I. ŠTEVILA, PROSTORI, ZAPOREDJA

1. Algebrska struktura številskih množic

Iz srednje šole poznamo različne sisteme števil: naravna $\mathbb{N}$, cela $\mathbb{Z}$, racionalna $\mathbb{Q}$, tudi realna $\mathbb{R}$ in kompleksna $\mathbb{C}$, na katerih temelji klasična matematična analiza. V splošnem bomo kar privzeli, da znamo s števili računati, kljub temu pa na začetku ponovimo nekaj osnovnih dejstev.

Naravna števila in matematična indukcija

Najpreprostejša so naravna števila, s katerimi štejemo. Vse njihove lastnosti izhajajo iz t.i. *Peanovih aksiomov*:

(1) 1 je naravno število.
(2) Vsakemu naravnemu številu pripada natanko določen *naslednik*.
(3) Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
(4) Različni naravni števili imata različna naslednika.
(5) Če neka podmnožica naravnih števil vsebuje 1 in z vsakim številom tudi njegovega naslednika, je enaka množici vseh naravnih števil.

Označimo naslednika naravnega števila n z n'. Tedaj točka 2 pove, da je predpis $n \mapsto n'$ funkcija iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{N}$, točka 3, da ta funkcija ni surjektivna (1 ni v zalogi vrednosti), točka 4 pa, da je injektivna.

OPOMBA. Na tem mestu bi bilo dobro poznati nekaj osnovnih dejstev o preslikavah (funkcijah) med množicami: npr. kaj je to predpis, domena, kodomena, zaloga vrednosti, surjektivnost, injektivnost, bijektivnost, inverzna preslikava, kompozitum. Te pojme bomo v nadaljevanju pogosto uporabljali. Natančneje pa jih bomo opredelili na začetku drugega poglavja.

Točka (5) Peanovih aksiomov je znameniti *aksiom o matematični indukciji.* Z njim dokazujemo razne trditve v zvezi z naravnimi števili. Če neka lastnost L velja za naravno število 1, torej $L(1)$, in če velja za naslednika, kakor hitro velja za samo število, torej $L(n) \Longrightarrow L(n')$, velja lastnost L za vsa naravna števila.

Ker je vsota naravnih števil definirana tako, da je $n + 1 = n'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, običajno označimo naslednika naravnega števila n kar z $n + 1$. Pri dokazovanju z matematično indukcijo se moramo torej prepričati, da velja $L(n + 1)$, če velja $L(n)$.

ZGLED (a) Z matematično indukcijo dokažimo, da za vsako naravno število velja formula:

$$1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2.$$

Če je na levi strani en sam člen, je ta enak 1, na desni pa tedaj dobimo $1(1 + 1)/2 = 1$. Denimo, da formula velja za n. Potem je $1 + 2 + ... + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$, kar je ista formula kot prej, le uporabljena za naslednik $n + 1$.

(b) Kot drugi primer uporabe matematične indukcije dokažimo t.i. *Bernoullijevo neenakost*:

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

ki velja za vsako realno število $x \geq -1$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$. To neenakost bomo kasneje večkrat uporabili.

Za $n = 1$ sta leva in desna stran celo enaki. Denimo, da neenakost velja pri nekem naravnem številu n. Levo in desno stran pomnožimo z nenegativnim številom $1+x$, tako da dobimo oceno $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, ki dokazuje indukcijski korak in stem veljavnost Bernoullijeve neenakosti.

(c) Bernoullijevo neenakost $(1+x)^n \geq 1+nx$ lahko za primer $x \geq 0$ takoj izpeljemo tudi iz binomskega obrazca:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

Tu je $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ t.i. *binomski simbol*, ki ima znane lastnosti, npr.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{in} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zadnja lastnost omogoča konstrukcijo naslednjih binomskih simbolov z uporabo ti. *Pascalovega trikotnika*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ...
\end{array}$$

Dokažimo zdaj binomski obrazec z matematično indukcijo. Obrazec velja za $n = 1$, saj je $(1+x)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}x$. Če pa velja za n, imamo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n)(1+x) =$$

$$\binom{n}{0} + (\binom{n}{0} + \binom{n}{1})x + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})x^2 + ... + (\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n})x^n + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + ... + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}.$$

Notranje operacije v številskih množicah

Z naravnimi števili ne le štejemo objekte, ampak tudi računamo: seštevamo, množimo, včasih tudi odštevamo in delimo. V poljubni množici lahko definiramo pojem operacije.

DEFINICIJA. *Dvočlenska* (*binarna*) *notranja operacija* v množici A je preslikava f iz kartezičnega produkta $A \times A$ v A.

OPOMBA. Kartezični produkt dveh množic A in B je množica $A \times B = \{(a,b);\ a \in A, b \in B\}$ vseh urejenih parov s prvo komponento v A in drugo v B. Notranja operacija torej poljubnemu paru $(a,b) \in A \times A$ priredi (natanko določen) nov element $f(a,b) \in A$.

ZGLED. (a) Primer notranje dvočlenske operacije je presek dveh množic. Paru množic (A,B) priredimo njun presek $A \cap B$. Podobna operacija je unija dveh množic, $(A,B) \mapsto A \cup B$.

(b) Notranja dvočlenska operacija v množici naravnih števil je seštevanje (vsota) ali množenje (produkt). Paru naravnih števil (a,b) priredimo njuno vsoto $a+b$ ali njun produkt $ab = a \cdot b$.

OPOMBA. Izhajajoč iz Peanovih aksiomov definiramo vsoto in produkt dveh naravnih števil induktivno: $m+1 = m'$, $m+n' = (m+n)'$ ter $m \cdot 1 = m$, $m \cdot n' = m \cdot n + m$. Njune običajne lastnosti potem dokažemo z uporabo matematične indukcije.

Pač pa npr. razlika ni notranja operacija v $\mathbb{N}$. Če namreč odštejemo večje število od manjšega, rezultat ni več naravno število. Enako se nam lahko zgodi, če skušamo deliti poljubni naravni števili med seboj, npr. $1 : 2$. Tudi deljenje ni notranja operacija. Zato sama naravna števila ne zadoščajo. Če želimo izvajati tudi ti dve operaciji, moramo množico naravnih števil razširiti. Tako pridemo z odštevanjem naravnih števil do množice *celih števil* $\mathbb{Z}$ in z deljenjem naravnih števil do množice *racionalnih števil* $\mathbb{Q}$. Pri tem velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. V množici celih števil so neomejeno izvedljive operacije seštevanja, odštevanja in množenja, v množici racionalnih števil pa poleg tega tudi operacija deljenja (razen s številom 0).

OPOMBE. Za natančnejšo konstrukcijo celih števil iz naravnih ter racionalnih števil iz celih potrebujemo pojem ekvivalenčne relacije v dani množici: če sta $x, y \in A$, rečemo, da je relacija $x \sim y$ med njima *ekvivalenčna*, če je refleksivna (za vsak x velja $x \sim x$), simetrična (iz $x \sim y$ sledi $y \sim x$) in tranzitivna (iz $x \sim y$ in $y \sim z$ sledi $x \sim z$), oziroma RST relacija.

1. Kako konstruiramo cela števila iz naravnih? Napravimo množico vseh (formalnih) razlik $a - b$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ (razlika je pravzaprav urejen par, prva komponenta je zmanjševanec (minuend), druga odštevanec (subtrahend)) in vanjo vpeljemo ekvivalenčno relacijo, ki pove, kdaj sta dve razliki enaki: $a - b = c - d \iff a + d = b + c$. Cela števila so ekvivalenčni razredi teh razlik. Nadalje definiramo vsoto in in produkt razlik: $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(c+d)$, $(a-b)\cdot(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc)$ in pokažemo, da sta tako definirani operaciji neodvisni od tega, katerega predstavnika vzamemo iz ekvivalenčnega razreda, tako da lahko potem definiramo na naraven način vsoto in produkt ustreznih ekvivalenčnih razredov, torej celih števil.

2. Racionalna števila pa so ekvivalenčni razredi ulomkov a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, (ulomek je pravzaprav urejen par, prva komponenta je števec (numerator), druga imenovalec (denominator)), med katerimi definiramo ekvivalenčno relacijo enakosti: $a/b = c/d \iff ad = bc$. Lahko tudi rečemo, da so racionalna števila okrajšani ulomki. Prav tako definiramo seštevanje ulomkov: $a/b + c/d = (ad+bc)/bd$, množenje ulomkov: $a/b \cdot c/d = ac/bd$ in deljenje ulomkov $a/b : c/d = ad/bc$. Ko se prepričamo, da so te operacije neodvisne od predstavnika ekvivalenčnega razreda, jih lahko razširimo na ekvivalenčne razrede, torej na racionalna števila.

3. Tudi v množici racionalnih števil ne moremo izvajati vsega, kar si želimo. Ne moremo npr. izračunati preprostega kvadratnega korena iz števila 2, se pravi, da korenjenje ni notranja (enočlenska) operacija. Res, $\sqrt{2}$ namreč ni več racionalno število. Če bi bilo, bi ga lahko zapisali v obliki okrajšanega ulomka: $\sqrt{2} = a/b$, kjer sta naravni števili a in b brez skupnega faktorja. Toda tedaj bi dobili $2 = a^2/b^2$ oziroma $a^2 = 2b^2$. Ker je zato a^2 deljiv z 2, mora biti že a deljiv z 2, npr. $a = 2a_1$. Tedaj pa je po krajšanju tudi $b^2 = 2a_1^2$, torej b deljiv z 2, npr. $b = 2b_1$. Oboje skupaj ne gre, ker je a/b že okrajšan ulomek, zato $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Če hočemo torej računati korene, moramo vpeljati še nova števila, ki jih imenujemo *iracionalna*. Skupaj z racionalnimi sestavljajo množico vseh *realnih števil*.

Realna števila lahko konstruiramo iz racionalnih števil vsaj na dva načina. Prvi uporablja posebne podmnožice (Dedekindove reze) v $\mathbb{Q}$ (glej opombo v naslednjem razdelku), drugi pa posebna (Cauchyjeva) zaporedja racionalnih števil (glej 3. razdelek). Ker je v obeh primerih konstrukcija realnih števil zahtevnejša procedura, se ji odpovejmo ter kar privzemimo obstoj realnih števil. Kot že rečeno, matematična analiza brez množice realnih števil ne more, zato si podrobneje oglejmo njeno zanimivo algebrajsko strukturo.

Aksiomi za realna števila

V sistemu realnih števil so izvedljive vse štiri osnovne računske operacije (razen deljenja z 0) in še nekatere druge (npr. korenjenje). Glavni notranji operaciji sta *vsota* in *produkt*. Zanju veljajo naslednje osnovne lastnosti ali aksiomi:

(1) *Asociativnost vsote*: $(a+b)+c = a+(b+c)$
(2) *Komutativnost vsote*: $a+b = b+a$
(3) *Nevtralni element za vsoto (ničla)*: $a+0 = 0+a = a$
(4) *Nasprotni element za vsoto*: $a+(-a) = (-a)+a = 0$

Množica z operacijo $+$, za katero veljajo lastnosti (1),(3) in (4), se imenuje (aditivna) *grupa*. Če velja še (2), je *komutativna grupa*. Zgled: cela števila za seštevanje, množica bijekcij iz A na A za komponiranje ($\circ$ namesto $+$).

(5) *Asociativnost produkta*: $(ab)c = a(bc)$
(6) *Komutativnost produkta*: $ab = ba$
(7) *Nevtralni element za produkt (enota)*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
(8) *Inverzni element za produkt*: $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ za $a \neq 0$

To so podobne lastnosti kot prej za vsoto, zato npr. tudi množica od 0 različnih realnih števil tvori (multiplikativno) grupo za množenje.

(9) *Distributivnost produkta glede na vsoto*: $a(b+c) = ab+ac$
(10) *Netrivialnost*: $1 \neq 0$

Za vajo izračunajmo, koliko je $a \cdot 0$. Označimo to (zaenkrat neznano) število z x. Potem iz $1+0=1$ po množenju z a in z upoštevanjem distributivnosti (9) in nevtralnosti (7) dobimo $a+x = a\cdot 1 + a\cdot 0 = a(1+0) = a\cdot 1 = a$. Na obeh straneh odštejmo a (tj. prištejmo $-a$), pa zaradi (1), (4) in (3) najdemo $x=0$. Torej je $a\cdot 0 = 0$.
Zadnji aksiom se zdi morda nenavaden, vendar je potreben, saj sicer ne moremo izključiti možnosti, da sta nevtralni element za vsoto in nevtralni element za produkt enaka. Aksiom (10) zagotavlja, da se sistem realnih števil ne reducira samo na število 0. Če bi namreč veljalo $1=0$, bi za vsako število $a \in \mathbb{R}$ po prejšnjem lahko ugotovili $a = a\cdot 1 = a\cdot 0 = 0$.

Pravimo, da ima množica A *algebraično strukturo*, če je v A definirana vsaj ena dvočlenska notranja operacija z nekaterimi (morda ne vsemi) lastnostmi, ki smo jih našteli.

DEFINICIJA. Množica A z operacijama $+$ in $\cdot$ je
(a) *kolobar*, če veljajo lastnosti (1),(2),(3),(4),(5) in (9),
(b) *komutativen kolobar*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (6),
(c) *kolobar z enoto*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (7),
(d) *obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(7),(8) in (9),
(e) *komutativen obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8) in (9).

V kolobarju imamo poleg seštevanja in množenja vedno tudi *odštevanje*. Razlika dveh elementov je definirana z vsoto: $a-b = a+(-b)$. V obsegu pa lahko vedno tudi *delimo* z elementom, ki je različen od 0: $a:b = ab^{-1}$.

Lahko torej rečemo, da tvorijo realna števila (netrivialen) komutativen obseg. Naravna števila ne ustrezajo nobeni od zgornjih struktur. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je komutativen kolobar z enoto, saj ustrezajo vsem lastnostim razen (8) (v $\mathbb{Z}$ sta obrnljivi edinole števili 1 in -1). Množica sodih celih števil $\mathbb{S}$ je komutativen kolobar brez enote. Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ pa je že komutativen obseg.

Realna števila predstavimo kot točke na premici. Od izbrane točke 0, ki predstavlja število 0 in je izhodišče koordinatnega na številski osi nanašamo naravna števila v enakih razdaljah na desno, nasprotna, tj. negativna cela števila na levo, vmes pa sorazmerno ustrezne ulomke oziroma racionalna števila.

OPOMBA. Našteti aksiomi ne določajo sistema realnih števil v celoti, ampak le njegovo algebrsko strukturo (povsem enako strukturo imajo npr. vsa racionalna števila ali vsa kompleksna števila, ki jih bomo še definirali). Kasneje bomo desetim aksiomom za realna števila dodali še tri nove, ki bodo realna števila natančno opredelili.

Kompleksna števila

Kompleksna števila so izrazi oblike $z = a + ib$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in $i^2 = -1$. To je njihov *kanonski zapis.* Pri tem je $a = \operatorname{Re} z$ *realni del*, $b = \operatorname{Im} z$ *imaginarni del* kompleksnega števila z in i *imaginarna enota.* V bistvu gre spet za urejene pare realnih števil (a, b) (zdaj ni treba vpeljati posebne ekvivalenčne relacije enakosti, ker sta dva para (a, b) in (c, d) enaka natanko takrat, ko je $a = c$ in $b = d$). Zato si lahko vsako kompleksno število predstavimo kot točko v ravnini s koordinatama a, b. Množico vseh kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$, namesto o koordinatni ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pa govorimo kar o kompleksni ravnini $\mathbb{C}$; abscisno os imenujemo tedaj *realna os*, ordinatno os pa *imaginarna os.*

Vsoto dveh kompleksnih števil definiramo po komponentah, produkt pa z množenjem binomov (ob upoštevanju relacije $i^2 = -1$). Torej za kompleksni števili $z = a + ib$ in $w = c + id$ velja:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(c + d)$$

$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je množica $\mathbb{C}$ za ti dve operaciji (netrivialen) komutativen obseg, ki vsebuje $\mathbb{R}$ kot podmnožico (podobseg) tistih kompleksnih števil, ki imajo imaginarni del enak 0. Nevtralni element za vsoto je kompleksno število 0, enota za množenje pa kompleksno (realno) število 1. Nasprotno število je $-z = -a - ib$, inverzno pa $z^{-1} = a/(a^2 + b^2) - ib/(a^2 + b^2)$, če je le $a^2 + b^2 \neq 0$ oziroma $z = a + ib \neq 0$.

Vsoti (razliki) kompleksnih števil z in w ustreza v geometrijski interpretaciji vsota (razlika) krajevnih vektorjev od izhodišča do točk z in w v kompleksni ravnini.

Definiramo še *konjugirano kompleksno število* $\overline{z} = a - ib$ in *absolutno vrednost*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Torej velja $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. Točka $\overline{z}$ leži glede na točko z simetrično na abscisno os, absolutna vrednost $|z|$ pa pomeni evklidsko razdaljo točke z do koordinatnega izhodišča, zato je $|z|$ vedno nenegativno število in enako 0 natanko takrat, ko je $z = 0$.

OPOMBA. V definiciji absolutne vrednosti smo potrebovali kvadratni koren iz nenegativnega števila. Po definiciji je $\sqrt{y}$, kjer je $y \geq 0$, tako nenegativno število $x \geq 0$, da velja $x^2 = y$. Hitro se lahko prepričamo, da je tako definiran kvadratni koren iz y en sam.

ZGLED. $(3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i,\ (3 + 2i)(2 - 3i) = 12 - 5i.$

Deljenje v bistvu prevedemo na množenje kompleksnih števil $w/z = w\overline{z}/|z|^2$, če je $z \neq 0$. Potem je

$$w/z = (c+id)(a-ib)/(a^2+b^2) = [(ac+bd)+i(ad-bc)]/(a^2+b^2) = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

ZGLED. $\frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{5} = \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5} + i\frac{7}{5}$.

Za absolutno vrednost kompleksnih števil veljajo naslednja pravila, ki jih brez težav dokažemo z uporabo definicije ali geometrijsko:
(i) $|z| \geq 0$ in $|z| = 0$ natanko takrat, ko je $z = 0$;
(ii) $|z| = |-z|$, $|z| = |\overline{z}|$;
(iii) $|zw| = |z||w|$, $|z/w| = |z|/|w|$;
(iv) $|\mathrm{Re}\, w\overline{z}| \leq |z||w|$ (Cauchy-Schwarzova neenakost);
(v) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost);
(vi) $|z-w| \geq ||z| - |w||$ (ocena navzdol za razdaljo med z in w).
Točka (iii) je npr. ekvivalentna realni identiteti $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Če v njej b nadomestimo z $-b$, dobimo še $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, iz nje pa oceno $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, ki je enakovredna tisti iz točke (iv). Zaradi (iv) velja tudi trikotniška neenakost iz točke (v), saj je $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, w\overline{z} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$. Zadnja ocena, kjer pomeni $|z-w|$ razdaljo med točkama z in w, sledi takoj iz trikotniške neenakosti.

Polarna oblika kompleksnega števila

Kompleksno število $z = a + ib$ lahko predstavimo v polarni obliki, tj. s polarno razdaljo r od izhodišča do točke (a, b) in polarnim kotom ϕ med pozitivnim delom realne osi in krajevnim vektorjem do točke (a, b). Pri tem je seveda $r = |z|$ absolutna vrednost kompleksnega števila z. Polarni kot ϕ, za katerega običajno predpostavimo, da leži med 0 in 2π, pa imenujemo *argument* kompleksnega števila z. Ker je $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$, je *polarni zapis* kompleksnega števila z enak $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, oziroma

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

V tem zapisu lahko elegantno geometrijsko interpretiramo produkt kompleksnih števil $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ in $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Velja namreč $zw =$

$$|z||w|((\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi) + i(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi)) = |z||w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)).$$

Polarni razdalji se torej zmnožita, polarna kota seštejeta, kar si lahko predstavljamo geometrijsko. Podobno je pri deljenju, ko se polarni razdalji delita, polarna kota pa odštejeta.

Od tod sledi *de Moivreova formula*, ki jo brez težav dokažemo z matematično indukcijo:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi,$$

ki velja za vsako celo število n. Z njeno pomočjo lahko npr. poiščemo rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Rešitev iščimo v polarni obliki $z = \cos\phi + i\sin\phi$, saj takoj vidimo, da mora biti $|z| = 1$. Zaradi enakosti kompleksnih števil in de Moivreove formule imamo $\cos n\phi = 1$ in $\sin n\phi = 0$, kar je možno le v primeru $n\phi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se pravi $\phi = 2k\pi/n$. Ker mora biti ϕ med 0 in 2π, dobimo od tod $0 \leq k < n$. Torej imamo natanko n rešitev; to so t.i. n-ti koreni enote:

$$z_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n), \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Za $n \geq 3$ upodobimo ta števila na enotski krožnici $\{z;\ |z| = 1\}$ kot oglišča pravilnega n-kotnika z enim ogliščem v točki $z = 1$, zato enačbi $z^n = 1$ rečemo tudi enačba o delitvi kroga. Podobno rešujemo splošnejšo *binomsko enačbo*

$$z^n = w,$$

kjer je w dano od nič različno kompleksno število. Če je njegov zapis v polarni obliki $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, dobimo zdaj $n\phi = \psi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oziroma $\phi = \psi/n + 2k\pi/n$, kjer je spet lahko le $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

2. Urejenost in polnost sistema realnih števil

Vrnimo se k realnim številom. Desetim algebrajskim aksiomom moramo dodati še dva aksioma o urejenosti in en aksiom o polnosti, če hočemo, da je sistem realnih števil z aksiomi natanko določen.

Aksioma o urejenosti. *Obstaja podmnožica* $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ *z lastnostjo*:

(11) *Iz* $a \neq 0$ *sledi* $a \in \mathbb{P}$ *ali* $-a \in \mathbb{P}$.
(12) *Za vsak* $a, b \in \mathbb{P}$ *je tudi* $a + b \in \mathbb{P}$ *ter* $ab \in \mathbb{P}$.

Elementi v $\mathbb{P}$ so *pozitivna* realna števila. *Negativna* števila so nasprotna pozitivnim in sestavljajo podmnožico $-\mathbb{P} = \{-x, x \in \mathbb{P}\}$.

Enajsti aksiom je t.i. *aksiom o trihotomiji*; v bistvu pove, da je vsako realno število bodisi pozitivno, bodisi negativno bodisi enako 0. Dvanajsti aksiom pa pravi, da je množica $\mathbb{P}$ pozitivnih števil zaprta za seštevanje in množenje: ko izvajamo operaciji seštevanje in množenje z elementi množice $\mathbb{P}$ je rezultat spet v množici $\mathbb{P}$.

Podmnožica $\mathbb{P}$ določa urejenost v $\mathbb{R}$. Z njo namreč lahko definiramo relacijo $>$ (*večji*) s predpisom $a > b \iff a - b \in \mathbb{P}$ in relacijo $<$ (*manjši*) s predpisom $a < b \iff b > a$. Torej lahko zapišemo $\mathbb{P} = \{x, x > 0\}$ in $-\mathbb{P} = \{x, x < 0\}$. Zaradi aksiomov (11) in (12) veljajo za uvedeni relaciji naslednje lastnosti:
(i) *Za poljubni realni števili* a *in* b *je bodisi* $a < b$, *bodisi* $a > b$ *bodisi* $a = b$ (trihotomija).
Res, razlika $a - b$, če ni enaka 0, je po aksiomu 11 bodisi v $\mathbb{P}$ bodisi v $-\mathbb{P}$.
(ii) *Iz* $a > b$ *in* $b > c$ *sledi* $a > c$.
Če je $a - b \in \mathbb{P}$ in $b - c \in \mathbb{P}$, je zaradi (12) tudi $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}$ (tranzitivnost).
(iii) *Iz* $a > b$ *sledi* $a + c > b + c$ *za vsak* $c \in \mathbb{R}$.
Če je $a - b \in \mathbb{P}$, je zaradi distributivnosti namreč tudi $(a + c) - (b + c) = a - b \in \mathbb{P}$.
(iv) *Iz* $a > b$ *sledi* $ac > bc$ *pri* $c > 0$ *in* $ac < bc$ *pri* $c < 0$.
Zdaj iz $a - b \in \mathbb{P}$ in $c \in \mathbb{P}$ sledi po aksiomu 12 tudi $(a - b)c \in \mathbb{P}$, se pravi $ac - bc \in \mathbb{P}$ oziroma $ac > bc$. Če pa je $c < 0$, tj. $-c \in \mathbb{P}$, dobimo $-(ac - bc) = a(-c) - b(-c) \in \mathbb{P}$, torej $ac < bc$. Drugi del točke (iv) izraža znano dejstvo, da se pri množenju z negativnim številom neenačaj obrne.

Dodatno relacijo $\leq$ (*manjši ali enak*) vpeljemo s predpisom $a \leq b \iff a < b$ ali $a = b$, relacijo $\geq$ (*večji ali enak*) pa s predpisom $a \geq b \iff a > b$ ali $a = b$. Hitro vidimo, da sta tudi novi relaviji tranzitivni.
S tema dvema relacijama sta poljubni dve realni števili a in b med seboj primerljivi: velja bodisi $a \leq b$ bodisi $b \leq a$ (oziroma $a \geq b$). Če velja oboje, $a \leq b$ in $b \leq a$, velja kar enakost $a = b$.

OPOMBA. Relacije $<$ in $\leq$ oziroma $>$ in $\geq$ so lepo usklajene z geometrijsko predstavo realnih števil. Pozitivna števila (iz množice $\mathbb{P}$) rišemo desno od 0 (na t.i. pozitivnem delu številske osi), negativna (iz množice $-\mathbb{P}$) pa levo od 0 (na negativnem delu številske osi). Večja števila upodabljamo bolj desno, manjša bolj levo: relacija $a < b$ npr. pomeni, da leži točka a levo od točke b.

Z uporabo pravkar definiranih neenakosti lahko definiramo različne podmnožice v $\mathbb{R}$. Pogosto bomo npr. uporabljali *intervale*:
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (odprti interval),
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (zaprti interval),
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ (navzgor odprti interval),
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ (navzdol odprti interval),
in *poltrake*:
$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ (odprti desni poltrak),
$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ (zaprti desni poltrak),
$(\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ (odprti levi poltrak),
$(\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ (zaprti levi poltrak).

Ker je vsako realno število tudi kompleksno, ima tudi svojo absolutno vrednost. Formalno jo definiramo (brez sklicevanja na kompleksna števila) z naslednjim predpisom.

DEFINICIJA. *Absolutna vrednost* realnega števila x je nenegativno realno število $|x|$, definirano z

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

Geometrijsko pomeni $|x|$ razdaljo točke, ki predstavlja realno število x, do točke 0. Izraz $|a-b|$ pa pomeni *razdaljo* med realnima številoma a in b.

Za absolutno vrednost veljajo še naslednje koristne lastnosti, ki jih bomo v nadaljnjem večkrat uporabili:
(i) $|x| \geq 0$ in $|x| = 0$ natanko takrat, ko je $x = 0$;
(ii) $|xy| = |x||y|$, $|x/y| = |x|/|y|$ (za $y \neq 0$)
(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
(iv) $|x-y| \geq ||x| - |y||$.
Prvi dve točki lahko preverimo neposredno, glede na to, ali sta števili x in y pozitivni oziroma negativni ali enaki nič. Tretja je t.i. *trikotniška neenakost* in je poseben primer trikotniške neenakosti za absolutno vrednost pri kompleksnih številih. Tudi o njeni veljavnosti se lahko prepričamo, če pregledamo različne možnosti glede predznakov za x in y. Četrta lastnost takoj sledi iz druge, saj je tako $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ kot $|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x|$.

Definicijo je treba poznati, če želimo rešiti kakšno neenačbo, v kateri nastopajo tudi absolutne vrednosti. Rešitveno množico običajno izrazimo kot unijo intervalov ali poltrakov.

ZGLED: Neenačbo $|x-1| \geq 2|x| - 1$ npr. reši vsak $x \in [-2, 2/3]$.

Rečemo, da so realna števila z relacijo $\leq$ *linearno urejena* oziroma z relacijo $<$ *strogo linearno urejena*, tako da je $\mathbb{R}$ (*linearno*) *urejen obseg*. Ker vseh dvanajst aksiomov za realna števila (z istimi operacijami in z isto relacijo urejenosti) velja tudi za podmnožico $\mathbb{Q}$, tvorijo racionalna števila urejen podobseg urejenega obsega $\mathbb{R}$. Da bi lahko razlikovali med realnimi in racionalnimi števili, moramo vpeljati še zadnji aksiom. Za to pa potrebujemo pojem omejene množice.

Omejenost podmnožic v $\mathbb{R}$

Pravimo, da so intervali omejene množice, poltraki pa ne. Natančneje definiramo pojem omejenosti na naslednji način.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da velja $x \leq M$ za vsak $x \in A$. Število M imenujemo *zgornja meja* množice A.

Navzgor omejene podmnožice so npr. vsi intervali in levi poltraki, desni poltraki in množica $\mathbb{R}$ vseh realnih števil pa niso navzgor omejene množice.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da velja $x \geq m$ za vsak $x \in A$. Število m imenujemo *spodnja meja* množice A.

Navzdol omejene podmnožice so npr. vsi intervali in desni poltraki, prav tako npr. množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$, niso pa navzdol omejeni levi poltraki.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol, se pravi, če obstajata taki števili $m, M \in \mathbb{R}$, $(m \leq M)$, da velja $m \leq x \leq M$ za vsak $x \in A$.

V tem primeru je podmnožica A vsebovana v nekem intervalu $[m, M]$. Prazno množico imamo vedno za omejeno. Če obstaja vsaj ena zgornja meja za dano podmnožico, je zgornjih mej neskončno mnogo (vsako večje število je tudi zgornja meja). Podobno je množica spodnjih mej neskončna, če le ni prazna (vsako manjše število je tudi spodnja meja). Za neprazno množico A je množica njenih zgornjih mej vedno navzdol omejena (npr. s poljubnim elementom množice A), množica spodnjih mej pa navzgor omejena (z elementom iz A).

DEFINICIJA. *Supremum* $\sup A$ dane množice A je najmanjša zgornja meja množice A, *infimum* $\inf A$ množice A pa je največja spodnja meja množice A.

Definicijo infimuma in supremuma lahko povemo tudi takole, bolj formalno:

(i) Realno število a je največja spodnja meja množice A, torej $a = \inf A$, natanko takrat, ko je $a \leq x$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c > a$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x < c$. Se pravi, a je spodnja meja za množico A, nobeno število $c > a$ pa ni več spodnja meja za A.
(ii) Realno število b je najmanjša zgornja meja množice A, torej $b = \sup A$, natanko takrat, ko je $x \leq b$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c < b$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x > c$. Se pravi, b je zgornja meja za množico A, nobeno število $c < b$ pa ni več zgornja meja za A.

Največji spodnji (najmanjši zgornji) meji rečemo tudi natančna spodnja (zgornja) meja. Včasih natančna meja množice A spada v A, včasih ne. Če velja $\inf A \in A$, pišemo $\inf A = \min A$ in namesto o infimumu raje govorimo o *minimumu* ali *najmanjšem elementu* množice A, saj je to najmanjši element v A. Podobno pri pogoju $\sup A \in A$ pišemo $\sup A = \max A$ in govorimo o *maksimumu* množice A ali *največjem elementu* v A.

ZGLED. Odprti interval (a, b) ne vsebuje svojih krajišč, zato je $a = \inf(a, b)$ in $b = \sup(a, b)$. Pri zaprtem intervalu $[a, b]$ pa je $a = \inf[a, b] = \min[a, b]$ in $b = \sup[a, b] = \max[a, b]$. Za množico $A = \{n/(n + 1);\ n \in \mathbb{N}\}$ je $\inf A = \min A = 1/2$ in $\sup A = 1$. Maksimuma množica A nima.

Sedaj lahko definiramo še zadnji, trinajsti aksiom za realna števila. To je t.i. *Dedekindov aksiom* ali *aksiom o polnosti*. Tako ime je dobil, ker zagotavlja (kot bomo videli kasneje) napolnitev sistema realnih števil z manjkajočimi (iracionalnimi) števili.

Dedekindov aksiom (o polnosti)

(13) *Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil ima najmanjšo zgornjo mejo* (*supremum*).

Dualna oblika aksioma se glasi:

(13′) *Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil ima največjo spodnjo mejo (infimum).*

To je v resnici posledica Dedekindovega aksioma oziroma njemu ekvivalentna trditev. Če namreč množico A zamenjamo z množico $-A$ vseh njenih nasprotnih elementov, se tako kot neenakosti zamenjajo zgornje meje s spodnjimi in supremum z infimom (in obratno): $\inf A = -\sup(-A)$, $\sup A = -\inf(-A)$.

Večkrat bomo potrebovali eksistenco supremuma ali infimuma nekaterih nepraznih (navzgor ali navzdol) omejenih množic realnih števil. Eksistenca je zagotovljena ravno s tem aksiomom. Kot zgled uporabe dokažimo naslednjo trditev.

TRDITEV 1. *Množica vseh naravnih števil* $\mathbb{N}$ *ni navzgor omejena.*

Dokaz. Denimo, da bi obstajala kakšna zgornja meja za $\mathbb{N}$. Tedaj bi po Dedekindovem aksiomu obstajala najmanjša zgornja meja M. Torej bi veljalo $n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ne pa $n \leq M - 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Toda potem bi lahko našli število $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $n > M - 1$ oziroma $n + 1 > M$. Ker pa je naslednik $n + 1$ po Peanovem aksiomu tudi naravno število, je to v nasprotju z dejstvom, da je M zgornja meja za $\mathbb{N}$.

Ker množica naravnih števil $\mathbb{N}$ ni navzgor omejena, pri poljubnem realnem številu $a > 0$ tudi množica $\{na; n \in \mathbb{N}\}$ ni navzgor omejena (nima zgornje meje). Iz $na \leq M$ za neko število $M \in \mathbb{R}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ bi namreč sledilo $n \leq M/a$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar ni mogoče. Torej velja naslednji izrek:

IZREK. *Naj bo* $a > 0$. *Za vsak* $b \in \mathbb{R}$ *obstaja tako naravno število* $n \in \mathbb{N}$, *da velja* $na > b$.

To je t.i. *Arhimedova lastnost* realnih števil. Po domače pomeni: "iz malega raste veliko". Velikokrat bomo v nadaljevanju uporabljali tole njeno posledico.

POSLEDICA. *Za vsak* $a > 0$ *obstaja* $n \in \mathbb{N}$ *z lastnostjo* $1/n < a$.

To pomeni, da lahko med števili 0 in $a > 0$ vedno vrinemo še eno pozitivno število. Naslednja trditev pove, da velja celo več.

TRDITEV 2. *Med poljubnima realnima številoma* $a < b$ *obstaja vsaj eno racionalno število.*

Dokaz. Dovolj je, če trditev dokažemo za pozitivni števili. Če sta obe negativni, si ogledamo njuni nasprotni števili $-b < -a$, ki sta pozitivni. Če je eno od njiju enako 0, uporabimo posledico Arhimedove lastnosti. Če pa je $a < 0$ in $b > 0$, je med njima racionalno število 0.

Denimo torej, da sta števili a in b pozitivni in npr. $a < b$. Izberimo tako velik n, da je $1/n < b - a$ (Arhimedova lastnost). Množica $A = \{p \in \mathbb{N};\ p(1/n) > a\}$ je zaradi posledice Arhimedove lastnosti neprazna in kot podmnožica naravnih števil navzdol omejena, zato ima infimum m, ki je nujno naravno število in tudi nujno pripada tej isti množici (zakaj?). Torej je $m = \min A$ in velja $m/n = m(1/n) > a$, medtem ko je $(m-1)/n = (m-1)(1/n) \leq a$. Če bi bilo $m/n \geq b$, bi imeli $1/n = m/n - (m-1)/n \geq b - a$, kar pa ni res. Torej je $a < m/n < b$.

Trditev pove, da so med realnimi števili racionalna števila povsod gosta.

Oglejmo si še nekaj koristnih zgledov za uporabo Dedekindovega aksioma:

Kvadratni koren iz pozitivnega števila $x = \sqrt{a}$, $a > 0$. Po definiciji je to tako pozitivno realno število, katerega kvadrat je dano število, torej $x^2 = a$. Kot bomo videli, je njegova eksistenca v okviru realnih števil zagotavljena ravno z Dedekindovim aksiomom. Podobno velja za višje korene oziroma splošno za potence s pozitivno osnovo in racionalnim eksponentom $x = a^r$, $a > 0$ in $r \in \mathbb{Q}$.

Za zgled si oglejmo kvadratni koren iz 2, ki (kot vemo iz 1. razdelka) ni racionalno število. Množica racionalnih števil $A = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0,\ x^2 < 2\}$ je neprazna (vsebuje npr. število 1) in navzgor omejena (vsa števila iz A so npr. manjša od 2), zato ima po Dedekindovem aksiomu supremum $a \in \mathbb{R}$. Pokažimo, da je $a = \sqrt{2}$ oziroma, da velja $a^2 = 2$. Vsekakor je $a > 1$ oziroma $a^2 > 1$, saj je npr. $4/3 \in A$, in zato tudi $(2-a^2)/3a < a$. Iz $a^2 < 2$ bi sledilo $(a+1/n)^2 < 2$ za dovolj velik n (tak da je $1/n < (2-a^2)/3a$; tedaj je namreč $2a/n + 1/n^2 < 3a/n < 2 - a^2$), med a in $a + 1/n$ pa obstaja po trditvi 2 racionalno število x. Zanj bi tudi veljalo $x^2 < 2$, tako da bi bil $x \in A$; po drugi strani pa bi bil $x > a$, kar ni mogoče, saj je $a = \sup A$. Podobno bi videli, da prav tako ne more veljati neenakost $a^2 > 2$. Zdaj bi izbrali $1/n < (a^2-2)/2a$, tako da bi veljalo $a^2 - 2 > 2a/n > 2a/n - 1/n^2$ oziroma $(a-1/n)^2 > 2$. Ker je $a = \sup A$ in $a - 1/n < a$, bi obstajal $x \in A$ z lastnostjo $x > a - 1/n$. Tedaj pa bi bilo tudi $x^2 > (a-1/n)^2 > 2$, kar je nemogoče. Preostane možnost $a^2 = 2$ oziroma $a = \sqrt{2}$.

Ker že vemo, da to število ni racionalno, množica A v $\mathbb{Q}$ nima najmanjše zgornje meje. Odtod med drugim vidimo, da v obsegu racionalnih števil $\mathbb{Q}$ Dedekindov aksiom ne velja. Aksiom o polnosti torej razlikuje med urejenim obsegom $\mathbb{R}$, ki je poln, in njegovim urejenim podobsegom $\mathbb{Q}$, ki ni poln.

Opomba. Na podobni ideji kot v zgornjem dokazu eksistence kvadratnega korena temelji tudi ena izmed konstrukcij realnih števil iz racionalnih. *Dedekindov rez* je prava neprazna podmnožica $\alpha \subset \mathbb{Q}$, ki hkrati z racionalnim številom vsebuje tudi vsa manjša racionalna števila in nima največjega elementa, tj. velja:
(1) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$,
(2) iz $r \in \mathbb{Q}$ in $r < s$, $s \in \alpha$, sledi $r \in \alpha$,
(3) za vsak $r \in \alpha$ obstaja tak $s \in \alpha$, da je $r < s$.
V množico vseh Dedekindovih rezov potem vpeljemo relacijo urejenosti ($\alpha < \beta$, če je $\alpha \subset \beta$) ter operaciji vsote ($\alpha + \beta = \{r + s;\ r \in \alpha,\ s \in \beta\}$) in produkta (za $\alpha, \beta > 0$ naj bo $\alpha\beta = \{t \in \mathbb{Q};\ t \leq rs,$ za nek par pozitivnih racionalnih števil $r \in \alpha,\ s \in \beta\}$). Poleg tega lahko množico racionalnih števil vložimo v množico Dedekindovih rezov tako, da vsakemu racionalnemu številu $r \in \mathbb{Q}$ priredimo rez $r^* = \{s \in \mathbb{Q};\ s < r\}$. Nazadnje dokažemo (kar ni tako enostavno) vse lastnosti, kot so potrebne za urejen obseg realnih števil (z urejenim podobsegom racionalnih števil); skratka, Dedekindove reze lahko proglasimo za realna števila. Primerjajte izpeljavo v [3] ali [4].

Decimalni zapis realnih števil. Označimo z $[x]$ *celi del* realnega števila x. To je po definiciji največje celo število, ki je manjše ali enako x. Vedno velja $[x] \leq x < [x] + 1$. Če je $x > 0$, lahko izvedemo naslednji postopek.

Označimo $r_0 = x_0 = [x]$, postavimo $x_1 = [10(x - r_0)]$, tako da je $x_1 \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, in definiramo $r_1 = r_0 + x_1/10$. Potem je $r_1 \leq x < r_1 + 1/10$. Na drugem koraku postavimo $x_2 = [10^2(x - r_1)]$ in definiramo $r_2 = r_1 + x_2/10^2$; zdaj je $r_2 \leq x < r_2 + 1/10^2$. In tako dalje, na n-tem koraku dobimo $x_n = [10^n(x - r_{n-1})]$, $r_n = r_{n-1} + x_n/10^n$ in $r_n \leq x < r_n + 1/10^n$. To lahko ponavljamo v neskončnost, tako da dobimo množico $A = \{r_0, r_1, r_2, ...\}$, ki je neprazna in navzgor omejena, saj za vsak n velja $r_n \leq x$.

Naj bo $b = \sup A$, se pravi $b \leq x$. Če bi veljalo $b < x$, bi obstajal $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $1/n < x - b$. Zaradi ocene $r_n \leq x < r_n + 1/10^n$ bi tedaj imeli $x - r_n < 1/10^n < 1/n < x - b$, torej $b < r_n$, kar ni mogoče, saj je $b = \sup_{n \geq 0} r_n$. Torej je $b = x$ oziroma $x = \sup A = \sup_{n \geq 0} r_n$.

Števila r_n so (spodnji) decimalni približki pozitivnega števila x. Upoštevaje njihovo definicijo, za vsak $n \geq 0$ velja $r_n = x_0 + x_1/10 + x_2/10^2 + ... + x_n/10^n$, kar krajše zapišemo v decimalni obliki: $r_n = x_0, x_1x_2...x_n$. Ker je x njihov supremum, lahko x formalno izrazimo z neskončnim decimalnim zapisom: $x = x_0, x_1x_2....$ Tu je x_0 nenegativno celo število (celi del števila x) in x_i, $i = 1, 2, ...$, števila iz množice $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, tj. *decimalke* števila x.

Če je $x < 0$, poiščemo najprej decimalni zapis nasprotnega števila $-x$ in potem izrazimo $x = -x_0, x_1x_2....$ Število 0 seveda zapišemo s samimi ničlami. Naj ob tem pripomnimo, da izražava realnega števila x z neskončnim decimalnim zapisom nasploh ni enolična. Racionalno število 1/2 lahko npr. zapišemo na dva načina: $1/2 = 0.5000...$ ali $1/2 = 0.4999....$

Moč številskih množic

Množice imajo lahko različno, končno ali neskončno, število elementov; pravimo, da imajo različno *moč*. Ta pojem v resnici uvedemo z vpeljavo neke ekvivalenčne relacije v dano družino množic.

DEFINICIJA. Rečemo, da ima množica A *isto moč* kot množica B, če obstaja vsaj ena bijekcija iz množice A na množico B.

To je neka relacija med množicami dane družine, na kratko jo označimo kar z $\sim$. Ker iz A na A vedno obstaja bijekcija (identična preslikava, ki ohranja elemente), je relacija $\sim$ refleksivna. Ker se da pokazati, da je hkrati z f tudi inverzna funkcija f^{-1} bijekcija (iz B na A) in da je kompozitum dveh bijekcij tudi bijekcija, je relacija $\sim$ simetrična in tranzitivna. Torej je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Povezuje množice z isto močjo.

DEFINICIJA. Množica A ima *manjšo moč* kot množica B, če ima isto moč kot neka prava podmnožica $B_1 \subset B$, ne pa kot množica B. V tem primeru tudi rečemo, da ima množica B *večjo moč* kot množica A.

Množica z enim elementom ima npr. manjšo moč kot množica z dvema (ali več) elementoma. Kot bomo videli, tudi vse neskončne množice niso po moči med seboj enake.

DEFINICIJA. Množica A je *končna*, če je prazna ali pa obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da ima isto moč kot množica prvih n naravnih števil $\{1, 2, 3, ..., n\}$. V nasprotnem primeru je množica *neskončna*.

Rečemo, da ima prazna množica (z 0 elementi) moč 0, množica z enim elementom $\{a\}$ moč 1, množica z dvema elementoma $\{a, b\}$ moč 2 itd. Končni množici imata očitno isto moč natanko takrat, ko imata enako število elementov.

Množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ ni končna. Če bi namreč poskušali poiskati bijekcijo iz $\mathbb{N}$ na katerokoli končno množico oblike $\{1, 2, 3, ..., n\}$, bi bili vsaj po n korakih prisiljeni prirediti naslednjemu naravnemu številu eno od že izbranih slik od 1 do n. Bijekcije torej ne moremo najti, množica $\mathbb{N}$ je neskončna in ima večjo moč od vsake končne množice. Lahko pa najdemo bijekcijo množice naravnih števil $\mathbb{N}$ na kakšno njeno pravo (neskončno) podmnožico. Preprost zgled je preslikava f, ki vsakemu naravnemu številu n priredi njegovega naslednika $n' = n + 1$. Ta preslikava je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ brez števila 1.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & ... \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & ... \\
& & 2 & & 3 & & 4 & & ...
\end{array}
$$

Drug zgled pa je že znana preslikava $f(n) = 2n$, ki vsakemu naravnemu številu priredi njegov dvakratnik, in je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico vseh sodih naravnih števil $\mathbb{S}$.

Ker ima vsaka neskončna množica A neskončno mnogo različnih elementov, lahko v njej vedno poiščemo podmnožico $B = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ (ustrezno bijekcijo določajo indeksi: $i \mapsto x_i$). Naj bo $C = A \setminus B$. Potem je $A = B \cup C$ in $B \cap C = \emptyset$ in lahko definiramo preslikavo $f : A \to A \setminus \{x_1\}$ s predpisom: za vsak $x_i \in B$ naj bo $f(x_i) = x_{i+1}$, za vsak $x \in C$ pa $f(x) = x$. Ni se težko prepričati, da je f bijekcija iz A na pravo podmnožico $A \setminus \{x_1\}$. Ugotovili smo torej, da ima vsaka neskončna množica isto moč kot neka njena prava podmnožica. To je ena od možnih definicij neskončnosti (uporabil jo je nemški matematik R. Dedekind).

Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ je torej najpreprostejša, najmanjša neskončna množica. Neskončno množico, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$, imenujemo *števno neskončna množica*. Zgled sta npr. množica $\mathbb{Z}$ celih števil in množica $\mathbb{Q}$ racionalnih števil, ki imata isto moč. Bijekcijo med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ oziroma med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ najdemo tako, da cela števila razvrstimo v zaporedje $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$, racionalna števila oziroma ulomke pa v zaporedje $0, 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3/1, -3/1, ...$ in opustimo tiste ulomke, ki dajo že dobljeno vrednost.

Zmotno pa je misliti, da to velja za vsako neskončno množico. Že množica vseh realnih števil $\mathbb{R}$ ima večjo moč kot množica naravnih števil $\mathbb{N}$. To spoznamo takole. Kot vemo, lahko vsako realno število y med 0 in 1 zapišemo tudi v obliki decimalnega izraza $y = 0, y_1 y_2 y_3 ...$, kjer so y_i decimalne cifre (od 0 do 9). Če se še dogovorimo, da na koncu samih devetic ne uporabljamo, je ta zapis enoličen. Pa denimo, da bi bilo realnih števil med 0 in 1 toliko kot naravnih. Tedaj bi jih lahko razvrstili v zaporedje $x_1 = 0, x_{11} x_{12} x_{13} ...$, $x_2 = 0, x_{21} x_{22} x_{23} ...$, $x_3 = 0, x_{31} x_{32} x_{33} ...$, ..., ki bi zajelo **vsa** realna števila med 0 in 1. Toda takoj lahko konstruiramo novo število med 0 in 1, ki ga v tem zaporedju ni, namreč število $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$, kjer postavimo $a_i = 1$, če je $x_{ii} = 0$, in $a_i = 0$, če je $x_{ii} \neq 0$. Število a se razlikuje od števila x_i vsaj v i-ti decimalki. Protislovje dokazuje, da med množicama $\mathbb{N}$ in odprtim intervalom $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$ ni bijekcije. Ker ima $\mathbb{N}$ isto moč kot neka prava podmnožica v neskončni množici $(0, 1)$, nima pa iste moči kot $(0, 1)$, je moč množice $(0, 1)$ res večja od moči množice $\mathbb{N}$, čeprav sta obe množici neskončni.

Preprosto se da pokazati, da ima množica $(0, 1)$ isto moč kot množica $\mathbb{R}$ (prepričajte se, da je npr. funkcija f, definirana s predpisom $f(x) = (2x - 1)/(1 - |2x - 1|)$, bijekcija iz $(0, 1)$ na $\mathbb{R}$). Prav tako ima množica vseh kompleksnih števil isto moč kot množica vseh realnih števil, kar pa je že nekoliko bolj zahtevno.

Ker tvorijo realna števila zaradi Dedekindovega aksioma številski kontinuum (kot točke na številski premici), tudi za vsako neskončno množico, ki ima isto moč kot množica $\mathbb{R}$, rečemo, da ima *moč kontinuuma*.

3. Zaporedja realnih števil

Eden najpomembnejših pojmov v matematični analizi je pojem neskončnega zaporedja in njegove konvergence, kar si bomo ogledali v tem razdelku. V naslednjih poglavjih bomo potem z limitnim procesom lahko analizirali vedenje funkcij v bližini izbrane točke in uvedli druge postopke t.i. infinitezimalnega računa.

Definicija in podanost zaporedja

Opazujmo števno neskončno mnogo (ne nujno različnih) realnih števil, ki so urejena po vrsti, tako da lahko vedno povemo, katero je prvo, drugo, itd. Tej strukturi števil bomo (namesto množica) rekli zaporedje. Formalno je zaporedje podano s funkcijo.

DEFINICIJA. *Zaporedje realnih števil* je poljubna preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Sliko števila n označimo z x_n, torej $x_n = f(n)$, in jo imenujemo *n-ti člen* zaporedja ali tudi *splošni člen* zaporedja. Indeks n pove, na katerem mestu v zaporedju stoji člen x_n. Pogosto teče indeks n od 0 naprej. Zaporedje bomo zapisali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ali skrajšano (x_n).

Zalogo vrednosti preslikave f imenujemo sedaj *zaloga vrednosti zaporedja*: $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, zožitev preslikave f na neko neskončno podmnožico naravnih števil $\{n_1, n_2, ...\}$, kjer je $n_1 < n_2 < ...$, pa imenujemo *podzaporedje* (x_{n_k}); njegova zaloga je torej množica $\{x_{n_k}; k \in \mathbb{N}\}$. Zapomnimo si, da ima v skladu z definicijo zaporedje vedno neskončno mnogo členov, čeprav je njegova zaloga vrednosti lahko končna ali celo sestavljena samo iz enega števila (tako zaporedje imenujemo *konstantno*).

ZGLEDI. Oglejmo si naslednja zaporedja $x_n = n$, $x_n = 1/n$, $x_n = 2^n$, $x_n = (-1)^n$. Prvo je zaporedje vseh naravnih števil, njegova zaloga vrednosti je $\mathbb{N}$, drugo pa je zaporedje reciproičnih vrednosti naravnih števil. Tretji zgled pomeni zaporedje vseh potenc števila 2 (tu lahko teče n od 0 naprej). To je podzaporedje prvega zaporedja. Četrti zgled je zaporedje enk (pri sodih indeksih) in minus enk (pri lihih indeksih). Zaloga vrednosti je končna množica z dvema elementoma $\{1, -1\}$.

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je (*navzgor*, *navzdol*) *omejeno*, če je (navzgor, navzdol) omejena njegova zaloga vrednosti, torej če obstajata konstanti M in m, da je $m \le x_n \le M$ za vsak $n \in N$ (oziroma le $x_n \le M$ ali $m \le x_n$).

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je *naraščajoče* (*padajoče*), če velja $x_{n+1} \ge x_n$ $(x_{n+1} \le x_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Definicija je tako široka, da imamo tudi konstantna zaporedja tako za naraščajoča kot za padajoča. Na kratko rečemo, da so taka zaporedja *monotona*. Ugotovite, katera od prej naštetih zaporedij so monotona? Katera pa so (navzgor, navzdol) omejena?

Zaporedje je lahko podano
(a) *eksplicitno*, z navedbo splošnega člena, npr. $x_n = \frac{n}{n+1}$,
(b) *rekurzivno*, z navedbo začetnega člena in rekurzivne formule, npr. $x_0 = 1, x_{n+1} = 2x_n$. To zaporedje je bilo prej podano eksplicitno s splošnim členom $x_n = 2^n$.

ZGLED. (a) *Aritmetično zaporedje* je zaporedje, pri katerem je razlika dveh zaporednih členov konstantna, torej npr. $x_{n+1} - x_n = d$, kjer je d dana konstanta (t.i. diferenca zaporedja). Če je začetni člen x_0, je splošni člen $x_n = x_0 + nd$, vsota vseh členov do n-tega pa $s_n = (n+1)x_0 + dn(n+1)/2 = (n+1)(x_0 + nd/2)$. Primer takega zaporedja je zaporedje $x_n = n$ z diferenco $d = 1$.

(b) *Geometrično zaporedje* je zaporedje od 0 različnih števil, pri katerem je kvocient dveh zaporednih členov konstanten, torej npr. $x_{n+1}/x_n = k$, kjer je k dana konstanta (t.i. kvocient zaporedja). Če je začetni člen x_0, je splošni člen $x_n = x_0 k^n$, vsota vseh členov do n-tega pa $s_n = x_0(1 - k^{n+1})/(1 - k)$, če je $k \ne 1$ in $s_n = (n+1)x_0$, če je $k = 1$. Geometrično je npr. zaporedje $x_n = 2^n$ (s kvocientom $k = 2$).

Stekališče in limita

Najpomembnejše pri neskončnih zaporedjih je vprašanje, ali se členi zaporedja približujejo kakšni vrednosti ali ne. Najprej definirajmo t.i. *epsilonsko okolico* točke $a \in \mathbb{R}$:

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \epsilon\}$$

Po definiciji absolutne vrednosti lahko zapišemo $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$. Taka okolica je torej odprt interval na realni osi s središčem v a in polmerom $\epsilon > 0$.

Za vsak člen zaporedja lahko vedno ugotovimo, ali spada v okolico ali ne.

ZGLED. Kateri členi zaporedja $x_n = n/(n+1)$ ležijo v okolicah $V_{1/2}(0)$, $V_{1/2}(1)$, $V_\epsilon(1)$? V okolici $V_{1/2}(0)$ ležijo členi x_n z lastnostjo $n/(n+1) < 1/2$ oziroma $n < 1$, torej le člen x_0, če teče indeks n od 0 naprej. V okolici $V_{1/2}(1)$ so členi x_n z lastnostjo $|n/(n+1)-1| < 1/2$ oziroma $n > 1$, torej vsi razen prvega. V okolici $V_\epsilon(1)$ pa so členi x_n z lastnostjo $|n/(n+1) - 1| < \epsilon$ oziroma $n + 1 > 1/\epsilon$, torej neskončno mnogo členov oziroma vsi členi z dovolj velikim indeksom.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja (x_n), če je za vsak $\epsilon > 0$ v okolici $V_\epsilon(a)$ neskončno mnogo členov zaporedja (x_n).

ZGLED. Kaj so stekališča naslednjih zaporedij: (a) $x_n = n$, (b) $x_n = n/(n+1)$, (c) $x_n = 1/n$, (d) $x_n = (-1)^n$? Prvo zaporedje nima stekališč, drugo ima eno samo stekališče, točko 1, tretje tudi eno stekališče, točko 0, zadnje pa ima dve stekališči, 1 in -1.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *limita* zaporedja (x_n), če je za vsak $\epsilon > 0$ zunaj okolice $V_\epsilon(a)$ le končno mnogo členov členov zaporedja (x_n) .

Iz obeh definicij se vidi, da je vsaka limita tudi stekališče. Če je namreč zunaj epsilonske okolice samo končno mnogo členov, jih mora biti neskončno v sami okolici.

Ekvivalentno bi za limito a lahko rekli, da so od nekega člena dalje **vsi** členi zaporedja v $V_\epsilon(a)$, ali bolj formalno: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, da iz $n \geq n_\epsilon$ sledi $|x_n - a| < \epsilon$. Dejstvo, da je a limita zaporedja (x_n), zapišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ali } x_n \to a \ (n \to \infty).$$

ZGLED. Zaporedje $x_n = 1/n$ ima limito 0, ker je pri poljubnem $\epsilon > 0$ (po Arhimedu) $1/n < \epsilon$ za vsak dovolj velik n. Zaporedje $x_n = n/(n + 1)$ pa ima limito 1, saj smo že videli, da so v vsaki epsilonski okolici $V_\epsilon(1)$ vsi členi z indeksom $n > 1/\epsilon - 1$.

Z limito lahko definiramo pomemben pojem konvergence (oziroma divergence).

DEFINICIJA. Če limita obstaja, rečemo, da je zaporedje *konvergentno* oziroma, da konvergira proti svoji limiti. Če limita ne obstaja, pravimo, da je zaporedje *divergentno*.

V predprejšnjem zgledu sta konvergentni samo zaporedji (b) in (c); zaporedje (a) nima niti stekališč, zaporedje (d) pa jih ima preveč (glej spodnjo trditev 1).

Lastnosti v zvezi z limitami in stekališči

TRDITEV 1. *Konvergentno zaporedje je omejeno in ima eno samo limito, ki je hkrati edino stekališče zaporedja.*

Dokaz. Pri konvergentnem zaporedju zunaj vsake epsilonske okolice limite obstaja samo končno mnogo členov, ki jih lahko zajamemo v povečano okolico.

Denimo, da bi bilo poleg limite a tudi število $b \neq a$ stekališče zaporedja. Pri dovolj majhnem $\epsilon > 0$ bi potem lahko našli disjunktni okolici $V_\epsilon(a)$ in $V_\epsilon(b)$, ki bi obe vsebovali neskončno členov. To pa je v nasprotju s tem, da je a limita in je zato zunaj okolice $V_\epsilon(a)$ le končno mnogo členov.

Divergentno zaporedje ima lahko več stekališč (npr. zaporedje $x_n = (-1)^n$) ali pa nobenega (npr. zaporedje $x_n = n$). Prvo je omejeno, drugo ne.

TRDITEV 2. *Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in konvergira k limiti zaporedja. Vsako stekališče poljubnega zaporedja je limita nekega konvergentnega podzaporedja.*

Dokaz. Prvi del je očiten: če so od nekega indeksa dalje vsi členi celotnega zaporedja v epsilonski okolici limite, velja isto za člene vsakega podzaporedja.

Za dokaz drugega dela izbiramo iz zaporedja samo člene, ki so blizu stekališča a: najprej obstaja v okolici $V_1(a)$ vsaj en člen x_{n_1}, nato obstaja v okolici $V_{1/2}(a)$ vsaj en od x_{n_1} različen člen x_{n_2}, itd., za vsak k obstaja v okolici $V_{1/k}(a)$ vsaj en člen x_{n_k}, različen od vseh prejšnjih členov (zakaj?). Ker polmeri okolic padajo, so v vsaki okolici $V_\epsilon(a)$ vsi členi tako konstruiranega zaporedja od indeksa $k > 1/\epsilon$ dalje.

ZGLED. V konvergentnem zaporedju (x_n) konvergirajo npr. podzaporedja $y_n = x_{2n}$ (sodi členi), $y_n = x_{2n+1}$ (lihi členi) in $y_n = x_{n+k}$ (premaknjeno zaporedje) proti isti limiti kot zaporedje x_n. Zaporedje $x_n = (-1)^n n/(n+1)$ pa ima dve stekališči, 1 in -1 in ni konvergentno. Podzaporedje sodih členov $y_n = x_{2n}$ konvergira k številu 1, podzaporedje lihih členov pa k številu -1.

TRDITEV 3. *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Dokaz poteka z razpolovitvijo intervala, na katerem ležijo vsi členi zaporedja. Vsaj na eni polovici leži neskončno členov zaporedja, zato v naslednjem koraku razpolovimo ta podinterval, itd. Ideja je, da krajišča izbranih zaprtih podintervalov določajo z uporabo aksioma o polnosti realno število a, ki je stekališče celotnega zaporedja. Za a npr. vzamemo supremum množice vseh levih krajišč tako dobljenih podintervalov. Ker se dolžine izbranih podintervalov manjšajo in konvergirajo prosti 0, leži v vsaki okolici $V_\epsilon(a)$ poleg levega krajišča tudi celoten dovolj pozen podinterval in z njim neskončno mnogo členov prvotnega zaporedja. Torej je točka a njegovo stekališče.

Formalno to storimo takole: naj bo $[m, M]$ interval, na katerem ležijo vsi členi zaporedja, in $d = M - m$ njegova dolžina. Nadalje naj bodo $[a_n, b_n]$, $n \geq 1$, izbrani podintervali z neskončno mnogo členi zaporedja (x_n) in naj bo $a = \sup_{n\geq 1} a_n$. Za vsak $\epsilon > 0$ izberimo tako velik k, da bo $1/k < \epsilon/d$. Potem obstaja vsaj en indeks n_k, da velja $a - d/2^k < a_{n_k} \leq a$ in $b_{n_k} = a_{n_k} + d/2^{n_k} < a_{n_k} + d/2^k < a_{n_k} + d/k < a_{n_k} + \epsilon$. Torej leži v vsaki epsilonski okolici točke a celoten dovolj pozen delilni interval $[a_{n_k}, b_{n_k}]$ in z njim neskončno mnogo členov zaporedja (x_n).

TRDITEV 4. *Če ima omejeno zaporedje eno samo stekališče, je konvergentno.*

Dokaz. Zunaj epsilonske okolice edinega stekališča ima lahko omejeno zaporedje samo končno mnogo členov.

Brez pogoja omejenosti to ni res, zgled je npr. divergentno zaporedje $x_n = n^{(-1)^n}$ z edinim stekališčem 0.

Cauchyjeva zaporedja

DEFINICIJA (Cauchyjev pogoj). Zaporedje (x_n) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, da iz $m, n \geq n_\epsilon$ sledi $|x_m - x_n| < \epsilon$.

TRDITEV 5. *Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno in ima kvečjemu eno stekališče.*

Dokaz. Sicer bi lahko našli neskončno mnogo členov, ki so zaporedoma drug od drugega oddaljeni vsaj za nek $\delta > 0$.

TRDITEV 6. *Cauchyjev pogoj je potreben in zadosten za konvergenco zaporedja.*

Dokaz. Potrebnost dokažemo takoj, saj za limito a pri pogoju $|x_n - a| < \epsilon/2$ za $n \geq n_\epsilon$ velja $|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \epsilon$, če je $m, n \geq n_\epsilon$. Za zadostnost upoštevamo, da je po trditvi 5 Cauchyjevo zaporedje omejeno in ima samo eno stekališče. Tako zaporedje pa je po trditvi 4 konvergentno.

Cauchyjeva zaporedja so torej ista kot konvergentna zaporedja, je pa pogosto lažje preveriti Cauchyjevo lastnost kot poiskati limito. Pomembna so tudi teoretično (glej spodaj).

Konvergenca realnega zaporedja

Naslednji dve trditvi sta pomožna, vendar uporabna rezultata. Skupaj z izreki o primerjanju zaporedij ju bomo potrebovali pri izpeljavi pravil za računanje limit.

TRDITEV 7. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ *velja natanko takrat, ko je* $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

Dokaz. Relacija $|x_n - a| < \epsilon$ velja natanko takrat, ko je $x_n \in V_\epsilon(a)$, oziroma natanko takrat, ko je $|x_n - a| \in V_\epsilon(0)$.

TRDITEV 8. *Naj bo* $a_n, b_n > 0$ *za vsak* n *in* $c > 0$. *Če velja* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, *velja tudi* $a_n + b_n \to 0$ *in* $ca_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dokaz. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_ϵ, tako da za $n \geq n_\epsilon$ velja tako $a_n < \epsilon/2$ kot $b_n < \epsilon/2$. Potem velja za $n \geq n_\epsilon$ tudi $a_n + b_n < \epsilon$. Podobno je $ca_n < \epsilon$, če je $a_n < \epsilon/c$ za $n \geq n_\epsilon$.

Primerjanje realnih zaporedij

Ena najpreprostejih metod za obravnavo konvergence je primerjanje dveh (ali treh) zaporedij.

IZREK (o primerjanju zaporedij). *Naj bosta zaporedji* (x_n) *in* (y_n) *konvergentni. Potem velja naslednje*:
(a) *Če je* $x_n \leq y_n$ *za vsak* n, *je tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.
(b) *Če imata zaporedji* (x_n) *in* (y_n) *isto limito in je* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *za vsak* n, *je tudi zaporedje* (z_n) *konvergentno in velja* $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Dokaz. Dokaz točke (a) je preprost, s protislovjem: če bi bilo $b < a$, kjer sta a in b limiti zaporedij x_n oziroma y_n, bi za dovolj velik n veljalo $|x_n - a| < (a - b)/2$ in $|y_n - b| < (a - b)/2$, torej $y_n < b + (a - b)/2 = a - (a - b)/2 < x_n$, kar ni mogoče.

Za točko (b) upoštevajmo, da je za vsak $\epsilon > 0$ pri dovolj velikem n res $z_n - a \leq y_n - a < \epsilon$ in $a - z_n \leq a - x_n < \epsilon$, torej tudi $|z_n - a| < \epsilon$. (Z a smo označili skupno limito zaporedij x_n in y_n.)

Točko (a) zgornjega izreka imenujemo popularno "izrek o ohranjanju neenakosti", točko (b) pa "izrek o sendviču".

POSLEDICA. *Če za konvergentni zaporedji* (x_n) *in* (y_n) *velja za vsak* n *enakost* $x_n = y_n$, *velja tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

ZGLEDI. (a) Od prej vemo, da je $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Ker je $0 < 1/(2n+1) < 1/n$ za vsak n, je $\lim 1/(2n+1) = 0$. Podobno bi videli, da je $\lim 1/(1+bn) = 0$ za poljuben $b > 0$. Prav tako je zaradi ocene $1 < \sqrt{1 + 1/n} < 1 + 1/n$ res $\lim \sqrt{1 + 1/n} = 1$.
(b) Zaradi neenakosti $0 \leq ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ iz $x_n \to x$ sledi $|x_n| \to |x|$.

(c) Za geometrijsko zaporedje $x_n = a^n$ pri $|a| < 1$ velja $0 < |a|^n < 1/(1 + nb)$, kjer je $b = 1/|a| - 1 > 0$. Torej za $|a| < 1$ velja $\lim |a|^n = 0$. Pri $a = 1$ zaporedje konvergira k številu 1 (je konstantno), pri $a = -1$ nikamor ne konvergira (oscilira), pri $|a| > 1$ pa neomejeno divergira.
(d) Pokažimo, da pri pozitivnem $c > 0$ zaporedje s členi $x_n = \sqrt[n]{c}$ konvergira k 1. Za $c = 1$ je to jasno. Naj bo zdaj $c > 1$. Ker je zaradi Bernoullijeve neenakosti $c = (1 + (\sqrt[n]{c} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{c} - 1)$, je $0 < x_n - 1 < (c - 1)/n$, je po izreku o sendviču $\lim_n x_n = 1$. Če pa je $c < 1$, je $b = 1/c > 1$ in zato $0 < 1 - x_n = (\sqrt[n]{b} - 1)/\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{b} - 1$ in zato spet $\lim_n x_n = 1$.
(e) Izpeljimo še limito $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. Zdaj je $n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n > 1 + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n})^2 = 1 + n(n-1)(\sqrt[n]{n} - 1)^2/2$ in zato $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{2/n}$. Ker desna stran konvergira proti 0, dobimo rezultat spet po izreku o sendviču.

Računanje limit

1. Vsota in produkt. Če sta zaporedji (x_n) in (y_n) konvergentni, sta konvergentni tudi zaporedji $(x_n + y_n)$ in $(x_n y_n)$ ter velja $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$. Tudi limita razlike je enaka razliki limit.

Dokaz. Oboje dokažemo s trikotniško neenakostjo, pri produktu še upoštevamo, da je vsako konvergentno zaporedje omejeno. Če je $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ in $|x_n| \leq M$ za vsak n, imamo $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$ in za dovolj velik n je desna stran poljubno majhna. Podobno je $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq M|x_n - a| + |a||y_n - b|$ in desna stran poljubno majhna pri velikem n. Razliko obravnavamo podobno.

2. **Inverz in kvocient**. Če je zaporedje (y_n) z od 0 različnimi členi konvergentno in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(1/y_n)$ in velja $\lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/\lim_{n\to\infty} y_n$. Če sta zaporedji (x_n) in (y_n) konvergentni in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje x_n/y_n in velja $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n$.

Dokaz. Spet naj bo $a = \lim x_n$ in $b = \lim y_n$, poleg tega pa še $|y_n| \geq m > 0$ za vsak n. Tedaj je $|1/y_n - 1/b| = |b - y_n|/|y_n b| \leq |b - y_n|/(m|b|)$ in desna stran poljubno majhna, če je n dovolj velik. Za dokaz drugega dela upoštevamo točko 1 v zvezi s produktom.

ZGLED. Izračunajmo limiti: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}}$. Pri prvi limiti vsak člen v števcu in imenovalcu ulomka delimo z n^2 in z upoštevanjem zgornjih pravil dobimo limito 2. Pri drugi števec in imenovalec najprej delimo s $\sqrt{n}$. Limita je $2/(\sqrt{2}+1)$.

Opomba. Tu smo morali limito spraviti pod koren, kar nam je omogoila npr. ocena $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = |x_n - x|/(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}) < |x_n - x|/\sqrt{x}$, če je $x_n, x > 0$. Kasneje bomo videli, da je to res zaradi zveznosti funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$, ki je inverzna k zvezni funkciji $x \mapsto x^2$ za $x \geq 0$.

Drugačna konstrukcija realnih števil iz racionalnih.

V množico vseh Cauchyjevih zaporedij racionalnih števil uvedemo ekvivalenčno relacijo s predpisom $(x_n) \sim (y_n)$, če velja $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Realna števila so potem ekvivalenčni razredi $[(x_n)]$ Cauchyjevih zaporedij v $\mathbb{Q}$ glede na to relacijo. Smiselno uvedemo urejenost ($[(x_n)] > 0$, če obstajata taki naravni števili N in m, da je $x_n \geq 1/N$ za vsak $n \geq m$), seštevanje ($[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$) in množenje ($[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n y_n)]$) ekvivalenčnih razredov. Pokažemo, da so te operacije dobro definirane (neodvisno od predstavnikov ekvivalenčnega razreda) in dokažemo ustrezne algebrajske lastnosti, značilne za urejen obseg realnih števil (podrobnosti glej v [5], Chapter 2).

Monotona zaporedja

IZREK (o monotonih zaporedjih).
(a) *Vsako naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\sup\{x_n\}$.
(b) *Vsako padajoče navdol omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\inf\{x_n\}$.

Dokaz. Je geometrijsko precej nazoren, saj v okolici supremuma s leže vsi členi, razen končno mnogo. Za vsak $\epsilon > 0$ namreč obstaja člen x_m, za katerega velja $s - \epsilon < x_m \leq s$. Potem pa isti neenakosti zadoščajo tudi vsi nadaljnji členi. Točko (b) dokažemo podobno.

TRDITEV (o vloženih intervalih). *Imejmo padajoče zaporedje zaprtih intervalov, katerih dolžine konvergirajo proti 0, torej* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *in* $\lim_n(b_n - a_n) = 0$. *Potem vsebuje njihov presek* $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ *natanko eno točko.*

Dokaz. Iz pogoja padanja vidimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$ in $b_n \geq b_{n+1}$, tako da je zaporedje (a_n) navzgor omejeno z b_1 in monotono naraščajoče, zaporedje (b_n) pa navzdol omejeno z a_1 in monotono padajoče. Torej sta obe zaporedji konvergentni. Naj bo $\lim_n a_n = a$ in $\lim_n b_n = b$, tako da je $b - a = \lim_n(b_n - a_n) = 0$. Točka $c = a = b$ potem edini element preseka $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Ker je namreč $a = \sup a_n$ in $b = \inf b_n$, velja $a_n \leq c \leq b_n$ za vsak n, tako da je $c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Druge točke d pa v tem preseku ne more biti zaradi ocene $0 \leq d - a_n \leq b_n - a_n$, ki v limiti da $d = \lim_n a_n = c$.

Primer takega padajočega zaporedja zaprtih intervalov smo že spoznali pri bisekciji intervala. Analogna trditev za odprte intervale ne velja, zgled: $\cap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n) = \emptyset$.

ZGLED (OBSTOJ ŠTEVILA e). Pokazali bomo obstoj števila e, ki pomeni osnovo naravnih logaritmov. To število bomo izrazili kot limito različnih zaporedij realnih števil, pri čemer bomo uorabili trditev o vloženih intervalih oziroma izrek o monotonih zaporedjih.

(a) Zaprti interval $I_1 = [2, 3]$ razpolovimo, izberemo drugo polovico, tj. interval $I_2 = [5/2, 3] = [5/2!, 6/2!]$, le-tega razdelimo na tri enake dele, spet izberemo drugo tretjino, tj. interval $I_3 = [8/3, 17/6] = [16/3!, 17/3!]$, ga razdelimo na štiri enake dele itd. Na n-tem koraku razdelimo interval $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ na n enakih delov in izberemo drugega od teh delov, da dobimo naslednji interval $I_n = [a_n, b_n]$. Hitro ugotovimo, da je $a_1 = 2$, $a_2 = 2+1/2$, $a_3 = 2+1/2+1/6$, itd.; splošno je $a_n = 2+1/2+1/6+...+1/n!$. Prav tako vidimo, da za vsak n velja $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ in $b_n - a_n = 1/n!$, torej $b_n - a_n \to 0$, $(n \to \infty)$. Po trditvi o vloženih intervalih obstaja v preseku $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ natanko eno realno število c. Iz dokaza trditve vemo, da je $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2 + 1/2 + 1/6 + ... + 1/n!)$.
Še nekaj vidimo iz te konstrukcije. Za vsak $n > 1$ leži interval I_{n+1} strogo med krajišči intervala I_n, ki sta oblike $m/n!$ in $(m + 1)/n!$, tako da tudi limitno število c ne more biti ulomek z imenovalcem $n!$ in to za noben $n > 1$. Če bi bil c racionalno število, npr. $c = p/q$, bi lahko zapisali $c = p(q - 1)!/q!$. Torej c ni racionalno število.

(b) Z indukcijo lahko dokažemo, da za $0 < x < 1$ za vsak $n \geq 2$ velja $(1 - x)^n > 1 - nx$. Ker je tedaj tudi $(1-x)^{-n} > (1+x)^n > 1+nx$, velja še $(1-x)^{-n} > 1+nx$. Potem veljajo naslednje trditve:

(i) *Zaporedje* $x_n = (1 + 1/n)^n$ *je naraščajoče, zaporedje* $y_n = (1 - 1/n)^{-n}$ *padajoče.*

Dokaz: Če vstavimo $x = 1/n^2$ v neenakost $(1 - x)^n > 1 - nx$, dobimo oceno
$(1 - 1/n)^n(1 + 1/n)^n = (1 - 1/n^2)^n > 1 - 1/n$ oziroma $x_n = (1 + 1/n)^n > (1 - 1/n)^{1-n} = ((n - 1)/n)^{1-n} = (n/(n - 1))^{n-1} = (1 + 1/(n - 1))^{n-1} = x_{n-1}$.
Če pa vstavimo $x = 1/n^2$ v neenakost $(1-x)^{-n} > 1+nx$, dobimo $(1-1/n)^{-n}(1+1/n)^{-n} = (1 - 1/n^2)^{-n} > 1 + 1/n$ oziroma $y_n = (1 - 1/n)^{-n} > (1 + 1/n)^{n+1} = ((n + 1)/n)^{n+1} = (n/(n + 1))^{-(n+1)} = (1 - 1/(n + 1))^{-(n+1)} = y_{n+1}$.

(ii) *Med njima je zveza* $y_{n+1} = x_n(1+1/n) > x_n$ *in* $x_n < x_{n+m} < y_{n+m+1} < y_m$ *za poljubna indeksa* m *in* n.

Dokaz: Pravkar smo videli, da je $y_{n+1} = (1+1/n)^{n+1} = x_n(1+1/n)$; odtod sledi ocena $y_{n+1} > x_n$. Zaradi naraščanja zaporedja (x_n) in padanja zaporedja (y_n) dobimo še drugo oceno.

(iii) *Zaporedje* (x_n) *je navzgor, zaporedje* (y_n) *pa navzdol omejeno in obe zaporedji imata isto limito.*

Dokaz: Zaporedje (x_n) je navzgor omejeno z vsakim členom zaporedja (y_n), npr. z y_1; podobno je zaporedje (y_n) navzdol omejeno z vsakim členom zaporedja (x_n), npr. z x_1. Torej obstajata limiti $a = \lim_n x_n$ in $b = \lim y_n$. Iz prve zveze v točki (ii) pa dobimo, da tudi v limiti velja enakost, torej $a = b$.

Pokažimo, da je tudi število c iz točke (a) enako številu a (oziroma b). Za vsak $n \geq 1$ je po binomskem obrazcu

$$(1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$2 + (1-\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n}) \cdot \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Odtod dobimo v limiti $(n \to \infty)$ oceno

$$a = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \leq \lim_{n\to\infty}(2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/n!) = c.$$

Nadalje pri poljubnem m za vsak $n > m$ velja

$$2 + (1-\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{m-1}{n}) \cdot \frac{1}{m!} \leq$$

$$2 + (1-\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{3!} + ... + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n}) \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$(1+1/n)^n$$

in zato tudi v limiti, ko pošljemo n v neskončnost, dobimo

$$2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/m! \leq \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = a.$$

Pošljimo še $m \to \infty$, pa najdemo še oceno $c = \lim_{m\to\infty}(2 + 1/2 + 1/3! + ... + 1/m!) \leq a$, se pravi $c = a$.

Skupno limito vseh treh zaporedij označimo z e in preprosto imenujemo število e. Torej je $e = a = b = c$ oziroma

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty}(1-1/n)^{-n} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ... + 1/n!).$$

Število e je torej iracionalno, približno enako 2,71828... in je v matematiki zelo pomembno, saj predstavlja osnovo naravne rasti, osnovo naravnih logaritmov, nastopa pri Gaussovi ali normalni porazdelitvi v teoriji verjetnosti in statistiki itd.

Zgornja in spodnja limita

Če je zaporedje (x_n) omejeno, se pravi vsebovano v dovolj velikem intervalu $[m, M]$, je množica S njegovih stekališč neprazna in tudi sama vsebovana v $[m, M]$, torej omejena. Po Dedekindovem aksiomu obstajata tako $a = \inf S$ kot $b = \sup S$. Prvo število imenujemo *spodnja limita*, drugo pa *zgornja limita* zaporedja (x_n).

TRDITEV. *Naj bo* (x_n) *omejeno zaporedje realnih števila,* S *množica njegovih stekališč in kot prej* $a = \inf S$, $b = \sup S$. *Potem velja*:
(a) $a \in S$ *in za vsak* $\epsilon > 0$ *je neskončno mnogo členov zaporedja* (x_n) *manjših od* $a + \epsilon$ *in samo končno mnogo manjših od* $a - \epsilon$.
(b) $b \in S$ *in za vsak* $\epsilon > 0$ *je neskončno mnogo členov zaporedja* (x_n) *večjih od* $a - \epsilon$ *in samo končno mnogo večjih od* $a + \epsilon$.

Dokaz. Dokažimo samo točko (a), saj poteka dokaz druge točke podobno. Ker je $a = \inf S$, obstaja za vsak $k \in \mathbb{N}$ tak $s_k \in S$, da je $a \le s_k < a + 1/k$. Ker pa je s_k stekališče zaporedja (x_n), obstaja vsaj en indeks n_k, da velja

$$a - 1/k \le s_k - 1/k < x_{n_k} < s_k + 1/k < a + 2/k.$$

Po izreku o sendviču sklepamo, da tudi podzaporedje (x_{n_k}) konvergira proti a. Torej je a stekališče zaporedja (x_n), se pravi $a \in S$ oziroma $a = \min S$.

Ker je a najmanjše stekališče zaporedja (x_n), je za vsak ϵ neskončno členov zaporedja v okolici $V_\epsilon(a)$, torej manjših od $a + \epsilon$, hkrati jih je samo končno mnogo manjših od $a - \epsilon$, sicer bi lahko našli še manjše stekališče.

TRDITEV. *Pri istih pogojih in z istimi oznakami kot v prejšnji trditvi velja*:
(a) $a = \sup\{\inf\{x_n;\ n \ge k\};\ k \ge 1\} = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n;\ n \ge k\}$;
(b) $b = \inf\{\sup\{x_n;\ n \ge k\};\ k \ge 1\} = \lim_{m\to\infty} \sup\{x_n;\ n \ge k\}$.

Dokaz. Spet dokažimo samo točko (a). Označimo $c_k = \inf\{x_n;\ n \ge k\}$ in $c = \sup c_k$. Pokazati moramo, da je $c = a$. Zaporedje (c_k) je očitno naraščajoče in navzgor omejeno, torej konvergentno z limito enako $c = \sup c_k$. Ker je $c_k = \inf\{x_n;\ n \ge k\}$, za vsak k obstaja $n_k \ge k$, da je $c_k \le x_{n_k} < c_k + 1/k$. Ker $c_k \to c$, dobimo po izreku o sendviču tudi konvergenco $x_{n_k} \to c$. Torej je c stekališče zaporedja (x_n) oziroma $c \in S$. Za vsako stekališče $d \in S$ pa obstaja podzaporedje y_{n_k}, ki konvergira proti d. Ker je $n_k \ge k$, velja za vsak k tudi $y_{n_k} \ge c_k$ in v limiti $d \ge c$. To pomeni, da je c najmanjše stekališče v S, se pravi $c = \min\ S = \inf\ S = a$.

Zaradi zgornje trditve uvedemo standardni oznaki: $a = \liminf\ x_n$ (spodnja limita) in $b = \limsup\ x_n$ (zgornja limita).

Brez težav se lahko prepričamo, da za spodnjo in zgornjo limito omejenih zaporedij (x_n) in (y_n) veljajo naslednje lastnosti:
(i) *Če je zaporedje* (x_n) *konvergentno, je* $\liminf\ x_n = \limsup\ x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$;
(ii) $\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$, $\limsup x_n = -\liminf(-x_n)$;
(iii) $\inf x_n \le \liminf x_n \le \limsup x_n \le \sup_n x_n$;
(iv) $\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) \le \limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$.

ZGLED. Za zaporedji $x_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ in $y_n = (-1)^{n+1}(1 - 1/n)$ je $\inf x_n = -2$, $\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$, $\sup x_n = 3/2$, $\inf y_n = \liminf y_n = -1$, $\limsup y_n = \sup y_n = 1$ in $\inf(x_y + y_n) = -2$, $\liminf(x_y + y_n) = \limsup(x_n + y_n) = 0$, $\sup(x_y + y_n) = 1$.

Rekurzivna zaporedja in dinamični sistemi

Rekli smo, da je zaporedje podano rekurzivno, če je podan začetni člen zaporedja in rekurzivna formula, ki nam omogoča, da iz prejšnjega člena (ali iz več prejšnjih členov) izračunamo naslednjega. Ločimo:
(i) *enostopenjske rekurzije*: $x_{n+1} = f(x_n)$, kjer je $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija ene spremenljivke;
(ii) *dvostopenjske rekurzije*: $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, kjer je $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk; itd.

Včasih (bolj redko) lahko prevedemo zaporedje iz rekurzivne v eksplicitno obliko. Npr. če je $x_{n+1} = kx_n$ in je začetni člen x_0 znan, brez težav ugotovimo, da je to zaporedje geometrijsko in podano eksplicitno s formulo $x_n = x_0 k^n$.

Rekurzivna formula je nekakšen zakon, ki določa vedenje zaporedja, seveda v odvisnosti od začetnega člena (pri enostopenjski) ali več začetnih členov (pri več stopenjskih rekurzijah). Rekurzivnim enačbam, ki povezujejo več členov zaporedja, rečemo tudi *diferenčne enačbe*. Ni potrebno, da je naslednji člen eksplicitno izražen s prejšnjimi. *Red* diferenčne enačbe je razlika med največjim in najmanjšim indeksom členov, ki nastopajo v dani enačbi. Tako je npr. enačba $x_{n+1} = kx_n$ prvega reda, enačba $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pa drugega reda. Rešitev diferenčne enačbe je potem vsako zaporedje, ki ji zadošča. Različni začetni členi dajo različne rešitve.

Poseben primer so *linearne diferenčne enačbe*, kjer členi nastopajo linearno, npr. drugega reda:

$$a_0(n)x_{n+2} + a_1(n)x_{n+1} + a_2(n)x_n = b(n),$$

kjer so $a_i(n)$ in $b(n)$ znani koeficienti, odvisni v splošnem še od n. Če je $b(n) = 0$, se linearna diferenčna enačba imenuje *homogena*, sicer pa je *nehomogena*. Še bolj poseben primer dobimo, ko so vsi koeficienti a_i konstante (tj. neodvisni od indeksa n); tedaj govorimo o linearnih diferenčnih enačbah *s konstantnimi koeficienti*.

V tem primeru je precej enostavno poiskati njeno rešitev oziroma eksplicitno obliko ustreznega zaporedja. Pri homogenih linearnih diferenčnih enačbah drugega reda (s konstantnimi koeficienti) tvegamo z nastavkom $x_n = \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$. Za λ dobimo kvadratno enačbo

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

ki ima v splošnem dva korena λ_1 in λ_2 (lahko sta konjugirano kompleksna ali enaka). Splošna rešitev je potem

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, in

$$x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n,$$

če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kjer pa konstanti C_1 in C_2 določimo iz začetnih pogojev x_0 in x_1.

ZGLED. Rekurzivna formula $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ je homogena linearna diferenčna enačba drugega reda. Nastavek $x_n = \lambda^n$ da kvadratno enačbo $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ z dvema realnima korenoma $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ in $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2$, tako da je rešitev za $n \geq 0$ oblike

$$x_n = C_1[(1 + \sqrt{5})/2]^n + C_2[(1 - \sqrt{5})/2]^n.$$

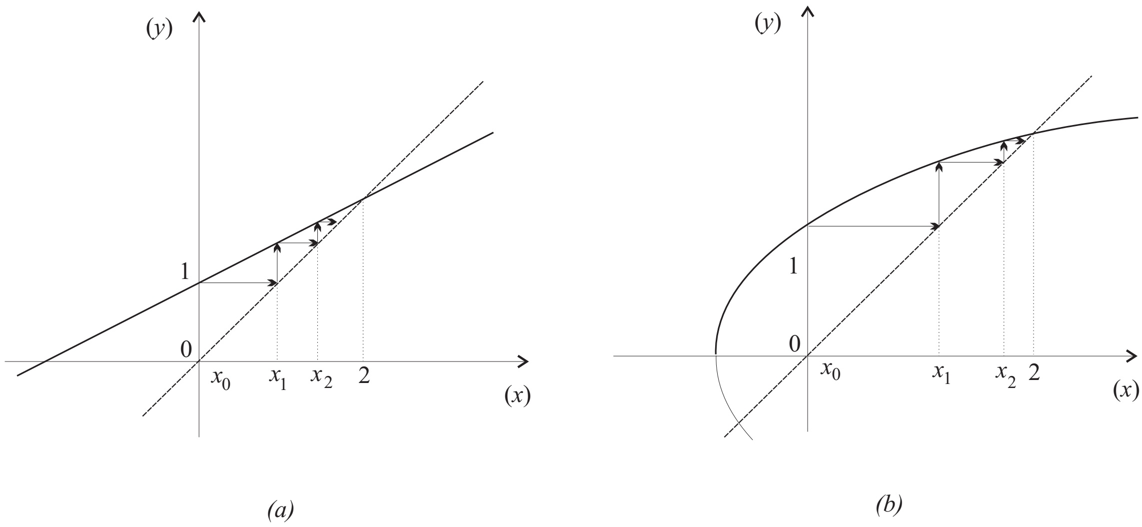
Če izberemo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, dobimo

$$x_n = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$$

oziroma znamenito Fibonaccijevo zaporedje 0,1,1,2,3,5,8,13,... Opazimo, da je število $(1 + \sqrt{5})/2$ ravno *razmerje zlatega reza*.

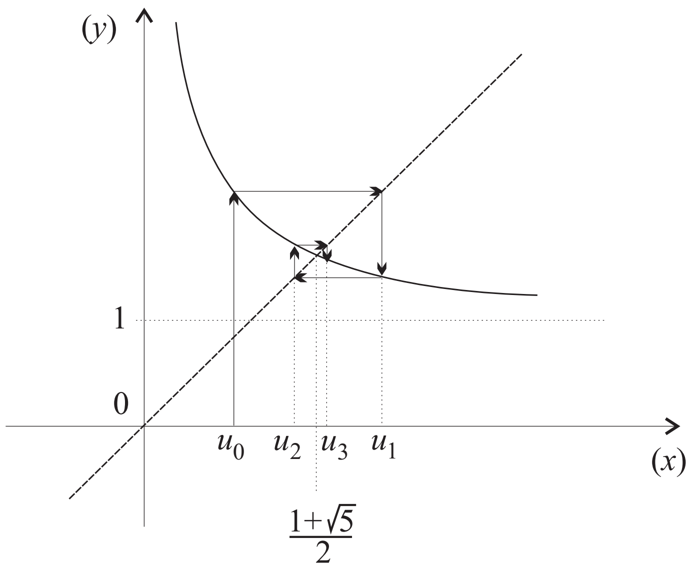
Lastnosti rekurzivno podanega zaporedja (omejenost, monotonost, konvergenco) ponavadi hitreje dobimo direktno iz rekurzijske formule kot iz eksplitne oblike, saj lahko uporabimo matematično indukcijo. Kadar že vemo, da je zaporedje (x_n) konvergentno in ima limito x, lahko enostavno limitiramo enostopenjsko rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$, tako da v limiti dobimo $x = f(x)$ (limito in funkcijski predpis lahko zamenjamo pri zveznih funkcijah, kar bomo opravičili kasneje). Taka točka x se imenuje *negibna* ali *fiksna točka* preslikave f. Limita zaporedja je torej ena izmed negibnih točk funkcije f; katera je prava, moramo ugotoviti z analizo vedenja zaporedja. Z uporabo grafa funkcije f, presečišča grafa s premico $y = x$ in z ustreznim *mrežnim diagramom*, ki opisuje dinamiko zaporedja, damo obravnavi še dodaten nazoren geometrični pomen (glej sliko 1).

ZGLEDI. (a) Pokažimo, da je zaporedje, podano rekurzivno s predpisom $x_0 = 1$ in $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$, konvergentno in da ima limito $\lim x_n = 2$. Najprej se z matematično indukcijo prepričamo, da je zgornja meja zaporedja enaka 2. Za člen x_0 je to res; če velja za x_n, velja potem tudi za $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$. Ker je razlika zaporednih členov $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n + 1 - x_n = \frac{1}{2}(2 - x_n) > 0$, je zaporedje tudi naraščajoče. Izrek o monotonih zaporedjih pove, da je konvergentno. Limito označimo z x. Ker mora biti x negibna točka funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, dobimo $x = \frac{1}{2}x + 1$ oziroma $x = 2$ (slika 1(a)).



SLIKA 1. Zlati rez

(b) Podobno lahko obravnavamo zaporedje $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$, kjer nastopa n kvadratnih korenov. Hitro vidimo, da lahko to zaporedje rekurzivno podamo s predpisom $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, $x_0 = 0$, kar je veliko lažje obravnavati. Z matematično indukcijo, se lahko takoj prepričamo, da je $x_n < 2$ za vsak n in da je $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 2} - x_n = (2 + x_n - x_n^2)/(\sqrt{x_n + 2} + x_n) = (2 - x_n)(1 + x_n)/(\sqrt{x_n + 2} + x_n) > 0$. Torej je zaporedje navzgor omejeno in naraščajoče, se pravi konvergentno. Limita x mora zadoščati enačbi $x = \sqrt{x + 2}$, odkoder dobimo edino pozitivno možnost $x = 2$ (slika 1(b)).



SLIKA 2. Zlati rez

(c) Za $n \geq 1$ naj bo $u_n = x_{n+1}/x_n$, kjer (x_n) Fibonaccijevo zaporedje iz točke 1. Če rekurzivno formulo $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ delimo z x_{n+1}, dobimo za (u_n) rekurzijo

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n,\ u_1 = 1.$$

To zaporedje ni monotono, ampak oscilirajoče konvergira k pozitivni negibni točki u funkcije $f(u) = 1 + 1/u$ (pomagajmo si z mrežnim diagramom, glej sliko 2). Ker ta u zadošča enačbi $u^2 - u - 1 = 0$, dobimo kot prej $u = (1 + \sqrt{5})/2$, kar je edina pozitivna rešitev. Tako vidimo, da kvocienti zaporednih Fibonaccijevih števil konvergirajo proti razmerju zlatega reza.

4. Evklidski prostori

Kartezični produkt n kopij množice $\mathbb{R}$, se pravi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n-krat), imenujemo n-razsežni *evklidski prostor*. Njegovi elementi so urejene n-terice realnih števil $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ki jih imenujemo *točke prostora* s koordinatami $x_1, x_2, ..., x_n$. Tako je npr. $\mathbb{R}^2$ evklidska ravnina, opremljena s kartezičnim (pravokotnim) koordinatnim sistemom, $\mathbb{R}^3$ običajen trirazsežni prostor itd.

V $\mathbb{R}^n$ uvedemo notranjo operacijo *vsota* in zunanjo operacijo *produkt s skalarjem*, tako da n-terice seštevamo in množimo s skalarjem po komponentah ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \quad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Poleg tega definiramo tudi *skalarni produkt*:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n,$$

ki je simetričen ($\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$) ter aditiven in homogen v vsakem faktorju. Aditivnost v prvem faktorju pomeni $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$, homogenost pa $\lambda\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$. Aditivnost in homogenost v drugem faktorju potem sledi iz simetričnosti. Velja tudi

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

kjer je $\|\boldsymbol{x}\|$ *norma* n-terice $\boldsymbol{x}$, ki ima naslednje lastnosti:
(a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ in $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$,
(b) $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
(c) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (Cauchy-Schwarzova neenakost),
(d) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (trikotniška neenakost).
(e) $\|\boldsymbol{x}\|/\sqrt{n} \leq \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\} \leq \|\boldsymbol{x}\|$.
Točke (a), (b) in (e) so skoraj očitne. Cauchy-Schwarzovo neenakosti iz točke (c) izpeljemo iz relacije $(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ...y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + ... + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2 \geq 0$, trikotniško neenakost iz točke (d) pa dobimo z upoštevanjem Cauchy-Schwarzove neenakosti: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$.

Urejenosti običajno ne vpeljemo, pač pa lahko merimo razdaljo med dvema točkama prostora. Razdaljo (metriko) definiramo s pomočjo norme ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Kakor hitro pa imamo razdaljo, lahko (tako kot pri realnih številih) vpeljemo pojem epsilonske okolice točke $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$V_\epsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \epsilon\}\ , \quad \epsilon > 0.$$

Na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. taka okolica naša stara znanka $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < \epsilon\}$, tj. simetrični interval okrog točke a, v $\mathbb{R}^2$ je $V_\epsilon(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - a)^2 + (y - b)^2 < \epsilon^2\}$, torej odprti krog s središčem v točki (a, b) in polmerom ϵ itd.

Z okolicami pa lahko definiramo limite in stekališča zaporedij točk v $\mathbb{R}^n$. Definicija je ista kot pri realnih številih.

DEFINICIJA. Točka $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je *limita* zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da je $\boldsymbol{x}_k \in V_\epsilon(\boldsymbol{a})$ oziroma $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak indeks $k \geq m$.

Točka $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je *stekališče* zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$, če za vsak $\epsilon > 0$ velja $\boldsymbol{x}_k \in V_\epsilon(\boldsymbol{a})$ za neskončno mnogo indeksov k ali ekvivalentno, če je $\boldsymbol{a}$ limita vsaj enega podzaporedja $(\boldsymbol{x}_{k_j})$ v $(\boldsymbol{x}_k)$.

Če je $\boldsymbol{a}$ limita zaporedja $(\boldsymbol{x}_k)$, rečemo, da je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergentno in da konvergira proti $\boldsymbol{a}$. Kot običajno to zapišemo v obliki $\boldsymbol{a} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$ ali $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| = 0$. Iz trikotniške neenakosti seveda sledi $|\,\|\boldsymbol{x}_k\| - \|\boldsymbol{a}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\|$. Če torej $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, velja tudi $\|\boldsymbol{x}_k\| \to \|\boldsymbol{a}\|$. Hitro se lahko tudi prepričamo o veljavnosti naslednje trditve.

TRDITEV. *Zaporedje točk* $\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ *konvergira proti točki* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *natanko takrat, ko konvergira po komponentah, tj. ko za vsak* $i = 1, 2, ..., n$ *velja* $\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i$.

Dokaz. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja m, tako da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak $k \geq m$, velja po točki (e) zgoraj za vsak i tudi $|x_{k,i} - a_i| \leq \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ za vsak $k \geq m$.

Obratno, če za vsak i in $\epsilon > 0$ obstaja m_i, tako da je $|x_{k,i} - a_i| < \epsilon/\sqrt{n}$ za vsak $k \geq m_i$, naj bo $m = \max_{1\leq i\leq n} m_i$. Potem za vsak $k \geq m$ veljajo vse te enakosti in zato po točki (e) zgoraj tudi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \leq \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} |x_{k,i} - a_i| < \epsilon$.

POSLEDICA. *Če je* $\lambda \in \mathbb{R}$ *in sta* $(\boldsymbol{x}_k)$ *in* $(\boldsymbol{y}_k)$ *konvergentni zaporedji točk v* $\mathbb{R}^n$, *velja*
(a) $\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k \pm \boldsymbol{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \pm \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k$,
(b) $\lim_{k\to\infty}(\lambda \boldsymbol{x}_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$,
(c) $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{y}_k = (\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k) \cdot (\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k)$.

Dokaz. Vse troje spoznamo, če opazujemo konvergenco po komponentah in upoštevamo lastnosti limit za realna števila.

DEFINICIJA. Zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ točk iz $\mathbb{R}^n$ je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da velja $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| < \epsilon$ za $k, l \geq m$.

TRDITEV. *Zaporedje točk v* $\mathbb{R}^n$ *je konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo.*

Dokaz. V eno smer je dokaz preprost: če je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergentno proti $\boldsymbol{a}$, za vsak par dovolj poznih indeksov k in l velja $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon/2$ in $\|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{a}\| < \epsilon/2$. Potem pa po trikotniški neenakosti velja tudi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| < \epsilon$.

Obratno, če je zaporedje $(\boldsymbol{x}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ Cauchyjevo, je za vsak indeks i po točki (e) Cauchyjevo tudi zaporedje komponent $(x_{k,i})$ v $\mathbb{R}$. Od prej vemo, da je tako zaporedje konvergentno, torej obstaja limita $a_i = \lim_{k\to\infty} x_{k,i}$. Potem pa po prejšnji trditvi vidimo, da mora veljati tudi $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, kjer je $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Zaprte in odprte množice

Z limitami podzaporedij lahko definiramo posebne podmnožice v prostoru $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIJA. Rečemo, da je točka $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *limitna točka* podmnožice $A \subset \mathbb{R}^n$, če obstaja zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in A$, tako da je $\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$.

Vsaka točka $\boldsymbol{a} \in A$ je limitna za A, saj konstantno zaporedje ($\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ za vsak k) konvergira proti $\boldsymbol{a}$. Lahko pa so limitne točke še druge, npr. za množico $A = (a, b)$ (odprti interval) sta obe krajišči, a in b, limitni točki, nista pa elementa množice A.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ je *zaprta*, če vsebuje vse svoje limitne točke.

Zaprte podmnožice so npr. poljuben zaprt interval $[a, b]$ na reali osi $\mathbb{R}$ (ne pa odprti interval (a, b)), poljubna zaprta krogla $K_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x};\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq r\}$ v $\mathbb{R}^n$, množica $\{(x, y);\ xy \geq 1\}$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ itd. Vsaka končna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je zaprta, prazna množica in cel prostor $\mathbb{R}^n$ sta zaprti množici.

TRDITEV. *Naj bodo A, B in A_i, $i \in I$ (poljubna indeksna množica) zaprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Potem sta zaprti množici tudi $A \cup B$ in $\cap_{i \in I} A_i$.*

Dokaz. Naj bo $\boldsymbol{x}_k$ zaporedje točk v $A \cup B$ z limito $\boldsymbol{x}$. V eni od množic A ali B leži neskončno mnogo členov zaporedja $\boldsymbol{x}_k$; denimo, da v A. Ti členi tvorijo podzaporedje točk iz A, ki tudi konvergira proti $\boldsymbol{x}$, torej je $\boldsymbol{x}$ limitna točka za A. Ker pa je množica A zaprta, je $\boldsymbol{x} \in A$, torej v $A \cup B$.
Zdaj pa naj bo $\boldsymbol{x}_k$ zaporedje točk v $\cap_{i \in I} A_i$ z limito $\boldsymbol{x}$. Za vsak indeks i so vsi členi $\boldsymbol{x}_k$ v A_i, ki je zprta množica in je zato tudi $\boldsymbol{x} \in A_i$. Torej je $\boldsymbol{x} \in \cap_{i \in I} A_i$.

DEFINICIJA. *Zaprtje* $\overline{A}$ podmnožice $A \subset \mathbb{R}^n$, je množica vseh njenih limitnih točk.

TRDITEV. *Zaprtje $\overline{A}$ množice A je najmanjša zaprta množica v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje množico A. V posebnem primeru je $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

Dokaz. Vedno je $A \subset \overline{A}$, saj je vsaka točka $\boldsymbol{a} \in A$ sama že limitna točka za A (zakaj?). Pokažimo najprej, da je $\overline{A}$ zaprta množica. Če je $\boldsymbol{x}_k \in \overline{A}$ in je $\boldsymbol{x} = \lim_k \boldsymbol{x}_k$, obstaja za vsak k zaporedje točk $\boldsymbol{a}_{k,j} \in A$, ki konvergira proti $\boldsymbol{x}_k$. Lahko torej izberemo tak $\boldsymbol{a}_k \in A$, da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k\| < 1/k$ za vsak k, od koder sledi $0 \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_k\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\| + \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}_k\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\| + 1/k$ za vsak k. Po izreku o sendviču je potem $\lim_k \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_k\| = 0$ oziroma $\boldsymbol{x} = \lim_k \boldsymbol{a}_k \in \overline{A}$.
Če je C poljubna zaprta množica, ki vsebuje A, vsebuje tudi vse limitne točke za A, se pravi ves $\overline{A}$. To pomeni, da je $\overline{A}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A. Ker je torej $\overline{\overline{A}}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje $\overline{A}$, le-ta pa je sama zaprta po prvem delu dokaza, mora veljati $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

DEFINICIJA. Podmnožica $U \subset \mathbb{R}^n$ je *odprta*, če za vsak $\boldsymbol{a} \in U$ obstaja $r = r(\boldsymbol{a})$, da je odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$ vsebovana v U.

Odprte množice so npr.: odprti interval (a, b) na realni osi $\mathbb{R}$, sama odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$ v $\mathbb{R}^n$, množica $\{(x, y);\ xy > 1\}$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ itd. Odprti sta tudi prazna množica in cel prostor $\mathbb{R}^n$.

TRDITEV. *Podmnožica $U \subset \mathbb{R}^n$ je odprta natanko takrat, ko je njen komplement $U^c = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{x} \notin U\}$ zaprta množica.*

Dokaz. Naj bo U odprta množica in $(\boldsymbol{x}_k)$ zaporedje v U^c, ki konvergira proti $\boldsymbol{x}$. Pokazati moramo, da je $\boldsymbol{x} \in U^c$. Če je $\boldsymbol{a}$ katerakoli točka iz U, obstaja zaradi odprtosti te množice tak $r > 0$, da je $B_r(\boldsymbol{a}) \subset U$. Odtod sledi, da je $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \geq r$ za vsak k, torej tudi $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \lim_k \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \geq r$. Med drugim to pomeni, da $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$. Ker velja to za vsako točko $\boldsymbol{a} \in U$, je $\boldsymbol{x} \in U^c$.
Obratno, če U ni odprta, obstaja taka točka $\boldsymbol{a} \in U$, da za vsak r odprta krogla $B_r(\boldsymbol{a})$ seka komplement U^c. To pomeni, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $\boldsymbol{x}_k \in U^c$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < 1/k$. Po izreku o sendviču sledi $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| \to 0$ oziroma $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$. Torej je $\boldsymbol{a}$ limitna točka za U^c in hkrati $\boldsymbol{a} \notin U^c$, tako da U^c ni zaprta množica.

TRDITEV. *Naj bodo U, V in U_i, $i \in I$ (poljubna indeksna množica) odprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Potem sta odprti množici tudi $U \cap V$ in $\cup_{i \in I} U_i$.*

Dokaz. Sledi iz zgornje trditve in analogne (dualne) trditve za zaprte množice.

Kompaktnost

Za podmnožice v $\mathbb{R}^n$ bomo definirali pojem kompaktnosti, ki je posebno koristna lastnost, zlasti v zvezi z vedenjem zveznih funkcij, definiranih na takih podmnožicah.

DEFINICIJA. Podmnožica $K \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in K$ konvergentno podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$ z limito $\boldsymbol{x} = \lim_j \boldsymbol{x}_{k_j} \in K$.

ZGLED. Vsak zaprti interval $[a, b]$ na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. kompaktna množica. Poljubno zaporedje točk $x_k \in [a, b]$ je namreč omejeno, vsako omejeno zaporedje pa ima, kot vemo vsaj eno stekališče $x \in \mathbb{R}$. Torej obstaja podzaporedje x_{k_j}, ki konvergira k x. Ker je zaradi $a \leq x_{k_j} \leq b$ za vsak j tudi $a \leq x \leq b$, je $x \in [a, b]$ in ta interval je kompaktna množica.

Kompaktnost ni isto kot zaprtost. Na realni osi $\mathbb{R}$ je npr. poltrak $[0, \infty)$ zaprta množica, saj je limita poljubnega zaporedja nenegativnih števil tudi sama nenegativna. Ni pa to kompaktna množica, ker npr. zaporedje vseh naravnih števil $x_n = n$ nima nobenega konvergentnega podzaporedja.

V $\mathbb{R}$ ima vsako omejeno zaporedje konvergentno podzaporedje, zato je vsaka omejena in zaprta podmnožica kompaktna. Kot bomo takoj videli, velja podobno v $\mathbb{R}^n$.

Rečemo, da je podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ *omejena*, če je vsebovana v neki dovolj veliki odprti krogli $B_r(0)$ s središčem v izhodišču (namesto odprte krogle $B_r(0)$ bi lahko vzeli tudi zaprto kroglo $K_r(0)$). Ekvivalentna zahteva se glasi $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$. Na realni osi $\mathbb{R}$ je omejena množica vsebovana v nekem zaprtem inetervalu $[m, M]$.

TRDITEV. *Vsaka kompaktna podmnožica v* $\mathbb{R}^n$ *je zaprta in omejena.*

Dokaz. Naj bo K kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$ in $\boldsymbol{x}$ limitna točka za K. Če je $\boldsymbol{x} = \lim \boldsymbol{x}_k$, kjer je $\boldsymbol{x}_k \in K$ za vsak k, obstaja zaradi kompaktnosti podzaporedje točk $\boldsymbol{x}_{k_j}$, ki konvergirajo proti neki točki $\boldsymbol{y} \in K$. Po drugi strani mora tudi podzaporedje konvergirati k $\boldsymbol{x}$, torej je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in K$. Množica K je zaprta.
Če množica K ne bi bila omejena, bi našli zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k \in K$ z lastnostjo $\|\boldsymbol{x}_k\| \geq k$ za vsak k. Zaradi kompaktnosti množice K bi obstajalo podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$, ki bi konvergiralo proti neki točki $\boldsymbol{x} \in K$. Toda tudi za to podzaporedje bi veljalo $\|\boldsymbol{x}_{k_j}\| \geq k_j \geq j$ za vsak j, kar bi bilo v nasprotju z njegovo konvergenco. Kompaktna množica K mora biti omejena.

Videli smo, da je vsaka kompaktna množica zaprta in omejena. Heine-Borelov izrek bo povedal, da v $\mathbb{R}^n$ velja tudi obratno. V ta namen potrebujemo naslednji dve trditvi.

TRDITEV. *Vsaka zaprta podmnožica kompaktne množice je kompaktna.*

Dokaz. Naj bo K kompaktna množica in $C \subset K$ poljubna njena zaprta podmnožica. Če je $(\boldsymbol{x}_k)$ poljubno zaporedje v C, je to tudi zaporedje v množici K zaradi kompaktnosti slednje obstaja podzaporedje $(\boldsymbol{x}_{k_j})$, ki konvergira proti neki točki $\boldsymbol{x} \in K$. Ker pa je C zaprta množica in so vi členi tega podzaporedja v C, je tudi njihova limita $\boldsymbol{x}$ v C. To pomeni, da je C sama kompaktna množica.

TRDITEV. *Kocka* $[a, b]^n$ *v* $\mathbb{R}^n$ *je kompaktna množica.*

Dokaz. Imejmo zaporedje točk $\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n})$ iz kocke, tako da je $a \le x_{k,i} \le b$ za vsak i. Ker je $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktna množica, obstaja v zaporedju prvih koordinat $(x_{k,1})$ podzaporedje $(x_{k_j,1})$, ki konvergira proti $z_1 \in [a, b]$. Iz zaporedja števil $y_j = x_{k_j,2}$ lahko na isti način izberemo podzaporedje števil $y_{j_l} = x_{k_{j_l},2}$, ki konvergira proti $z_2 \in [a, b]$. Pri tem še vedno $x_{k_{j_l},1}$ konvergira proti z_1. In tako naprej; z diagonalnim procesom izberemo podzaporedje indeksov $p_1 < p_2 < ...$, tako da $x_{p_j,i}$ konvergira proti z_i za vsak $i = 1, 2, ..., n$. Torej je tudi $\lim \boldsymbol{x}_{p_j} = \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \in [a, b]^n$ in ta kocka je kompaktna množica.

IZREK (Heine-Borel). *Podmnožica $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko takrat, ko je K zaprta in omejena.*

Dokaz. V eno smer smo videli v eni od prejšnjih trditev. Naj bo zdaj K zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$, tako da velja $\|\boldsymbol{x}\| \le M$ za vsak $x \in K$. Torej je $K \subset [-M, M]^n$, se pravi zaprta podmnožica kompaktne množice $[-M, M]^n$ in zato tudi sama kompaktna.

TRDITEV. *Če je $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ padajoče zaporedje nepraznih kompaktnih množic v $\mathbb{R}^n$, je tudi njihov presek $\cap_{i=1}^{\infty} K_i$ neprazna množica.*

Dokaz. Ker so neprazne, lahko iz vsake množice K_m izberemo točko $\boldsymbol{x}_m$. Zaporedje teh točk pripada največji množici K_1, tako da zaradi njene kompaktnosti obstaja podzaporedje $\boldsymbol{x}_{m_j}$, ki konvergira proti svoji limiti $\boldsymbol{x}$. Ker je pri poljubnem indeksu i za $j \ge i$ tudi $m_j \ge m_i \ge i$ in so zato vse točke $\boldsymbol{x}_{m_j}$ v množici K_i, pripada tej množici tudi njihova limita $\boldsymbol{x}$. Torej je $\boldsymbol{x} \in K_i$ za vsak i, se pravi $\boldsymbol{x} \in \cap_{i=1}^{\infty} K_i$.

ZGLED. Primer padajočega zaporedja nepraznih kompaktnih množic v $\mathbb{R}$ je zaporedje vloženih zaprtih intervalov na realni osi, torej $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ za vsak $n \ge 0$. Ker so vsi ti vloženi intervali kompaktni, je po zgornji trditvi njihov presek neprazen. Če še privzamemo, da konvergirajo njihove dolžine proti nič, je v preseku natanko ena točka. To pove trditev o vloženih intervalih, ki nam za vsako omejeno zaporedje realnih števil v bistvu zagotavlja eksistenco vsaj enega stekališča.

Na podoben način bi z razpolavljanjem stranice dovolj velike kocke $[-M, M]^n$ videli, da ima tudi v $\mathbb{R}^n$ vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče.

Literatura

[1] K.R. Davidson, A.P. Donsig, *Real Analysis with Applications*, Prtentice Hall 2002.
[2] B. Drinovec Drnovšek, S. Strle, *Naloge iz analize 1 z odgovori, nasveti in rešitvami*, DMFA založništvo, Ljubljana 2010.
[3] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA - založnitvo, Ljubljana 2008.
[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraww-Hill 1976.
[5] R.S. Strichartz, *The Way of Analysis*, Jones nad Bartlett Publ., Boston 2000.
[6] G. Tomi, Bojan Orel, Nea Mramor Kosta, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[7] N. Mramor Kosta, B. Juri Zlobec, *Zbirka nalog iz matematike I*, Založba FE in FRI, Ljubljana 2001.
[8] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA-založništvo, Ljubljana 1994.