Geometrijske konstrukcije s pomanjkljivim evklidskim orodjem

Milan Hladnik

MARS 2013

Bohinj, 19. avgust 2013

Pravila igre

Platonova zahteva:
Uporabljati samo ravnilo in šestilo (evklidsko orodje)

Kaj pod tem razumemo?
Idealizacija: premica, krožnica, točka, stroga uporaba:
- premica skozi dve točki
- krožnica z danim središčem skozi dano točko
- presečišča
- začetni podatki: (0,0), (1,0)

Evklidova realizacija: *Elementi*, temelj geometrije za naslednjih 2000 let in več

Kaj lahko konstruiramo?

Osnovne konstrukcije po Evklidu:

- enakostranični trikotnik
- prenos razdalje
- razpolovitev daljice in kota,
- vzporednice k dani premici skozi dano točko
- pravokotnica na dano premico skozi dani točko itd.

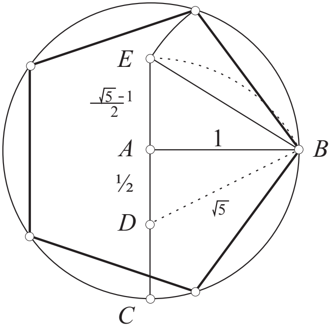
Prevedba na algebrajski problem

Sekanje dveh premic: linearna enačba
Sekanje premice in krožnice ali dveh krožnic: kvadratna enačba

Izrek

Z evklidskim orodjem lahko načrtamo točko (x, y) natanko takrat, ko se dasta njeni koordinati x in y izhajajoč iz enote 1 izračunati s štirimi osnovnimi računskimi operacijami in z (večkratno) uporabo kvadratnega korena.

Pravilni petkotnik v enotskem krogu: stranica meri $\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$



Slika: Evklidova konstrukcija pravilnega petkotnika

Česa ne moremo konstruirati?

(1) Trije veliki klasični problemi grške matematike

- Podvojitev kocke: konstruirati rob kocke z dvakrat večjo prostornino kot dana kocka,
- Tretjinjenje kota: razdeliti poljuben kot na tri enake dele,
- Kvadratura kroga: konstruirati kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog.

(2) Pravilni sedemkotnik, devetkotnik, enajstkotnik itd.

Pomanjkljivo evklidsko orodje

- Samo šestilo (brez ravnila)
- Evklidsko šestilo (ne prenaša razdalj)
- Samo ravnilo (brez šestila)
- Ravnilo in krožnica s središčem
- Ravnilo in zarjavelo šestilo
- Dvojno (šolsko) ravnilo
- Čevljarski kotnik
- Označeno ravnilo

Konstrukcije samo s šestilom

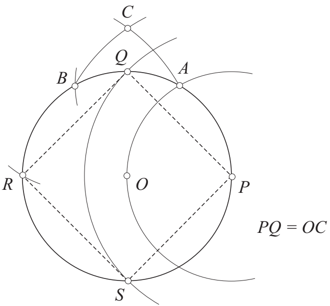
Nekaj zgodovine:
1797 Napoleon in francoski matematiki (Laplace, Lagrange)

NAPOLEONOV PROBLEM: Samo s šestilom razdeliti krožnico na štiri enake dele (v enotski krog včrtati kvadrat), če:

- poznamo središče kroga
- ne poznamo središča kroga (treba ga je še določiti)

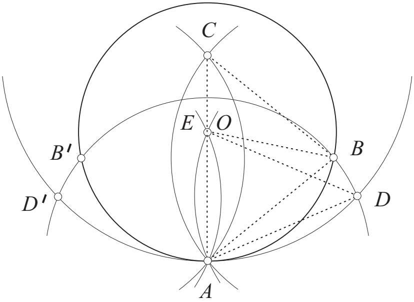
Začetni podatki: (0,0), (1,0)

Včrtanje kvadrata v enotski krog



Slika: Rešitev Napoleonovega problema

Konstrukcija središča kroga



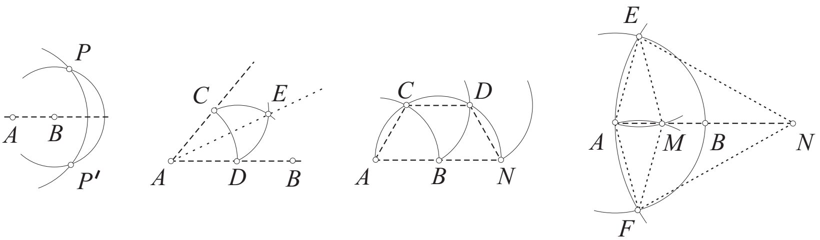
$AO/AB = AB/AC$, $AB = AD$, $AD/AC = AE/AD$ *Torej* $AO = AE$

oziroma

$$O = E$$

Slika: Določitev središča kroga

Zrcaljenje točke, bisekcija kota in daljice



Slika: Zrcaljenje točke čez premico, razpolovitev kota, podvojitev in razpolovitev daljice

NALOGA: Z zrcaljenjem preko ustrezne premice pokaži, da sta Evklidsko in moderno šestilo ekvivalentna.

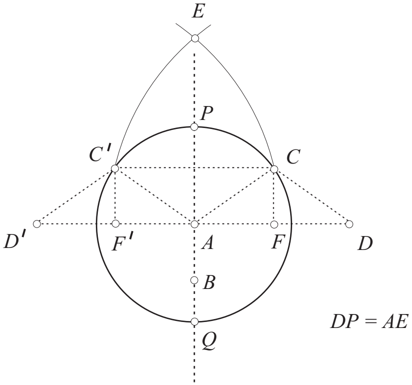
Kaj lahko konstruiramo samo s šestilom?

Izrek (Mohr-Mascheroni)

Samo s šestilom lahko izvedemo natanko vse tiste geometrijske konstrukcije, ki jih lahko izvedemo z ravnilom in šestilom.

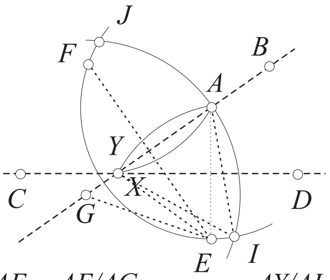
1797 Lorenzo Mascheroni: *Geometria del Compasso*
1672 Georg Mohr: *Euclidus Danicus* (1672), odkrita šele 1928

Presečišče krožnice in premice skozi središče



Slika: Konstrukcija presečišča krožnice in premice skozi središče

Presečišče dveh premic



$$AX/AE = AE/AG \qquad AY/AI = AI/AG$$

$$AI = AE$$

$$Torej$$

$$AY = AI^2/AG = AE^2/AG = AX \quad in \quad X = Y$$

Slika: Konstrukcija presečišča dveh premic

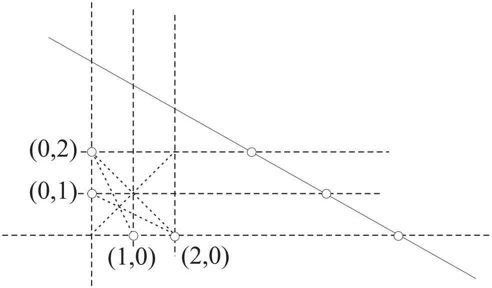
Naloge za konstrukcijo s šestilom

NALOGA: Samo s šestilom:

(1) načrtaj vzporednico in pravokotnico k dani premici skozi dano točko,
(2) razdeli dano daljico AB na tri enake dele,
(3) konstruiraj $\sqrt{d}$, če poznaš daljico dolžine $d > 0$ in enotsko daljico.

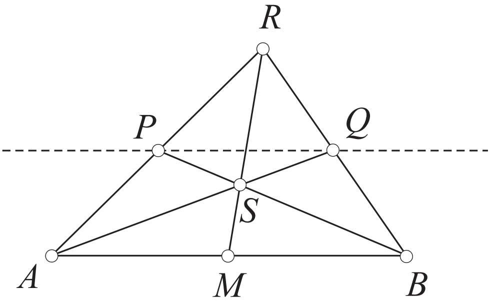
Konstrukcije samo z ravnilom

Neoznačeno ravnilo, kaj je to?
Problem začetnih podatkov: (1,0), (2,0), (0,1), (0,2)
Na vsaki premici so vsaj tri točke, ena je na sredi ostalih dveh.



Slika: Začetna konfiguracija

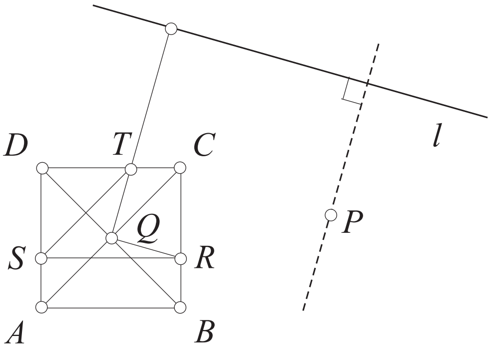
Razpolovišče daljice in vzporednice



Slika: Konstrukcija vzporednice

Kako lahko potem razpolovimo vsako daljico samo z ravnilom?

Pravokotnice



Slika: Konstrukcija pravokotnice

Kaj še lahko konstruiramo samo z ravnilom in česa ne?

Druge možne konstrukcije:

- Zrcaljenje čez premico (Izpelji!)
- Vzporedno prenašanje (kopiranje) kotov in razdalj

Ne moremo: razpoloviti kota, splošno prenašati razdalj, konstruirati kvadratnih korenov, konstruirati presečišč premic in krožnic

Izrek

Samo z ravnilom lahko konstruiramo točko (x,y) natanko takrat, ko ima obe koordinati racionalni.

Naloga z mednarodne matematične olimpijade (Leningrad 1987)

NALOGA: Denimo, da lahko izvajamo samo naslednji geometrijski operaciji:
- narišemo premico skozi dve dani točki,
- narišemo pravokotnico na dano premico skozi poljubno točko, ki leži na tej premici.

Nariši pravokotnico na premico p skozi točko T, ki ne leži na premici p.

Ravnilo in krožnica s središčem

Avtorja:
Jean-Victor Poncelet, ujetnik v Rusiji 1822 (ideja)
Jakob Steiner, geometer v Berlinu 1833 (strogi dokaz)

Oba začetnika projektivne geometrije

Začetni podatki: (0,0), (2,0), (0,2) +
Ponceletova krožnica: $x^2 + y^2 = 1$.

Narišemo lahko le premico skozi dve točki ter presečišče premice in zgornje krožnice.

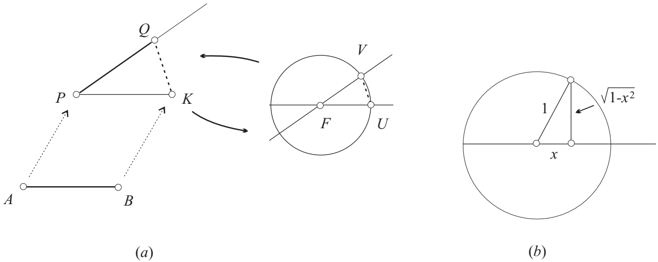
Kaj lahko konstruiramo z ravnilom in Ponceletovo krožnico?

Izrek (Poncelet-Steiner)

Točko lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom natanko takrat, ko jo lahko konstruiramo samo z ravnilom in danim fiksnim krogom z znanim središčem

Samo z ravnilom že znamo:
- skozi točko načrtati vzporednico dani premici
- skozi točko načrtati pravokotnico na dano premico

Dokaz Poncelet-Steinerjevega izreka



Slika: K dokazu Poncelet-Steinerjevega izreka: (a) prenos razdalje, (b) konstrukcija kvadratnega korena

$$z > 0, x = (z-1)/(z+1), \ -1 < x < 1$$
$$y = (z+1)/2, \ \sqrt{z} = y\sqrt{1-x^2}$$

Nujnost središča in druge variante

Nujnost središča: Dovolj pokazati, da samo z ravnilom ne moremo konstruirati središča danega kroga.

Ideja: Poščemo projekcijo ene ravnine na drugo, ki preslika premice v premice in dani krog v krog, projekcija njegovega središča pa ni središče projiciranega kroga.

Variante: Zadošča poznati npr.
- središče in poljubno majhen del krožnice (Severi 1904)
- dva sekajoča kroga ali dva koncentrična kroga
- dva dotikajoča se kroga in njuno dotikališče
- tri poljubne kroge (brez središč)
- kvadrat z dodatno točko

Ravnilo in zarjavelo šestilo

Šestilo s fiksno odprtino (polmerom 1)
Začetni podatki: (0,0), (1,0)

Izrek

Ravnilo in zarjavelo šestilo je ekvivalentno ravnilu in šestilu.

Dokaz. Najprej konstruiramo enotski krog s središčem v izhodišču (Ponceletov krog), nato točki (2,0) in (0,2), nato uporabimo Poncelet-Steinerjev izrek.

Naloga z zarjavelim šestilom

NALOGA: Z ravnilom in zarjavelim šestilom

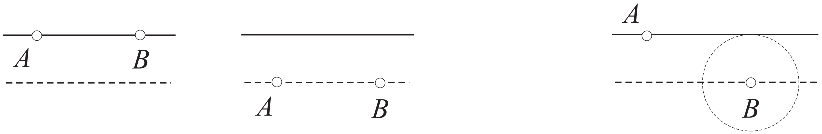
(1) razdeli dano daljico na dva enaka dela, na tri enake dele,
(2) načrtaj vzporednico in pravokotnico skozi dano točko.

In še:

(3) Konstuiraj dva (približno koncentrična) kroga z različnima polmeroma.

Vzporedno ravnilo

Šolsko ravnilo (širine 1)
Začetni podatki: (1,0), (0,1)



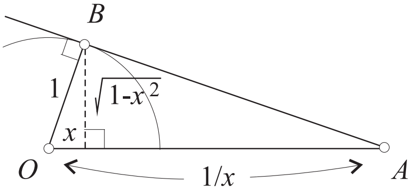
Slika: Uporaba vzporednega ravnila

NALOGA: Načrtaj kvadrat s stranico 1

Ekvivalentnost vporednega ravnila z ravnilom in šestilom

Izrek

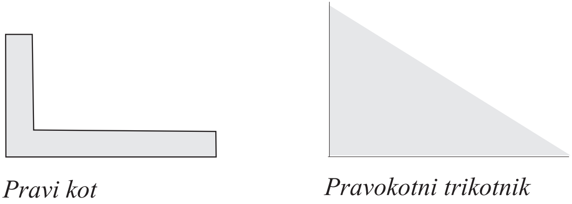
Z vzporednim ravnilom lahko načrtamo natanko iste točke kot z ravnilom in šestilom.



Slika: Dokaz, da je vzporedno ravnilo ekvivalentno ravnilu in šestilu

Čevljarski kotnik

Pravokotna kraka, pravokotni list papirja (možnost risanja pravokotnic)
Začetni podatki: (0,0), (1,0), (0,1)



Slika: Čevljarski kotnik, pravokotni trikotnik

Kaj lahko konstruiramo s čevljarskim kotnikom?

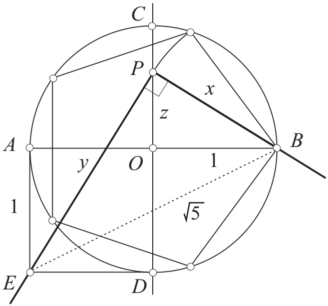
Izrek

Čevljarski kotnik je ekvivalenten ravnilu in šestilu.

Dokaz: Najprej konstruiramo točke (2,0), (0,2), (-1,0), nakar lahko po Talesu poiščemo presečišče premice z (namišljeno) krožnico s središčem v izhodišču in polmerom 1, ki tako postane Ponceletova krožnica.

Po Poncelet-Steinerjevem izreku je to ekvivalentno evklidskemu orodju.

Pravilni petkotnik z uporabo kotnika



Slika: Včrtanje pravilnega petkotnika v enotski krog s čevljarskim kotnikom

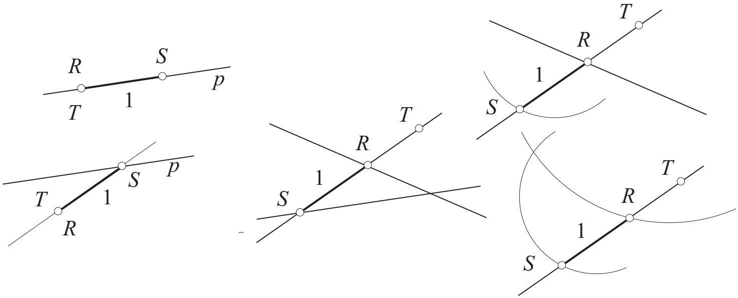
NALOGA: Pokažite, da je

$x = \sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$, $y = \sqrt{(5+\sqrt{5})/2}$, $z = (\sqrt{5}-1)/2$.

Označeno ravnilo

Ravnilo z dvema zarezama R in S v razdalji 1
Začetni podatki: (0,0), (1,0), (0,1)

Uporaba označenega ravnila:



Slika: Načini vstavljanja

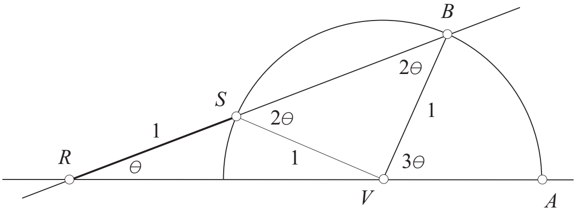
Izrek o označenem ravnilu

Izrek

Z metodo vstavljanja je mogoče izvesti vse evklidske konstrukcije

Dokaz. Z označenim ravnilom lahko poiščemo presečišča poljubne premice z namišljeno Ponceletovo krožnico (s središčem v izhodišču in polmerom 1)

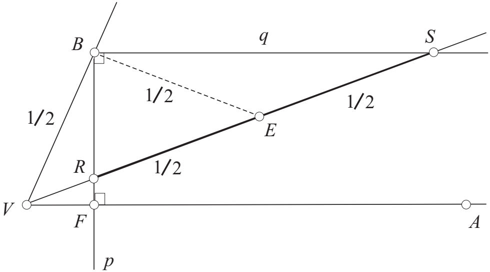
Arhimedovo tretjinjenje kota



Slika: Arhimedovo tretjinjenje kota z vstavljanjem med krožnico in premico

Vidimo, da poleg označenega ravnila potrebujemo še krožnico.

Paposovo tretjinjenje kota

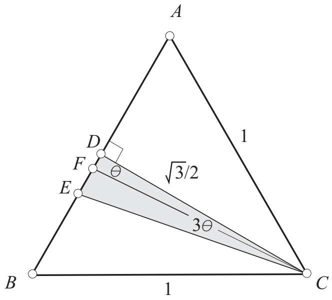


Slika: Paposovo tretjinjenje kota z vstavljanjem

Dokaži, da ga je res možno izvesti samo z označenim ravnilom.

Plemljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika

Josip Plemelj leta 1892 (objavil 1912):



Slika: Plemljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika

NALOGA: Izvedi konstrukcijo samo z označenim ravnilom!

Konec zgodbe

HVALA ZA POZORNOST