

IV. ODVODI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Tudi funkcije več spremenljivk obravnavamo z odvodi, ki pa jih moramo še definirati.

1. Odvajanje funkcij več realnih spremenljivk

Denimo, da je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk.

Parcialna odvoda po x in po y funkcije f v točki (a, b) definiramo (podobno kot odvod pri funkciji ene spremenljivke) kot limiti ustreznih parcialnih diferenčnih kvocientov (pri pogoju, da ti dve limiti obstajata):

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$
$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Parcialna odvoda torej izračunamo tako, da odvajamo funkcijo na x oziroma na y po znanih pravilih za odvajanje funkcij ene spremenljivke, pri čemer smatramo drugo spremenljivko za konstanto.

Zgled. Za funkcijo $f(x, y) = x^2y + x$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$. Za funkcijo $g(x, y) = x \sin \frac{x}{y}$ pa imamo $\frac{\partial g}{\partial x} = \sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}$ in $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}$.

Podobno ravnamo splošno pri funkcijah več spremenljivk.

DEFINICJA. *Parcialni odvod* po spremenljivki x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ definiramo kot limito ustreznega parcialnega diferenčnega kvocienta (če obstaja):

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}$$

Rečemo, da je funkcija f v točki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *parcialno odvedljiva* na spremenljivko x_i , če obstaja parcialni odvod funkcije f na spremenljivko x_i v točki \mathbf{a} . Iz dejstva, da obstajajo vsi parcialni odvodi v neki točki, pa še ne sledi, da je funkcija f v tisti točki zvezna. To je torej drugače kot pri funkcijah ene spremenljivke.

ZGLED. Naj bo $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, če je $(x, y) \neq (0, 0)$ in $f(0, 0) = 0$. Vemo že, da ta funkcija dveh spremenljivk ni zvezna v točki $(0, 0)$, saj v njej nima niti limite. Kljub temu ima v tej točki oba parcialna odvoda: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$.

Ker so parcialni odvodi funkcije več spremenljivk spet funkcije več spremenljivk (lahko katera manjka), se ima smisel vprašati, ali lahko te parcialne odvode še naprej parcialno odvajamo in pridemo do ti. *višjih parcialnih odvodov*. Storimo to za funkcije dveh spremenljivk. Parcialne odvode drugega reda tedaj definiramo s predpisom:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Podobno definiramo parcialne odvode tretjega reda itd.

ZGLED. Za funkcijo $f(x, y) = x^2y + x$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$. Torej je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Nadalje je $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$ itd.

Na tem primeru vidimo, da so mešani odvodi enaki ne glede na vrstni red odvajanja. To ni slučajno, saj velja naslednja trditev.

TRDITEV. Če mešana parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ funkcije dveh spremenljivk f obstajata in sta zvezni funkciji, sta med seboj enaka

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Tudi višji mešani parcialni odvodi so med seboj enaki ne glede na vrstni red odvajanja.

Dokaz. Izberimo poljubno točko (a, b) , v kateri obstajata mešana odvoda in naj bo npr. $a < x$ in $b < y$. Na vsaki strani enakosti

$$(f(x, y) - f(a, y)) - (f(x, b) - f(a, b)) = (f(x, y) - f(x, b)) - (f(a, y) - f(a, b))$$

uporabimo Lagrangev izrek (na levi strani glede na spremenljivko y in na desni strani glede na spremenljivko x). Obstajata taki števili c, d , $a < c < x$, $b < d < y$, da je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, d)\right)(y - b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)\right)(x - a).$$

Še enkrat na vsaki strani uporabimo Lagrangev izrek in najdemo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c', d)(x - a)(y - b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d')(y - b)(x - a),$$

kjer je prav tako $a < c' < x$ in $b < d' < y$. Krajšajmo z $(x - a)(y - b)$. Če konvergira $x \rightarrow a$ in $y \rightarrow b$, velja tudi $c, c' \rightarrow a$ in $d, d' \rightarrow a$. Zaradi zveznosti mešanih odvodov dobimo v limiti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

Pri mešanih odvodih višjega reda upoštevamo pravkar dokazano enakost in dobimo npr.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}. \end{aligned}$$

Brez predpostavke zveznosti mešanih odvodov, le-ti med seboj niso nujno enaki.

ZGLED. Za funkcijo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ obstajata oba druga mešana parcialna odvoda v točki $(0, 0)$, vendar sta različna: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

Oba prva parcialna odvoda v točki $(0, 0)$ sta namreč enaka 0. Izračunati pa moramo še oba prva parcialna odvoda v poljubni bližnji točki (x, y) in nato odtod po definiciji oba mešana odvoda (ustrezna odvoda prvih odvodov) v točki $(0, 0)$.

Diferenciabilnost in totalni diferencial

Pri funkcijah več spremenljivk parcialna odvedljivost še ne pomeni prave odvedljivosti. Slednja je definirana podobno kot diferenciabilnost pri funkciji ene spremenljivke:

DEFINICIJA. Funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je v točki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *odvedljiva* ali *diferenciabilna*, če obstaja taka n -terica $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, da je

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Uporabili smo standardno oznako $\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}$ za skalarni produkt $\mathbf{b} \cdot \mathbf{h} = b_1 h_1 + b_2 h_2 + \dots + b_n h_n$ dveh n -teric \mathbf{b} in $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Vemo tudi, da pomeni $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ isto kot $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ oziroma $h_i \rightarrow 0$ za vsak i .

Brez težav se lahko prepričamo, da je v točki \mathbf{a} diferenciabilna funkcija f tudi parcialno odvedljiva na vsako spremenljivko x_i posebej in da za vsak i velja $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = b_i$.

POSEBNI PRIMER. Funkcija f dveh spremenljivk je v točki (a, b) odvedljiva (diferenciabilna), če obstajata konstanti A, B , da velja

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

pri čemer je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ in $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Videli smo, da iz same eksistence parcialnih odvodov funkcije f ne moremo sklepati, da je funkcija f zvezna. Pač pa velja naslednja trditev.

TRDITEV. Če je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ v točki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ odvedljiva (diferenciabilna), je v točki \mathbf{a} tudi zvezna.

Dokaz. Iz pogoja diferenciabilnosti funkcije f v točki a sledi, da je limita števca enaka nič oziroma celo $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a})$. To pa pomeni zveznost v točki a .

Po drugi strani pa je zveznost parcialnih odvodov zadosten pogoj za odvedljivost funkcije.

IZREK. Če je zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v okolici točke $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ in so vsi parcialni odvodi v točki \mathbf{a} zvezni, je funkcija f odvedljiva v točki a .

Dokaz. Dokažimo samo primer $n = 2$; splošni dokaz poteka podobno, le bolj zamuden je. Izberimo $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, dvakrat uporabimo Lagrangev izrek in izračunajmo

$$\begin{aligned} U &= \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, t)k - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) - A)h + (\frac{\partial f}{\partial y}(a, t) - B)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

in ocenimo absolutno vrednost

$$|U| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) - A \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, t) - B \right|.$$

Ker je pri pogoju $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ res tudi $(s, b+k) \rightarrow (a, b)$ in $(a, t) \rightarrow (a, b)$, zaradi zveznosti parcialnih odvodov velja $\frac{\partial f}{\partial x}(s, b+k) \rightarrow A$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(a, t) \rightarrow B$.

Ne pozabimo, da je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ in $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, pa spoznamo konvergenco $U \rightarrow 0$, kar je bilo treba pokazati.

DEFINICIJA. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ poljubna odprta podmnožica, zvezna funkcija f pa naj ima v vsaki točki množice Ω parcialne odvode, ki naj bodo zvezni kot funkcije n spremenljivk. Potem rečemo, da pripada funkcija f razredu $C^1(\Omega)$ *zvezno odvedljivih funkcij* na množici Ω . Podobno definiramo za vsak k razred k -krat *zvezno odvedljivih funkcij* $C^k(\Omega)$ kot razred tistih zveznih funkcij, ki imajo v vsaki točki množice Ω zvezne parcialne odvode do reda k , ter nazadnje razred $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$ vseh *neskončnokrat zvezno odvedljivih funkcij* na množici Ω .

Pogosto označimo n -terico $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$ z oznako $\nabla f(\mathbf{a})$ in jo imenujemo *gradient* funkcije f v točki \mathbf{a} , se pravi

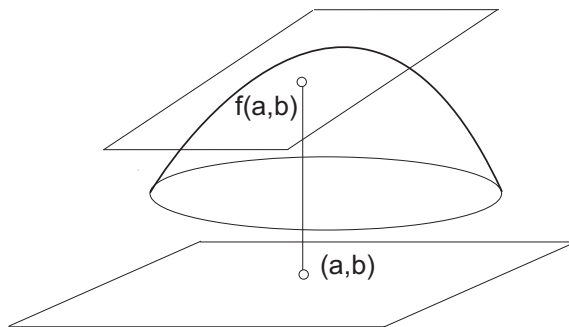
$$\nabla f(\mathbf{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})).$$

S temi oznakami je $\mathbf{b} \cdot \mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$. Prav tako (kot pri funkcijah ene spremenljivke) pišemo $h_i = dx_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$ in namesto $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ kar $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$.

DEFINICIJA. *Totalni diferencial* funkcije več spremenljivk v točki \mathbf{a} je izraz

$$df = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n.$$

Pri funkcijah dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ je torej $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, kjer sta oba parcialna odvoda izračunana v točki (a, b) . Geometrijski pomen diferenciala je prirastek *tangentne ravnine* na ploskev $z = f(x, y)$ v točki (a, b) , podobno kot je bil pri funkciji ene spremenljivke njen diferencial prirastek tangente v točki a (glej sliko 33). Enačba tangentne ravnine se glasi $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$. Če pišemo $x - a = dx$, $y - b = dy$ in $z - f(a, b) = dz$, imamo $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy = df$.



Slika 33

Pri funkcijah treh ali več spremenljivk govorimo namesto o tangentni ravnini seveda o *tangentnem prostoru*.

ZGLED. Izračunajmo totalni diferencial za $z = x^2y + x$ in $z = x \sin \frac{x}{y}$ v poljubni točki (x, y) . Parcialne odvode že poznamo, zato lahko kar takoj zapišemo: $dz = (2xy + 1)dx + x^2dy$ in $dz = (\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y})dx - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}dy$.

Totalni diferencial uporabljamo npr. pri ocenjevanju napak. Tako je za produkt $z = xy$ totalni diferencial $dz = ydx + xdy$, za kvocient $z = \frac{x}{y}$ pa $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Totalni diferencial pomeni oceno za *absolutno napako*. Pogosto pa je pomebnejša *relativna napaka*. Ocena zanjo pa je $\frac{dz}{z}$. Pri produktu dobimo $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ (relativni napaki faktorjev se seštejeta), pri kvocientu pa $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$ (relativni napaki se odštejeta).

2. Taylorjeva formula in implicitne funkcije

Najprej si oglejmo funkcije dveh spremenljivk. Namesto običajne formule $z = f(x, y)$ pišimo bolj enostavno kar $z = z(x, y)$, da prihranimo nove oznake. Izraz $z = z(x, y)$ dovolj nazorno pove, da je spremenljivka z odvisna od spremenljivk x in y , oziroma da je funkcija spremenljivk x in y .

Odvajanje posrednih funkcij

Naj bo zdaj z le posredna funkcija spremenljivk x , in y , torej $z = z(u, v)$, kjer je $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ (spremenljivki u in v sta le posrednika).

TRDITEV. Za parcialne odvode na x in y posredne funkcije $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ velja v tem primeru naslednje verižno pravilo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dokaz. Verižno pravilo izpeljemo tako, da na dva načina izračunamo totalni diferencial funkcije z . Enkrat gledamo z kot funkcijo spremenljivk x in y . Tedaj dobimo $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Drugič pa opazujemo z kot funkcijo posrednih spremenljivk u in v , torej $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$. Seveda pa sta v tem primeru u in v spet funkciji spremenljivk x in y , zato sta njuna diferenciala enaka $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ in $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$. Skupaj torej dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

S primerjanjem koeficientov pri dx in dy na obeh straneh enakosti dobimo formule za verižno pravilo.

Opomba. Opisana situacija ni edina možna. Lahko sta npr. spremenljivki u in v funkciji samo ene spremenljivke t ; tedaj je $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v'$, kjer črtica pomeni odvod na t .

Ali pa je npr. z funkcija samo ene spremenljivke u , ki pa je sama funkcija dveh spremenljivk x in y . Tedaj je $\frac{\partial z}{\partial x} = z' \frac{\partial u}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y} = z' \frac{\partial u}{\partial y}$.

Lahko nastopa tudi več posrednikov, npr.: $z = z(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$. V takem primeru se verižno pravilo glasi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Vidimo, da je veliko različnih oblik verižnega pravila; vse dokažemo podobno kot osnovno pravilo zgoraj. Seveda lahko verižno pravilo posplošimo tudi na več spremenljivk.

ZGLED. Če je $u = u(x)$, $v = v(x)$, izračunajmo odvod funkcije $z = z(x, y)$ po spremenljivki x za naslednje izraze: (i) $z = u + v$, (ii) $z = uv$, (iii) $z = u/v$ in (iv) $z = u^v$. Dobimo: (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$, (ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}$, (iii) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x}$, (iv) $\frac{\partial z}{\partial x} = vu^{v-1} \frac{\partial u}{\partial x} + u^v \ln u \frac{\partial v}{\partial x}$. Če je v zadnjem primeru npr. $u = x$ in $v = x$, dobimo na tan način odvod funkcije $z = x^x$, se pravi $z' = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

2. Funkcijo dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ pogosto želimo izraziti s polarnima koordinatama r in ϕ . To ni težko, če se spomnimo enačb, ki povezujejo kartezične in polarne koordinate: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Parcialna odvoda na polarni koordinati $\frac{\partial z}{\partial r}$ in $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ lahko po verižnem pravilu izrazimo s parcialnima odvodoma na kartezični koordinati $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \phi + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \phi.$$

Kadar hočemo, obratno, kartezične parcialne odvode izraziti s polarnimi, moramo ta sistem enačb razrešiti na $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dobimo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \sin \phi$ in $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \cos \phi$.

S temi formulami, lahko izraze, v katerih nastopajo parcialni odvodi prvega reda na kartezični spremenljivki x in y , izrazimo s parcialnimi odvodi na polarni spremenljivki r in ϕ . Tako npr. iz zadnjih enačb po kratkem računu dobimo

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2.$$

S polarnimi koordinatami lahko izrazimo tudi izraze z višjimi parcialnimi odvodi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \sin \phi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \cos \phi \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \sin \phi \right) \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \sin \phi \right) \sin \phi + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \cos \phi \right) \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \cos \phi \right) \cos \phi = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

Taylorjeva formula za funkcije več spremenljivk

Za $(n+1)$ -krat odvedljivo funkcijo F ene spremenljivke in točko 0 se Taylorjeva formula glasi: $F(t) = P_n(t) + R_n(t)$, kjer je $P_n(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)t^2/2! + \dots + F^{(n)}(0)t^n/n!$ Taylorjev polinom in $R_n(t) = F^{(n+1)}(s)t^{n+1}/(n+1)!$ Taylorjev ostanek. S to formulo si pomagamo tudi pri funkcijah več spremenljivk.

Naj bo najprej f funkcija dveh spremenljivk s parcialnimi odvodi do reda $(n+1)$ in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dana točka. Poleg tega naj bosta h, k poljubni realni števili. Definirajmo funkcijo ene spremenljivke $F(t) = f(a+th, b+tk)$. Potem je $F(0) = f(a, b)$ in po verižnem pravilu

$$F'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Nadalje je

$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(2)}|_{(a,b)},$$

kjer je izraz na desni simboličen kvadrat in pomeni, da binom v oklepaju najprej kvadriramo, nato pa potence prvih parcialnih odvodov zamenjamo z drugim parcialnim odvodom, njun produkt z mešanim odvodom, vse skupaj pa izračunamo v točki (a, b) (ko je $t = 0$). Z indukcijo lahko to nadaljujemo, tako da za vsak $k \leq n$ dobimo

$$F^{(k)}(0) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(k)}|_{(a,b)},$$

kjer ima potencia na desni strani podoben simboličen pomen, se pravi, da najprej damo binom na k -to potenco in nato nadomestimo možne produkte prvih parcialnih odvodov z mešanim produktom reda k in vse skupaj izračunamo v točki (a, b) . Ko je $k = n + 1$ pa končni rezultat namesto v točki (a, b) izračunamo v vmesni točki $(a + \theta th, b + \theta tk)$, $0 < \theta < 1$.

Po Taylorjevi formuli za funkcijo F in točko 0 potem dobimo $f(a + th, b + tk) = f(a, b) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)|_{(a,b)} t + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(2)}|_{(a,b)} \frac{t^2}{2!} + \dots + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n)}|_{(a,b)} \frac{t^n}{n!} + R_n(t)$,

kjer je $R_n(t) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n+1)}|_{(a+\theta th, b+\theta tk)} \frac{t^{(n+1)}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Če tu izberemo $t = 1$, dobimo *Taylorjevo formulo za funkcijo f dveh spremenljivk* in točko (a, b) v naslednji obliki:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)|_{(a,b)} + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(2)}|_{(a,b)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n)}|_{(a,b)} + R_n,$$

kjer je $R_n = R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n+1)}|_{(a+\theta h, b+\theta k)}$, $0 < \theta < 1$.

Z nekaj več dela, ampak prav po podobni poti dobimo tudi *Taylorjevo formulo reda m za funkcijo n spremenljivk f* in točko $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Da bi še nekoliko poenostavili zapis, definirajmo še $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ in $\mathbf{h} \cdot \nabla f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Potem je

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla f)|_{\mathbf{a}} + \frac{1}{2!} (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{(2)}|_{\mathbf{a}} + \frac{1}{3!} (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{(3)}|_{\mathbf{a}} + \dots + \frac{1}{m!} (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{(m)}|_{\mathbf{a}} + R_m,$$

kjer je $R_m = \frac{1}{(m+1)!} (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{(m+1)}|_{\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}}$, $0 < \theta < 1$.

Zapis z diferenciali je še krajši:

Če pišemo $\mathbf{h} = d\mathbf{x}$ in se spomnimo, da je diferencial funkcije več spremenljivk enak $df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$, obenem pa vpeljemo tudi oznako $d^k f(\mathbf{a}) = (\nabla f \cdot d\mathbf{x})^{(k)}|_{\mathbf{a}}$ za vsak k , dobimo

$$f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a}) + \frac{1}{3!} d^3 f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(\mathbf{a}) + R_m,$$

kjer je $R_m = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x})$, $0 < \theta < 1$.

ZGLED. Poiščimo nekaj prvih členov v razvoju funkcije $f(x, y) = x \sin(x - y)$ okrog točke $(0, 0)$. Seveda je $f(0, 0) = 0$. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x + y) + x \cos(x - y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cos(x - y)$, sta tudi oba prva parcialna odvoda v točki $(0, 0)$ enaka 0. Nadalje je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(x - y) - x \sin(x - y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x - y) + x \sin(x - y)$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \sin(x - y)$, zato je $\frac{1}{2} d^2 f = \frac{1}{2} (2h^2 - 2hk) = h^2 - hk$.

Torej se Taylorjeva formula začne takole: $f(h, k) = h^2 - hk + \dots$ oziroma $f(x, y) = x^2 - xy + \dots$, če namesto h pišemo kar x in namesto k kar y . Z nadaljnjim računanjem parcialnih odvodov bi lahko prideli še nekaj členov $f(x, y) = x^2 - xy - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}y^4 + \dots$, kar bi lahko veliko lažje dobili iz razvoja sinusa

$$f(x, y) = x \sin(x - y) = x((x - y) - \frac{1}{6}(x - y)^3 + \dots).$$

Implicitne funkcije

Ničelna množica $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$ funkcije dveh spremenljivk $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ določa v ravnini neko krivuljo, sestavljeno iz tistih točk (x, y) , ki pač zadoščajo pogoju $F(x, y) = 0$. Ta pogoj je neka zveza med spremenljivkama x in y . Včasih lahko iz te zveze eksplicitno izračunamo spremenljivko y in jo izrazimo kot funkcijo spremenljivke x . Rečemo, da enačba $F(x, y) = 0$ implicitno določa funkcijo $y = y(x)$, tako da je enačba $F(x, y(x)) = 0$ izpolnjena za vsak x iz nekega intervala. Lahko pa se zgodi, da zveza ne predstavlja nobene realne krivulje, torej tudi ne nobene realne funkcije $y = y(x)$.

Npr. iz zveze $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ki določa v ravnini krožnico s središčem v izhodišču in polmerom 1, lahko izrazimo y v obliki dveh funkcij: $y = \sqrt{1 - x^2}$ in $y = -\sqrt{1 - x^2}$, ki sta definirani za $-1 \leq x \leq 1$. Zveza $x^2 + y^2 + 1 = 0$ pa v realnem določa zgolj prazno množico.

Vendar pa enačba $F(x, y) = 0$ pogosto določa funkcijo $y = y(x)$ tudi, če te funkcije ne znamo eksplicitno izračunati. Kdaj je to res, pove naslednji pomembni izrek.

IZREK (o implicitni funkciji). Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija dveh spremenljivk z naslednjimi lastnostmi:

- (i) v neki okolici V točke (a, b) je $F \in C^1(V)$;
- (ii) $F(a, b) = 0$;
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Potem obstaja natanko ena zvezna in zvezno odvedljiva funkcija $y = y(x)$, definirana v neki okolici I točke a , tako da je $y(a) = b$ in $F(x, y(x)) = 0$ za vsak $x \in I$.

Dokaz. Ker je po točki (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, in je $\frac{\partial F}{\partial y}$ zvezna funkcija dveh spremenljivk, obstaja taka okolica $U \subset V$ in $\delta > 0$, da je $|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)| \geq \delta$ za vsak $(x, y) \in U$. Odslej opazujemo funkcijo F le na okolici U . Zaradi neničelnega parcialnega odvoda na y funkcija $y \rightarrow F(a, y)$ v točki b narašča ali pada, po točki (ii) pa je $F(a, b) = 0$. Torej za vsak dovolj majhen $k > 0$ velja $F(a, b - k)F(a, b + k) < 0$ in zaradi zveznosti funkcije F velja isto tudi za vsak x iz neke okolice I točke a , se pravi $F(x, b - k)F(x, b + k) < 0$ za $x \in I$. Ker sta torej funkcijski vrednosti funkcije $y \mapsto F(x, y)$ v krajišjih intervala $[b - k, b + k]$ nasprotnega predznaka, obstaja po izreku o vmesni vrednosti na tem intervalu vsaj en tak y , da je $F(x, y) = 0$. Pokažimo, da je y en sam. Če bi veljalo še $F(x, z) = 0$, bi imeli po Lagrangevem izreku za funkcijo $y \mapsto F(x, y)$ na intervalu $(b - k, b + k)$ tako točko c , da bi veljalo $0 = F(x, y) - F(x, z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, c)(y - z)$. Ker ima po točki (i) funkcija F v okolici U točke (a, b) zvezne prve parcialne odvode in je $|\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)| \geq \delta$, mora biti tudi $\frac{\partial F}{\partial y}(x, c) \neq 0$. Iz prejšnje zveze tako sledi $y = z$ in y je en sam.

Ta y je seveda še odvisen od x , torej funkcija spremenljivke $x \in I$. Pokažimo, da je funkcija $y = y(x)$ zvezna in odvedljiva na I . Izberimo tako število $h \neq 0$, da je hkrati z x tudi $x + h \in I$ in naj bo $\Delta y = y(x + h) - y(x)$. Zaradi $F(x, y(x)) = 0$ in $F(x + h, y(x) + \Delta y) = F(x + h, y(x + h)) = 0$ imamo po Taylorjevi formuli

$$0 = F(x + h, y(x) + \Delta y) - F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x + \theta h, y(x) + \theta \Delta y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta h, y(x) + \theta \Delta y)\Delta y.$$

Ker zaradi zveznosti (in zato omejenosti) parcialnih odvodov prvi člen na desni strani strani konvergira proti nič, ko $h \rightarrow 0$, konvergira proti nič tudi drugi člen. Ker pa je $|\frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta h, y(x) + \theta \Delta y)| \geq \delta$, mora proti nič konvergirati Δy . Dobili smo torej limito

$\lim_{h \rightarrow 0} (y(x+h) - y(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta y = 0$, kar pomeni zveznost funkcije $y = y(x)$ v točki x . Poleg tega je za vsak $x \in I$ na osnovi iste enačbe v limiti ($h \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \frac{\Delta y}{h} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x + \theta h, y(x) + \theta \Delta y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta h, y(x) + \theta \Delta y) \rightarrow \\ &-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)). \end{aligned}$$

Po drugi strani je, zdaj ko vemo, da je funkcija $y = y(x)$ odvedljiva, po verižnem pravilu zaradi $F(x, y(x)) = 0$ res tudi $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$ za vsak $x \in I$, tudi za $x+h$. Torej je zaradi zveznosti funkcij $y = y(x)$ in parcialnih odvodov funkcije F

$$\begin{aligned} y'(x+h) &= -\frac{\partial F}{\partial x}(x+h, y(x+h)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x+h, y(x+h)) \rightarrow \\ &-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) = y'(x), \end{aligned}$$

kar pomeni, da je funkcija $y = y(x)$ celo zvezno odvedljiva v I .

Opomba. Če bi zahtevali, da je $F \in C^k(V)$, bi lahko pokazali, da je tudi implicitna funkcija $y = y(x)$ k -krat zvezno odvedljiva v okolici I .

ZGLED. Naj bo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, tako da je F zvezna funkcija, ki ima na vsej ravnini zvezne parcialne odvode $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. Ker je $F(0, 1) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, so vsi pogoji izreka o implicitni funkciji izpolnjeni in v okolici $I = (-1, 1)$ točke 0 obstaja zvezno odvedljiva funkcija $y = \sqrt{1-x^2}$, za katero je $y(0) = 1$ in $F(x, \sqrt{1-x^2}) = 0$ za vsak $x \in I$. V točkah $(-1, 0)$ in $(1, 0)$, kjer je tudi vrednost funkcije F enaka nič, pogoj $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ni izpolnjen, zato v okolici teh točk ne obstaja funkcija $y = y(x)$ z zahtevanimi lastnostmi. Pač pa je tedaj izpolnjen pogoj $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ in lahko najdemo zvezno odvedljivo funkcijo $x = \sqrt{1-y^2}$, za katero je $x(0) = 1$ ali $x(0) = -1$ in $F(\sqrt{1-y^2}, y) = 0$.

Pojem implicitne funkcije se da razširite na funkcije več spremenljivk. Naj bo npr. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ in $F \in C^1(V)$, kjer je V okolica točke (a, b, c) , v kateri je $F(a, b, c) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Podobno kot prej lahko dokažemo, da pri teh pogojih obstaja natanko ena zvezna funkcija dveh spremenljivk $z = z(x, y)$ iz razreda $C^1(U)$, kjer je U neka okolica točke (a, b) v \mathbb{R}^2 . Poleg tega je $z(a, b) = c$ in za vsak $(x, y) \in U$ velja $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Po verižnem pravilu najdemo tudi parcialna odvoda funkcije z na x in y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) / \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) / \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z).$$

Pa imejmo še eno tako funkcijo G ; zdaj bi pri danem x radi hkrati rešili dve enačbi: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. Naj bo (a, b, c) taka točka, da je $F(a, b, c) = 0$ in $G(a, b, c) = 0$ in spet naj bo $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Iz prve enačbe kot zgoraj izračunajmo odvedljivo funkcijo $z = z(x, y)$ z lastnostjo $z(a, b) = c$ in jo vstavimo v drugo enačbo. Dobimo $H(x, y) = G(x, y, z(x, y)) = 0$. Zdaj je $H(a, b) = G(a, b, c) = 0$, njen parcialni odvod na y pa je po verižnem pravilu enak

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \right) / \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Če izraz v števcu v točki (a, b) ni enak nič, je tudi $\frac{\partial H}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji potem obstaja odvedljiva funkcija $y = y(x)$, tako da je $y(a) = b$ in $H(x, y(x)) = 0$ v bližini točke a . Če vstavimo ta y v $z(x, y)$ dobimo, da je tudi funkcija $z = z(x, y(x)) = z(x)$ odvisna samo od x . Poleg tega je $z(a) = z(a, y(a)) = z(a, b) = c$. Velja torej $F(x, y(x), z(x)) = 0$ in $G(x, y(x), z(x)) = 0$, tako da smo dobili, kar smo želeli.

To smo izpeljali pri pogoju $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$ in pri pogoju, da je bil v enem od prejšnjih izrazov števec v točki (a, b, c) različen od nič, torej

$$D = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Ampak slednje zadostuje: če bi bil namreč v tem primeru $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = 0$, bi bil nujno $\frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$ in vlogi F in G bi preprosto zamenjali.

Opomba. Izraz D je v resnici determinanta t.i. *Jacobijeve matrike* za funkciji G in F

$$J(G, F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

ZGLED. Če je $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, je $F(0, 0, 1) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = 2 \neq 0$, zato obstaja zvezno odvedljiva funkcija $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, za katero je $z(0, 0) = 1$ in $F(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = 0$ na krogu $K = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$. Denimo, da je še $G(x, y, z) = x + y + z - 1$. Potem je tudi $G(0, 0, 1) = 0$ in $D = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \neq 0$ v točki $(0, 0, 1)$. Torej obstajata po prejšnjem funkciji $y = y(x)$ in $z = \sqrt{1 - x^2 - y(x)^2}$, ki določata v prostoru \mathbb{R}^3 krivuljo, sestavljeno iz točk (x, y, z) , kjer je hkrati $F(x, y, z) = 0$ in $G(x, y, z) = 0$. Torej predstavlja ta krivulja presek krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ z ravnino $x + y + z = 1$, se pravi krožnico v prostoru \mathbb{R}^3 skozi točke $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$.

3. Ekstremi funkcij več spremenljivk

Lokalni ekstremi funkcij več spremenljivk

DEFINICIJA. Zvezna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ima v točki $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *lokalni ekstrem*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak \mathbf{h} z lastnostj $\|\mathbf{h}\| < \delta$ velja $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$ (*minimum*) ali $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \leq 0$ (*maksimum*).

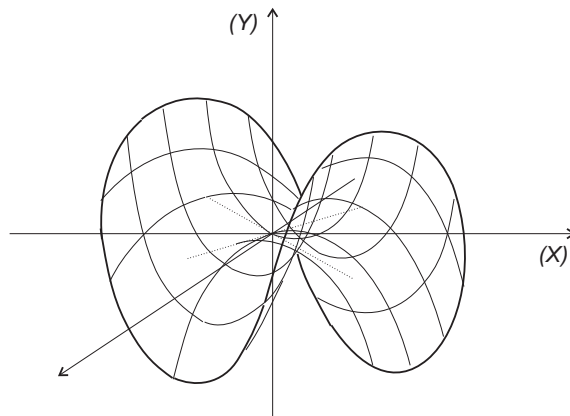
Funkcija f ima v točki \mathbf{a} *strogi lokalni ekstrem*, če za $\|\mathbf{h}\| < \delta$ in $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ velja $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ (*strogi minimum*) ali $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) < 0$ (*strogi maksimum*).

TRDITEV. Za odvedljivo funkcijo več spremenljivk je potreben pogoj za nastop ekstrema v točki \mathbf{a} stacionarnost točke \mathbf{a} , se pravi, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ oziroma $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Dokaz. Tudi funkcija $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ mora imeti pri $x_i = a_i$ lokalni ekstrem, kar pomeni, da mora biti njen odvod, ki je enak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, enak nič.

Pogoj stacionarnosti ni tudi zadosten za nastop ekstrema.

ZGLED. Za funkcijo $f(x, y) = xy$ je točka $(0, 0)$ stacionarna, ker sta oba prva parcialna odvoda v njej enaka nič, ni pa ekstrem, ker ima v smeri $y = x$ funkcija f minimum, v smeri $y = -x$ pa maksimum. Rečemo, da ima v točki $(0, 0)$ funkcija f *sedlo* (glej sliko 34).



Slika 34

Zadostne pogoje za lokalni ekstrem ugotovimo z uporabo Taylorjeve formule. V okolici V stacionarne točke \mathbf{a} dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f \in C^2(V)$ velja

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}), \quad 0 < \theta < 1,$$

zato je predznak difference in s tem narava stacionarne točke odvisna od predznaka drugega diferenciala $d^2f = (\mathbf{h} \cdot \nabla f)^{(2)}$, izračunanega v bližnjih točkah. Nasploh je to bolj zapleteno vprašanje, zato si podrobneje oglejmo samo funkcije dveh spremenljivk. Tam je $\mathbf{a} = (a, b)$, $\mathbf{h} = (h, k)$ in

$$d^2f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k), \quad 0 < \theta < 1.$$

Vpeljimo oznake: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ in $D = AC - B^2$.

Opomba. Izraz D je enak determinanti t.i. *Hessejeve matrice*, sestavljene iz drugih parcialnih odvodov funkcije f , izračunanih v stacionarni točki (a, b) :

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{bmatrix} = J\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(a, b)}$$

Vidimo, da je Hessejeva matrika za funkcijo f enaka Jacobijevi matriki za parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$, torej $H_f = J\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Zaradi zveznosti drugih parcialnih odvodov, konvergirajo pri pogoju $h, k \rightarrow 0$ izrazi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) \rightarrow A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) \rightarrow B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \rightarrow C$ in potem tudi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k)\right)^2 \rightarrow D$.

IZREK. Pri zgornjih oznakah velja za funkcijo f dveh spremenljivk z zveznimi drugimi parcialnimi odvodi v stacionarni točki (a, b) naslednje:

(a) Če je v točki (a, b) izraz $D > 0$, ima funkcija f v točki (a, b) strogi lokalni ekstrem in sicer strogi maksimum, če je $A < 0$, in strogi minimum, če je $A > 0$.

(b) Če je v točki (a, b) izraz $D < 0$, ekstrema ni, ampak ima funkcija f v točki (a, b) sedlo.

Če pa je $D = 0$, samo iz drugih odvodov v točki (a, b) ne moremo ugotoviti ali nastopi lokalni ekstrem ali ne.

Dokaz. Ali je izraz $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ pri majhnih $h, k \neq 0$ ves čas pozitiven ali negativen, odloča $D = AC - B^2$.

(a) Če je npr. $D > 0$, mora biti $A \neq 0$ in velja $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = ((Ah + Bk)^2 + Dk^2)/A$, tako da je ta izraz za vse dovolj majhne $h, k \neq 0$ pozitiven, če je $A > 0$, in negativen, če je $A < 0$. V tem primeru je pri dovolj majhnih $h, k \neq 0$ tudi $f(a + h, b + k) - f(a, b) = d^2f(a + \theta h, b + \theta k)/2 > 0$, če je $A > 0$, in $f(a + h, b + k) - f(a, b) = d^2f(a + \theta h, b + \theta k)/2 < 0$, če je $A < 0$, in funkcija ima v stacionarni točki (a, b) strogi lokalni minimum oziroma strogi lokalni maksimum.

(b) Če je $D < 0$, je izraz

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \begin{cases} ((Ah + Bk)^2 + Dk^2)/A & , \quad A \neq 0 \\ (2Bh + Ck)k & , \quad A = 0 \end{cases}$$

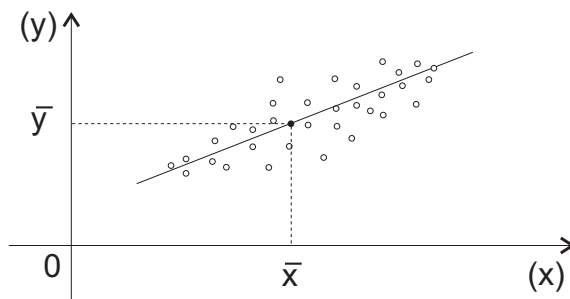
lahko pozitiven ali negativen, odvisno od h in k . Potem je tudi $f(a + h, b + k) - f(a, b) = d^2f(a + \theta h, b + \theta k)/2$ lahko pozitiven ali negativen v odvisnosti od h, k , tako da funkcija v stacionarni točki (a, b) nima ekstrema, ampak sedlo.

ZGLEDI. 1. Funkcija $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y + 5$ ima samo en minimum in sicer v točki $(3, 2)$. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 4$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 1$, hitro ugotovimo, da je $(3, 2)$ edina stacionarna točka. V njej velja $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 2) = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 2) = -1$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3, 2) = 2$ in $D = AC - B^2 = 3 > 0$, torej ima po zgornjem izreku funkcija f v točki $(3, 2)$ minimum, vrednost funkcije v minimumu pa je $f(3, 2) = -2$.

2. Funkcija $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ima sedlo v točki $(0, 0)$ in minimum v točki $(1, 1)$. Zdaj je $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ in $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, zato sta rešitvi sistema enačb $x^2 = y$ in $y^2 = x$ dve. Z drugimi odvodi ugotovimo, da v točki $(0, 0)$ velja $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ in $D = -9 < 0$, torej sedlo za funkcijo g , v točki $(1, 1)$ pa $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$ in $D = 27 > 0$, torej minimum za funkcijo g .

3. *Metoda najmanjših kvadratov.* Pogosto zvezo med dvema količinama, ki ju lahko merimo, opisuje funkcija $y = f(x, a, b)$, ki je odvisna npr. še od dveh (včasih tudi več) parametrov a in b . Parametre še ne poznamo natančno. Skušamo pa jih določiti tako, da se bo funkcija čimbolje prilagajala danim eksperimentalnim podatkom (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) . To dosežemo npr. z iskanjem minimuma funkcije dveh spremenljivk

$$F(a, b) = \sum_{k=1}^n (f(x_k, a, b) - y_k)^2.$$



Slika 35

Za zgled, kako ta metoda deluje, si oglejmo iskanje linearne zveze $y = a + bx$ (slika 35). Postavimo $F(a, b) = \sum_{k=1}^n (a + bx_k - y_k)^2$, izračunamo parcialna odvoda in ju izenačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{k=1}^n (a + bx_k - y_k) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{k=1}^n x_k (a + bx_k - y_k) = 0$$

Za spremenljivki a in b dobimo sistem linearnih enačb

$$an + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$$

$$a \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

ki je enolično rešljiv, če sta vsaj dve točki v zaporedju x_1, x_2, \dots, x_n med seboj različni. Iz njega izračunamo

$$b = (n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k) / (n \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2)$$

in nato še

$$a = (\sum_{k=1}^n y_k - b \sum_{k=1}^n x_k) / n.$$

Ker je $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2n > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2$, $(\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b})^2 = 2 \sum_{k=1}^n x_k$ in $D = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - (\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b})^2$
 $= 4n \sum_{k=1}^n x_k^2 - 4(\sum_{k=1}^n x_k)^2 = 4n \sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)^2 > 0$, vidimo, da v stacionarni točki vedno nastopi minimum.

Vezani ekstremi funkcije dveh spremenljivk

Včasih iščemo ekstreme funkcije dveh spremenljivk $z = f(x, y)$, pri čemer pa spremenljivki x in y ne tečeta prosto po območju odvedljivosti funkcije f , ampak sta med seboj povezani z enačbo $g(x, y) = 0$ (t.i. *enačba vezi*). Iz te enačbe bi v načelu lahko eno spremenljivko izrazili z drugo, vstavili v dano funkcijo in tako dobili ekstremalni problem za funkcijo ene spremenljivke. V točkah, kjer $\nabla g \neq 0$, lahko to storimo in npr. izločimo $y = y(x)$, kadar je $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Vemo, da je tedaj odvod implicitne funkcije enak $y' = -\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$. Vstavimo funkcijo $y = y(x)$ v izraz za $f(x, y)$ in dobimo funkcijo ene spremenljivke $x \mapsto f(x, y(x))$.

Ker iščemo njen lokalni ekstrem, mora biti odvod te funkcije ene spremenljivke enak nič, torej $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$. Potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema je torej $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ oziroma $J(f, g) = 0$ (Jacobijeva determinanta). Ta enačba pove, da sta v lokalnem ekstremu vektorja $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ in $(\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y})$ med sabo pravokotna oziroma vektorja ∇f in ∇g kolinearna, tj. obstaja konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je npr. $\nabla f = -\lambda \nabla g$ oziroma $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$. Zapisano po komponentah to pomeni, da je $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ in $g(x, y) = 0$ (če hočemo, da je ekstrem na krivulji, ki jo določa enačba vezi). Ekvivalenten je naslednji Lagrangev postopek:

Sestavimo novo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

in ji poiščemo ekstrem. Potrebno je seveda rešiti sistem enačb

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Zadnja enačba nam ponovno da pogoj $g(x, y) = 0$. Iz tega sistema izračunamo neznanke x , y in λ , vsaka rešitev (x, y) je stacionarna točka, torej možna ekstremalna točka.

ZGLED. Poiskati želimo npr. polosi elipse v centralni legi z enačbo $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ (elipso dobimo, kadar je $ac - b^2 > 0$, $a > 0$ in hkrati $a \neq c$ ali $b \neq 0$).

Polosi sta dve, večja in manjša. Ker je ta elipsa v centralni legi, ju dobimo kot največjo in najmanjšo možno razdaljo točke na elipsi do koordinatnega izhodišča. Zadošča opazovati kvadrat razdalje. Iščemo torej ekstreme kvadrata razdalje $f(x, y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$.

Nastavek

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1)$$

nam da z odvajanjem na x in na y sistem enačb $x + \lambda(ax + by) = 0$, $y + \lambda(bx + cy) = 0$ oziroma $(a\lambda + 1)x + b\lambda y = 0$, $b\lambda x + (c\lambda + 1)y = 0$, ki je netrivialno rešljiv samo, če je $(ac - b^2)\lambda^2 + (a + c)\lambda + 1 = 0$. Ker je za to kvadratno enačbo pri zgornjih pogojih diskriminanta $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$, dobimo za λ dve vrednosti λ_1 in $\lambda_2 < \lambda_1$, ki sta obe negativni. Pri vsaki od teh vrednosti λ dobimo dve rešitvi $(\pm x, \pm y)$, ki predstavljata nasprotni temeni elipse, ki ležita na premici $y = -(a\lambda_1 + 1)x/b\lambda_1$ oziroma $y = -(a\lambda_2 + 1)x/b\lambda_2$.

Iz sistema obeh enačb tudi ugotovimo, da za vsako rešitev (x, y) velja $x^2 + y^2 = -\lambda$. Torej je mala polos elipse enaka $\sqrt{-\lambda_1}$, velika pa $\sqrt{-\lambda_2}$.

Oglejmo si konkreten primer elipse: $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$. V tem primeru je $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ in $ac - b^2 = 2$. Enačba za λ nam da dve vrednosti: $\lambda_1 = -1 + 1/\sqrt{2}$ in $\lambda_2 = -1 - 1/\sqrt{2}$, temeni elipse pa ležita na premicah $y = (\sqrt{2} - 1)x$ in $y = -(\sqrt{2} + 1)x$.

ZGLED. Denimo, da bi radi poiskali vse lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ na enotskem disku $x^2 + y^2 \leq 1$. Posebej jih poiščemo v notranjosti kroga in posebej na njegovem obodu.

Edina stacionarna točka znotraj kroga (in sploh v celi ravnini) je točka $(0, 0)$, vendar je v njej $A = 2$, $B = 0$ in $C = -2$, torej $D = AC - B^2 = -4 < 0$, zato je tam sedlo.

Kaj pa na robu? Zdaj rešujemo problem vezanega ekstrema. Iščemo maksimum in minimum funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ pri pogoju $x^2 + y^2 = 1$. Po Lagrangevi metodi definiramo $F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, zato je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2\lambda y$. Enačbe $x + \lambda x = 0$, $-y + \lambda y = 0$ in $x^2 + y^2 = 1$ so hkrati rešljive za $x = 0$, $y = \pm 1$ in $\lambda = 1$ ter za $x = \pm 1$, $y = 0$ in $\lambda = -1$. Funkcija f ima na krožnici $x^2 + y^2 = 1$ lokalna minimuma v točkah $(0, 1)$ in $(0, -1)$, ko je vrednost funkcije enaka -1 , ter lokalna maksimuma v točkah $(1, 0)$ in $(-1, 0)$, ko je vrednost funkcije enaka 1 .

Vezani ekstremi funkcije več spremenljivk

Vzemimo zdaj splošni primer, pri katerem bi radi poiskali lokalni ekstrem funkcije n spremenljivk $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pri m pogojih

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Enačb vezi mora biti manj kot spremenljivk, se pravi $m < n$. Totalni diferencial funkcije $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Dovolj je poiskati vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pri pogojih

$$x + y + z - 3 = 0 \text{ in } x + 3y - z = 3.$$

Uporabimo Lagrangeovo metodo in definirajmo novo funkcijo

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 3) + \mu(x + 3y - z - 3).$$

Parcialni odvodi so $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda + \mu$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda + 3\mu$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda - \mu$. Če iz teh treh enačb izločimo λ in μ , dobimo zvezo $-2x + y + z = 0$, iz katere z upoštevanjem prve enačbe vezi $x + y + z = 3$ najdemo $x = 1$ in $y + z = 2$. Vstavimo v drugo enačbo vezi $x + 3y - z = 3$ in končno najdemo še $y = 1$ in $z = 1$. Iz geometrije je jasno, da je točka $(1, 1, 1)$ najbližja koordinatnemu izhodišču in sicer je od njega oddaljena $\sqrt{3}$ enot.

(2) Na ravnini poiščimo točko (x, y) z minimalno vsoto kvadratov razdalj do premic $x = 0$, $y = 0$ in $x + 2y = 5$.

Opazimo, da je vsota treh kvadratov razdalj minimalna samo, če od točke (x, y) postavimo na vse tri premice pravokotnico. Zato si lahko privoščimo, da poiščemo minimum vsote kvadratov razdalj od (x, y) do treh točk $(z, 0)$, $(0, t)$ in (u, v) , od katerih vsaka pripada eni od premic.

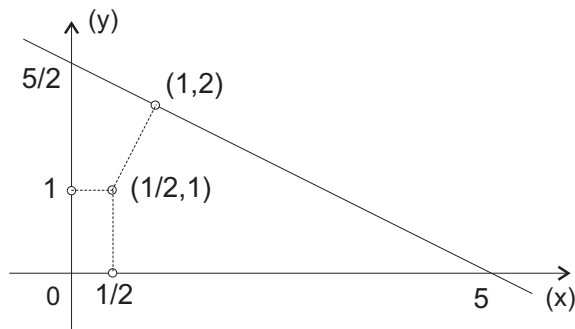
Iščemo torej minimum funkcije

$$f(x, y, z, t, u, v) = (x - z)^2 + y^2 + x^2 + (y - t)^2 + (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

pri pogoju $u + 2v = 5$ (da točka $(z, 0)$ leži na abscisni osi, točka $(0, t)$ pa na ordinatni osi, je jasno). Po Lagrangeu je torej

$$F(x, y, z, t, u, v, \lambda) = (x - z)^2 + y^2 + x^2 + (y - t)^2 + (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda(u + 2v - 5).$$

Ko izračunamo vse parcialne odvode, jih izenačimo z nič in poenostavimo izraze, dobimo enačbe $x = z$, $y = t$, $u = 2x$, $v = 2y$, $u + 2v = 5$ in $\lambda = 2(x - u) = y - v$ z rešitvami $x = 1/2$, $y = 1$, $z = 1/2$, $t = 1$, $u = 1$, $v = 2$ in $\lambda = -1$. Iskana točka je torej točka $(1/2, 1)$, podnožišča so $(1/2, 0)$ (na abscisni osi), $(0, 1)$ (na ordinatni osi) in $(1, 1)$ (na premici $x + 2y = 5$), najmanjša vsota kvadratov vseh treh razdalj pa znaša $5/2$ (glej sliko 36).



Slika 36