II. ŠTEVILSKE IN FUNKCIJSKE VRSTE

1. Številske vrste

Poleg zaporedij realnih števil lahko o konvergenci govorimo tudi pri t.i. številskih vrstah. Formalno gledano je *številska vrsta* neskončna vsota realnih števil; toda, kaj to sploh pomeni, saj smo doslej znali izvajati le končno mnogo operacij (seštevanj) naenkrat?

Pojem vrste in njene konvergence

Z namenom, da bi sešteli neskončno mnogo členov danega zaporedja, se pravi vrsto $a_1 + a_2 + ...$, tvorimo zaporedje delnih vsot te vrste. Prva delna vsota je kar prvi člen: $s_1 = a_1$, druga delna vsota je vsota prvih dveh členov: $s_2 = a_1 + a_2$, itd. Vsoti prvih n členov rečemo *n-ta delna vsota* vrste, torej $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

DEFINICIJA 1. Pravimo, da vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *konvergira* in ima *vsoto* s, če konvergira zaporedje delnih vsot s_n in velja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Če vrsta ne konvergira, rečemo, da *divergira.*

Vrsto $a_1 + a_2 + ...$ bomo pogosto na kratko označili z znakom za seštevanje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, njeno n-to delno vsoto pa z $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

ZGLED 1. (a) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$ ne konvergira, saj je $s_n = n$ za vsak n.

(b) Vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1) = 1/1\cdot 2 + 1/2\cdot 3 + 1/3\cdot 4 + ...$ ima delne vsote enake $s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + ... + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1)$, zato konvergira in ima vsoto 1.

(c) Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ...$ konvergira za $a = 0$ ali $|q| < 1$. V prvem primeru je vsota enaka nič, saj seštevamo same ničelne člene. Če pa $a \neq 0$, so delne vsote, kot se hitro vidi, enake $s_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = a(1-q^n)/(1-q)$ za $q \neq 1$ in $s_n = na$ za $q = 1$. Kot vemo iz razdelka o zaporedjih, konvergira pri pogoju $|q| < 1$ potenca q^n proti nič, zato konvergirajo tedaj delne vsote s_n proti $a/(1-q)$. Za druge vrednosti $|q|$, se pravi za $|q| \geq 1$, pa delne vsote ne konvergirajo.

DEFINICIJA 2. *Cauchyjev kriterij* za konvergenco zaporedij $s_k - s_n \to 0$ $(k, n \to \infty)$ se v primeru vrst glasi (pri pogoju $n \to \infty, n < k$)

$$\sum_{j=n+1}^{k} a_j = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_k \to 0.$$

Natančneje, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, tako da za $k > n \geq m$ velja

$$|\sum_{j=n+1}^{k} a_j| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_k| < \epsilon.$$

Na drug način to povemo takole: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $m \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq m$ in za poljuben $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon.$$

V posebnem primeru, ko vzamemo $p = 1$, dobimo *potreben pogoj* za konvergenco: $a_k \to 0$ ($k \to \infty$. Videli bomo, da ta pogoj ni tudi zadosten. Potreben pogoj lahko izpeljemo tudi direktno iz definicije konvergence vrst: $\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = 0$.

ZGLED 2. (a) Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ...$ za $a \neq 0$ in $|q| \geq 1$ ne konvergira, ker že potreben pogoj $aq^k \to 0$ ($k \to \infty$) ni izpolnjen.

(b). Za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + ...$ je potreben pogoj ($1/k \to 0$) izpolnjen, ni pa izpolnjen Cauchyjev pogoj za konvergenco, saj za vsak n velja $1/(n+1) + 1/(n+2) + ... + 1/(2n) > 1/2$, zato vrsta ne konvergira. Ta vrsta se imenuje *harmonična vrsta.*

Vrste s pozitivnimi členi

Pri vrsti, ki ima same pozitivne člene, so tudi delne vsote $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ pozitivne in naraščajo, saj je $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ za vsak n. Strogo monotono naraščajoče zaporedje s_n pa je konvergentno natanko takrat, ko je navzgor omejeno. Torej velja naslednja trditev.

TRDITEV 1. *Vrsta s pozitivnimi členi je konvergentna natanko takrat, ko so njene delne vsote navzgor omejene.*

Za vrste s pozitivnimi členi imamo veliko različnih konvergenčnih kriterijev, ki zagotavljajo konvergenco dane vrste, ne da bi pri tem poznali delne vsote. Samo iz členov dane vrste lahko sklepamo na konvergenco, pri tem pa vsote vrste običajno ne moremo izračunati.

IZREK 1 (o primerjanju). *Imejmo vrsti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...$ *in* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + ...$, *pri čemer naj velja* $0 \leq a_k \leq b_k$ *za vsak* k.
(a) *Če vrsta z večjimi členi* (majoranta) *konvergira, konvergira tudi dana vrsta.*
(b) *Če vrsta z manjšimi členi* (minoranta) *divergira, divergira tudi dana vrsta.*

Dokaz. Ker so členi pozitivni, delne vsote naraščajo, zato je za konvergenco po trditvi 1 potreben in zadosten pogoj, da so tudi omejene. Če so omejene delne vsote majorante, velja isto za vrsto z manjšimi členi. Če pa delne vsote minorante niso omejene, tudi za vrsto z večjimi členi to ni res.

ZGLED 3. (a) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + ...$ konvergira, ker ima konvergentno majoranto $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1) = 1 + 1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + ...$ (glej točko (b) prvega zgleda v tem razdelku).

(b) Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k} = 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + ...$ divergira, ker ima za minoranto harmonično vrsto $1 + 1/2 + 1/3 + ...$, za katero vemo, da divergira.

S primerjavo lahko pogosto hitro ugotovimo konvergenco vrste s pozitivnimi členi tudi na naslednji način, ki deluje, kadar členi monotono padajo proti nič.

IZREK 2. *Naj bo* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$ *in* $a_k \to 0$ *(*$k \to \infty$*). Potem konvergira vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

natanko takrat, ko konvergira "kondenzirana"vrsta

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ...$$

Dokaz. Označimo delne vsote obeh vrst z $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ in $t_k = a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k}$. Za $2^k \leq n < 2^{k+1}$ imamo oceno navzgor $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k} = t_k$, in oceno navzdol $s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}) \geq$

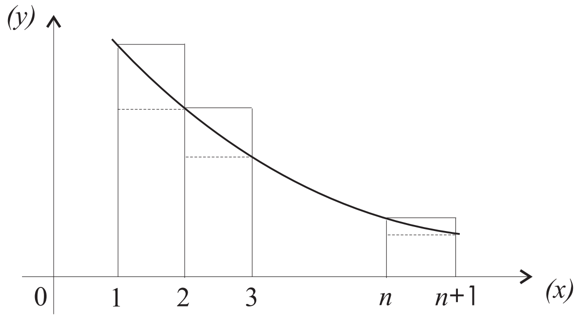
$a_1/2 + a_2 + 2a_4 + ...2^{k-1}a_{2^k} = t_k/2$. Ker torej za vsak $k \geq 0$ in za $2^k \leq n < 2^{k+1}$ velja $t_k/2 \leq s_n \leq t_k$, sta obe vrsti hkrati konvergentni ali divergentni.

ZGLED 4. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p = 1 + 1/2^p + 1/3^p + ...$ konvergira za $p > 1$ in divergira za $p \leq 1$. To vidimo tako. Če je $p \leq 0$, členi sploh ne konvergirajo proti nič, potreben pogoj ni izpolnjen in vrsta divergira. Če pa je $p > 0$, so členi vrste pozitivni in monotono padajo proti nič, tako da lahko uporabimo izrek 2. "Kondenzirana"vrsta je zdaj geometrijska vrsta

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{1}{2^{jp}} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-p)j},$$

ki je konvergenta natanko takrat, ko je kvocient $2^{1-p} < 1$ oziroma $1 - p < 0$.

Delna vsota $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^p$ zadnje vrste je zaradi monotonosti funkcije $f(x) = 1/x^p$ gotovo večja od integrala $\int_1^{n+1} f(x)dx$ in manjša od $1 + \int_1^n f(x)dx$ (glej sliko 1). Ker vemo, da integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira natanko takrat, ko je $p > 1$, velja isto za delne vsote s_n dane vrste. Podobno velja za vsako na poltraku $[1, \infty)$ pozitivno in monotono padajočo funkcijo f.



SLIKA 1

IZREK 3 (Integralski kriterij). *Če so členi vrste enaki $a_k = f(k)$, kjer je f pozitivna zvezna in mnotono padajoča funkcija na poltraku $[1, \infty)$, konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ natanko takrat, kadar konvergira integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$.*

Dokaz. Kot v posebnem primeru je $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)dx$, od koder vidimo, da vrsta in integral konvergirata ali divergirata hkrati.

IZREK 4 (Cauchyjev korenski kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi $a_n \geq 0$ za vsak n.*
(a) *Če obstaja $m \in \mathbb{N}$ in pozitivno število $q < 1$, tako da velja $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ za $n \geq m$, vrsta konvergira.*
(b) *Če velja $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za neskončno mnogo členov, vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Za $n > m$ imamo $a_n \leq q^n$, torej vrsta $\sum_n a_n$ konvergira zaradi primerjanja z geometrijsko vrsto $\sum_n q^n$.

(b) Če za neskončno mnogo členov velja $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ oziroma $a_n \geq 1$, členi ne konvergirajo k nič in vrsta zato ne konvergira.

ZGLED 5. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^n = x + (x/2)^2 + (x/3)^3 + ...$ konvergira za vsak $x > 0$. Imamo namreč $\sqrt[n]{a_n} = x/n \to 0$ in zato $\sqrt[n]{a_n} \leq 1/2$ za vsak dovolj velik n.

POSLEDICA. *Za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi označimo* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Vrsta konvergira, če je* $\alpha < 1$, *in divergira, če je* $\alpha > 1$.

Dokaz. Če je $\alpha < 1$, gotovo obstaja q z lastnostjo $\alpha < q < 1$ in indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $\sqrt[n]{a_n} < q$. Če pa je $\alpha > 1$, je tudi $\sqrt[n]{a_n} > 1$ za neskončno mnogo členov. V obeh primerih sledi konvergenca oziroma divergenca vrste iz izreka 4.

Najlažje je uporabiti to posledico, kadar obstaja limita $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. V primeru $\alpha < 1$ dobimo konvergenco, v primeru $\alpha > 1$ divergenco, v primeru $\alpha = 1$ pa nam korenski kriterij ne pove ničesar.

ZGLED 6. Za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^p$, kjer je $x > 0$ in $p \in \mathbb{R}$, je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} x/\sqrt[n]{n}^p = x$, zato vrsta konvergira za $x < 1$ in divergira za $x > 1$ ne glede na to, kakšen je p. Pri $x = 1$ se vrsta glasi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$; zanjo korenski kriterij odpove, vendar vemo od prej, da ta vrsta konvergira za $p > 1$ in divergira pri $p \leq 1$.

IZREK 5. (D'Alembertov kvocientni kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi* $a_n > 0$ *za vsak* n.
(a) *Če obstajata* $m \in \mathbb{N}$ *in pozitivno število* $q < 1$, *tako da velja* $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ *za vsak* $n \geq m$, *vrsta konvergira.*
(b) *Če velja* $a_{n+1}/a_n \geq 1$ *za vsak* $n \geq m$, *vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Pri danem pogoju velja $a_{m+1} \leq q a_m$, $a_{m+2} \leq q^2 a_m$ itd., se pravi $a_{m+k} \leq q^k a_m$ za vsak $k \geq 0$. Primerjava z geometrijsko vrsto pove, da vrsta s členi a_n, $n \geq m$ konvergira, torej konvergira tudi prvotna vrsta.
(b) Zdaj imamo $a_{m+k} \geq a_m > 0$ za vsak $k \geq 0$ in zato členi a_n ne konvergirajo k 0, vrsta je divergentna.

V izreku ni dovolj, da velja le $a_{n+1}/a_n < 1$, kot lahko npr. vidimo iz zgleda (divergentne) harmonične vrste, kjer je $a_n = 1/n$ in $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) < 1$ za vsak n.

ZGLED 7. Vrsta $\sum_{m=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ konvergira za $0 < x < 1$ in divergira za $x \geq 1$. Res! Splošni člen vrste je namreč $a_n = n x^{n-1}$, zato je $a_{n+1}/a_n = \frac{n+1}{n} x$, kar konvergira proti x. Če je $x < 1$, lahko vzamemo $q = (x+1)/2$. Za vsak dovolj velik n je $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ in vrsta konvergira. Če pa je $x \geq 1$, je $a_{n+1}/a_n = \frac{n+1}{n} x > 1$, zato vrsta divergira. (To vidimo tudi iz dejstva, da tedaj členi ne konvergirajo proti nič.)

POSLEDICA. *Za vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi označimo* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *in* $\beta = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potem vrsta konvergira, če je* $\alpha < 1$, *in divergira, če je* $\beta > 1$.

Dokaz. Če je $\alpha < 1$, obstaja q z lastnostjo $\alpha < q < 1$ in indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $a_{n+1}/a_n < q$ in po izreku 5 vrsta konvergira. Če pa je $\beta > 1$, obstaja tak m, da je $a_{n+1}/a_n > 1$ za $n \geq m$ in po izreku 5 vrsta divergira.

Opomba. Dejstvo, da je npr. limita $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$, še nič ne pove o konvergenci vrste, kot lahko spoznamo iz primerov vrst $\sum_n \frac{1}{n}$ in $\sum_n \frac{1}{n^2}$.

TRDITEV 2. *Za vsako zaporedje* (a_n) *s pozitivnimi členi velja*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dokaz. Srednja neenakost je trivialna, leva sledi iz desne, zato dokažimo samo desno. Označimo $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ in izberimo $q > \alpha$, tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ za vsak $n \geq m$. Za vsak $k \geq 0$ je torej $\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{m+k}}{a_{m+k-1}} < q^k$ oziroma $a_{m+k} \leq q^k a_m$. Drugače rečeno, $a_n \leq a_m q^{-m} q^n$, se pravi $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_m q^{-m}} \cdot q$ oziroma $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Ker velja to za vsak $q > \alpha$, imam tudi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$, kar je bilo treba dokazati.

Iz trditve 2 vidimo, da je Cauchyjev korenski kriterij močnejši od D'Alembertovega kvocientnega kriterija v naslednjem smislu. Vedno, ko kvocientni kriterij napove konvergenco, lahko konvergenco ugotovimo tudi s korenskim kriterije; kadar pa korenski kriterij odpove, odpove tudi kvocientni. Poleg tega obstajajo primeri, ko lahko konvergenco ugotovimo s korenskim kriterijem, medtem ko kvocientni kriterij o konvergenci nič ne pove.

ZGLED 8. Za vrsto $1/2 + 1/3 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/2^4 + 1/3^4 + \ldots$ je $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/3^n} = 1/\sqrt{3}$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/2^n} = 1/\sqrt{2}$ in $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(3/2)^n = +\infty$. Torej lahko ugotovimo konvergenco s korenskim kriterijem, s kvocientnim pa ne.

Kadar kvocientni kriterij odpove, je pogosto pametno uporabiti naslednji izboljšani konvergenčni kriterij.

IZREK 6 (Raabejev kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi, torej $a_n > 0$ za vsak n.*
(a) *Če obstajata $m \in \mathbb{N}$ in pozitivno število $q > 1$, tako da velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \geq q > 1$ za vsak $n \geq m$, vrsta konvergira.*
(b) *Če velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za vsak $n \geq m$, vrsta divergira.*

Dokaz. (a) Pišimo $q = 1+r$, kjer je $r > 0$, in preoblikujmo pogoj $n(a_n/a_{n+1}-1) \geq q > 1$ v pogoj $na_n - (n+1)a_{n+1} \geq ra_{n+1}$ za $n \geq m$. Označimo $b_{n+1} = na_n - (n+1)a_{n+1}$ in takoj ugotovimo, da ima vrsta $b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots$ zaradi ocene $b_{n+1} \geq ra_{n+1} > 0$ pozitivne člene in navzgor omejene delne vsote $s_k = b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_{m+k} = ma_m - (m+k)a_{m+k} \leq ma_m$, tako da je konvergentna. Potem pa je zaradi ocene $ra_{n+1} \leq b_{n+1}$ za $n \geq m$ konvergentna tudi vrsta $\sum_n a_n$.

(b) Če velja $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za vsak $n \geq m$, je $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$ za $n \leq m$, torej $(m+k)a_{m+k} \geq ma_m$ za vsak $k \geq 0$ oziroma $a_{m+k} \geq ma_m/(m+k)$ za $k \geq 0$. Na desni strani so členi z ma_m pomnožene harmonične vrste, zato po izreku 1 o primerjanju vrst tudi vrsta $\sum_n a_n$ divergira.

POSLEDICA. *Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnimi členi označimo*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty}\ n(a_n/a_{n+1} - 1) \quad \textit{in} \quad \beta = \liminf_{n\to\infty}\ n(a_n/a_{n+1} - 1).$$

Potem vrsta konvergira, če je $\beta > 1$, in divergira, če je $\alpha < 1$.

Dokaz. V prvem primeru obstaja tak $q > 1$ indeks m, da je $n(a_n/a_{n+1} - 1) \geq q > 1$ za $n \geq m$, v drugem primeru pa tak indeks m, da je $n(a_n/a_{n+1} - 1) \leq 1$ za $n \geq m$. Obakrat rezultat sledi iz izreka 6.

Najlažje je ugotoviti konvergenco, kadar obstaja limita $\alpha = \lim_{n\to\infty}\ n(a_n/a_{n+1} - 1)$. Tedaj vrsta konvergira, če je $\alpha > 1$ in divergira, če je $\alpha < 1$. Kadar je $\alpha = 1$, tudi Raabejev kriterij odpove.

ZGLED 9. Za vrsto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, smo že ugotovili, kdaj konvergira. Preskusimo na njej še Raabejev kriterij. Ker je v tem primeru

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = \lim_{n\to\infty} n((1+1/n)^p - 1) = \lim_{h\to 0} ((1+h)^p - 1)/h = f'(1),$$

kjer je $f(x) = x^p$, imamo zaradi $f'(x) = px^{p-1}$ in zato $\alpha = f'(1) = p$. Vidimo, da vrsta konvergira za $p > 1$ in divergira za $p < 1$. Kriterij nam ničesar ne pove, kadar je $p = 1$; tedaj pa je vrsta harmonična, torej divergentna.

Absolutno in pogojno konvergentne vrste

DEFINICIJA 3. Rečemo da konvergira vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *absolutno*, če konvergira vrsta iz absolutnih vrednosti $|a_1| + |a_2| + ...$ Če to ni res, rečemo, da vrsta konvergira le *pogojno*.

TRDITEV 3. *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. To vidimo iz trikotniške neenakosti. Naj bo $m < n$. Tedaj je $|a_{m+1} + ... + a_n| \leq |a_{m+1}| + ... + |a_n|$. Če vrsta absolutno konvergira, je desna stran te neenakosti poljubno majhna. Potem pa velja isto za levo stran. Vrsta torej zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato je konvergentna.

TRDITEV 4. *Če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...$ absolutno, zaporedje (b_n) pa je omejeno, konvergira absolutno tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ...$*

Dokaz. Naj bo $|b_n| \leq M$ za vsak n za neko konstanto $M > 0$. Zaradi ocene $|a_n b_n| \leq M|a_n|$, veljavne za vsak n, lahko uporabimo primerjalni test za vrste s pozitivnimi členi (izrek 1).

Poseben primer so t.i. *alternirajoče* vrste, kjer predznaki členov alternirajo: imamo $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$, kjer so zdaj vsi koeficienti $a_i > 0$.

IZREK 7 (Leibnizov kriterij). *Alternirajoča vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ konvergira, če je zaporedje (a_n) padajoče in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dokaz. Oglejmo si $2n$-to delno vsoto $s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$. Očitno je zaporedje sodih delnih vsot (s_{2n}) naraščajoče in omejeno z $|s_{2n}| \leq a_1$, zato je konvergentno proti nekemu številu s. Zaporedje lihih delnih vsot s_{2n+1} prav tako konvergira proti s, saj je $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Potem pa tudi celo zaporedje delnih vsot s_n konvergira proti s.

ZGLED 10. Vrsta $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ konvergira po zgornjem izreku, saj alternira in njeni členi po absolutni vrednosti monotono padajo in konvergirajo proti nič. Vendar, kot smo videli, ta konvergenca ni absolutna; vrsta iz absolutnih vrednosti je namreč harmonična in divergira.

Izračunajmo vsoto konvergentne vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Zanjo je

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) =$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}.$$

Oglejmo si določeni integral $\int_1^2 dx/x$ in njegovo spodnjo Darbouxovo vsoto $s(f; D) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$ za funkcijo $f(x) = 1/x$ in enakomerno delitev $D = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, kjer je $x_j = 1 + j/n$ za $j = 0, 1, 2, ..., n$, intervala $[1, 2]$ na n enako dolgih podintervalov. Potem je $\Delta x_j = 1/n$ za vsak j in

$$s(f;D) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(1+j/n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j} = s_{2n}$$

ravno $2n$-ta delna vsota naše vrste. Ker vemo, da spodnje Darbouxove vsote konvergirajo proti določenemu integralu $\int_1^2 dx/x = \ln x|_1^2 = \ln 2$, vidimo odtod, da je tudi vsota konvergentne vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ enaka $\ln 2$.

Izrek 7 je poseben primer naslednjega izreka, ki je diskretna analogija *Dirichletovega testa* za posplošeni integral (izrek 6 v 4. razdelku 1. poglavja).

IZREK 8. *Naj bo (a_n) padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito nič, zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ...$ z realnimi členi pa naj bo omejeno. Potem je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Dokaz. Delne vsote vrste $\sum_n a_n b_n$ označimo z s_n, delne vsote vrste $\sum_n b_n$ označimo z t_n. Zaradi omejenosti slednjih obstaja tak $M > 0$, da je $|t_n| \leq M$. Naj bo $m < n$; izračunajmo in ocenimo razliko dveh dovolj poznih delnih vsot za vrsto $\sum_n a_n b_n$. Najprej dobimo

$$s_n - s_m = a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + ... + a_n b_n =$$

$$a_{m+1}(t_{m+1} - t_m) + a_{m+2}(t_{m+2} - t_{m+1}) + ... + a_n(t_n - t_{n-1}) =$$

$$-a_{m+1}t_m + (a_{m+1} - a_{m+2})t_{m+1} + (a_{m+2} - a_{m+3})t_{m+2} + ... + (a_{n-1} - a_n)t_{n-1} + a_n t_n,$$

odtod pa oceno $|s_n - s_m| \leq$

$$a_{m+1}|t_m| + (a_{m+1} - a_{m+2})|t_{m+1}| + (a_{m+2} - a_{m+3})|t_{m+2}| + ... + (a_{n-1} - a_n)|t_{n-1}| + a_n|t_n| \leq$$

$$2Ma_{m+1}.$$

Če pošljemo $m \to \infty$ (in s tem tudi $n \to \infty$), konvergira desna stran (in s tem tudi leva stran) proti nič. To pomeni, da je zaporedje delnih vsot (s_n) Cauchyjevo, torej konvergentno.

ZGLED 11. (a) V posebnem primeru, ko vzamemo $b_n = (-1)^{n-1}$, tako da so delne vsote t_n enake 1 (če je n liho število) in 0 (če je n sodo število), torej omejene, dobimo Leibnitzov kriterij za alternirajoče vrste: če je $a_k > 0$ in $a_k \searrow 0$ monotono padajoče, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergira.

(b) V posebnem primeru, ko izberemo $b_n = \sin nx$, so delne vsote t_n za vrsto $\sum_n b_n$ tudi omejene, saj se lahko hitro prepričamo, da je $t_n = 0$, če je $\sin x = 0$ in

$$t_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \sin(n+1)x/2 \sin(nx/2)/\sin(x/2),$$

če je $\sin x \neq 0$, ter je zato v zadnjem primeru $|t_n| \leq 1/|\sin(x/2)|$. Po izreku 8 je potem vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$$

vedno konvergentna, če je le a_n padajoče zporedje pozitivnih števil z limito nič.

Podobno dokažemo, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ...$$

konvergentna, razem morda za $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, če je le a_n padajoče zporedje pozitivnih števil z limito nič.

Opomba. Če predpostavke izreka 8 niso izpolnjene, tudi sklep ne velja. Kot zgled lahko vzamemo npr. naslednje pare zaporedij: (i) $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$, (ii) $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = (-1)^n$, (iii) $a_n = 1/n$, $b_n = 1$. V nobenem od teh primerov vrsta $\sum_n a_n b_n$ ne konvergira.

Računske operacije z vrstami

Dve vrsti seštejemo (odštejemo) tako, da seštejemo (odštejemo) istoležne člene. Podobno pomnožimo vrsto s konstanto tako, da s to konstantno pomnožimo vsak člen vrste. Torej je npr. *vsota* vrst $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ enaka vrsti $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ in produkt vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s konstanto c enaka vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$.

Poskušajmo ugotoviti, kako je s konvergenco vsote dveh konvergentnih vrst in s konvergenco produkta konvergentne vrste s konstanto.

TRDITEV 5. *Če sta vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni in imata vsoti A oziroma B, je konvergenta tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ in ima vsoto $A+B$. Prav tako je konvergentna tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ in ima vsoto cA. Če sta prvotni vrsti absolutno konvergentni, sta absolutni tudi dobljeni vrsti.*

Dokaz. Označimo delni vsoti vrst z A_n in B_n, torej $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ in $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Potem je $A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ delna vsota sestavljene vrste in zato velja tudi $\lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B$. Podobno je $cA_n = \sum_{k=1}^{n} ca_k$ in $\lim_{n\to\infty} cA_n = cA$. Absolutna konvergenca za vsoto dveh vrst sledi iz trikotniške neenakosti $|a_k+b_k| \le |a_k|+|b_k|$ in primerjalnega kriterija za vrste s pozitivnimi členi. Absolutna konvergenca za produkt vrste s konstanto ugotovimo še lažje: $\sum_k |ca_k| = |c| \sum_k |a_k|$.

Opomba. Ko smo že pri oznakah $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ in $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ za delne vsote dveh vrst, povejmo, da velja naslednja diskretna analogija formule za integracijo po delih.

Sumacija po delih: Za vsak m je

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n b_{n+1} = A_m B_{m+1}.$$

Dokaz. Postavimo $A_0 = 0$. Potem je

$$\sum_{n=1}^{m} a_n B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n b_{n+1} = \sum_{n=1}^{m}(A_n - A_{n-1})B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n(B_{n+1} - B_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{m} A_n B_n - \sum_{n=1}^{m} A_{n-1} B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n B_{n+1} - \sum_{n=1}^{m} A_n B_n = A_m B_{m+1}.$$

Kot posledico trditve 5 si oglejmo naslednji izrek, ki ga včasih imenujejo tudi *Abelov test* za konvergenco.

IZREK 9. *Naj bo (a_n) monotono konvergentno zaporedje pozitivnih števil, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots$ pa naj konvergira. Potem je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Dokaz. Naj bo npr. zaporedje (a_n) padajoče in naj konvergira proti številu a. Potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vsota dveh konvergentnih vrst (prva vrsta konvergira po izreku 10, saj konvergirajo členi $a_n - a$ monotono proti nič, delne vsote vrste $\sum_k b_k$ pa so seveda omejene), torej tudi sama konvergentna vrsta.

S seštevanjem vrst nismo imeli težav, množenje pa ni tako preprosto. Končni vsoti zmnožimo tako, da vsak člen prve vsote zmnožimo z vsakim členm druge vsote in dobljene produkte seštejemo. Ali se da to pravilo razširiti tudi na neskončne vsote, tj. na vrste?

Najprej definirajmo, kaj bomo šteli za *produkt* dveh vrst.

DEFINICIJA 4. Pri danih vrstah $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ označimo za vsak $n = 0, 1, 2, ...$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vrsti $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ rečemo (Cauchyjev) *produkt* vrst $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

S konvergenco produkta so še večje težave. Če je npr. $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ in če vemo, da $A_n \to A$ in $B_n \to B$, nasploh ni jasno, zakaj bi potem konvergiral tudi C_n in, če že konvergira, zakaj bi konvergiral ravno proti AB. Naslednji zgled pokaže, da produkt dveh konvergentnih vrst lahko divergira.

ZGLED 12. Imejmo konvergentno (alternirajočo) vrsto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + ...$$

in izračunajmo njen kvadrat (produkt vrste s samo seboj). Hitro se lahko prepričamo, da je po formuli iz definicije 4

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geq \frac{2}{n+2},$$

saj je $(n-k+1)(k+1) = (n/2+1)^2 - (n/2-k)^2 \leq (n/2+1)^2$. Torej dobimo

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2.$$

Potreben pogoj $c_n \to 0$ za konvergenco vrste $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ni izpolnjen, vrsta ne konvergira.

Naslednji izrek, ki ga je dokazal Mertens, to pomanjkljivost odpravlja, vendar potrebujemo absolutno konvergenco vsaj ene od obeh vrst.

IZREK 10. *Denimo, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira absolutno in da je njena vsota enaka A, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergira in ima vsoto B ter je $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ za vsak $n = 0, 1, 2, ...$ Potem tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira in ima vsoto AB.*

Dokaz. Označimo $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ in $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Potem je

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + ... + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0) = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + ... + a_n B_0 =$$

$$a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + ... + a_n(B_0 - B) + A_n B = s_n + A_n B,$$

kjer je $s_n = a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + ... + a_n(B_0 - B)$. Naj bo $s = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ in pokažimo, da $s_n \to 0$. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da je $|B_n - B| < \epsilon$ za vsak $n \geq m$. Torej je za vsak $n \geq m$

$$|s_n| \leq |a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + |a_{n-m-1}(B_{m+1} - B) + ... + a_0(B_n - B)| \leq$$

$$|a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + |a_{n-m-1}||B_{m+1} - B| + ... + |a_0||B_n - B| \leq$$

$$|a_n(B_0 - B) + ... + a_{n-m}(B_m - B)| + s\epsilon.$$

Pošljimo $n \to \infty$ pa dobimo $\limsup_{n\to\infty} |s_n| \leq s\epsilon$. To velja za vsak $\epsilon > 0$, torej je $\limsup_{n\to\infty} |s_n| = 0$, se pravi, da s_n konvergira proti nič. Potem pa je tudi

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} A_n B = AB.$$

Kasneje bomo (kot posledico Abelovega izreka iz teorije potenčnih vrst) pokazali, da velja $C = AB$ tudi brez absolutne konvergence ene od vrst, vendar moramo v tem primeru vedeti, da poleg konvergence vrst $\sum_k a_k$ proti A in $\sum_k b_k$ proti B, konvergira tudi vrsta $\sum_k c_k$, s členi $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, proti C.

Preureditev vrst

Če v končni vsoti spremenimo vrstni red členov, dobimo zaradi komutativnosti seštevanja realnih števil isti rezultat. Kako pa je s tem pri neskončnih vrstah? Če spremenimo vrstni red samo končno mnogo členom, to na konvergenco in končno vsoto vrste ne vpliva. Kaj pa če spremenimo položaj neskončno mnogo členov, če torej vrsto popolnoma preuredimo? Najprej moramo povedati, kaj razumemo s tem pojmom.

DEFINICIJA 5. Naj bo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poljubna bijekcija (permutacija) naravnih števil. Potem imenujemo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \ldots$ *preureditev dane vrste.*

Ker so delne vsote preurejene vrste lahko popolnoma druga števila kot delne vsote prvotne vrste, ni jasno, ali iz konvergence prvotne vrste sledi tudi konvergenca preurejene vrste. Vprašanje je tudi, ali ima preurejena vrsta, tudi če konvergira, isto vsoto kot prvotna. Nasploh slednje ni res, kot pove naslednji preprost zgled.

ZGLED 13. Vemo, da ima alternirajoča vrsta $1-1/2+1/3+\ldots$ vsoto $\ln 2$. Pa preuredimo to vrsto tako, da bomo po vrsti zapisovali en pozitivni člen in dva zaporedna negativna člena. Preurejena vrsta se torej glasi: $1-1/2-1/4+1/3-1/6-1/8+\ldots$. Potem je delna vsota te vrste z indeksom $n = 3m$ enaka

$$s_{3m} = (1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\ldots+(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}) =$$

$$\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m})].$$

Torej je $\lim_{m\to\infty} s_{3m} = (\ln 2)/2$ in isto velja za $s_{3m+1} = s_{3m} + 1/(2m+1)$ in za $s_{3m+2} = s_{3m+1} - 1/(4m+2)$. Torej preurejena vrsta tudi konvergira, vendar ima vsoto $(\ln 2)/2$, pol manjšo od vsote prvotne vrste.

Vrsta iz zadnjega zgleda je bila samo pogojno konvergentna. Pri absolutno konvergentnih vrstah pa preureditev (zamenjava vrstnega reda členov) ne vpliva niti na konvergenco niti na vrednost vsote.

IZREK 11. *Pri absolutno konvergentni vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je za vsako permutacijo π naravnih števil tudi preurejena vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ konvergentna in ima isto vsoto.*

Dokaz. Delne vsote vrst $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ označimo z s_n oziroma s'_n. Zaradi absolutne konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja za vsak $\epsilon > 0$ tak indeks m, da za $n \geq m$ velja $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$. Izberimo tako velik p, da je $\{1,2,\ldots,m\} \subset \{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(p)\}$. Če je $n \geq p$ se v razliki delnih vsot $s_n - s'_n$ krajšajo vsi členi $a_1, a_2, \ldots, a_m$, zato je $|s_n - s'_n| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$. To pomeni, da $s_n - s'_n \to 0$; zato konvergira tudi zaporedje delnih vsot preurejene vrste s'_n in velja $\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Videli smo, da za pogojno konvergentne vrste podoben sklep ne velja. Celo več, pri teh vrstah lahko s primerno preureditvijo dosežemo, da vrsta več ne konvergira, ali pa da konvergira in ima za vsoto poljubno vnaprej izbrano realno število.

IZREK 12 (Riemann). *Če je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pogojno konvergentna vrsta, obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$ taka permutacija π naravnih števil, da ima preurejena vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ vsoto t.*

Dokaz. Pogojno konvergentna vrsta ima neskončno mnogo pozitivnih in neskončno mnogo negativnih členov, sicer bi bila njena konvergenca absolutna. Zapišimo njeno n-to delno vsoto v obliki $s_n = p_n - q_n$, kjer pomeni p_n vsoto pozitivnih in q_n vsoto absolutnih vrednosti negativnih členov v s_n. Za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ iz absolutnih vrednosti členov je n-ta delna vsota enaka $S_n = p_n + q_n$. Zaradi pogojne konvergence konvergirajo delne vsote s_n

proti neki limiti s, medtem ko delne vsote S_n vrste iz absolutnih vrednosti členov naraščajo v neskončnost. Odtod sledi, da tudi števila p_n in q_n naraščajo v neskončnost.

Naj bo $b_1 + b_2 + ...$ vrsta iz pozitivnih členov prvotne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, tako da je $p_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ njena n-ta delna vsota, in $c_1 + c_2 + ...$ vrsta iz absolutnih vrednosti negativnih členov vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z n-to delno vsoto $q_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$. Kljub divergenci teh dveh vrst pa velja $b_k \to 0$ in $c_k \to 0$, saj vrsta s členi a_k konvergira. Naj bo npr. $t > 0$ poljubno pozitivno število. in naj bo n najmanjši indeks, pri katerem je $p_n > t$. Zaporedje $p_n - q_1, p_n - q_2, ...$ je padajoče in divergira proti $-\infty$. Naj bo m najmanjši indeks, pri katerem je $p_n - q_m < t$. Sedaj prištejmo izrazu $p_n - q_m$ toliko nadaljnjih zaporednih členov vrste $\sum_k b_k$, da bo skupna vsota večja od t, nato pa isto ponovimo z odštevanjem nadaljnjih zaporednih členov vrste $\sum_k c_k$ itd. Na koncu dobimo neskončno vrsto, v kateri so zajeti (v spremenjenem vrstnem redu) vsi členi tako vrste $\sum_k b_k$ kot vrste $\sum_k c_k$, torej tudi vrste $\sum_k a_k$. Ker se členi b_k in c_k manjšajo proti nič, se dovolj pozna delna vsota tako dobljene preurejene vrste razlikuje od števila t tako malo, kot želimo. Torej preurejena vrsta konvergira in ima vsoto t.

Opomba. V izreku 12 je t lahko tudi $\pm\infty$ (v tem primeru preurejena vrsta divergira). To dokažemo enako kot zgoraj, le da npr. na j-tem koraku prištejemo toliko pozitivnih členov b_k, da pridemo čez j, nato pa odštejemo toliko pozitivnih členov c_k, da spet pademo pod j. Ker je $j = 1, 2, 3, ...$, pridemo v limiti v $+\infty$ (ali v $-\infty$, če zamenjamo vlogo b_k in c_k in na j-tem koraku skušamo doseči število $-j$).

Vrste s kompleksnimi členi

Doslej smo obravnavali realna zaporedja in vrste z realnimi členi. Ampak prav enako bi lahko študirali tudi konvergenco zaporedij in vrst s kompleksnimi členi.

Konvergenca zaporedja (c_n) s kompleksnimi členi je enaka kot v realnem. Kompleksno število c je limita tega zaporedja, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja indeks m, tako da za $n \geq m$ velja $|c_k - c| < \epsilon$. Razlika je le ta, da tu uporabimo absolutno vrednost za kompleksna števila. Če je npr. $c_k = a_k + ib_k$, $c = a + ib$ kanonski zapis števil c_k in c, je $|c_k - c| = \sqrt{|a_k - a|^2 + |b_k - a|^2}$. Odtod tudi vidimo, da $c_k \to c$ natanko takrat, ko $a_k \to a$ in $b_k \to b$.

Pri vrstah je čisto podobno: vrsta s kompleksnimi členi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot s_n, ki so zdaj tudi kompleksna števila. Vrsta konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ iz absolutnih vrednosti členov. Ker je s kanonskim zapisom členov $\sum_k c_k = \sum_k a_k + i \sum_k b_k$, kjer so zdaj členi a_k in b_k realni, vidimo, da vrsta $\sum_k c_k$ konvergira (absolutno) natanko takrat ko konvergirata (absolutno) vrsti $\sum_k a_k$ in $\sum_k b_k$. Za absolutno konvergenco vrste s kompleksnimi členi lahko uporabimo iste kriterije, kot za absolutno konvergenco vrst z realnimi členi.

2. Funkcijska zaporedja in funkcijske vrste

V tem razdelku si bmo ogledali pomembne lastnosti v zvezi z zaporedji funkcij, ki konvergirajo proti neki funkciji. Raziskali bomo, kako zveznost, integrabilnost ali odvedljivost posameznih členov vpliva na zveznost, integrabilnost ali odvedljivost limitne funkcije. Kasneje bomo te ugotovitve uporabili tudi pri vrstah, katere členi so funkcije.

Imejmo zdaj zaporedje realnih funkcij f_n, ki so vse definirane na skupni podmnožici $S \subset \mathbb{R}$. Na kratko govorimo o funkcijskem zaporedju (f_n).

DEFINICIJA 1. Rečemo, da funkcijsko zaporedje (f_n) *konvergira po točkah* proti funkciji f, če za vsak $x \in S$ zaporedje realnih števil $(f_n(x))$ konvergira proti številu $f(x)$, tj. če za vsak $x \in S$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ker je pri vsakem $x \in S$ limita $f(x)$ natančno določena, dobimo na ta način spet neko realno funkcijo f, definirano na podmnožici $S \subset \mathbb{R}$.

ZGLED 1. (a) $f_n(x) = x^n$, $S = [0,1]$; Za $0 \leq x < 1$ velja $f_n(x) = x^n \to 0$, za $x = 1$ pa je $f_n(x) = 1$. Torej konvergira zaporedje teh funkcij na množici S po točkah proti funkciji f, za katero velja $f(x) = 0$ za $0 \leq x < 1$ in $f(1) = 1$.

(b) $f_n(x) = 2nx/(1 + n^2x^2)$, $S = \mathbb{R}$; ni težko videti, da konvergira zdaj funkcijsko zaporedje (f_n) na vsej realni osi po točkah proti funkciji $f(x) = 0$.

(c) $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$; tudi zdaj velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(d) Naj bo $f_n(x)$ enako n^2x za $0 \leq x < 1/n$, $n^2(2/n - x)$ za $1/n \leq x < 2/n$ in 0 za $x \geq 2/n$. Potem je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za vsak $x \geq 0$, saj je $f_n(0) = 0$ za vsak n, pri poljubnem $x > 0$ pa je $f_n(x) = 0$, če je le $1/n < x$ oziroma $n > 1/x$.

Enakomerna konvergenca funkcijskih zaporedij

Konvergenca funkcijskega zaporedja (f_n) po točkah proti funkciji f pomeni, da za vsak $x \in S$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \geq m$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Indeks m je tu odvisen od števila ϵ in tudi od točke $x \in S$. Konvergenca po točkah je najpreprostejša vrsta konvergence funkcij. Zahtevnejša pa je naslednja definicija.

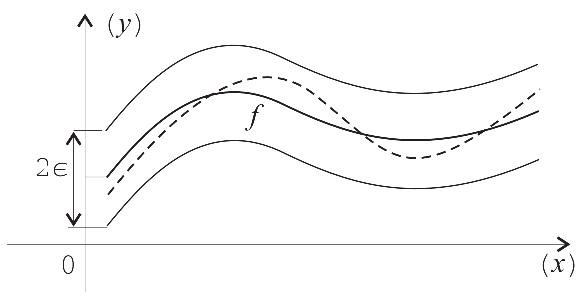
DEFINICIJA 2. Rečemo, da funkcijsko zaporedje (f_n) konvergira na podmnožici S *enakomerno* proti funkciji f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \geq m$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ za vse $x \in S$.

V tej definiciji pa je indeks m odvisen samo od števila ϵ in nič od točke x. Kadar gre za enakomerno konvergenco je isti m je dober za vsak $x \in S$. Drugače rečeno, Če npr. pri nekem $\epsilon > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo tako točko $x_n \in S$, da velja $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ (tj. če obstaja zaporedje točk (x_n) z lastnostjo, da $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne konvergira proti 0), konvergenca ne more biti enakomerna.

ZGLED 2. Konvergenca zaporedja (f_n) iz točke (b) v zgledu 1 ni enakomerna. Če je npr. $\epsilon = 1$, je za vsak n izpolnjena enakost $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$ in $f_n(1/n) \not\to 0$.

Prav tako ni enakomerna konvergenca iz točke (a) istega zgleda niti na podmnožici $[0,1)$, saj pri $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ zaporedje $f_n(x_n) = 1/2$ ne konvergira proti nič, ali iz točke (d), saj je tedaj $f_n(1/n) = n$.

Pač pa je konvergenca zaporedja iz točke (c) zgleda 1 enakomerna na vsej realni osi. Velja namreč ocena $|f_n(x) - f(x)| = |\sin nx|/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{n}$. Ker za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $m > 1/\epsilon^2$, da je $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{m} < \epsilon$ za $n \geq m$, velja za take indekse n tudi $|\sin nx|/\sqrt{n} < \epsilon$ in to za vsak $x \in \mathbb{R}$.



SLIKA 2

Opomba. 1. Geometrijsko pomeni enakomerna konvergenca dejstvo, da ležijo v epsilonskem pasu $\{(x,y);\ x \in S,\ f(x)-\epsilon < y < f(x)+\epsilon\}$ okrog grafa limitne funkcije f grafi vseh funkcij f_n z indeksom n, večjim od nekega indeksa m.
2. Dejstvo, da je $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$ za vsak $x \in S$, pomeni, da je $\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon$, zato lahko enakomerno konvergenco definiramo tudi tako: za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za vsak $n \geq m$ velja $\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$.

DEFINICJA 3. Funkcijsko zaporedje (f_n) je *enakomerno Cauchyjevo* na množici S, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$ velja $|f_n(x)-f_k(x)| < \epsilon$.

Kot pri definiciji enakomerne konvergence je treba poudariti, da je tu m odvisen le od števila ϵ, ne pa od točke x. Tako kot pri običajnih številskih vrstah je mogoče pokazati, da je funkcijsk zaporedje (f_n) na množici S enakomerno Cauchyjevo natanko takrat, ko je enakomerno knvergentno.

TRDITEV 1. *Funkcijsko zaporedje (f_n) je* enakomerno Cauchyjevo *na množici S natanlko takrat, ko je na S enakomerno konvergentno.*

Dokaz. Iz enakomerne konvergence takoj sledi enakomerna Cauchyjeva lastnost. Če namreč $f_n \to f$ enakomerno na S, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak m, da za $n \geq m$ velja $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon/2$ za vsak $x \in S$. Potem za vsak $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$ velja tudi $|f_n(x)-f_k(x)| \leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_k(x)| < \epsilon$.
Obratno, če velja $|f_n(x)-f_k(x)| < \epsilon$ za vsak $n, k \geq m$ in za vsak $x \in S$, pošljimo v tej neenakosti $k \to \infty$, da dobimo $|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon$, kjer je $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (limita po točkah $f_k \to f$ obstaja, ker je številsko zaporedje $(f_k(x))$ Cauchyjevo). Ker velja zadnja ocena za vsak $x \in S$, če je le $n \geq m$, je konvergenca enakomerna na množici S.

Funkcijsko zaporedje iz zgleda 1(a), katerega členi so funkcije f_n, definirane z $f_n(x) = x^n$, konvergira na množici $S = [0,1]$ proti nezvezni funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} ,$$

čeprav so vsi členi zvezne funkcije (potence). Tu konvergenca funkcijskega zaporedja, kot smo videli, ni enakomerna. Pokažimo, da se pri enakomerni konvergenci kaj takega ne more primeriti.

IZREK 1. *Naj bo (f_n) zaporedje zveznih funkcij, ki na množici S enakomerno konvergira proti funkciji f. Tedaj je tudi limita f zvezna funkcija.*

Dokaz. Izberimo si poljubno točko $a \in S$ in pokažimo, da je limitna funkcija zvezna v točki a. Za vsak $\epsilon > 0$ moramo poiskati tak $\delta > 0$, da bo za $|x-a| < \delta$ veljalo $|f(x)-f(a)| < \epsilon$. Najprej ocenimo po trikotniški neenakosti: $|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(a)| + |f_n(a)-f(a)|$. Zaradi enakomerne konvergence obstaja tak dovolj pozen indeks n, da sta tako prvi kot zadnji člen pod $\epsilon/3$, ne glede na to, kje smo izbrali $x \in S$. Pri tako izbranem indeksu n pa zaradi zveznosti funkcije f_n obstaja tak $\delta > 0$, da iz $|x-a| < \delta$ sledi tudi $|f_n(x)-f_n(a)| < \epsilon/3$. Torej je skupaj $|f(x)-f(a)| < \epsilon$, če je le $|x-a| < \delta$, kar je bilo treba videti.

Iz tega izreka ponovno vidimo, da funkcijsko zaporedje (f_n) iz zgleda 1(a) ne more biti enakomerno konvergentno.

POSLEDICA. *Če zaporedje zveznih funkcij f_n na množici S enakomerno konvergira, velja za vsak $a \in S$ enakost*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Dokaz. Označimo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ za vsak $x \in S$. Po izreku 1 je zaradi enakomerne konvergence zaporedja (f_n) funkcija f zvezna. Torej po definiciji zveznosti funkcij f in f_n velja $\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$.

Iz enakomerne konvergence funkcijskega zaporedja f_n seveda sledi njegova konvergenca po točkah. Obratno pa nasploh ne drži, tudi če vemo, da je limitna funkcija zvezna (glej npr. zgled 1(b)). Je pa ob dodatnih predpostavkah možno doseči tudi to.

IZREK (Dini). *Imejmo zaporedje zveznih funkcij (f_n), ki je na kompaktni podmnožici $K \subset \mathbb{R}$ monotono padajoče (tj. za vsak $x \in K$ velja $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$) in po točkah konvergira proti zvezni funkciji f. Potem je konvergenca $f_n \to f$ na intervalu $[a, b]$ enakomerna.*

Dokaz. Če za vsak n označimo $g_n = f_n - f$, je (g_n) padajoče zaporedje, ki na K po točkah konvergira proti 0. Izberimo poljuben $\epsilon < 0$. Množica $K_n = \{x \in K;\ g_n(x) \geq \epsilon\}$ je zaprta podmnožica v K, saj zaradi zveznosti funkcije g_n vsebuje vse svoje limitne točke (iz $x_k \to x$ in $g_n(x_k) \geq \epsilon$ sledi $g_n(x) \geq \epsilon$). Vsaka zaprta podmnožica kompaktne množice K pa je tudi sama kompaktna. Poleg tega zaradi padanja funkcijskega zaporedja g_n velja tudi $K_{n+1} \subset K_n$. Torej je K_n padajoče zaporedje kompaktnih množic. Če bi bile vse te množice neprazne, bi bile po neki trditvi iz analize 1 (glej zadnjo trditev 4. razdelka v 1. poglavju) tudi njihov presek $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ neprazen. Toda element x iz preseka bi bil vsebovan v K_n za vsak n, se pravi, da bi za vsak n veljalo $g_n(x) \geq \epsilon$, kar pa je v nasprotju s predpostavko $g_n(x) \to 0$. To pomeni, da je ena od množic, npr. K_m prazna. Potem so prazne tudi nadaljnje množice, tako da za vsak $n \geq m$ velja $0 \leq g_n(x) < \epsilon$ za vsak $x \in K$. Dobimo enakomerno konvergenco zaporedja g_n proti 0 oziroma zaporedja f_n proti f.

Oglejmo si še povezavo funkcijskega zaporedja z integrali in odvodi posameznih členov in morebitne limitne funkcije.

Imejmo zaporedje integrabilnih funkcij f_n na intervalu $[a, b]$, ki npr. konvergira po točkah proti funkciji f. Z integracijo posameznih členov dobimo zaporedje integralov $\int_a^b f_n(x)dx$. Ali je potem tudi limitna funkcija integrabilna? Ali tudi zaporedje integralov konvergira in če knvergira ali morebiti konvergira proti integralu limitne funkcije? Na ta vprašanja odgovorja naslednji izrek.

IZREK 2. *Če zaporedje integrabilnih funkcij f_n na intervalu $[a, b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, je tudi limitna funkcija f integrabilna na $[a, b]$ in zaporedje funkcij $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ za vsak $c \in [a, b]$ konvergira proti funkciji $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ enakomerno na $[a, b]$.*

Dokaz. Zaradi enakomerne konvergence za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da za $n \geq m$ in za vsak $t \in [a, b]$ velja $f_n(t) - \epsilon < f(t) < f_n(t) + \epsilon$. Potem pa je res tudi

$$\int_a^b (f_n(t) - \epsilon)dt = s(f_n - \epsilon) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f_n + \epsilon) = \int_a^b (f_n(t) + \epsilon)dt,$$

kjer sta $s(f)$ in $S(f)$ spodnji oziroma zgornji Darbouxov integral funkcije f. Torej velja $0 \leq S(f) - s(f) \leq 2\epsilon(b - a)$. Ker velja to za vsak $\epsilon > 0$, je $s(f) = S(f)$ in funkcija f je integrabilna na intervalu $[a, b]$. Poleg tega lahko za vsak $x \in [a, b]$ in za vsak $n \geq m$ ocenimo

$$|F_n(x) - F(x)| = |\int_c^x (f_n(t) - f(t))dx| \leq |\int_c^x |f_n(t) - f(t)|dx| \leq \epsilon|x - c| \leq \epsilon(b - a),$$

kar pomeni, da $F_n \to F$ enakomerno na $[a, b]$.

POSLEDICA 1. *Če zaporedje zveznih funkcij f_n na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, konvergira zaporedje funkcij $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ za vsak $c \in [a,b]$ proti funkciji $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ enakomerno na $[a,b]$.*

Dokaz. Zdaj že vemo, da je tudi limitna funkcija zvezna (izrek 1), ostalo sledi iz izreka 2.

POSLEDICA 2. *Če zaporedje zveznih funkcij f_n na intervalu $[a,b]$ enakomerno konvergira proti funkciji f, velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Opomba. Brez enakomerne konvergence izrek ne velja. Vemo, da v primeru iz zgleda 1(d) zaporedje funkcij f_n konvergira proti ničelni funkciji $f(x) = 0$, vendar konvergenca ni enakomerna npr. na intervalu $[0,1]$. V tem primeru je $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ za vsak n, torej tudi $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$, medtem ko je $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Še ena posledica izreka 2 je izrek o odvajanem funkcijskem zaporedju. Enakomerna konvergenca zaporedja odvedljivih funkcij f_n ničesar ne pove o konvergenci zaporedja njihovih odvodov f_n', kot se lahko poučimo iz zgleda 1(c). Tam je $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$ za vsak n in vsak $x \in \mathbb{R}$, zato je $f_n'(x) = \sqrt{n}\,\sin nx$. V zgledu 2 smo videli, da je konvergenca $f_n \to 0$ enakomerna na vsej realni osi, vendar pa za podzaporedje (f_{2n+1}') velja $f_{2n+1}'((2n+1)\pi/2)$, kar ni omejeno (v resnici zaporedje (f_n') v nobeni točki $x \neq k\pi$ ne konvergira). Zato so za konvergenco odvodov potrebne močnejše predpostavke.

IZREK 3. *Naj bo (f_n) zaporedje zvezno odvedljivih funkcij, ki konvergira vsaj v eni točki $c \in [a,b]$. Če poleg tega zaporedje odvodov f_n' konvergira enakomerno na $[a,b]$, konvergira tudi zaporedje (f_n) na $[a,b]$ enakomerno proti neki odvedljivi funkciji f, pri čemer velja $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Dokaz. Po osnovni formuli integralskega računa je zaradi zveznosti odvodov f_n' za vsak n in za vsak $x \in [a,b]$ izpolnjena enakost

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt.$$

Zaradi enakomerne konvergence odvodov f_n' proti neki zvezni funkciji g, konvergirajo po izreku 2 funkcije $F_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt$ enakomerno na $[a,b]$ proti funkciji $F(x) = \int_c^x g(t)dt$. Naj bo $d = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja torej tak indeks m, da za $n \geq m$ velja $|f_n(c) - d| < \epsilon/2$ in za vsak $x \in [a,b]$ tudi $|F_n(x) - F(x)| < \epsilon/2$. Zaradi ocene

$$|f_n(x) - d - F(x))| = |f_n(c) - d + F_n(x) - F(x)| \leq |f_n(c) - d| + |F_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

konvergira potem tudi prvotno zaporedje (f_n) enakomerno na $[a,b]$ proti funkciji $f(x) = d + \int_c^x g(t)dt$. Odtod vidimo, da je tudi funkcija f odvedljiva in da velja $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Opomba. Podoben izrek (z enakim sklepom) velja tudi za zaporedje funkcij f_n, ki so na intervalu $[a,b]$ zgolj odvedljive (ne pa nujno zvezno odvedljive). Dokaz izreka s temi šibkejšimi predpostavki pa je nekoliko bolj zapleten (glej npr. [**?**], str. 152).

TRDITEV 2. *Naj bo $f(x,t)$ zvezna funkcija dveh spremenljivk na pravokotniku $[a,b] \times [c,d]$ in $F(x) = \int_c^d f(x,t)dt$ za vsak $x \in [c,d]$. Potem je F zvezna funkcija na $[a,b]$.*

Dokaz. Ker je f zvezna funkcija na kompaktni množici $[c,d] \times [a,b]$ je tam enakomerno zvezna (glej zadnji izrek v II. poglavju Analize 1). Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x, y \in [c, d]$, $t \in [a, b]$ in $|x - y| < \delta$ sledi $|f(x, t) - f(y, t)| < \epsilon/(b - a)$. Torej je

$$|F(x) - F(y)| = |\int_a^b (f(x,t) - f(y,t))dt| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(y,t)|dt \leq \epsilon.$$

TRDITEV 3. *Naj bosta f in $\frac{\partial f}{\partial x}$ zvezni funkciji na $[a, b] \times [c, d]$ in $F(x) = \int_c^d f(x, t)dt$ za vsak $x \in [c, d]$. Potem je funkcija F odvedljiva in za vsak $x \in [c, d]$ velja*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Dokaz. Fiksirajmo $x \in [c, d]$ in $h \neq 0$. Diferenčni kvocient za funkcij F v točki x je enak

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} dt.$$

Ker je f parcialno odvedljiva funkcija (glede na prvo spremenljivko), po Lagrangevem izreku glede na to spremenljivko obstaja taka točka $x = x(t)$ z lastnostjo $|x(t) - x| < |h|$, da velja

$$\frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t).$$

Ker je tu leva stran zvezna funkcija spremenljivke t, velja isto za desno stran. Poleg tega je $\frac{\partial f}{\partial x}$ zvezna funkcija na kompaktni množici $[c, d] \times [a, b]$, zato je tam enakomerno zvezna. To pomeni, da za za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $x, y \in [c, d]$, $t \in [a, b]$ in $|x - y| < \delta$ sledi $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(y, t)| < \epsilon/(b - a)$. Torej je pri pogoju $|h| > \delta$ res $|x(t) - x| < \delta$ in velja

$$|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt| = |\int_a^b (\frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t))dt| \leq$$

$$\int_a^b |\frac{\partial}{\partial x} f(x(t),t) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)|dt \leq \epsilon.$$

Ker je tu $\epsilon > 0$ poljuben, vidimo, da je funkcija F odvedljiva in da velja

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Enakomerna konvergenca funkcijskih vrst

Vse, kar smo doslej povedali o konvergenci funkcijskega zaporedja na dani množici S, velja tudi za konvergenco funkcijske vrste, se pravi vrste $\sum_{k=1}^\infty f_k$, kjer so f_k funkcije, definirane na množici S, saj v tem primeru delne vsote $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ tvorijo funkcijsko zaporedje. Zaporedje delnih vsot pa odloča o konvergenci vrste.

DEFINICIJA 3. Funkcijska vrsta $\sum_{k=1}^\infty f_k$ konvergira na množici S proti funkciji f:
(i) *po točkah*, če na S po točkah konvergira proti f zaporedje delnih vsot s_n;
(ii) *enakomerno*, če na S enakomerno konvergira proti f zaporedje delnih vsot s_n.

Točka (i) pomeni, da konvergira številska vrsta $\sum_{k=1}^\infty f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + ...$ za vsak $x \in S$ in ima vsoto $f(x)$. Točka (ii) pa poleg tega še, da je konvergenca vrste enakomerna.

IZREK 4 (Weierstrassov M-test). *Naj za člene funkcijske vrste $\sum_{k=1}^\infty f_k = f_1 + f_2 + ...$ velja za vsak $x \in S$ in za vsak $k \geq 1$ ocena $|f_k(x)| \leq a_k$. Če številska vrsta $\sum_{k=1}^\infty a_k = a_1 + a_2 + ...$ konvergira, konvergira funkcijska vrsta enakomerno na množici S.*

Dokaz. Za vsak par indeksov n, k imamo oceno $|\sum_{j=n}^{n+k} f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+k} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+k} a_j$. Ker številska vrsta $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergira, zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak indeks m, da je za $n \geq m$ in za vsak k desna stran zadnje neenakosti manjša od ϵ. Torej imamo pri pogoju $n \geq m$ za vsak k in za vsak $x \in S$ tudi oceno $|\sum_{j=n}^{n+k} f_j(x)| < \epsilon$. Ker je tu m neodvisen od x, je funkcijska vrsta enakomerno Cauchyjeva, torej po trditvi 1 enakomerno konvergentna.

ZGLED. Vrsta s členi $f_n(x) = (\sin nx)/n^2$ je enakomerno konvergentna na vsej realni osi $\mathbb{R}$, saj imamo za vsak $n \geq 1$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ oceno $|f_n(x)| = |(\sin nx)/n^2| \leq 1/n^2$ in vemo, da številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ konvergira.

Naslednji izreki v zvezi z zveznostjo, integrabilnostjo in odvedljivostjo vsote dane funkcijske vrste so samo posebni primeri ustreznih izrekov 1, 2 in 3 za funkcijska zaporedja, zato jih navedimo brez dokazov.

IZREK 1′. *Vsota f enakomerno konvergentne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ zveznih funkcij na podmnožici $S \subset \mathbb{R}$ je zvezna funkcija na množici S.*

IZREK 2′. *Vsota f enakomerno konvergentne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ na intervalu $[a,b]$ integrabilnih funkcij je integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tudi vrsta iz integralov funkcij f_n konvergira, njena vsota je enaka integralu funkcije f:*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ...$$

IZREK 3′. *Vsota f vrste $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + ...$ zvezno odvedljivih funkcij, ki konvergira po točkah na intervalu $[a,b]$, vrsta iz odvodov $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k = f'_1 + f'_2 + ...$ pa konvergira na $[a,b]$ enakomerno, je tudi sama odvedljiva funkcija, njen odvod f' pa je vsota odvajane vrste*:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k = f'_1 + f'_2 + ...$$

Potenčne vrste

Poseben primer funkcijskih vrst so vrste, katerih členi so sestavljeni iz potenc, pomnoženih s konstantami. To so t.i. potenčne vrste, ki jih bomo zdaj definirali.

DEFINICIJA 4. Imejmo zaporedje (c_k) realnih števil in še eno točko $a \in \mathbb{R}$. Potem je (splošna) *potenčna vrsta* funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$$

Rečemo, da je potenčna vrsta razvita okrog točke a. Z vpeljavo nove spremenljivke $t = x - a$ lahko vedno dosežemo razvoj okrog točke nič ($a = 0$). V tem primeru ima potenčna vrsta obliko

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$$

Odslej bomo delali samo s takimi potenčnimi vrstami.

Potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ vedno konvergira vsaj v točki $x = 0$. Lahko pa se zgodi, da ne konvergira za noben $x \neq 0$. Zgled je npr. vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$. kjer za $x \neq 0$ členi sploh ne konvergirajo k nič. Po drugi strani je vrsta lahko konvergentna prav za vsak $x \in \mathbb{R}$. Tak je primer pri vrsti $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, ki absolutno konvergira na vsej realni osi, kot se lahko hitro prepričamo npr. s kvocientnim kriterijem. Kako je s konvergenco v drugih primerih, pove naslednja trditev.

TRDITEV 4. *Če potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ konvergira v točki $x_0 \neq 0$, konvergira absolutno za vse x z lastnostjo $|x| < |x_0|$.*

Dokaz. Ker je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ konvergentna, konvergirajo njeni členi $c_k x_0^k$ proti nič in so zato omejeni z neko konstanto $M > 0$, torej $|c_k x_0^k| \leq M$ za vsak k. Člene prvotne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ lahko potem ocenimo po absolutni vrednosti z $|c_k x^k| = |c_k x_0^k||x/x_0|^k \leq Mq^k$, kjer je $q = |x/x_0| < 1$. Ker je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$ geometrijska in zaradi $q < 1$ konvergentna, konvergira po primerjalnem kriteriju absolutno tudi prvotna vrsta.

POSLEDICA. *Če potenčna vrsta* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ *divergira v točki* $x_0 \neq 0$, *divergira tudi za vsak* x *z lastnostjo* $|x| > |x_0|$.

Dokaz. Iz konvergence vrste pri x, bi sledila njena absolutna in zato tudi običajna konveregenca pri x_0.

DEFINICIJA 5. Naj bo $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ potenčna vrsta, ki konvergira vsaj v eni točki $x_0 \neq 0$, ne pa povsod na $\mathbb{R}$. Pozitivno število $R = \sup\{r > 0;\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \text{ konvergira}\}$ imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.

To je torej tako število, da potenčna vrsta konvergira za vsak x z lastnostjo $|x| < R$ in divergira za vsak x z lastnostjo $|x| > R$. Pri $|x| = R$ lahko vrsta v točki x konvergira ali divergira.

ZGLED. Potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k$ konvergira (absolutno) za $|x| < 1$ in divergira za $|x| > 1$ (kvocientni kriterij). Torej je konvergenčni polmer enak $R = 1$. Toda vemo, da je za $x = 1$ vrsta harmonična, torej divergentna, za $x = -1$ pa konvergentna alternirajoča vrsta (Leibnizov kriterij).

Opomba. Pri vrsti, ki konvergira samo v točki 0, rečemo, da je konvergenčni polmer enak nič, pri vrsti, ki konvergira povsod, pa je konvergenčni polmer neskončen. Tako imamo pokrite vse primere in za konvergenčni polmer R poljubne potenčne vrste velja $0 \leq R \leq \infty$.

TRDITEV 5. *Naj bo za potenčno vrsto* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *konvergenčni polmer* $R > 0$ *in naj velja* $0 < r < R$. *Potem potenčna vrsta konvergira na intervalu* $[-r, r]$ *enakomerno.*

Dokaz. To sledi iz Weierstreassovega testa za enakomerno konvergenco, saj lahko člene vrste za $x \in [-r, r]$ po absolutni vrednosti ocenimo z $|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$. Ker številska vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konvergira, saj je $0 < r < R$, konvergira potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ po izreku 4 enakomerno na intervalu $[-r, r]$.

TRDITEV 6. *Za konvergenčni polmer* R *potenčne vrste* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *velja*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

Dokaz. Če je $R = 0$, potenčna vrsta ne konvergira absolutno v nobeni točki $x = 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Torej je po Cauchyjevem korenskem kriteriju (posledica izreka 6. v prvem razdelku) $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(1/n)^k|} \geq 1$ za vsak n. Odtod dobimo $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \geq n$ za vsak n.

Če je $R = \infty$, dobimo iz konvergence vrste v vsaki točki $x = n$ na isti način pogoj $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leq 1/n$ za vsak n, torej $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$.

Naj bo zdaj $0 < R < \infty$ in $\epsilon > 0$. Potem konvergira potenčna vrsta v točki $x = R - \epsilon$ in divergira za $x = R + \epsilon$. Torej velja po Cauchyjevem korenskem kriteriju ocena

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(R-\epsilon)^k|} \leq 1 \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(R+\epsilon)^k|}.$$

Odtod dobimo

$$(R-\epsilon)\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}\le 1\le (R+\epsilon)\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}.$$

Ker je tu $\epsilon>0$ poljuben, velja $R\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}=1$, kar je bilo treba pokazati.

POSLEDICA. *Naj bo $R\in[0,\infty]$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$. Če obstaja limita, je* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|c_{k+1}|}{|c_k|}=\dfrac{1}{R}$.

Dokaz. Denimo, da omenjena limita obstaja. Potem po trditvi 2 iz razdelka 1 tega poglavja obstaja tudi limita $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$ in velja $\lim_{k\to\infty}\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}=1/R$.

ZGLEDI. (a) Za potenčno vrsto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^kk^2}$ je $c_k=2^{-k}/k^2$ in zato je kvocient $|c_{k+1}|/|c_k|=2^{-k-1}k^2/2^{-k}(k+1)^2=k^2/2(k+1)^2\to 1/2$. Torej je konvergenčni polmer enak $R=2$. Poglejmo, kako je s konvergenco vrste na robu konvergenčnega intervala. Za $x=\pm 2$ imamo vrsti $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2$ in $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$, ki obe konvergirata.

(b) Za podobno vrsto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^kk}$ s koeficienti $c_k=2^{-k}/k$ dobimo kvocient $|c_{k+1}|/|c_k|=2^{-k-1}k/2^{-k}(k+1)=k/2(k+1)\to 1/2$, se pravi spet $R=2$. Zdaj je za $x=2$ vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}1/k$ harmonična, torej divergentna. Za $x=-2$ pa je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ alternirajoča in konvergentna.

(c) Za potenčno vrsto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^kk}$ je $c_{2k+1}=0$ in $c_{2k}=2^{-k}/k$ za $k\ge 0$. Limiti $\lim_{k\to\infty}\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$ in $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$ ne obstajata, pač pa obstaja $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}=\lim_{k\to\infty}(1/2^kk)^{1/2k}=1/\sqrt{2}$. Torej je konvergenčni polmer enak $\sqrt{2}$. Za $x=\pm\sqrt{2}$ dobimo divergentno harmonično vrsto $\sum_{k=1}^{\infty}1/k$.

Vsota potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ obstaja in je zvezna funkcija na intervalu $(-R,R)$. Recimo, da vrsta konvergira tudi na robu, v točki $x=R$ (ali $x=-R$). Ali je potem vsota zvezna funkcija tudi še v tej točki? Če je konvergenca tam absolutna, velja $|c_kx^k|\le|c_k|R^k$ za vsak $x\in[-R,R]$, zato je po izreku 4 na tem intervalu konvergenca enakomerna. Torej je vsota zvezna funkcija tudi v točki $x=R$ (ali $x=-R$).

Če je konvergenca v točki $x=R$ (ali $x=-R$) zgolj pogojna, je to še vedno res, kot pove naslednji izrek.

IZREK 5 (Abel). *Naj bo $R\in[0,\infty]$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, katere vsota je zvezna funkcija f na intervalu $(-R,R)$. Če vrsta konvergira v točki $x=R$ (ali $x=-R$)* in ima tam vsoto s, *velja* $s=\lim_{x\to R}f(x)$ (ali $s=\lim_{x\to -R}f(x)$).

Dokaz. Dokažimo samo primer, ko vrsta konvergira v točki $x=R$ (za primer $x=-R$ si namesto prvotne vrste ogledamo potenčno vrsto s koeficienti $(-1)^kc_k$, ki ima isti konvergenčni polmer in konvergira v točki $x=R$). Poleg tega smemo brez škode vzeti $R=1$, sicer raje gledamo potenčno vrsto $\sum_{k=1}^{\infty}c_kt^k$, kjer je $t=Rx$.

Denimo torej, da potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ konvergira za $x=1$ in da ima tam vsoto s, torej imamo $\sum_{k=0}^{\infty}c_k=s$. Za vsak k definirajmo $s_k=c_0+c_1+...+c_k$ in $c_{-1}=0$. Potem je za vsak n res

$$\sum_{k=0}^{n}c_kx^k=\sum_{k=0}^{n}(s_k-s_{k-1})x^k=\sum_{k=0}^{n}s_kx^k-\sum_{k=1}^{n}s_{k-1}x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+1} = s_n x^n + (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k.$$

Za $-1 < x < 1$ pošljimo $n \to \infty$ pa dobimo

$$f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak m, da za $k > m$ velja $|s - s_k| < \epsilon/2$. Poleg tega je $s = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s x^k$ za $-1 < x < 1$, zato imamo za $0 < x < 1$ oceno

$$|f(x) - s| = |(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k - s)x^k| \le (1-x)\sum_{k=0}^{m}|s_k - s|x^k + (1-x)\sum_{k=m+1}^{\infty}|s_k - s|x^k \le$$

$$(1-x)\sum_{k=0}^{m}|s_k - s|x^k + (\epsilon/2)(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}x^k \le (1-x)\sum_{k=0}^{m}|s_k - s| + \epsilon/2.$$

Število $\delta > 0$ lahko izberemo tako majhno, da iz $1-x < \delta$ sledi $(1-x)\sum_{k=0}^{m}|s_k - s| < \epsilon/2$. V tem primeru velja $|f(x) - s| < \epsilon$, kar pomeni, da je $s = \lim_{x\to R} f(x)$.

Kot posledico tega izreka dokažimo še en rezultat v zvezi s produktom številskih konvergentnih vrst, ki smo ga obravnavali v razdelku 1 (glej izrek 12, kjer je ena od vrst konvergirala absolutno).

IZREK 6. *Imejmo konvergentne številske vrste* $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ *in* $\sum_k c_k$, *pri čemer je* $c_k = a_0 b_k + ... + a_k b_0$ *za vsak* k. *Če so njihove vsote* A, B *in* C, *velja* $C = AB$.

Dokaz. Za $0 \le x \le 1$ definirajmo funkcije $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ in $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Hitro vidimo, da je vrsta za $h(X)$ ravno Cauchyjev produkt vrst za $f(x)$ in $g(x)$. Ker za $0 \le x < 1$ ti dve vrsti po trditvi 4 konvergirata absolutno, konvergira po izreku 12 iz prvega razdelka tudi vrsta za $h(x)$ in za njihove vsote dobimo zvezo $f(x)g(x) = h(x)$, $0 \le x < 1$. Ker vse tri vrste v točki $x = 1$ še konvergirajo, velja pri pogoju $x \to 1$ po Abelovem izreku $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ in $h(x) \to C$. Zaradi zveze $f(x)g(x) = h(x)$ velja tudi $AB = C$.

Potenčne vrste se lepo obnašajo tudi v zvezi z odvajanjem in integracijo vrst. Če potenčno vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ členoma odvajamo, dobimo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$; če pa jo členoma integriramo, dobimo vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}/(k+1)$. Kako je s konvergenčnim polmerom dobljenih vrst?

IZREK 7. *Členoma odvajana in členoma integrirana potenčna vrsta imata isti konvergenčni polmer kot prvotna vrsta. Če je ta polmer* R *in je* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *velja za vsak* $x \in (-R, R)$ *tudi*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}/(k+1).$$

Dokaz. Po trditvi 6 je recipročna vrednost konvergenčnega polmera za odvajano vrsto enaka

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|kc_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R},$$

za integrirano vrsto pa

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k/(k+1)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

Ker odvajana vrsta konvergira enakomerno na vsakem kompaktnem podintervalu $[a, b] \subset (-R, R)$ in prvotna potenčna vrsta konvergira na $(-R, R)$, lahko uporabimo izrek $3'$, po katerem je $f'(x)$ vsota členoma odvajane vrste za vsak $x \in (-R, R)$. Podobno po izreku $2'$ konvergira, celo enakomerno na vsakem kompaktnem podintervalu $[a, b] \subset (-R, R)$, tudi členoma integrirana vrsta in ima vsoto $\int_0^x f(t)dt$ za vsak $x \in (-R, R)$.

Z odvajanjem ali integriranjem po členih lahko pogosto določimo vsoto dane vrste, skupaj z Abelovim izrekom tudi na robu konvergenčnega območja, kjer sicer vrste ne smemo odvajati ali integrirati.

ZGLED. (a) Izračunajmo npr. vsoto $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$. Vemo, da ima potenčna vrsta konvergenčni polmer 1, zato vrsta konvergira za vsak $x \in (-1, 1)$. Vrsto na tem območju odvajajmo in dobimo geometrijsko vrsto $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1/(1 - x)$. Ker poznamo odvod funkcije f, poznamo tudi

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-t)|_0^x = -\ln(1-x).$$

Če odvajana vrsta konvergira samo znotraj konvergenčnega intervala, pa vidimo, da prvotna vrsta konvergira tudi še v robni točki $x = -1$, saj je v tem primeru alternirajoča in ima absolutno proti nič padajoče koeficiente (Leibnizov kriterij). Po Abelovem izreku (izreku 5) je potem v tej točki njena vsota enaka $s = \lim_{x \to -1} f(x) = -\lim_{x \to -1} \ln(1-x) = -\ln 2$. Tako smo še enkrat izračunali vsoto alternirajoče harmonične vrste.

(b) Podobno obravnavajmo potenčno vrsto $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$, ki ima tudi konvergenčni polmer 1. Pišimo $f(x)/x = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$. Z integriranjem od 0 do x je

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k.$$

Postopek ponovimo:

$$\int_0^x \frac{F(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1/(1-x).$$

Odtod z dvakratnim zaporednim z odvajanjem dobimo $F(x) = x/(1-x)^2$ in

$$f(x) = x(x/(1-x)^2)' = (x + x^2)/(1-x)^3.$$

Opomba. Nobenega razloga ni, da ne bi v potenčno vrsto namesto realne spremenljivke x vstavili kompleksno spremenljivko z (v splošni potenčni vrsti, bi tudi za a vzeli kompleksno števil). Vse kar smo povedali o (absolutni in enakomerni) konvergenci potenčnih vrst, velja tudi v kompleksnem. Konvergenčno območje je zdaj točka 0, krog $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ ali cela kompleksna revnina. Konvergenčni polmer je res polmer; izračuna se ga na isti način. Seveda na svojem območju konvergence take vrste definirajo funkcijo s kompleksnimi vrednostmi.

3. Taylorjeva vrsta

Še enkrat si bomo (z uporabo metode integracije po delih) izpeljali Taylorjevo formulo, ki jo poznamo iz analize 1.

Če je funkcija f poljubnokrat odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$ je po osnovni formuli integralskega računa

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Na desni strani lahko večkrat uporabimo integracijo po delih, npr.:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt=$$
$$=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt=$$
$$=(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\frac{1}{3!}\int_a^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)dt.$$

Splošno dobimo odtod *Taylorjevo formulo* v obliki

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+$$
$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Prvi del te formule je dobro znani *Taylorjev polinom*

$$P_n(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

drugi del pa *ostanek Taylorjeve formule* (zdaj v t.i. *integralski obliki*)

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Ostanek lahko za $(n+1)$-krat zvezno odvedljive funkcije zapišemo tudi v znani *Lagrangevi obliki.* Ker je $m\le f^{(n+1)}(t)\le M$, pri čemer sta m in M natančni meji, je

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt\le R_n(x)\le\frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$$

oziroma

$$\frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\le R_n(x)\le\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ker je $f^{(n+1)}(t)$ zvezna funkcija na $[a,x]$ in je torej $m\le R_n(x)(n+1)!\,/(x-a)^{n+1}\le M$, obstaja vsaj ena točka $c\in[a,x]$, tako da velja $f^{(n+1)}(c)=R_n(x)(n+1)!\,/(x-a)^{n+1}$ oziroma

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Če je za funkcijo f odvod reda $n+1$ zvezen, lahko ostanek zapišemo še v eni obliki. Po prvem izreku o povprečni vrednosti oziroma njegovi posledici (glej tudi trditev 9 v drugem razdelku prvega poglavja) dobimo iz integralske oblike

$$R_n(x)=\frac{x-a}{n!}(x-c)^n f^{(n+1)}(c)$$

za neko točko c, ki leži med a in x. To je t.i. *Cauchyjeva oblika* ostanka.

Kadar se da funkcija v točki a odvajati poljubnokrat, lahko zgornji postopek nadaljujemo v neskončnost. V tem primeru dobimo namesto končne Taylorjeve formule $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ z ostankom *Taylorjevo vrsto*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

To je poseben primer potenčne vrste, razvite okrog točke a, zato pravimo, da smo funkcijo f *razvili* okrog točke a v potenčno oziroma Taylorjevo vrsto. V posebnem primeru, kadar je $a=0$, govorimo raje o *McLaurinovi vrsti*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Delne vsote Taylorjeve vrste so ravno Taylorjevi polinomi $P_n(x)$, ostanek vrste (od n-tega člena dalje) pa ravno ostanek Taylorjeve formule $R_n(x)$. Včasih se da pokazati, da za nekatere vrednosti x (vsaj v bližini točke a) z naraščanjem n preko vsake meje ostanek $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ konvergira proti 0. V tem primeru Taylorjeva vrsta očitno konvergira in ima vsoto $f(x)$. Taylorjeva vrsta vedno konvergira v točki a in sicer proti vrednosti $f(a)$, lahko pa se zgodi, da nimamo konvergence v nobeni drugi točki $x \neq a$.

ZGLED. Funkcijo $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-1/|x|} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{array} \right.$ že poznamo (glej razdelek 1 v tretjem poglavju analize 1). Njena vrednost v točki 0 je $f(0) = 0$ in je povsod poljubnokrat zvezno odvedljiva. Zanimajo nas njeni odvodi v točki 0. Prvi odvod je tam po definiciji enak $f'(0) = \lim_{x\to 0} e^{-1/|x|}/x = 0$. Ker je prvi odvod za $x \neq 0$ enak $x^{-2}e^{-1/x}$, če je $x > 0$, in $-x^{-2}e^{1/x}$, če je $x < 0$, vidimo, da je tudi $f''(0) = 0$. Podobno lahko sklepamo tudi za višje odvode. Izkaže se, da so vsi višji odvodi v točki 0 enaki nič. Taylorjeva vrsta za f je torej trivialna (vsi členi so enaki nič), zato povsod na realni osi konvergira proti nič. Ker je $f(x) \neq 0$ za $x \neq 0$ in $f(0) = 0$, konvergira Taylorjeva vrsta proti funkciji, iz katere smo jo dobili, samo v točki 0.

DEFINICIJA. Če Taylorjeva vrsta funkcije f konvergira tudi v okolici točke a proti funkciji f, rečemo, da je funkcija f v okolici točke a *analitična*.

Razvoj analitične funkcije f v potenčno vrsto okrog točke a je en sam. Če je namreč funkcija f v okolici točke a enaka vsoti neke konvergentne potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, lahko vrsto po izreku 7 iz prejšnjega razdelka poljubnokrat členoma odvajamo. Odvajana vrsta je v okolici točke a tudi konvergentna in ima za vsoto ustrezni odvod funkcije. Brez težav se na ta način lahko prepričamo, da je $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots$. Torej je razvoj en sam, namreč Taylorjev.

Primeri Taylorjevih (McLaurinovih) razvojev

Oglejmo si razvoje osnovnih transcendentnih funkcij okrog točke 0. Za vsako funkcijo bomo izračunali njeno vrednost in vrednost njenih odvodov poljubno visokega reda v točki 0, ugotovili, kje vrsta (absolutno) konvergira, in nazadnje z oceno Taylorjevega ostanka pokazali, da je na danem konvergenčnem območju njena vsota res funkcija, ki določa vrsto.

1. **Eksponentna funkcija in vrsta**

Za funkcijo $f(x) = \mathrm{e}^x$ je $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ in $f^{(n)}(0) = 1$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Torej dobimo

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

S kvocientnim kriterijem se npr. lahko hitro prepričamo, da ta vrsta absolutno konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker pa je Taylorjev ostanek v Lagrangevi obliki enak $R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, kjer je c med 0 in x, in ga lahko ocenimo z $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} \to 0$ $(n \to \infty)$, konvergira eksponentna vrsta (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$ proti $f(x) = \mathrm{e}^x$. Da gre ostanek proti nič, lahko sklepamo tudi iz dejstva, da je $|x|^{n+1}/(n+1)!$ splošni člen konvergentne vrste.

2. **Vrsti za sinus in za kosinus**

Za funkcijo $f(x) = \sin x$ velja $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ in $f^{(2n)}(0) = 0$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tako imamo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Podobno kot prej vidimo, da vrsta konvergira (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ostanek v Lagrangevi obliki lahko zdaj ocenimo z $|R_n(x)| \leq |x|^{2n+3}/(2n+3)! \to 0$, $n \to \infty$. Torej je vsota Taylorjeve vrste povsod enaka $f(x) = \sin x$.

Za funkcijo $f(x) = \cos x$ pa imamo $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \sin x$ in zato

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Vrsta spet konvergira (absolutno) za vsak $x \in \mathbb{R}$ proti $f(x) = \cos x$.

3. **Vrsta za logaritemsko funkcijo**

Sedaj vzemimo funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$, za katero je $f(0) = 0$. Odvodi pa so po vrsti $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, itd. Splošno je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{in} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Torej dobimo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Ta vrsta pa konvergira samo za $-1 < x \leq 1$, kar najlažje spoznamo s kvocientnim kriterijem za absolutno konvergenco v primeru $-1 < x < 1$. V točki -1 dobimo divergentno harmonično vrsto, v točki 1 pa konvergentno alternirajočo vrsto. Da bi pokazali, da je vsota vrste res začetna logaritemska funkcija, moramo obravnavati dva primera, vsakega posebej.

Za $0 \leq x \leq 1$ uporabimo ostanek Taylorjeve vrste v Lagrangevi obliki:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n x^{n+1}/(n+1)(1+c)^{n+1}$$

in dobimo oceno $|R_n(x)| \leq x^{n+1}/(n+1) \to 0$, $(n \to \infty)$, saj je tudi $c \geq 0$.

Za $-1 < x < 0$ pa potrebujemo ostanek v Cauchyjevi obliki:

$$R_n(x) = x(x-c)^n f^{(n+1)}(c)/n! = (-1)^n x(x-c)^n/(1+c)^{n+1}.$$

Dobimo oceno $|R_n(x)| \leq |x||x-c|^n/(1+c)^{n+1}$. Ker je zdaj $-1 < x \leq c \leq -cx < 0$, je $|x-c| \leq |x+cx| = (1+c)|x|$ in zato $|R_n(x)| \leq |x|^n/(1+c) \leq |x|^n/(1-|x|) \to 0$.

Ne glede na to, kje je $x \in (-1,1)$, Taylorjeva vrsta torej konvergira (absolutno) proti $f(x) = \ln(1+x)$. Ker imamo konvergenco vrste tudi v točki $x = 1$, je njena vsota po Abelovem izreku tudi v točki 1 enaka $f(1) = \ln 2$ (kar sicer že vemo).

4. **Binomska vrsta**

Vzemimo funkcijo $f(x) = (1+x)^r$, kjer je r poljubno realno število. Sedaj je $f^{(n)}(x) = r(r-1)...(r-n+1)(1+x)^{r-n}$ in $f^{(n)}(0) = r(r-1)...(r-n+1)$. Torej dobimo vrsto

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + ...$$

Tu smo z $\binom{r}{n}$ označili *posplošeni binomski koeficient*, ki je definiran za vsako realno število r (in ne samo za naravna števila kot klasični binomski koeficient) in sicer je

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}.$$

Očitno se ta definicija v primeru $r \in \mathbb{N}$ in $r \geq n$ ujema s klasično: $\binom{r}{n} = \dfrac{r!}{n!\,(r-n)!}$. Za $r \in \mathbb{N}$ in $r < n$ pa je $\binom{r}{n} = 0$, tako da je v tem primeru binomska vrsta v bistvu razvoj potence $(1+x)^r$ po binomskem obrazcu.

Vrsta sedaj konvergira (absolutno) za $-1 < x < 1$, kar najhitreje vidimo s kvocientnim kriterijem. V krajiščih -1 in 1 binomska vrsta nasploh ne konvergira. Da pri omenjenem konvergenčnem pogoju konvergira ostanek proti 0, je nekoliko težje videti, razen za $x = 0$ in za $r = 0, 1, 2, ...$, ko imamo namesto neskončne vrste samo polinom. Odslej naj bo $x \neq 0$ in $r \notin \mathbb{N}$. Podobno kot pri logaritemski vrsti moramo ločiti dva primera.

Za $0 \leq x < 1$ uporabimo ostanek Taylorjeve vrste v Lagrangevi obliki. Tedaj je za neko število c z lastnostjo $0 \leq c \leq x$ in za vsak $n \geq 0$ res

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{r}{n+1}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1} =$$

$$\frac{r(1+c)^r}{(n+1)(1+c)^{n+1}}(r-1)(\frac{r}{2}-1)(\frac{r}{3}-1)...(\frac{r}{n}-1)x^{n+1},$$

od koder dobimo najprej oceno $|R_n(x)| \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/n)x^{n+1}$. Ker je $0 < x < 1$, je $(1+x)/2x > 1$ in $1+|r|/m < (1+x)/2x$ oziroma $x(1+|r|/m) < (1+x)/2$ za dovolj veliko naravno število m, zato lahko za $n > m$ naprej ocenimo:

$$|R_n(x)| \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/m)(1+|r|/(m+1))...(1+|r|/n)x^{n+1} \leq$$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)^m(1+|r|/m)^{n-m}x^{n-m} \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)^m((1+x)/2)^{n-m}.$$

Desna stran konvergira pri fiksnem m z rastočim n proti nič, zato velja isto za $R_n(x)$.

V primeru $-1 < x < 0$ pa moramo spet uporabiti Cauchyjev obliko ostanka. Tedaj je

$$R_n(x) = x(x-c)^n f^{(n+1)}(c)/n! = (n+1)\binom{r}{n+1}(1+c)^{r-n-1}x(x-c)^n =$$

$$r(1+c)^r(r-1)(\frac{r}{2}-1)(\frac{r}{3}-1)...(\frac{r}{n}-1)x(x-c)^n/(1+c)^{n+1}$$

in zato kot prej za dovolj velik m in ob upoštevanju neenakosti $|x-c| \leq |x+cx| = (1+c)|x| < 1+c$, ki velja v tem primeru (glej podobno oceno pri logaritemski funkciji) dobimo $|R_n(x)| \leq$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)(1+|r|/2)...(1+|r|/m)(1+|r|/(m+1))...(1+|r|/n)|x-c|^n|x|/(1+c)^{n+1} \leq$$

$$|r|(1+c)^r(1+|r|)^m(1+|r|/m)^{n-m}|x|/(1+c) \leq |r|(1+c)^r(1+|r|)^m((1+|x|)/2)^{n-m}|x|/(1-|x|).$$

Desna stran spet konvergira proti nič, zato velja isto tudi za ostanek $R_n(x)$. V vsakem primeru torej binomska vrsta za $|x| < 1$ konvergira proti funkciji $f(x) = (1+x)^r$.

ZGLED. 1. V primeru $r = -1$ zaradi $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ dobimo

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...,$$

se pravi geometrijsko vrsto, ki, kot vemo, konvergira pri $|x| < 1$. Če v njej zamenjamo x z $-x$, pridemo do običajne vrste

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

2. Za $r = 1/2$ dobimo vrsto $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ...$, za $r = -1/2$ pa vrsto $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...$ Obakrat velja konvergenca pri $-1 < x < 1$ in tudi pri $x = 1$ (po Leibnizovem kriteriju).

Uporaba Taylorjeve vrste

Taylorjevo vrsto (oziroma formulo) lahko s pridom uporabimo pri nekaterih standardnih matematičnih postopkih.

(a) Pri risanju funkcij si lokalno lahko pomagamo z aproksimativnimi formulami (začetnimi odseki Taylorjeve vrste ziroma Taylorjevimi polinomi), npr. $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $\mathrm{e}^{-x} \approx 1 - x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\sin x \approx x$, ali $\sin x \approx x - x^3/6$ itd. To so približki za funkcijo. Z rastočim n čedalje bolje opisujejo vedenje funkcije f v bližini začetne točke a.

(b) Z začetnimi členi Taylorjeve vrste si lahko pomagamo tudi pri računanju limit velikokrat odvedljivih funkcij (namesto L'Hospitalovega pravila), npr.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - x^3/6 + ...)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6 - ...}{x^3} = 1/6.$$

(c) Vrsta za eksponentno funkcijo je ugodna za računanje njenih vrednosti na veliko decimalk natančno, ker razmeroma hitro konvergira. Izkoristimo jo lahko tudi za izpeljavo znamenite *Eulerjeve formule*, ki povezuje eksponentno funkcijo (s kompleksnimi vrednostmi) in trigonometrični funkciji sinus in kosinus:

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Levo stran definiramo s potenčno vrsto v kompleksnem $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, ki konvergira absolutno za vsako kompleksno število z. To vidimo npr. s kvocientnim kriterijem. Njena vsota je po definiciji vrednost eksponentne funkcije $f(z) = e^z$ v točki z. Če v vrsto za e^z vstavimo $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ (i je imaginarna enota), dobimo po združitvi realnih in imaginarnih členov

$$\mathrm{e}^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...) = \cos x + i \sin x.$$

To formulo bomo uporabili pri diferencialnih enačbah.

(d) *Računanje logaritmov na več decimalk natančno.* Uporabljamo razvoje v vrsto

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...)$$

(za $-1 < x < 1$) in

$$\ln(a+1) + \ln(a-1) - 2\ln a = \ln(1 - a^{-2}) = \ln \frac{1 - (2a^2-1)^{-1}}{1 + (2a^2-1)^{-1}} =$$

$$= -2(\frac{1}{2a^2 - 1} + \frac{1}{3(2a^2-1)^3} + ...)$$

za $a > 1$. V prvega vstavimo npr. $x = 1/3$ pa dobimo $\ln 2$, vrednost $\ln 3$ nato izračunamo iz drugega, če vstavimo $a = 2$. Po istih formulah izračunamo tudi logaritme večjih naravnih števil. Če bi npr. $\ln 2$ računali iz osnovne logaritemske vrste, bi dobili $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Na desni imamo tu znano alternirajočo vrsto, za katero sicer vemo, da je konvergentna, vendar je njena konvergenca silno počasna.

(e) *Računanje korenov.* Npr. vrsta $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + 1/2 - 1/8 + ...$ prepočasi konvergira, zato raje zapišemo

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 7\sqrt{\frac{50}{49}} = 7(1 - \frac{1}{50})^{-1/2} = 7(1 + 1/100 + 3/8.100^2 + ...).$$

Zdaj je konvergenca veliko hitrejša.

4. Fourierove vrste

Poseben primer funkcijskih vrst so t.i. *trigonometrične vrste*. To so vrste, v katerih nastopata kot člen trigonometrični funkciji sinus in kosinus večkratnih kotov. Natančneje, vsako trigonometrično vrsto lahko pri poljubnem $x \in \mathbb{R}$ zapišemo v obliki

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

kjer so koeficienti a_n in b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ realna števila. Koeficient pri prvem členu smo delili z dve zaradi lepšega, da bodo kasnejše formule imele bolj enotno obliko.

Trigonometrične vrste so analogija potenčnih vrst, ki smo jih obravnavali v enem od prejšnjih razdelkov. Namesto da so členi večkratniki potence x^n, $n = 0, 1, 2, ...$, imamo sedaj člene, ki so linearne kombinacije funkcij $\cos nx$ in $\sin nx$, $n = 0, 1, 2, ...$

Zaradi Eulerjeve formule $e^{it} = \cos t + i \sin t$, lahko izrazimo $\cos nx = (e^{inx} + e^{-inx})/2$, $\sin nx = (e^{inx} - e^{-inx})/2i$. Če to formalno vstavimo v vrsto, dobimo

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

kjer smo označili $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ in $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c}_n$ za vsak $n \geq 0$. S temi oznakami lahko trigonometrično vrsto prepišemo iz "realne" v t.i. "kompleksno" obliko oziroma v dvostransko vrsto, kjer seštevamo po vseh celih številih od $-\infty$ do ∞:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Tako kot pri potenčnih vrstah nas bo seveda tudi zdaj zanimala konvergenca trigonometričnih vrst po točkah ali enakomerna konvergenca, potem njihova vsota, vprašanje ali jih smemo členoma odvajati in integrirati ipd. Trigonometrično (funkcijsko) vrsto v realni ali kompleksni obliki bomo označili z S, ustrezno številsko vrsto v točki x pa z $S(x)$.

Delne vsote trigonometrične vrste S v realni ali kompleksni obliki so funkcije

$$S_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

ki jih imenujemo *trigonometrični polinomi* (stopnje n). Rečemo, da trigonometrična vrsta konvergira na realni osi $\mathbb{R}$ (ali na kakšni njeni podmnožici) po točkah oziroma enakomerno proti funkciji f, če velja $S_n \to f$ $(n \to \infty)$ po točkah oziroma enakomerno na $\mathbb{R}$ (ali na podmnožici). Pri tem opazimo naslednje: ker so realne funkcije $\cos kx$, $\sin kx$ in tudi kompleksne funkcije e^{ikx} vse periodične s periodo 2π in velja isto za njihove linearne kombinacije (trigonometrične polinome), je tudi limitna funkcija f, če obstaja, periodična s periodo 2π. To pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Periodično funkcijo f zadošča poznati na katerem koli intervalu $[a, b)$, kjer je $b - a = 2\pi$ (perioda), npr. na intervalu $[-\pi, \pi)$ ali $[0, 2\pi)$. Obratno, poljubno funkcijo f, definirano npr. na intervalu $[-\pi, \pi)$ dolžine 2π, lahko s tega intervala razširimo do periodične funkcije (s periodo 2π) na vsej realni osi. Če je npr. funkcija f zvezna ali odvedljiva na odprtem intervalu $(-\pi, \pi)$, ima razširjena funkcija enake lastnosti tudi na vseh homolognih odprtih intervalih $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$, ne pa nujno v krajiščih. Vsekakor pa to velja, kadar je za osnovno funkcijo $\lim_{x \downarrow -\pi} f(x) = \lim_{x \uparrow \pi} f(x)$ (in $\lim_{x \downarrow -\pi} f'(x) = \lim_{x \uparrow \pi} f'(x)$). Tedaj bomo preprosto rekli, da ima funkcija f *zvezno periodično razširitev* (oziroma *zvezno odvedljivo periodično razširitev*) na vso realno os.

Poljubnokrat odvedljivi funkciji f smo lahko priredili posebno potenčno vrsto, namreč njeno Taylorjevo vrsto (razvoj okrog dane točke a). Le-ta je v okolici točke a konvergirala (ali pa tudi ne) in njena vsota je bila enaka prvotni funkciji (ali pa tudi ne). Nekaj podobnega velja za integrabilne periodične funkcije na realni osi. Njim bomo priredili trigonometrično vrsto in se vprašali, kdaj ta vrsta konvergira in kaj je v tem primeru njena vsota. To prireditev pa ne bomo naredili z odvajanjem (kot pri Taylorjevi vrsti) ampak z integriranjem po ustreznem intervalu z dolžino 2π.

Pri tem ni več pomembno, po katerem intervalu $[a,b)$ dolžine 2π računamo integral periodične funkcije. Denimo, da je npr. $2k\pi \leq a < 2(k+1)\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, in $b = a - 2k\pi$. Potem je $0 \leq b < 2\pi$ in (zaradi periodičnosti funkcije f)

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(a+s)ds = \int_0^{2\pi} f(b+2k\pi+s)ds = \int_0^{2\pi} f(b+s)ds = \int_b^{b+2\pi} f(t)dt =$$

$$\int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{2\pi+b} f(t)dt = \int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_0^b f(u+2\pi)du = \int_b^{2\pi} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-2\pi)dt =$$

$$\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{0} f(s)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Največkrat pa bomo vzeli poljubno funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi,\pi)$, in si jo mislili periodično razširjeno na vso realno os.

DEFINICIJA 1. Naj bo f integrabilna funkcija na intervalu $[-\pi,\pi)$. *Fourierove koeficiente* funkcije f definiramo v *kompleksni obliki* s predpisom:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ali v *realni obliki* s predpisoma:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n = 0,1,2...$$

Ker je funkcija f realna, so tudi števila a_n, b_n res realna, števila c_n pa v splošnem kompleksna. Hitro se lahko prepričamo, da kompleksne in realne koeficente povezujejo formule: $a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n})$ oziroma $c_n = (a_n - ib_n)/2,\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2\ (n \geq 0)$.

DEFINICIJA 2. *Fourierova vrsta* za integrabilno funkcijo f v točki $x \in \mathbb{R}$ je trigonometrična vrsta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx,$$

katere koeficienti so ravno Fourierovi koeficienti funkcije f, dobljeni po zgornjih formulah.

Da poudarimo odvisnost koeficientov c_n od funkcije f, pogosto označimo $c_n = \widehat{f}(n)$, ustrezno Fourierovo vrsto pa označimo z $S(f)$ in njeno vrednost v točki x z izrazom $S(f,x)$. Hitro lahko preverimo, da se trigonometričnemu polinomu

$$f(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

pripadajoča Fourierova vrsta ujema s polinomom, torej $S(f,x) = f(x)$. Za vsak $m,n \in \mathbb{Z}$ veljajo namreč naslednje preproste formule:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases},$$

oziroma za vsak $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases} , \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt\, dt = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}$$

in

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt\, dt = 0.$$

Iz integralskih formul za računanje Fourierovih koeficientov takoj vidimo naslednje:

(a) Če je integrabilna funkcija f, definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, *soda*, so vsi koeficienti $b_n = 0$; v tem primeru je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz kosinusov večkratnih kotov (*kosinusna vrsta*):

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kjer je} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \quad (n \geq 0).$$

(b) Če je integrabilna funkcija f, definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, *liha*, so vsi koeficienti $b_n = 0$; v tem primeru je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz sinusov večkratnih kotov (*sinusna vrsta*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kjer je} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \quad (n \geq 1).$$

Funkcijo f, ki je definirana samo na intervalu $(0, \pi)$, lahko torej razvijemo tako v kosinusno kot v sinusno vrsto. Najprej jo npr. dopolnimo s poljubnimi vrednostmi v krajiščih, nato nadaljujemo na interval $[-\pi, 0]$ do sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ in nazadnje periodično s periodo 2π razširimo na vso realno os. Fourierova vrsta take funkcije je po zgornjem sestavljena samo iz kosinusov. Podobno dobimo razvoj v sinusno vrsto za poljubno funkcijo f, ki je definirana na intervalu $[0, \pi)$ in je $f(0) = 0$, če jo najprej liho nadaljujemo na $(-\pi, 0)$ do lihe funkcije na $(-\pi, \pi)$.

ZGLED 1. V naslednjih primerih je funkcija f, definirana na intervalu $[-\pi, \pi)$ z danim predpisom, liha, zato je njena Fourierova vrsta sinusna. V poljubni točki x je za funkcijo:

(a) $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

(b) $f(x) = x$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$;

(c) $f(x) = (\pi\operatorname{sign}(x) - x)/2$ Fourierova vrsta $S(f, x)$ enaka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

Opomba. Doslej smo govorili samo o funkcijah s periodo 2π in njihovem razvoju v vrsto po trigonometričnih funkcijah večkratnega argumenta x. Postopek pa bi lahko posplošili ter katerokoli integrabilno funkcijo s poljubnega intervala $[a, b)$ nadaljevali periodično na vso realno os s periodo $b - a$ in jo razvili v trigonometrično vrsto po kosinusih in sinusih drugačnega argumenta.

Naj bo npr. f funkcija, definirana na intervalu $[a, b)$, $a < b$, in $t = \dfrac{2\pi}{b-a}(x - \dfrac{a+b}{2})$ za $a \leq x < b$. Potem je $-\pi \leq t < \pi$ in $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(b-a)t}{2\pi}$, tako da lahko definiramo funkcijo g na intervalu $[-\pi, \pi)$ s predpisom $g(t) = f(x)$. Razvijmo funkcijo g v običajno Fourierovo vrsto, pa dobimo

$$f(x) = g(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2}) + b_n \sin \frac{2n\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2}),$$

torej razvoj funkcije f v trigonometrično vrsto, pri čemer koeficiente izračunamo po zgornjih formulah

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos\, nt\, dt = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})\, dx,\ \ n = 0, 1, 2, ...$$

in

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt\, dt = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})\, dx,\ \ n = 1, 2, ...$$

Zgled. Funkcija f, ki je definirana na intervalu $[0, 1)$ in jo nadaljujemo na vso realno os periodično s periodo 1, ima po zgornjih formulah Fourierov razvoj

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\, 2n\pi(x - \frac{1}{2}) + b_n \sin\, 2n\pi(x - \frac{1}{2}) =$$

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n \cos\, 2n\pi x + b_n \sin\, 2n\pi x).$$

Konkretno je za funkcijo $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1)$ njena Fourierova vrsta enaka $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\, 2n\pi x.$

Prirejanje Fourierove vrste dani integrabilni funkciji je zaenkrat zgolj formalno. O konvergenci vrste v tem ali onem smislu bomo govorili kasneje.

Cesárove delne vsote in izrek o enoličnosti

Naj bo f integrabilna funkcija na $[-\pi, \pi)$, razširjena do periodične funkcije na vsej realni osi. Delno vsoto Fourierove vrste lahko izrazimo tudi z integralom:

$$S_n f(x) = \sum_{|k|\le n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dte^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$$

Tu smo z D_n označili t.i. *Dirichletovo jedro*:

$$D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $D_n(0) = 2n + 1$. Dirichletovo jedro je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje n). Za njegove Fourierove koeficiente očitno velja $\widehat{D}_n(k) = 1$ za $|k| \le n$ in $\widehat{D}_n(k) = 0$ za $|k| > n$.

Različne izražave delnih vsot Fourierove vrste nam koristijo pri obravnavi konvergence Fourierovih vrst. Poleg njih pomembno vlogo igrajo tudi t.i. *Cesárove delne vsote*, ki jih definiramo preprosto kot aritmetične sredine običajnih delnih vsot:

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f.$$

Torej so tudi trigonometrični polinomi stopnje N. V vsaki točki x jih lahko zapišemo v obliki:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{N+1}\sum_{|k|\leq N}\sum_{n=|k|}^{N} c_k e^{ikx} =$$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{|k|\leq N}(N-|k|+1)c_k e^{ikx} = \sum_{|k|\leq N}(1-\frac{|k|}{N+1})c_k e^{ikx} = \sum_{|k|\leq N}(1-\frac{|k|}{N+1})\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Ob tem naj omenimo, da se iz te izražave Cesárovih delnih vsot vidi, da je

$$\widehat{\sigma_N f}(k) = (1-\frac{|k|}{N+1})\widehat{f}(k)$$

za $|k| \leq N$ in 0 sicer, zato konvergira $\widehat{\sigma_N f}(k)$ proti $\widehat{f}(k)$ za vsak k, ko $N \to \infty$. To pomeni, da delne vsote $\sigma_N f$ enakomerno konvergirajo proti f za vsak trigonometrični polinom f. Spoznali bomo, da je to res celo za vsako zvezno funkcijo.

Tudi Cesárove delne vsote lahko izrazimo z integralom, če upoštevamo že znano integralsko izražavo navadnih delnih vsot $S_n f$:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)dt,$$

kjer smo z F_N označili ti. *Fejérjevo jedro*:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} =$$

$$\frac{1}{2(N+1)\sin^2(x/2)}\sum_{n=0}^{N} 2\sin(n+1/2)x\sin(x/2) =$$

$$\frac{1}{2(N+1)\sin^2(x/2)}(1-\cos(N+1)x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)x/2}{\sin(x/2)}\right)^2$$

za $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ in $F_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = N+1$.

Fejérjevo jedro ima npr. naslednje koristne lastnosti:

1. F_N je zvezna periodična soda funkcija (trigonometrični polinom stopnje N), ki je poleg tega pozitivna: $F_N \geq 0$.
2. $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)dx = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1.$
3. $\displaystyle F_N(x) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2(x/2)} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)x^2} \leq \frac{\pi^2}{Nx^2} \leq \frac{\pi^2}{N\delta^2}$ za $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$.

TRDITEV 1. *Za zvezno periodično funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergirajo Cesárove delne vsote njene Fourierove vrste enakomerno na vsej realni osi proti f. Enakomerno po $x \in \mathbb{R}$ torej velja*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x).$$

Dokaz. Dovolj je opazovati vedenje Cesárovih delnih vsot pri $x \in [-\pi, \pi)$. Te vsote lahko v integralski obliki zapišemo tudi takole:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_N(t)dt.$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Če je δ dovolj majhen, zaradi enakomerne zveznosti funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ velja $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon/2$ za vsak $x \in [-\pi, \pi)$ in $|t| < \delta$. Upoštevajmo, da je zvezna funkcija f na kompaktnem intervalu $[-\pi, \pi]$ po absolutni vrednosti omejena, npr. s konstanto $M > 0$, in da za Fejérjevo jedro veljata oceni iz točk 2 in 3, torej $F_N(t) \leq \frac{\pi^2}{N\delta^2}$ za $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$. Izberimo še $N > 2M\pi^2/\epsilon\delta^2$. Potem je

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))) F_N(t) dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t|<\delta} (f(x+t) - f(x)) F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} (f(x+t) - f(x)) F_N(t) dt$$

in zato

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} |f(x+t) - f(x)| F_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} |f(x+t) - f(x)| F_N(t) dt <$$

$$\epsilon/2 + 2M\pi^2/N\delta^2 < \epsilon.$$

Torej velja $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$ enakomerno na $x \in [-\pi, \pi)$ oziroma zaradi periodičnosti kar na $\mathbb{R}$.

Zdaj lahko dokažemo **izrek o enoličnosti** za Fourierove vrste:

IZREK 1. *Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna periodična funkcija in $\widehat{f}(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, je $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če torej za dve zvezni funkciji velja $\widehat{f} = \widehat{g}$, je $f = g$.*

Dokaz. Za vsak N in vsak x namreč velja $\sigma_N f(x) = \sum_{|n|\leq N} (1 - \frac{|n|}{N+1}) \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{inx} = 0$. Potem pa je zaradi trditve 1 tudi $f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = 0$.

Opomba. Da se pokazati, da velja izrek o enoličnosti tudi za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$, tudi če ni povsod zvezna. Take so npr. nekatere funkcije iz zgleda 1).

TRDITEV 2 (**Riemann-Lebesguova lema**). *Za vsako zvezno periodično funkcijo f na realni osi $\mathbb{R}$ velja $\widehat{f}(n) \to 0$ $(|n| \to \infty)$.*

Dokaz. Aproksimirajmo f s Cesárovo delno vsoto $\sigma_N f$, tako da bo $|f(x) - \sigma_N f(x)| < \epsilon$ za dovolj velik N, ne glede na to, kje je x. To lahko storimo zaradi enakomerne konvergence Cesarovih delnih vsot proti funkciji f na vsej realni osi. Naj bo naravno število $|n| > N$. Potem je $\widehat{\sigma_N f}(n) = 0$ in

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sigma_N f(x)) \mathrm{e}^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N f(x)| dx < \epsilon.$$

To velja za vsak dovolj velik $|n|$, torej imamo konvergenco $\widehat{f}(n) \to 0$ $(|n| \to \infty)$.

POSLEDICA. *Za zvezno funkcijo f tudi njeni realni Fourierovi koeficienti a_n,b_n konvergirajo proti nič, ko $n \to \infty$.*

Dokaz. Sledi iz enakosti $a_n = c_n + c_{-n} = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)$ in $b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$.

Riemann-Lebesguova lema velja tudi za integrabilne funkcije na $[-\pi,\pi)$. To lahko pokažemo kot posledico naslednje trditve, ki je zanimiva sama po sebi.

TRDITEV 3. *Za vsako integrabilno funkcijo* $f:\ [-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ *s Fourierovimi koeficienti* c_k *je vrsta* $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$ *konvergenta in velja*

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\le\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx.$$

Dokaz. Označimo $g=f-S_nf$, kjer je S_nf n-ta delna vsota Fourierove vrste za f. Ker je funkcija f realna, so realne tudi delne vsote S_nf, čeprav so koeficienti c_k kompleksni (spomnimo se, da je $\overline{c}_k=c_{-k}$). Zato je realna tudi funkcija g. Upoštevajmo, da je potem tudi g^2 integrabilna funkcija, in izračunajmo

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_nf(x))^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_nf(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}S_nf(x)^2dx.$$

Ker je $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_nf(x)dx=\sum_{|k|\le n}c_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx=2\pi\sum_{|k|\le n}|c_k|^2$ in $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}S_nf(x)^2dx=$ $\displaystyle\sum_{|k|\le n}\sum_{|j|\le n}c_kc_j\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k+j)x}dx=2\pi\sum_{|k|\le n}|c_k|^2$, dobimo

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx-2\pi\sum_{|k|\le n}|c_k|^2.$$

Ker je $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)^2dx\ge 0$, dobimo iskano neenakost najprej za končno vsoto in v limiti tudi za vrsto.

POSLEDICA. *Za vsako integrabilno funkcijo* $f:\ [-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ *velja Riemann-Lebesguova lema, tj.* $\widehat{f}(k)\to 0$ $(|k|\to\infty)$.

Dokaz. Po trditvi 3 je $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2<\infty$, torej je vrsta konvergentna in zato velja $\widehat{f}(k)=c_k\to 0$, če $|k|\to\infty$.

Izreki o konvergenci Fourierovih vrst

Ni vsaka trigonometrična vrsta Fourierova za neko integrabilno funkcijo. Tako je npr. *kosinusna vrsta* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$ Fourierova, ustrezna *sinusna vrsta* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ pa ne; vendar je to nekoliko težje videti. Včasih pa lahko iz lastnosti trignometrične vrste oziroma njenih koeficientov ugotovimo tudi njeno Fourierovo naravo.

TRDITEV 4. *Denimo, da trigonometrična vrsta* S *konvergira enakomerno na vsej realni osi. Potem je njena vsota* f *zvezna periodična funkcija, katere Fourierova vrsta je vrsta* S*, se pravi* $S(f)=S$.

Dokaz. Ker so členi vrste S zvezne in periodične funkcije s periodo 2π, je zaradi enakomerne konvergence na $\mathbb{R}$ tudi njena vsota f zvezna in periodična funkcija na $\mathbb{R}$ z isto periodo, torej $\displaystyle f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_je^{ijx}$. Ko pomnožimo celo vrsto s funkcijo e^{-ikx}, dobimo vrsto $\displaystyle f(x)e^{-ikx}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_je^{i(j-k)x}$. Dobljena vrsta še vedno konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$, torej tudi na podintervalu $[-\pi,\pi)$. Po izreku $2'$ iz razdelka 2 jo smemo členoma integrirati, integral njene vsote pa je enak vsoti vrste, sestavljene iz integralov členov. Za Fourierove koeficiente funkcije f torej dobimo za vsak k

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(j-k)x}dx = c_k.$$

To pomeni, da je S Furierova vrsta za svojo vsoto f.

ZGLED 2. Lahko se prepričamo, da je Fourierova vrsta za *zvezno* funkcijo

(a) $f(x) = |x|$, definirano na $[-\pi, \pi)$, enaka $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ in za *zvezno* funkcijo

(b) $f(x) = x^2$, definirano na $[-\pi, \pi)$, enaka $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Obe vrsti sta enakomerno konvergentni na $\mathbb{R}$, kar lahko takoj ugotovimo z Weierstrassovim kriterijem. Torej je po trditvi 4 vsaka od njiju Fourierova vrsta za njuno vsoto g, ki je zvezna periodična funkcija na $\mathbb{R}$. Po izreku o enoličnosti sledi od tod $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in [-\pi, \pi)$, se pravi, da je vsota vrste na intervalu $[-\pi, \pi)$ kar funkcija f, s katero smo začeli. To pomeni, da lahko pišemo:

(a) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$,

(b) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Poznamo torej vsoti teh dveh vrst. Če v vrsto (a) vstavimo $x = 0$, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

od koder lahko s prištetjem in odštetjem vrste $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ najdemo tudi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Isto odkrijemo tudi, če v vrsto (b) vstavimo $x = \pi$.

Če pa v vrsto (b) vstavimo $x = 0$, najdemo še vsoto alternirajoče vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, ki jo lahko izpeljemo tudi iz njene absolutne predstavnice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Oglejmo si posebno preprost konvergenčni izrek za Fourierove vrste, ki pripadajo zvezno odvedljivim periodičnim funkcijam. Najprej potrebujemo naslednji rezultat o Fourierovih koeficientih takih funkcij.

TRDITEV 5. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.*

Dokaz. Z integracijo po delih dobimo za $n \neq 0$ enakost

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}f(t)\mathrm{e}^{-int}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}dt = in\widehat{f}(n).$$

Upoštevali smo,da sta funkciji $f(t)$ in e^{-int} periodični, tako da zintegrirani del odpade. Za $n=0$ pa uporabimo periodičnost funkcije f in osnovni izrek integralskega računa:

$$\widehat{f'}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)dt=\frac{1}{2\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0.$$

IZREK 2. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, velja* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|<\infty$.

Dokaz. Za zvezno odvedljivo periodično funkcijo f je po zgornjem $\widehat{f'}(n)=in\widehat{f}(n)=inc_n$ za vsak $n\in\mathbb{Z}$. Tedaj imamo po Cauchy-Schwarzovi neenakosti za vsak $m\in\mathbb{N}$ oceno

$$\sum_{0<|n|\le m}|\widehat{f}(n)|=\sum_{0<|n|\le m}\frac{1}{|n|}|nc_n|\le\left(\sum_{0<|n|\le m}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{0<|n|\le m}n^2|c_n|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2}\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)^2dx\right)^{1/2}=$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)^2dx\right)^{1/2}<\infty.$$

Upoštevali smo zgled 2 in trditvi 3 in 5. Ker velja zgornja ocena za vsak $m\in\mathbb{N}$, dobimo iskano neenakost.

POSLEDICA. *Če je f zvezno odvedljiva periodična funkcija, konvergira Fourierova vrsta $S(f)$ proti f absolutno in enakomerno na vsej realni osi.*

Dokaz. Pod danimi pogoji je

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|=\sum_{n=1}^{\infty}|c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}|\le\sum_{n\ne0}|c_n|<\infty,$$

torej je $\sum_{n\ne0}|c_n|$ konvergentna številska majoranta Fourierove vrste, ki zato absolutno in (po Weierstrassu) enakomerno na $\mathbb{R}$ konvergira proti zvezni funkciji z istimi Fourierovimi koeficienti (glej trditev 4), se pravi proti f (izrek o enoličnosti).

V zgornji posledici je bila funkcija f zvezno odvedljiva. Če je samo zvezna, njena Fourierova vrsta ne konvergira nujno v vsaki točki, pač pa to velja, kot bomo videli, npr. za povsod odvedljivo periodično funkcijo, vendar konvergenca Fourierove vrste v tem primeru ni nujno enakomerna.

Najprej preoblikujmo Dirichletovo jedro in izpeljimo asimptotično vedenje delnih vsot Fourierove vrste za dano zvezno periodično funkcijo f. Ker za $t\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ velja

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}=2\frac{\sin nt}{t}+\cos nt+(\mathrm{ctg}(t/2)-2/t)\sin nt,$$

je za vsak $x\in\mathbb{R}$

$$S_nf(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos ntdt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)(\mathrm{ctg}(t/2)-2/t)\sin ntdt.$$

Zadnja dva člena z rastočim n konvergirata proti nič po Riemannovi lemi. Upoštevjmo, da je $t\mapsto f(x+t)$ zvezna funkcija in da velja v bistvo isto za funkcijo $t\mapsto\mathrm{ctg}(t/2)-2/t$ (z uporabo L'Hospitalovega pravila se lahko prepričamo, da limita te funkcije v točki 0 obstaja in da je $\lim_{t\to 0}(\mathrm{ctg}(t/2) - 2/t) = 0$). Zato imamo pri poljubnem $0 < \delta < \pi$ asimptotično oceno

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\delta}\frac{f(x+t)}{t}\sin ntdt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Oznaka $o(1)$ $(n\to\infty)$ pomeni, da je $\lim_{n\to\infty} o(1) = 0$. Drugi integral spet konvergira proti 0, ko $n\to\infty$, po Riemannovi lemi, saj je $t \to \frac{f(x+t)}{t}\chi_{\{t;|t|\geq\delta\}}(t)$ kot odsekoma zvezna funkcija integrabilna. Torej je končno

$$(a)\qquad S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Upoštevaje sodost funkcije $\sin nt/t$ lahko to formulo prepišemo v

$$(b)\qquad S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

V posebnem primeru $f(x) = 1$ za vsak x, ko je tudi $S_n f(x) = 1$ za vsak x, dobimo iz formule (b)

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Odtod lahko izpeljemo naslednji rezultat:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Upoštevaje (b) lahko za poljuben $x\in\mathbb{R}$ zapišemo

$$(c)\qquad S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin nt}{t}dt + o(1)\ (n\to\infty).$$

Odtod dobimo potreben in zadosten pogoj za konvergenco delnih vsot Fourierove vrste funkcije f v točki x proti številu $f(x)$.

IZREK 3. *Fourierova vrsta zvezne periodične funkcije f je v točki $x\in\mathbb{R}$ konvergentna in ima vsoto $f(x)$ natanko takrat, ko za poljuben $\delta > 0$ velja*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin nt}{t}dt \to 0\ \ (n\to\infty).$$

Dokaz. Sledi takoj iz formule (c).

POSLEDICA. *Če je zvezna periodična funkcija f odvedljiva v točki $x\in\mathbb{R}$, njena Fourierova vrsta v tej točki konvergira in ima vsoto $f(x)$.*

Dokaz. Naj bo $g(t) = [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]/t$ za $0 < t \leq \delta$. Ker v tem primeru obstaja limita $\lim_{t\to 0} g(t)$ in je f zvezna funkcija, je funkcija g integrabilna na intervalu $[0,\delta)$, funkcija $t\mapsto g(t)\chi_{(0,\delta]}$ pa na intervalu $[-\pi,\pi)$, zato je konvergenčni pogoj zgornjega izreka po Riemannovi lemi izpolnjen.

Druga preprosta posledica je ti. *Riemannov princip lokalizacije* za Fourierove vrste.

IZREK 4. *Če je zvezna periodična funkcija f enaka nič na intervalu $(x-\delta, x+\delta)$, je vsota njene Fourierove vrste v točki x enaka nič, tj. velja*

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = 0.$$

Dokaz. Iz (a) ali (b) dobimo v tem primeru relacijo $S_n f(x) = o(1)$ $(n\to\infty)$.

Princip lokalizacije pove, da je konvergenčno vedenje Fourierove vrste $S(f)$ v točki x odvisno samo od lokalnih lastnosti funkcije f v bližini točke x. Z dugimi besedami, dve funkciji, ki se ujemata v okolici točke x, imata Fourierovi vrsti, ki v točki x hkrati obe konvergirata ali obe divergirata.

Opomba. Zgornji izreki o konvergenci veljajo v resnici za vsako funkcijo f, ki je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$ (dokaz ni bistveno težji), npr. za tako, ki je na njem omejena in odsekoma zvezna.

ZGLED. Upoštevaje zadnjo opombo lahko ugotovimo, da v zgledu 1(a),(b) ali (c) vse Fourierove vrste konvergirajo proti ustrezni $f(x)$ v vsaki točki x, kjer je ustrezna funkcija f odvedljiva. Če npr. vstavimo $x = \pi/2$, lahko v vsakem od primerov najdemo vsoto ustrezne številske vrste: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n+1) = \pi/4$.