

## II. LIMITA IN ZVEZNOST FUNKCIJ

### 1. Preslikave med množicami

*Funkcija* ali *preslikava* med dvema množicama  $A$  in  $B$  je predpis  $f$ , ki vsakemu elementu  $x$  množice  $A$  priredi natanko določen element  $y$  množice  $B$ . Važno je, da je predpis nedvoumen, se pravi, da je z njim element  $y$ , ki pripada elementu  $x$ , natanko določen. Rečemo, da  $f$  preslika  $x$  v  $y$ . V tem primeru je  $x$  original,  $y$  pa njegova slika pri preslikavi  $f$ . Včasih tudi rečemo, da je  $y$  vrednost funkcije  $f$  pri argumentu  $x$ . To dejstvo zapišemo na različne načine, npr.  $f : x \mapsto y$  ali  $y = f(x)$ . Torej gre za posebno relacijo med elementi  $x$  in  $y$  v množici  $A \cup B$ . Včasih rečemo, da je funkcija *enolična* relacija, saj se ne more zgoditi, da bi pri nekem originalu  $x$  veljalo  $y_1 = f(x)$  in  $y_2 = f(x)$  za različna  $y_1$  in  $y_2$ . Graf te relacije imenujemo *graf funkcije*  $f$  in je podmnožica v  $A \times B$ , namreč  $G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in A\}$ . Kadar sta  $A$  in  $B$  množici realnih števil, je to običajni graf funkcije, kot ga poznamo iz srednje šole. V ravnini, opremljeni s kartezičnim koordinatnim sistemom, si ga lahko narišemo kot krivuljo.

Kadar deluje med množicama  $A$  in  $B$  preslikava  $f$ , zapišemo to v krajši obliki  $f : A \rightarrow B$ . Vsi originali pri preslikavi  $f$  sestavljajo množico  $A$ ; pravimo, da je množica  $A$  *domena* ali *definičijsko območje* funkcije  $f$ , kar zapišemo  $A = D_f$ . Vse slike pa sestavljajo neko podmnožico v množici  $B$ , *kodomeni* funkcije  $f$ . Množico vseh slik pogosto označimo z  $Z_f$ , torej  $Z_f = \{f(x); x \in A\}$  in imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije  $f$ . V splošnem je to prava podmnožica v  $B$ , zgodi pa se tudi, da je enaka vsej množici  $B$ , torej  $Z_f = B$ . Tedaj rečemo, da je preslikava  $f$  *surjektivna* oziroma, da je  $f$  *surjekcija* in da  $f$  preslika množico  $A$  na množico  $B$ .

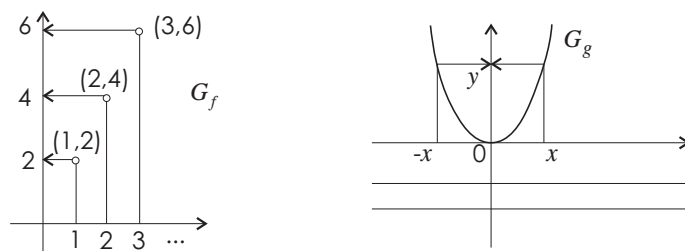
ZGLED. Preslikava  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definirana s predpisom  $f(n) = 2n$ , ima za zalogo vrednosti podmnožico vseh sodih naravnih števil  $S = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$  in ni surjektivna. Tudi preslikava  $g(x) = x^2$  iz  $\mathbb{R}$  v  $\mathbb{R}$  ni surjektivna. Njena zaloga vrednosti je enaka množici vseh nenegativnih realnih števil  $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ .

Vsak original iz domene  $A$  ima seveda samo eno sliko v  $Z_f \subset B$ . Lahko pa se primeri, da imata dva ali še več različnih originalov skupno sliko. (Lahko se npr. vsi elementi iz  $A$  preslikajo v isti element v  $B$ , preslikava je torej lahko konstantna, spomnimo se konstantnega zaporedja.) Če to *ni* res, če imata torej različna originala vedno različni slike, se pravi, če iz  $x_1 \neq x_2$  sledi  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , potem rečemo, da je preslikava  $f$  *injektivna* oziroma, da je  $f$  *injekcija*.

ZGLED. Identična preslikava na množici  $A$  je funkcija, označimo jo z  $id_A$ , ki vsakemu elementu  $x \in A$  priredi spet element  $x \in A$ . Taka preslikava je seveda injektivna (in surjektivna). Prav tako je injektivna preslikava  $f$  iz prejšnjega zgleda ( $f(n) = 2n$ ). Ni pa injektivna druga preslikava  $g$ , saj je  $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$  in  $-x \neq x$  za  $x \neq 0$ .

Iz grafa lahko enostavno razberemo, kdaj je funkcija  $f$  surjektivna oziroma injektivna. Za realne funkcije realne spremenljivke, katerih graf lahko narišemo v ravnini, je to še posebej preprosto in nazorno. Funkcija  $f$  je surjektivna, če vsaka vodoravna premica skozi točko kodomene (na ordinatni osi) vsaj enkrat preseka graf (originali so abscise teh presečišč). Funkcija  $f$  je injektivna, če vsaka vodoravna premica preseka graf kvečjemu enkrat. Funkcija  $f$  iz zadnjega zgleda je npr. injektivna, ni pa surjektivna (slika 1a).

Kvadratna funkcija  $g$  pa ni ne eno ne drugo (slika 1b).



SLIKA 1. Diskretna in zvezna funkcija

Funkcija, ki je hkrati injektivna in surjektivna, se imenuje *bijekcija* ali *bijektivna preslikava*. Zanja je značilno, da vsakemu elementu domene  $A$  pripada natanko določen element kodomene  $B$  (tako kot pri vsaki preslikavi) ter da je tudi vsak element kodomene  $B$  slika natanko enega elementa iz domene  $A$ . Zato lahko za vsako bijekcijo  $f$  definiramo novo preslikavo, ki vsakemu elementu  $y$  kodomene  $B$  priredi tisti natanko določeni original  $x$  iz domene  $A$ , ki se z  $f$  preslika v  $y$ . Tej novi preslikavi rečemo *inverzna funkcija* (k funkciji  $f$ ) in jo označimo z  $f^{-1}$ . Zanja očitno velja  $y = f(x)$  natanko takrat, ko je  $x = f^{-1}(y)$ .

ZGLED. Preslikava  $f$ , ki elemente množice  $A = \{1, 2, 3\}$  preslika v elemente množice  $B = \{a, b, c\}$  (v istem - naravnem vrstnem redu), je seveda bijekcija. Bijekcija je npr. tudi preslikava  $g$ , ki preslika  $1$  v  $b$ ,  $2$  v  $a$  in  $3$  v  $c$ . Funkcija, določena z  $1 \mapsto a$ ,  $2 \mapsto b$  in  $3 \mapsto b$ , pa ni niti injektivna niti surjektivna. K  $f$  inverzna preslikava  $f^{-1}$  preslika  $a$  v  $1$ ,  $b$  v  $2$  in  $c$  v  $3$ , medtem ko  $g^{-1}$  preslika  $a$  v  $2$ ,  $b$  v  $1$  in  $c$  v  $3$ .

Funkcija je povsem določena, če poznamo njeno domeno in če vemo, kam se posamezen element preslika. To pomeni, da sta funkciji  $f$  in  $g$  enaki, če delujeta na isti domeni  $A$  in velja  $f(x) = g(x)$  za vsak  $x \in A$ . Funkciji  $f$  in  $g$  iz prejšnjega zglada npr. nista enaki.

Funkcije lahko včasih sestavljamo: iz dveh ali več napravimo nove, sestavljene funkcije ali kompozite. Če je npr.  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$ , obstaja *kompozitum*  $g \circ f : A \rightarrow C$ , definiran s predpisom  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  za vsak  $x \in A$ .

ZGLED. Naj bo npr.  $f$  preslikava iz množice  $\{1, 2, 3, 4\}$  v množico  $\{1, 2, 3, 4\}$ , definirana s predpisom  $1 \mapsto 3$ ,  $2 \mapsto 1$ ,  $3 \mapsto 1$ ,  $4 \mapsto 2$  ter  $g$  preslikava med istima množicama, določena z  $1 \mapsto 4$ ,  $2 \mapsto 2$ ,  $3 \mapsto 1$ ,  $4 \mapsto 4$ . Tedaj za  $g \circ f$  velja  $1 \mapsto 1$ ,  $2 \mapsto 4$ ,  $3 \mapsto 4$ ,  $4 \mapsto 2$ , za  $f \circ g$  pa  $1 \mapsto 2$ ,  $2 \mapsto 2$ ,  $3 \mapsto 3$ ,  $4 \mapsto 2$ . Od tod tudi vidimo, da sta kompozituma  $f \circ g$  in  $g \circ f$  lahko različna, četudi oba obstajata.

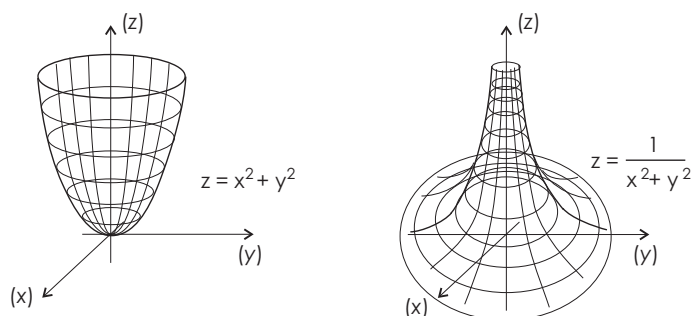
Kompozitum dveh bijektivnih preslikav je spet bijektivna preslikava, o čemer se zlahka prepričamo. Če je  $f$  bijekcija in  $f^{-1}$  njej inverzna preslikava, je  $f^{-1} \circ f = id_A$  in  $f \circ f^{-1} = id_B$ . Tu smo z  $id_A$  in  $id_B$  označili posebno preprosti preslikavi iz  $A$  na  $A$  oziroma iz  $B$  na  $B$ :  $id_A$  je identična preslikava na množici  $A$ , ki pusti vsak element iz  $A$  pri miru, se pravi,  $id_A(x) = x$ ; podobno je  $id_B$  identična preslikava na množici  $B$ .

### Funkcije ene ali več realnih spremenljivk

V nadaljevanju bomo obravnavali samo funkcije  $f$ , katerih definicijsko območje (domena)  $D_f$  bo neka podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ , zaloga vrednosti  $Z_f$  pa podmnožica v  $\mathbb{R}$ . Kadar je  $n = 1$  govorimo o (realnih) *funkcijah ene realne spremenljivke* in zapišemo kar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kadar je  $n > 1$  pa o (realnih) *funkcijah več spremenljivk* oziroma v simboličnem zapisu  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Če domeno zamolčimo, se razume, da je  $D_f$  množica tistih vrednosti v  $\mathbb{R}$  ali  $\mathbb{R}^n$ , kjer je se da dani predpis izvršiti oziroma vrednost funkcije izračunati.

Kot ponavadi je  $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in D_f\}$  graf funkcije  $f$ , le da je to pot graf podmnožica v  $D_f \times \mathbb{R}$ , torej podmnožica v  $(n + 1)$ -razsežnem prostoru  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ . Pri funkciji ene realne spremenljivke je to neka krivulja v ravnini  $\mathbb{R}^2$ , pri funkciji dveh spremenljivk pa neka *ploskev* v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

ZGLED.  $f(x) = x^2$  (glej sliko 1b),  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$  (glej sliko 2 a in b).



SLIKA 2. Funkciji dveh spremenljivk

V definicijskem območju so zanimive podmnožice tistih realnih števil, pri katerih je funkcijska vrednost enaka 0. Taka števila imenujemo *ničle* funkcije, ki so lahko izolirane točke ali pa ne. Sestavljajo *ničelno množico*. Nadalje nas npr. zanima, kdaj so funkcijske vrednosti pozitivne ali negativne, kdaj naraščajo hkrati z argumentom, kdaj padajo, kdaj se periodično ponavljajo, kdaj so enake ali nasprotno predznačene pri nasprotnih argumentih (sodost, lihost) itd. Pri risanju grafov funkcij si pomagamo tudi z *nivojnicami* ali *izohipsami* (tj. s preseki z vodoravnimi ravninami) in z *meridiani* pri osno simetričnih ploskvah (tj. s preseki z navpičnimi ravninami skozi os  $z$ ) oziroma v splošnem primeru s preseki z navpičnimi ravninami, pravokotnimi na os  $x$  ali os  $y$ . Vse te lastnosti se zrcalijo na grafu funkcije, zato je prav, da jih poznamo.

Splošne funkcije so lahko zelo nenavadne, vendar se bomo v bodoče ukvarjali le z bolj preprostimi med njimi. Pri funkcijah ene realne spremenljivke bomo npr. obravnavali le elementarne funkcije, ki jih že poznamo iz srednje šole. To so npr. potence in polinomi, racionalne funkcije, korenske funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije, kotne (trigonometrične) in krožne (ciklotometrične) funkcije. Tem funkcijam bomo računali limite, ugotavljali, ali so zvezne, jih odvajali in iskali njihove ekstreme. Kasneje pri analizi 2 jih bomo integrirali, jih razvijali v vrsto in uporabljali pri opisovanju ali (kot pogosto rečemo) modeliranju marsikaterega naravnega (in umetnega) pojava.

## 2. Limita funkcije

O funkciji dostikrat razmišljamo dinamično. Vprašamo se npr., kaj se dogaja z njenimi funkcijskimi vrednostmi, ko se argument bliža neki točki z roba definicijskega območja. To tendenco, kadar obstaja, opišemo s pojmom limita funkcije. Formalna definicija je naslednja:

DEFINICIJA. Število  $b \in \mathbb{R}$  je *limita* funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , če za vsako zaporedje  $(\mathbf{x}_n)$ , katerega členi  $\mathbf{x}_n$  pripadajo definicijskemu območju  $D_f$ , so različni od  $\mathbf{a}$  in konvergirajo proti  $\mathbf{a}$ , ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti  $f(\mathbf{x}_n)$  konvergira proti številu  $b$ .

Iz definicije vidimo, da mora biti točka  $\mathbf{a}$  limitna točka množice  $D_f \setminus \{\mathbf{a}\}$  sicer v bližnjih točkah  $\mathbf{x}_n$  ne bi mogli računati funkcijskih vrednosti.

Dejstvo, da je število  $b$  limita funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a}$ , zapišemo z znakom limite:

$$b = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}).$$

ZGLED. Pokažimo  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Če poljubno zaporedje  $(x_n)$  konvergira k 0, velja (po pravilih za računanje limit zaporedij realnih števil)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 = 0$ .

Podobno je npr.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$ , saj za vsako zaporedje  $(x_n)$  z lastnostjo  $x_n \rightarrow 0$  velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x_n} = 1$ .

### Računanje limit funkcij ene spremenljivke

Računanje limit poteka podobno kot pri zaporedjih, saj smo limito tudi definirali z zaporedji. Pri tem upoštevamo, da velja:

1. Limita vsote (razlike) funkcij je vsota (razlika) limit.
2. Limita produkta je produkt limit.
3. Limita kvocienta je kvocient limit pod pogojem, da je limita imenovalca različna od 0.

ZGLEDI. (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$ .

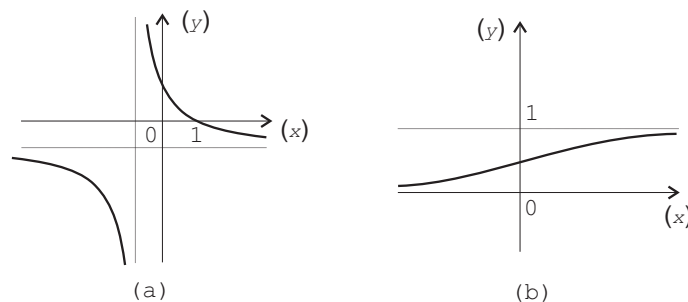
Limite ulomka ne moremo vedno izračunati kot kvocient limit. Pogosto pri tem dobimo nedoločen izraz oblike  $0/0$  ali  $\infty/\infty$ . V takem primeru moramo najprej pokrajšati faktor, ki povzroča nedoločenost (kot smo to storili v zgledu (a)), včasih pa tudi odpraviti razlike korenov (kot v zgledu (b)), upoštevati že znane limite (v zgledu (c) smo potrebovali  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ , ki jo bomo še izpeljali) itd. Na koncu računanja običajno upoštevamo, da je za zvezne funkcije, ki jih bomo definirali v naslednjem razdelku, limita enaka funkcijski vrednosti.

TRDITEV. Naj za funkcije  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v okolice točke  $\mathbf{a}$  velja  $f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ . Če obstajata limiti funkcije  $f$  in  $g$  v točki  $\mathbf{a}$  in sta enaki, obstaja tudi limita funkcije  $h$  v točki  $\mathbf{a}$  in velja  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ .

**Dokaz.** Takoj sledi iz izreka o sendviču za zaporedja.

### Limita v neskončnosti

Pri funkcijah ene realne spremenljivke nas včasih zanima, kako se vedejo funkcijske vrednosti, kadar argument  $x$  narašča (ali pada) preko vsake meje. Tedaj rečemo, da nas zanima limita funkcije v neskončnosti.



SLIKA 3. Limita v neskončnosti

ZGLED. (a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$ . Premica  $y = -1$  je tedaj vodoravna asimptota funkcije  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  (slika 3a).

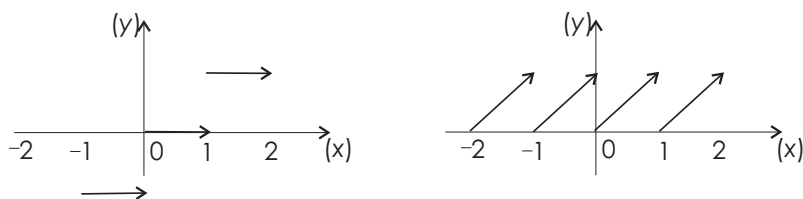
(b) Zgodi se, da sta leva in desna asimptota (pri pogojih  $x \rightarrow -\infty$  in  $x \rightarrow \infty$ ) različni. Tako je npr. pri funkciji  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  ali npr. pri funkciji  $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  (slika 3b). V tem primeru je  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

### Neobstoj limit

Včasih funkcija  $f$  v kakšni točki  $a$  nima limite, čeprav se da poljubno blizu  $a$  računati njene vrednosti.

ZGLEDI. (a) Vzemimo npr. funkcijo ene spremenljivke, definirano za  $x \neq 0$  s predpisom  $f(x) = 1/x$ . Ker je za vsako zaporedje  $(x_n)$ , ki konvergira k 0, zaporedje funkcijskih vrednosti  $f(x_n)$  neomejeno (saj tedaj  $|f(x_n)| \rightarrow \infty$ ) in zato ne konvergira, ni nobenega števila  $b$ , ki bilo limita funkcije  $f$  v točki 0.

(b) Naj bo  $f(x) = [x]$ , celi del realnega števila  $x$  (glej sliko 4a) in naj bo  $a$  poljubno celo število. Vidimo, da je v neposredni bližini levo od števila  $a$  vrednost funkcije  $f$  enaka  $a - 1$ , desno pa  $a$ . Če torej npr. vzamemo zaporedje s členi  $x_n$ , ki se sicer približujejo celemu številu  $a$ , vendar ležijo izmenično enkrat levo enkrat desno od  $a$ , vidimo, da ima zaporedje funkcijskih vrednosti  $f(x_n)$  dve stekališči,  $a - 1$  in  $a$ . Limite torej ni in pri celim številu  $a$  funkcija  $f$  nima limite. Podobno velja za sorodno funkcijo  $g(x) = x - [x]$ , katere zaloga vrednosti je interval  $[0, 1)$  (glej 4b).



SLIKA 4. Stopničasta in žagasta funkcija

V zgornji točki (b) imata obe funkciji  $f$  in  $g$  vsaj levo in desno limito.

### Leva in desna limita

DEFINICIJA. *Leva limita* funkcije ene realne spremenljivke  $f$  v točki  $a$  je tako realno število  $b$ , da za vsako zaporedje  $(x_n)$ , katerega členi  $x_n$  pripadajo definicijskemu območju  $D_f$ , so manjši od  $a$  in konvergirajo proti  $a$ , ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti  $f(x_n)$  konvergira proti številu  $b$ . Podobno definiramo *desno limito* funkcije ene realne spremenljivke  $f$  v točki  $a$ , če so vsi členi  $x_n$  večji od  $a$ .

Dejstvo, da je  $b$  leva limita funkcije  $f$  v točki  $a$  označimo z  $b = \lim_{x \uparrow a} f(x)$ , pa tudi z  $b = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  ali  $b = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ . Včasih celo pišemo  $b = f(a-)$ , kjer pa moramo biti pozorni, da  $f(a-)$  ne pomeni vrednosti funkcije v točki  $a$ , ampak samo njeno levo limito. Desno limito zaznamujemo z  $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ , z  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  ali  $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ , včasih pa tudi z  $f(a+)$ . Tako npr. v zadnjem zgledu v točki (b) velja  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = a - 1$ ,  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = a$  in  $\lim_{x \uparrow a} g(x) = 1$ ,  $\lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ . Vidimo, da sta leva in desna limita lahko različni, tudi če obstajata.

ZGLED. *Indikatorna ali karakteristična funkcija* dane podmnožice  $A \subset \mathbb{R}$  je definirana s predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases} .$$

Za karakteristično funkcijo  $\chi_{[a,b]}$  zaprtega intervala  $[a, b]$  je npr.  $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ , če je  $a \leq x \leq b$ , in 0 sicer. V vseh točkah, razen v krajših  $a$  in  $b$ , obstaja limita (1 ali 0), leva limita v  $a$  je 0, desna 1, leva limita v  $b$  je 1, desna 0.

### Čudne funkcije

Obstajajo funkcije, ki v nobeni točki nimajo niti desne niti leve limite. Taka je npr. funkcija  $d = \chi_{\mathbb{Q}}$ , karakteristična funkcija množice racionalnih števil  $\mathbb{Q}$ . Imenujemo jo tudi Dirichletova funkcija po nemškem matematiku L. Dirichletu (1805-1859), ki jo je prvi opisal. Če je namreč  $a \in \mathbb{R}$  poljubna točka, in je  $(x_n)$  poljubno zaporedje racionalnih točk, ki z leve strani konvergirajo proti  $a$ , konvergirajo funkcijske vrednosti  $d(x_n)$  proti 1; če pa so  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , konvergirajo zaporedje  $d(x_n)$  proti 0. Podobno je, če se bližamo točki  $a$  z desne strani.

Še bolj čudno funkcijo je leta 1875 predlagal K.J. Thomae:

$$t(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 1/q & , \quad x = p/q \text{ (okrajšan ulomek)} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ta funkcija pa ima limito v vsaki točki  $a \in \mathbb{R}$ , čeprav je divje nemonotona. Če se namreč z zaporedjem  $x_n = p_n/q_n \in \mathbb{Q}$  bližamo točki  $a$ , morajo imenovalci  $q_n$  postajati čedalje večji in rasti v neskončnost; v nasprotnem primeru bi ulomki  $p_n/q_n$  postali neomejeni, kar bi bilo v nasprotju s konvergenco  $p_n/q_n \rightarrow a$ . Torej je za vsako zaporedje  $x_n \in \mathbb{Q}$  z lastnostjo  $x_n \rightarrow a$  tudi  $t(x_n) = 1/q_n \rightarrow 0$ . Isto velja potem tudi za vsako zaporedje iracionalnih števil  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , in sploh za vsako zaporedje  $x_n \rightarrow a$ . Kot bomo videli kasneje, je ta funkcija zvezna v vsaki iracionalni točki (torej na gosti števeni podmnožici v  $\mathbb{R}$ ) in nezvezna v vsaki racionalni točki.

### Limita funkcije več spremenljivk

Pri funkcijah več spremenljivk imamo lahko podobne ali še hujše težave. Tam sicer ne moremo govoriti o levih in desnih limitah, pač pa je limita zaporedja funkcijskih vrednosti prav tako lahko odvisna od smeri, v kateri se zaporedje točk  $\mathbf{x}_n$  približuje točki  $\mathbf{a}$ .

ZGLED. Za  $(x, y) \neq (0, 0)$  lahko definiramo funkcijo dveh realnih spremenljivk

$$f(x, y) = xy/(x^2 + y^2).$$

Poglejmo, kaj se s funkcijskimi vrednostmi te funkcije dogaja v bližini točke  $(0, 0)$ . Denimo, da zaporedje  $(x_n, y_n)$  konvergirajo proti  $(0, 0)$  vzdolž premice  $y = kx$  s smernim koeficientom  $k$ . Na tej premici je

$$f(x, y) = f(x, kx) = kx^2/(x^2 + k^2x^2) = k/(1 + k^2).$$

Vidimo, da potem tudi zaporedje  $f(x_n, y_n)$  konvergirajo k številu  $k/(1 + k^2)$ . Ta limita je odvisna od smernega koeficienta  $k$ ; torej ni ena sama in zato funkcija v točki  $(0, 0)$  nima limite.

Isto lahko ugotovimo, če namesto kartezičnih koordinat  $(x, y)$  uporabimo polarne koordinate  $(r, \phi)$ , za katere velja zveza  $x = r \cos \phi$  in  $y = r \sin \phi$ . Vrednost iste funkcije  $f$  v točki  $(r, \phi)$  je potem  $f(r, \phi) = \cos \phi \sin \phi = \sin(2\phi)/2$ , kar je spet odvisno od polarne kota  $\phi$ .

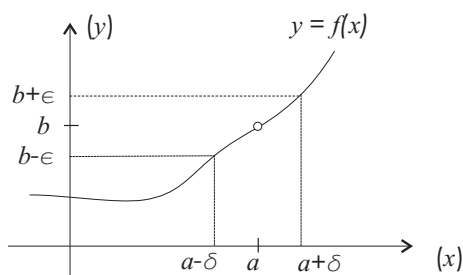
### Alternativna definicija limite funkcije

TRDITEV. Število  $b \in \mathbb{R}$  je limita funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , če in samo če za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da iz  $\mathbf{x} \in D_f$  in  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$  sledi  $|f(\mathbf{x}) - b| < \epsilon$ .

**Dokaz.** Denimo, da ne velja to, kar pravi trditev v drugem delu. Potem obstaja tak  $\epsilon > 0$ , da za vsako naravno število  $k$  obstaja točka  $\mathbf{x}_k \in D_f$ , za katero je  $0 < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < 1/k$  in hkrati  $|f(\mathbf{x}_k) - b| \geq \epsilon$ . Zaporedje točk  $\mathbf{x}_k$  torej konvergira k točki  $\mathbf{a}$ , vendar pa zaporedje funkcijskih vrednosti  $f(\mathbf{x}_k)$  ne konvergira k  $b$ . Torej  $b$  ni limita funkcije  $f$  v točki  $\mathbf{a}$ .

Obratno, naj bo to, kar pravi trditev v drugem delu, res in naj bo  $\mathbf{x}_k$  poljubno zaporedje od  $\mathbf{a}$  različnih točk iz  $D_f$ , ki konvergira k točki  $\mathbf{a}$ . Izberimo poljuben  $\epsilon > 0$  in ustrezen  $\delta > 0$  v skladu z drugim delom trditve. Potem so od nekega indeksa  $m$  dalje vsi členi zaporedja  $\mathbf{x}_k$  taki, da je  $0 < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \delta$ , in zato  $|f(\mathbf{x}_k) - b| < \epsilon$ . Torej so členi  $f(\mathbf{x}_k)$  za  $k \geq m$  v epsilonski okolici števila  $b$ . Ker velja to za vsak  $\epsilon > 0$ , konvergira zaporedje števil  $f(\mathbf{x}_k)$  k številu  $b$ .

**Opomba.** Zgornjo trditev lahko imamo za novo definicijo limite funkcije  $f$  v dani točki  $\mathbf{a}$  in jo tudi pogosto uporabljamo. Podobno je pri funkcijah ene spremenljivke  $b = \lim_{x \uparrow a} f(x)$ , če in samo če za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da iz  $x \in D_f$  in  $0 < a - x < \delta$  sledi  $|f(x) - b| < \epsilon$ , in  $b = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ , če in samo če za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da iz  $x \in D_f$  in  $0 < x - a < \delta$  sledi  $|f(x) - b| < \epsilon$ .



SLIKA 5. Limita funkcije z okolicami

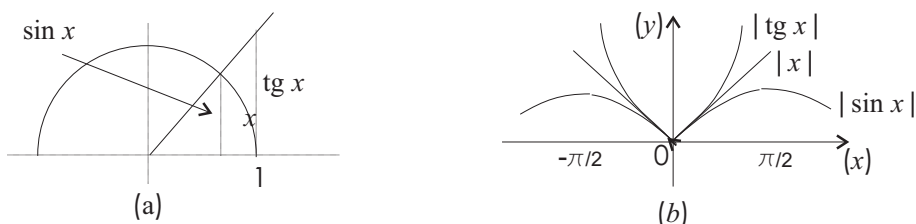
Za monotone (naraščajoče ali padajoče) funkcije, kakršna je npr. funkcija celi del, v vsaki točki obstajata leva in desna limita, nista pa nujno med seboj enaki.

**TRDITEV.** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na odprtem intervalu  $(a, b)$  monotonno naraščajoča funkcija. Potem ima  $f$  v vsaki točki  $c$  tega intervala levo in desno limito in velja

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

**Dokaz.** Množica  $A = \{f(x); a < x < c\}$  je neprazna in navzgor omejena z  $f(c)$ . Po Dedekindovem aksiomu ima supremum  $L = \sup A \leq f(c)$ . Ker pri nobenem  $\epsilon > 0$  število  $L - \epsilon$  ni več supremum, obstaja  $x_0 \in A$  za lastnostjo  $L - \epsilon < f(x_0) \leq L$  in za  $x_0 < x < c$  imamo  $L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \epsilon$ . To pa že pomeni, da je  $L$  leva limita funkcije  $f$  v točki  $c$  in da velja  $L \leq f(c)$ . Obstoj desne limite  $D$  in neenakosti  $D \geq f(c)$  dokažemo podobno.

Za padajoče funkcije velja podobna trditev z zamenjano neenakostjo, o čemer se lahko takoj prepričamo, če zgornjo trditev uporabimo na funkciji  $-f$ .



SLIKA 6. Neenakosti s sinusom in tangensom

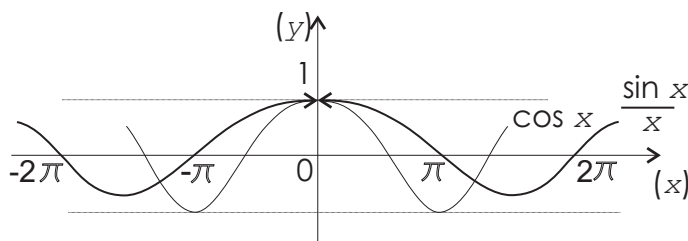
### Posebne limite

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

Dokaz sledi iz ocene  $|1 - \cos x| = \sin^2 x / (1 + \cos x) \leq x^2$  za  $|x| \leq \pi/2$ . Uporabili smo oceno  $\sin^2 x \leq x^2$  oziroma  $|\sin x| \leq |x|$ , ki jo brez težav izpeljemo za  $x > 0$  iz geometrijskega premisleka, da je dolžina pravokotnice na abscisno os manjša od dolžine tetive, le-ta pa manjša od dolžine krožnega loka (glej sliko 6a). Za  $x < 0$  upoštevamo simetrično situacijo. Iz iste slike s primerjanjem ploščin krožnega izseka in večjega pravokotnega trikotnika vidimo, da velja tudi neenakost  $x \leq \operatorname{tg} x$  oziroma splošneje  $|x| \leq |\operatorname{tg} x|$ , ki jo bomo potrebovali kasneje. Na sliki 6b sta obe ključni neenakosti prikazani z grafi funkcij  $|x|$ ,  $|\sin x|$  in  $|\operatorname{tg} x|$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Funkcija  $f(x) = \sin x/x$  je definirana za  $x \neq 0$ , tako da je točka  $a = 0$ , v kateri računamo limito, limitna točka za definicijsko območje. Upoštevajmo, da za  $|x| \leq \pi/2$  velja ocena  $\cos x \leq \sin x/x \leq 1$  (glej sliko 7), ki jo lahko izpeljemo iz prejšnje neenakosti  $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$  (slika 6b).



SLIKA 7. Funkcija  $(\sin x)/x$

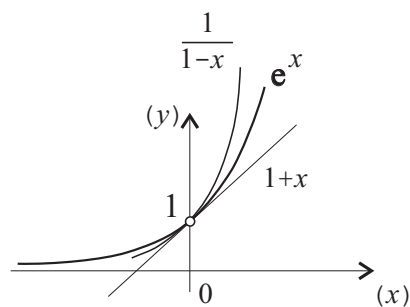
(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

Od prej vemo, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja ocena  $(1 + 1/n)^n < e < (1 - 1/n)^{-n}$ , ki jo lahko preoblikujemo v oceno  $1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) < n/(n-1)$ . Odtod po izreku o sendviču vidimo, da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$  in zato tudi  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n+1]{e} - 1) = 1$ . Naj bo zdaj realen  $x > 0$  in  $n = [1/x]$ , se pravi, da je  $n \leq 1/x < n+1$  oziroma  $1/(n+1) < x \leq 1/n$ . Potem je zaradi naraščanja eksponentne funkcije  $n(\sqrt[n+1]{e} - 1) < (e^x - 1)/x \leq (n+1)(\sqrt[n]{e} - 1)$ . Če pošljemo  $x$  po pozitivnih vrednostih proti 0, narašča  $n = [1/x]$  v neskončno. Ker leva in desna stran konvergirata proti 1, mora veljati tudi  $\lim_{x \downarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ . Odtod tudi takoj sledi, da je  $\lim_{x \downarrow 0} e^x = 1$ , saj lahko pišemo  $e^x - 1 = x \cdot (e^x - 1)/x$  in upoštevamo pravilo za računanje limite produkta.

Prav tako vidimo, da je tudi leva limita  $\lim_{x \uparrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ , saj lahko z uvedbo nove spremenljivke  $y = -x$  izračunamo levo limito  $\lim_{x \uparrow 0} (e^x - 1)/x = \lim_{y \downarrow 0} (e^{-y} - 1)/(-y) = \lim_{y \downarrow 0} (1 - e^{-y})/y = \lim_{y \downarrow 0} (1/e^y) \cdot (e^y - 1)/y = 1$ .

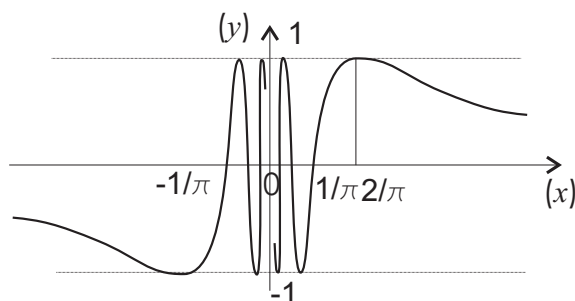
Če pa sta leva in desna limita enaki, obstaja tudi limita funkcije in je enaka tej vrednosti. Na enak način kot v primeru desne limite tudi vidimo, da je  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ , kar bomo potrebovali pri dokazu zveznosti eksponentne funkcije.

**Opomba.** Če bi že znali pokazati, da za  $0 < x < 1$  velja funkcijska neenakost  $1 + x < e^x < 1/(1-x)$  (slika 8), bi iz nje takoj dobili še oceno  $1 < (e^x - 1)/x < 1/(1-x)$ . Iz obeh potem najdemo desni limiti  $\lim_{x \downarrow 0} e^x = 1$  in  $\lim_{x \downarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ . Levi limiti takoj sledita z zamenjavo spremenljivke  $y = -x$ , saj je  $\lim_{x \uparrow 0} e^x = \lim_{y \downarrow 0} 1/e^y = 1$  in  $\lim_{x \uparrow 0} (e^x - 1)/x = \lim_{y \downarrow 0} (e^y - 1)/y \cdot 1/e^y = 1$ . Zgornjo neenakost bomo dokazali v naslednjem razdelku z uporabo odvoda.

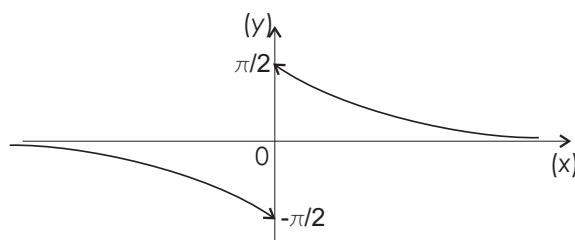


SLIKA 8. Eksponentna funkcija

(d) Limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  ne obstaja, ko gre  $x \rightarrow 0$ . Pravzaprav ne obstaja niti leva niti desna limita. Za različna zaporedja, ki konvergirajo k 0 dobimo lahko zelo različne vrednosti za limito zaporedja ustreznih funkcijskih vrednosti (izberimo npr.  $x_n = 1/n\pi$ , ali  $x_n = 2/n\pi$  itd.). V bližini točke 0 graf funkcije divje oscilira (slika 9).

SLIKA 9. Funkcija  $\sin(1/x)$ 

(e) Za funkcijo  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  je desna limita  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = \pi/2$  in leva limita  $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = -\pi/2$ . Vidimo, da sta limiti različni (slika 10).

SLIKA 10. Funkcija  $\operatorname{arctg}(1/x)$