a) = f'(c)h \leq f'(a)h$ , če je  $h > 0$ , in  $f(a+h) - f(a) = f'(c)h > f'(a)h$ , če je  $h < 0$ . Torej ima funkcija  $f$  v točki  $a$  prevoj. Na podoben način ugotovimo prevoj, če ima  $f'$  v točki  $a$  lokalni minimum.

**Opomba.** Če je funkcija  $f$  v točki  $a$  dvakrat odvedljiva, je  $f''(a) = 0$  potreben pogoj za prevoj, ki pa ni tudi zadosten.

ZGLEDI. Funkcija  $f(x) = x^2$  nima nobenega prevoja; prvi odvod  $f'(x) = 2x$  je povsod naraščajoča funkcija,  $f$  povsod konveksna. Funkcija  $g(x) = x^3$  ima prevoj v točki 0, saj ima prvi odvod  $g'(x) = 3x^2$  tam svoj minimum. Konveksna funkcija  $h(x) = x^4$  tudi nima nobenega prevoja, saj je  $h'(x) = 4x^3$  povsod naraščajoča funkcija. Ker je v tem primeru drugi odvod  $h''(x) = 12x$  v točki 0 enak nič, vidimo, da izničenje drugega odvoda ni zadostno za nastop prevoja.



Slika 23

Poiščimo še prevoje funkcije  $f(x) = e^{-x^2}$ . Ker je ta funkcija velikokrat odvedljiva je potreben pogoj za prevoj v točki  $a$  enačba  $f''(a) = 0$ . Prvi odvod je  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ , drugi odvod pa  $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ . Torej je prevoj lahko le v točkah  $a = \pm 1/\sqrt{2}$ . Ker ima tu prvi odvod res lokalni ekstrem, ima funkcija  $f$  prevoj, sicer pa je konveksna za  $x < -1/\sqrt{2}$  in  $x > 1/\sqrt{2}$ , med obema prevojemama pa je konkavna (glej sliko 23).

### Krivulje v parametrični in polarni obliki

Doslej smo večkrat narisali grafe različnih eksplicitno podanih funkcij ene spremenljivke. Graf funkcije  $f$  je neka krivulja v ravnini, ki jo opiše točka  $(x, f(x))$ , ko neodvisna spremenljivka zavzame vse svoje možne vrednosti. Pogosto pa podamo ravninsko krivuljo, ki ni nujno graf neke funkcije, v ti. *parametrični obliki*:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kjer je zdaj  $t$  nova spremenljivka, ki lahko zavzame svoje vrednosti na nekem (omejenem ali neomejenem) zaprtem intervalu  $I$ , za  $x$  in  $y$  pa zahtevamo, da sta zvezni realni funkciji na  $I$ . Novi spremenljivki  $t$  rečemo *parameter*, enačbama  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  pa *parametrični enačbi* krivulje. V posebnem primeru lahko tudi graf funkcije  $f$  zelo enostavno podamo v parametrični obliki; preprosto pišemo  $x = t$  in  $y = f(t)$  (parameter je v tem primeru v resnici kar neodvisna spremenljivka  $x$ ).

Pravzaprav gre pri parametričnih enačbah  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  za preslikavo iz  $I$  v  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , ki vsaki vrednosti parametra  $t \in I$  priredi točko  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Vsako tako zvezno preslikavo imenujemo *pot*, njeno zalogo vrednosti pa (parametrizirano) *krivuljo*. Če je interval omejen, npr.  $I = [\alpha, \beta]$ , je  $(x(\alpha), y(\alpha))$  začetna in  $(x(\beta), y(\beta))$  končna točka dane poti. Mislimo si, da je parameter  $t$  čas, in da se točka  $(x(t), y(t))$  giblje po ravnini in pri tem v danem časovnem intervalu  $I = [\alpha, \beta]$  opiše dano krivuljo oziroma njen lok od začetne do končne točke. V primeru  $x(\alpha) = x(\beta)$  in  $y(\alpha) = y(\beta)$  rečemo, da je krivulja *sklenjena*.

Tudi lokalno vedenje parametrično podanih krivulj obravnavamo z odvodom, določamo tangente nanje, iščemo njihove posebne točke itd. Naj bosta  $x = x(t)$  in  $y = y(t)$  vsaj enkrat odvedljivi funkciji parametra  $t$ . Odvode na  $t$  običajno označimo s piko, torej  $\dot{x} = dx/dt$  in  $\dot{y} = dy/dt$ , črtica pa naj še naprej pomeni odvod na spremenljivko  $x$ , torej  $y' = dy/dx$ .

Če je npr.  $x = x(t)$  na intervalu  $I$  strogo monotona funkcija ki preslika  $I$  na interval  $J$ , in je  $\dot{x}(t) \neq 0$  za vsak  $t \in I$ , obstaja na  $J$  inverzna funkcija  $t = t(x)$ , ki je tudi strogo monotona in odvedljiva, poleg tega pa velja  $t'(x) = 1/\dot{x}(t(x))$  za vsak  $x \in J$ . Potem pa je tudi  $y$  posredna funkcija spremenljivke  $x$  in po pravilu za odvajanje posredne funkcije velja  $y' = \dot{y}(t(x)) \cdot t'(x) = \dot{y}(t(x))/\dot{x}(t(x))$  oziroma krajše

$$y' = \dot{y}(t)/\dot{x}(t).$$

To formulo si najlaže zapomnimo z uporabo diferencialov: ker je  $dx = \dot{x}(t)dt$  in  $dy = \dot{y}(t)dt$ , je  $y' = dy/dx = \dot{y}(t)dt/\dot{x}(t)dt = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$  oziroma na kratko  $y' = \dot{y}/\dot{x}$ .

Enačbo tangente na krivuljo  $y = f(x)$  v točki  $(a, b)$ , kjer je  $b = f(a)$ , smo podali z enačbo  $y - b = f'(a)(x - a)$ . Tudi zdaj  $y' = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$  določa smer tangente na parametrično krivuljo  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  v točki  $(a, b)$ , kjer je  $a = x(t)$  in  $b = y(t)$ , tako da je enačba tangente enaka  $y - y(t) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)(x - x(t))$  oziroma v lepši obliki

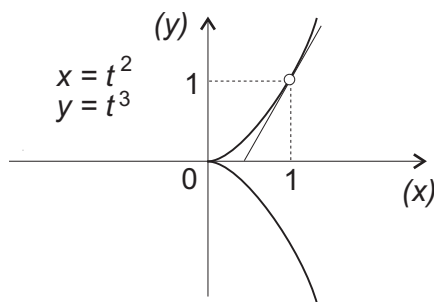
$$\dot{y}(t)(x - x(t)) - \dot{x}(t)(y - y(t)) = 0.$$

Vidimo, da je vektor  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  smerni vektor na tangenti; določa smer, v kateri poteka krivulja skozi točko  $(x(t), y(t))$ . Tu je lahko tudi  $\dot{x}(t) = 0$ ; če je v tem primeru  $\dot{y}(t) \neq 0$ , je tangenta navpična, pri  $\dot{x}(t) \neq 0$  in  $\dot{y}(t) = 0$  pa je vodoravna.

Če vsaj eden od odvodov pri danem  $t$  ni enak nič, rečemo, da je krivulja tam *gladka* (ima tangento). Točki  $(x(t), y(t))$  na krivulji, kjer velja  $\dot{x}(t) = 0$  in  $\dot{y}(t) = 0$  pa rečemo *singularna točka* krivulje. V singularnih točkah tangenta na krivuljo ne obstaja.

ZGLEDI. 1. Naj bo  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ . Vidimo, da sta obe funkciji zvezni za vsak  $t \in \mathbb{R}$  in da je  $x \geq 0$ . Poleg tega sta obe funkciji odvedljivi  $\dot{x}(t) = 2t$  in  $\dot{y}(t) = 3t^2$ . Pri  $t = 1$  dobimo npr. na krivulji točko  $(1, 1)$ , enačba tangente pa se v tej točki glasi  $3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$  oziroma  $y = (3x - 1)/2$ .

Iz odvodov tudi vidimo, da doseže  $x$  svoj minimum (ker je drugi odvod  $\ddot{x}(0) > 0$ ) v točki  $t = 0$ , medtem ko je funkcija  $y$  strogo monotono naraščajoča za vsak  $t \in \mathbb{R}$ . Vendar sta pri  $t = 0$  oba odvoda enaka nič, zato je  $(0, 0)$  singularna točka, krivulja ima v njej ost (glej sliko 24).

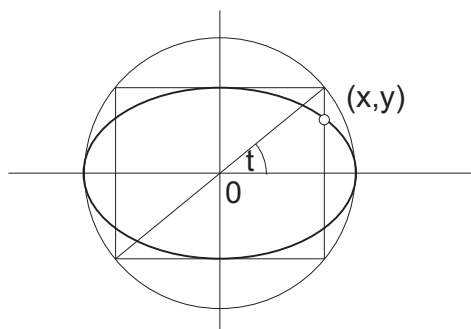


Slika 24

2. *Elipsa* v centralni legi je v parametrični obliki podana z enačbama

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

kjer je  $a > 0$ ,  $b > 0$  in  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Res, z eliminacijo parametra iz teh dveh enačb dobimo kanonično obliko elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . Če je  $a = b$ , dobimo krožnico (glej sliko 25). Predstavljamo si lahko, da dobimo elipso tako, da točka kroži po krožnici, v vsaki legi pa ordinato skrčimo v razmerju  $b/a$ ; parameter  $t$  pri tem meri kot do točke na krožnici. Torej lahko rečemo, da je elipsa 'stisnjena' krožnica.



Slika 25

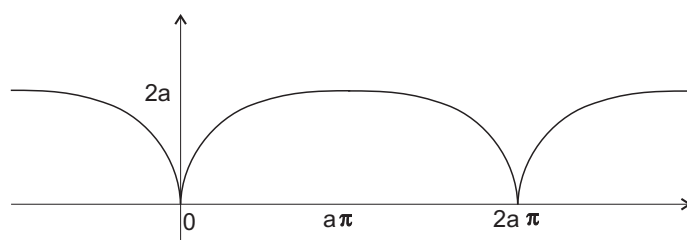
Odvajajmo parametrični enačbi in dobimo  $\dot{x} = -a \sin t$ ,  $\dot{y} = a \cos t$ , vidimo, da sta stacionarni točki za  $x$  točki  $t = 0$  in  $t = \pi$ , kjer dobimo  $x(0) = a$ ,  $x(\pi) = -a$  in  $y(0) = y(\pi) = 0$ , stacionarni točki za  $y$  pa točki  $t = \pi/2$  in  $t = 3\pi/2$ , kjer pa je  $x(\pi/2) = x(3\pi/2) = 0$ ,  $y(\pi/2) = b$ ,  $y(3\pi/2) = -b$ . Dobili smo ravno vsa štiri temena elipse  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$ . Singularnih točk pa elipsa nima; za noben  $t$  ni hkrati  $\dot{x} = 0$  in  $\dot{y} = 0$ .

3. *Cikloida* ima parametrične enačbe

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

kjer je  $a > 0$  in  $t \in \mathbb{R}$ . Geometrijsko nastane kot krivulja, ki jo oriše točka na krožnici s polmerom  $a$ , ko se le-ta brez drsenja kotali po realni osi, v začetku, pri  $t = 0$  pa se opazovana obodna točka ujema s koordinatnim izhodiščem (glej sliko 26).

Z dvakratnim odvajanjem na parameter  $t$  najdemo  $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ ,  $\dot{y} = a \sin t$  in  $\ddot{x} = a \sin t$ ,  $\ddot{y} = a \cos t$ . Odtod takoj sledi, da ima funkcija  $x$  prevoje pri  $t = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ko je  $x = 2ak\pi$  in  $y = 0$ , funkcija  $y$  pa lokalne minimume v istih točkah in lokalne maksimume pri  $t = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ko je  $x = ak\pi$  in  $y = 2a$ . Singularne točke na krivulji so točke  $(2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , kjer ima krivulja osti (glej sliko 26).



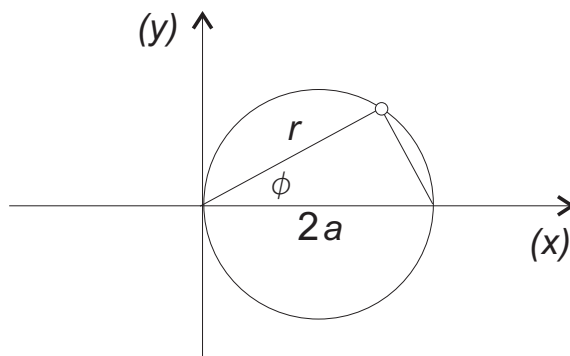
Slika 26

### Polarna oblika

Pogosto je parameter  $t = \phi$ , *polarni kot*, ki lahko zavzame vsako vrednost na realni osi (pozitivno in negativno). Ker je zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami dana z enačbama  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , dobimo iz  $x = x(\phi)$ ,  $y = y(\phi)$ , da se tudi *polarna razdalja*  $r = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2}$  spreminja s kotom  $\phi$ , seveda pa lahko zavzame le nenegativne vrednosti. Tako pridemo do *polarne oblike enačbe* krivulje:

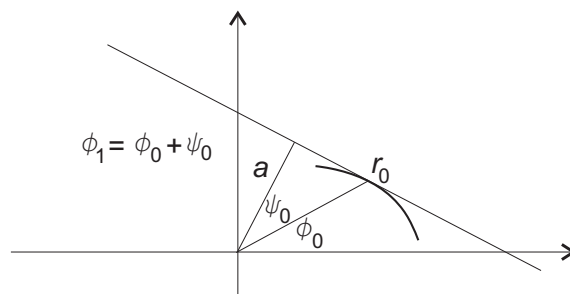
$$r = r(\phi), \quad D_r = \{\phi \in \mathbb{R}; r(\phi) \geq 0\}.$$

ZGLEDI. 1. Krožnica s polmerom  $a > 0$  v centralni legi je podana s preprosto enačbo  $r = a$ . Tudi krivulja z enačbo  $r = 2a \cos \phi$ ,  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ , je krožnica, in sicer taka, ki ima polmer  $a$  in središče na abscisni osi v točki  $(a, 0)$  (slika 27). Parametrični enačbi te krožnice sta  $x = 2a \cos^2 \phi$ ,  $y = 2a \cos \phi \sin \phi$ . Če raje pišemo  $x - a = a(2 \cos^2 \phi - 1) = a \cos 2\phi$  in  $y = a \sin 2\phi$ , vidimo da je res  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ .



Slika 27

2. Poševna premica, pri kateri daljica dolžine  $a$ , ki povezuje koordinatno izhodišče z najbližjo točko na premici, oklepa z abscisno osjo kot  $\phi_1$ , ima enačbo  $r = a / \cos(\phi - \phi_1)$  (glej sliko 28). Polarni kot je zdaj v mejah med  $\phi_1 - \pi/2$  in  $\phi_1 + \pi/2$ . V posebnem primeru, ko je  $\phi_1 = 0$  gre za navpično premico  $r = a / \cos \phi$ , ki preseka abscisno os v točki  $a$ , ko je  $\phi_1 = \pi/2$  pa za vodoravno premico  $r = a / \sin \phi$ , ki preseka ordinatno os v točki  $a$ .



Slika 28

Tudi krivulje v polarni obliki lahko obravnavamo z odvodom. Tako lahko npr. določimo enačbe tangent v poljubni točki take krivulje, poiščemo točke, v katerih so tangente vodoravne ali navpične, pa tudi druge zanimive točke.

Z  $r'$  označimo odvod polarne razdalje  $r$  na polarni kot  $\phi$ . Ker je  $\dot{x} = r' \cos \phi - r \sin \phi$  in  $\dot{y} = r' \sin \phi + r \cos \phi$ , je enačba tangente na polarno podano krivuljo  $r = r(\phi)$  v točki s polarnima koordinatama  $(r_0, \phi_0)$ ,  $r_0 = r(\phi_0)$ , enaka

$$(r'(\phi_0) \cos \phi_0 - r_0 \sin \phi_0)(y - r_0 \sin \phi_0) - (r'(\phi_0) \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0)(x - r_0 \cos \phi_0) = 0.$$

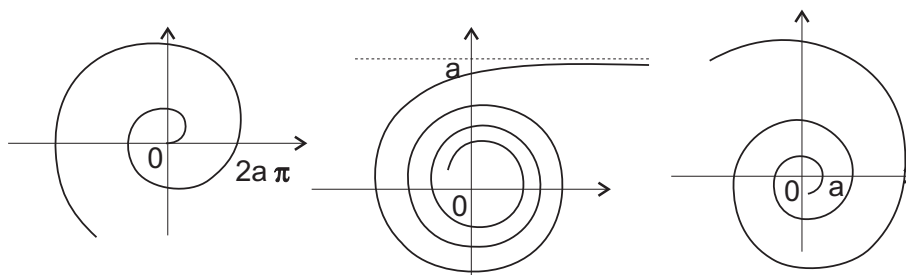
Vpeljimo oznako  $r'_0 = r'(\phi_0)$ , pišimo  $x = r \cos \phi$  in  $y = r \sin \phi$  ter iz dobljene enačbe ob upoštevanju adicijskih izrekov izrazimo  $r$ , pa dobimo  $r = r_0^2 / (r_0 \cos(\phi - \phi_0) + r'_0 \sin(\phi - \phi_0))$ .

Tudi to je enačba neke premice, kar vidimo, če izberemo tak  $\psi_0$ , da je  $\cos \psi_0 = r_0 / \sqrt{r_0^2 + r'_0{}^2}$  in  $\sin \psi_0 = r'_0 / \sqrt{r_0^2 + r'_0{}^2}$ . Tedaj je namreč  $r = r_0 \cos \psi_0 / \cos(\phi - \phi_0 - \psi_0)$  (glej sliko 28).

3. Zelo zanimive in v naravi prisotne krivulje so različne spirale:

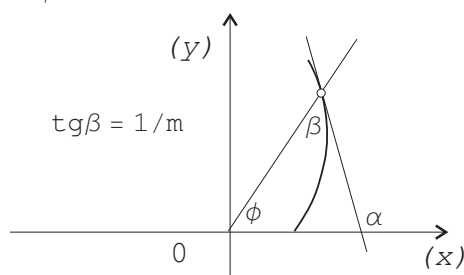
- (a) *Arhimedova spirala* ima polarno enačbo  $r = a\phi$ . Tu je  $a > 0$  in  $\phi \geq 0$ .
- (b) *Hiperbolična spirala* je dana z enačbo  $r = a/\phi$ ,  $a > 0$ ,  $\phi > 0$ .
- (c) *Logaritemska spirala* ima enačbo  $r = ae^{m\phi}$ . Tu je  $a > 0$  in  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$  (pri  $m = 0$  bi dobili enačbo krožnice), polarni kot  $\phi \in \mathbb{R}$  pa lahko zavzame vse realne vrednosti. Če je  $m > 0$ , se spirala z rastočim  $\phi$  odpira, za  $m < 0$  pa zapira okrog koordinatnega izhodišča.

Vse tri spirale so prikazane na sliki 29.



Slika 29

ZGLED. Znano je, da logaritemska spirala s polarno enačbo  $r = ae^{m\phi}$  seka vsak poltrak iz izhodišča pod istim kotom  $\beta$ .



Slika 30

To spoznamo takole. Kot med poltrakom in krivuljo je v bistvu kot med poltrakom in tangento na krivuljo v presečišču. Ker je smerni koeficient tangente na krivuljo v polarni obliki pri danem polarnem kotu  $\phi$  enak  $\operatorname{tg}\alpha = (r' \sin \phi + r \cos \phi) / (r' \cos \phi - r \sin \phi)$  in je v našem primeru  $r' = ame^{m\phi}$ , dobimo  $\operatorname{tg}\alpha = (m \sin \phi + \cos \phi) / (m \cos \phi + \sin \phi)$ . Naklonski kot poltraka je seveda  $\phi$ , kot med njima pa iskani kot  $\beta = \alpha - \phi$  (glej sliko 30). Njegov tangens je po znanih trigonometričnih formulah in po krajšem računu enak

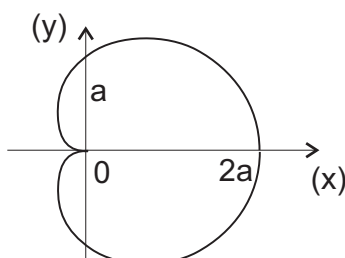
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\phi} = \frac{(m \sin \phi + \cos \phi) \cos \phi - (m \cos \phi + \sin \phi) \sin \phi}{(m \cos \phi + \sin \phi) \cos \phi + (m \sin \phi + \cos \phi) \sin \phi} = \frac{1}{m}.$$

Vidimo, da je kot  $\beta$  neodvisen od  $\phi$ , torej konstanten.

4. Še ena lepa krivlja v polarni obliki je *srčnica* (*kardioida*), dana z enačbo

$$r = a(1 + \cos \phi),$$

kjer je  $a > 0$  in  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Prikazana je na sliki 31.



Slika 31

V tem primeru dobimo

$$\dot{x} = -a(\sin \phi + \sin 2\phi) = -a \sin \phi(1 + 2 \cos \phi),$$

$$\dot{y} = a(\cos \phi + \cos 2\phi) = a(1 + \cos \phi)(1 - 2 \cos \phi),$$

tako da ima  $x$  lokalne ekstreme (navpična tangenta) pri  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi$ ,  $\phi = \pm 2\pi/3$  in  $y$  lokalne ekstreme (vodoravna tangenta) pri  $\phi = \pi$  in  $\phi = \pm \pi/3$ . Singularna točka je koordinatno izhodišče (pri  $\phi = \pi$ ).

## Pritisnjeni krog in ukrivljenost ravninskih krivulj

V dotikališču tangente na graf odvedljive funkcije  $f$  se poleg vrednosti ujemata tudi naklona tangente in krivulje (odvod funkcije  $f$ ). Podobno je pri aproksimaciji večkrat odvedljive funkcije  $f$  s Taylorjevim polinomom višjega reda, ko se v neki točki ujemajo vrednosti in vsi višji odvodi funkcije in polinoma do nekega reda.

DEFINICIJA. Če sta  $f$  in  $g$  večkrat odvedljivi funkciji in če v neki točki  $c$  velja  $f(c) = g(c)$ ,  $f'(c) = g'(c)$ , ...,  $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ , rečemo, da imata krivulji  $y = f(x)$  in  $y = g(x)$ , tj. grafa funkcij  $f$  in  $g$ , v točki  $c$  *dotik reda  $n$* .

Graf funkcije  $f$  in graf  $n$ -tega Taylorjevega polinoma za točko  $c$  imata npr. v točki  $c$  dotik reda  $n$  in to je edini polinom  $n$ -tega reda s to lastnostjo. Lahko torej rečemo, da med vsemi polinomi  $n$ -tega reda graf Taylorjevega polinoma v točki  $c$  najboljše prilega grafu dane  $n$ -krat odvedljive funkcije  $f$ .

Imejmo zdaj dvakrat odvedljivo funkcijo  $f$  in si zastavimo sorodno vprašnje: *Katera krožnica se v dani točki  $(x, y)$  najboljše prilega grafu funkcije  $f$ ?*

Krožnico iščimo v obliki  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2$ , kjer sta središče  $(a, b)$  in polmer  $\rho$  še neznan. Določimo jih tako, da bo imela krožnica z grafom funkcije  $f$  v točki  $(x, y)$  dotik reda dva:  $y(x) = f(x)$ ,  $y'(x) = f'(x)$  in  $y''(x) = f''(x)$ . Tu smo z  $y = y(x)$  označili tudi funkcijo, ki se skriva v enačbi krožnice. Njene odvode lahko poiščemo po pravilu za odvajanje posredne funkcije.

Z odvajanjem enačbe krožnice na spremenljivko  $x$  dobimo  $2(x - a) + 2(y - b)y' = 0$  oziroma  $a = x - (y - b)y'$ . Še enkrat odvajamo, pa dobimo  $0 = 1 + y'^2 - (b - y)y''$ . Če je  $y'' \neq 0$ , lahko iz zadnje enačbe izračunamo

$$b = y + (1 + y'^2)/y''$$

in nato iz prejšnje dobimo

$$a = x - y'(1 + y'^2)/y''.$$

To sta koordinati središča krožnice, njen polmer pa je potem  $\rho = (1 + y'^2)^{3/2}/|y''|$ .

Zdaj pa zahtevajmo  $y = f(x)$ ,  $y' = f'(x)$  in  $y'' = f''(x)$ . Potem so količine  $a$ ,  $b$  in  $\rho$  s funkcijo  $f$  in točko  $x$  natanko določene.

Dobljena krožnica omejuje krog, ki mu rečemo *pritisnjeni* ali *krivinski krog* krivulje, ki predstavlja graf funkcije  $f$ , v splošni točki  $(x, f(x))$ , kjer je  $f''(x) \neq 0$ . Središče pritisnjenega kroga je točka  $(a, b)$ , kjer je

$$a = x - \frac{f'(x)(1 + f'(x)^2)}{f''(x)}, \quad b = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

polmer pa

$$\rho = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

**Opomba.** Središče pritisnjenega kroga na krivuljo  $y = f(x)$  v točki  $(x, f(x))$  leži seveda na normali skozi  $(x, f(x))$ . Ker se v bližnji točki  $(x + h, f(x + h))$  krivulja skoraj ujema s pritisnjen krožnico v točki  $(x, f(x))$ , dobimo središče pritisnjenega kroga tudi tako, da najprej poiščemo presečišče  $(a, b)$  normale skozi  $(x + h, f(x + h))$  z normalo skozi  $(x, f(x))$  (kar je možno storiti, če normali nista vzporedni). Točka  $(a, b)$  torej zadošča enačbama obeh normal  $b - f(x) = (x - a)/f'(x)$  in  $b - f(x + h) = (x + h - a)/f'(x + h)$ . Če odtod izločimo  $b$ , dobimo za  $a$  enačbo  $(f'(x + h) - f'(x))(x - a) = (f(x + h) - f(x))f'(x)f'(x + h) + f'(x)h$ . Delimo s  $h$  in pošljimo  $h \rightarrow 0$  pa dobimo v limiti  $f''(x)(x - a) = f'(x)(1 + f'(x)^2)$ , kar nam da isti rezultat kot zgoraj.

Poleg tega definiramo še eno količino.

DEFINICIJA. *Ukrivljenost* krivulje  $y = f(x)$  v točki  $x$  je količina

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Vidimo, da je ukrivljenost pozitivna, če je funkcija  $f$  v točki  $x$  strogo konveksna (krivulja se z rastočim  $x$  ukrivlja na levo) in negativna, če je funkcija  $f$  v točki  $x$  strogo konkavna (krivulja se z rastočim  $x$  ukrivlja na desno). Ukrivljenost je tudi lahko enaka nič, kar se zgodi, kadar je  $f''(x) = 0$ .

**Opomba.** Kasneje bomo ukrivljenost (krivulje v parametrični obliki) definirali še drugače, kot hitrost spreminjanja smeri tangente na krivuljo glede na t.i. naravni parameter.

DEFINICIJA. Polmeru pritisnjene kroga rečemo *krivinski polmer* ali *krivinski radij*.

Iz definicije vidimo, da je enak absolutni vrednosti ukrivljenosti na  $-1$ , se pravi  $\rho = 1/|\kappa|$ . Kadar je ukrivljenost enaka nič, je krivinski polmer neskončen.

ZGLED. Običajna parabola je graf kvadratne funkcije  $f(x) = x^2$ . Tu je  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  in zato  $\kappa = 2/(1 + 4x^2)^{3/2}$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$ . Vidimo, da je ukrivljenost največja in enaka 2 v točki  $x = 0$  (tedaj je krivinski polmer enak 1/2), potem pa se zmanjšuje in konvergira proti 0, ko  $|x| \rightarrow \infty$ .

Poglejmo si še, kako ukrivljenost izračunamo pri krivuljah v parametrični in polarni obliki.

TRDITEV 1. Za krivuljo, ki je podana v parametrični obliki z enačbama  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , kjer sta  $x$  in  $y$  dvakrat odvedljivi funkciji parametra  $t$ , je v ukrivljenost pri poljubni vrednosti parametra  $t$  enaka

$$\kappa = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}},$$

krivinski polmer pa

$$\rho = \frac{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}{|\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}.$$

**Dokaz.** Še enkrat odvajamo  $y' = \dot{y}/\dot{x}$  na spremenljivko  $x$ , pa dobimo za drugi odvod po  $x$  izraz  $y'' = (\dot{y}/\dot{x})'/\dot{x} = (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})/\dot{x}^3$ . Ker je tudi  $(1 + y'^2)^{3/2} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}/\dot{x}^3$ , dobimo rezultat iz definicij za ukrivljenost in za krivinski polmer.

TRDITEV 2. Za krivuljo, ki je podana v polarni obliki z enačbo  $r = r(\phi)$ , kjer je  $r$  dvakrat odvedljiva funkcija polarnega kota  $\phi$ , je v ukrivljenost pri poljubni vrednosti kota  $\phi$  enaka

$$\kappa = \frac{r(\phi)^2 + 2r'(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)}{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{3/2}},$$

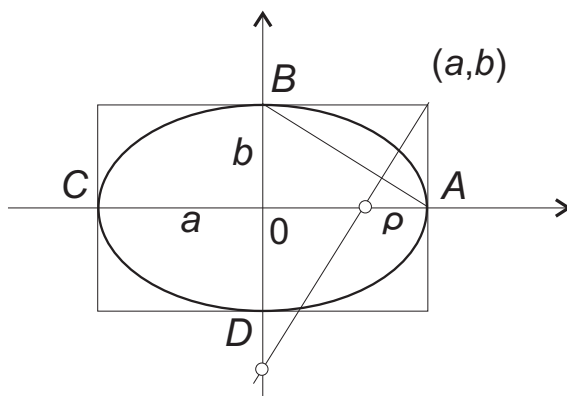
krivinski polmer pa

$$\rho = \frac{(r(\phi)^2 + r'(\phi)^2)^{3/2}}{|r(\phi)^2 + 2r'(\phi)^2 - r(\phi)r''(\phi)|}.$$

**Dokaz.** Ker je  $\dot{x} = r' \cos \phi - r \sin \phi$  in  $\dot{y} = r' \sin \phi + r \cos \phi$ , sta druga odvoda enaka  $\ddot{x} = r'' \cos \phi - 2r' \sin \phi + r \cos \phi$  in  $\ddot{y} = r'' \sin \phi + 2r' \cos \phi + r \sin \phi$ , zato s kratkim računom dobimo  $\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y} = r^2 + 2r'^2 - rr''$  in  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 + r'^2$ , odkoder sledi rezultat po trditvi 1.

Tudi v teh dveh primerih vidimo, da je ukrivljenost pozitivna, če se krivulja z rastočim parametrom  $t$  ali  $\phi$  ukrivlja na levo, in negativna, če se ukrivlja na desno.

ZGLEDI. 1. Za elipso v parametrični obliki  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $a < b$ , je  $\dot{x} = -a \sin t$ ,  $\dot{y} = a \cos t$ ,  $\ddot{x} = -a \cos t$  in  $\ddot{y} = -a \sin t$ , zato je njena ukrivljenost pri poljubnem parametru  $t$  po trditvi 1 enaka  $\kappa = (\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}$ , krivinski polmer pa  $\rho = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}/ab$ . Ukrivljenost je vedno pozitivna. Če poiščemo lokalne ekstreme funkcije  $g(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ , lahko npr. odtod takoj ugotovimo, da je največja ukrivljenost dosežena pri  $t = 0$  in  $t = \pi$ , in sicer je tedaj enaka  $\kappa_{max} = a/b^2$ , najmanjša pa pri  $t = \pi/2$  in  $3\pi/2$ , ko je enaka  $\kappa_{min} = b/a^2$ . Največja in najmanjša ukrivljenost elipse je torej v njenih temenih  $A = (a, 0)$ ,  $B = (0, b)$ ,  $C = (-a, 0)$  in  $D = (0, -b)$ . Središči pritisnjenih krogov v temenih  $A$  in  $B$  torej dobimo tam, kjer pravokotnica na zvezico skozi temeni  $A$  in  $B$  skozi točko  $(a, b)$  seka abscisno in ordinatno os (glej sliko 32).



Slika 32

2. Za krožnico  $r = 2a \cos \phi$ ,  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$  s polmerom  $a > 0$ , je seveda  $\rho = a$  in  $\kappa = 1/a$ , o čemer se lahko prepričamo tudi po zgornjih formulah, saj je  $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 8a^2$  in  $r^2 + r'^2 = 4a^2$ .

3. Za kardioido je  $r = a(1 + \cos \phi)$ ,  $r' = -a \sin \phi$  in  $r'' = -a \cos \phi$ , zato imamo po kratkem računu  $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3a^2(1 + \cos \phi) = 6a^2 \cos^2(\phi/2)$  in  $(r^2 + r'^2)^{3/2} = 8a^3 \cos^3(\phi/2)$ . Torej je  $\rho = (4a/3) \cos(\phi/2)$  in  $\kappa = 3/(4a \cos(\phi/2))$ . Najmanjšo ukrivljenost dobimo pri  $\phi = 0$ .