

UPORABA 2-ADIČNIH ŠTEVIL

Miha Begelj

Fakulteta za matematiko in fiziko

mentor: prof. dr. Milan Hladnik

Ljubljana, 17.5.2011

S pojmom razdalje med dvema racionalnima številoma običajno mislimo absolutno vrednost njune razlike. Nemški matematik Kurt Hensel je leta 1897 vpeljal nov pojem razdalje, p -adično razdaljo. Absolutno vrednost razlike dveh racionalnih števil lahko zapišemo kot produkt praštevil na različne potence. p -adična razdalja je definirana kot p^{-n} , kjer p predstavlja praštevilo, n pa njegovo potenco v produktu.

Primer: Izračunajmo p -adično razdaljo med številoma $\frac{7}{550}$ in $\frac{7}{55}$. Absolutna vrednost njune razlike v evklidski metriki je $\frac{63}{550}$. Število $\frac{63}{550}$ sedaj razstavimo na produkt praštevil:

$$\frac{63}{550} = 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7 \cdot 11^{-1}.$$

V 2-adični razdalji je torej razdalja med prvotnima številoma 2, v 3-adični razdalji $\frac{1}{9}$, v 5-adični razdalji 25, v 7-adični razdalji $\frac{1}{7}$ in v 11-adični 11. p -adična razdalja za katerokoli drugo praštevilo p je 1.

Definicija 1: Naj bosta a in b racionalni števili. Če $a \neq b$, potem lahko število $a - b$ zapišemo v obliki

$$a - b = 2^k \cdot \frac{m}{n},$$

kjer sta m in n lihi števili, k pa je celo število.

$$\rho(a, b) = 2^{-k}$$

imenujemo 2-adična razdalja med številoma a in b . Če $a = b$, rečemo, da je $\rho(a, b) = 0$.

Zanima nas, če dana definicija razdalje zadošča pogojem za metriko. Spomnimo se metričnih aksiomov:

- $\rho(a, b) > 0$, če $a \neq b$ in $\rho(a, b) = 0$, če $a = b$,
- $\rho(a, b) = \rho(b, a)$,
- $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Prvi in drugi aksiom sta očitna, dokažimo sedaj tretji aksiom, t.i. trikotniško neenakost.

Naj bodo a , b in c poljubna racionalna števila. Če sta katerikoli izmed trojice teh števil enaki, neenakost očitno drži. Dokažimo trditev za poljubna tri različna racionalna števila.

Naj bo

$$a - c = 2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1},$$

$$a - b = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2},$$

$$b - c = 2^{k_3} \cdot \frac{m_3}{n_3}.$$

Števila k_1 , k_2 in k_3 so cela, števila m_1 , m_2 , m_3 , n_1 , n_2 in n_3 pa so liha cela. Iz enačbe $a - c = (a - b) + (b - c)$ sledi da je $2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1} = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2} + 2^{k_3} \cdot \frac{m_3}{n_3}$. Dobljeno enačbo sedaj lahko pomnožimo s številom $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, ki je liho celo število in dobimo enakost $2^{k_1} \cdot r_1 = 2^{k_2} \cdot r_2 + 2^{k_3} \cdot r_3$, kjer so r_1 , r_2 in r_3 liha cela števila. Dokažimo sedaj, da je število k_1 večje ali enako manjšemu od števil k_2 in k_3 .

Pa denimo da ni, torej $k_1 < \min\{k_2, k_3\}$, oziroma število k_1 je strogo najmanjše izmed vseh treh števil. V zgornji enakosti lahko na desni strani izpostavimo manjše od števil 2^{k_2} in 2^{k_3} . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je prvo število manjše. Rezultat: $2^{k_1} \cdot r_1 = 2^{k_2} \cdot (r_2 + 2^{k_3 - k_2} \cdot r_3)$. r_1 je liho število, število $(r_2 + 2^{k_3 - k_2} \cdot r_3)$ pa je prav tako liho, saj je vsota lihega in sodega števila. Torej mora biti $k_1 = k_2$. Protislovje. Število k_1 je torej večje ali enako manjšemu od števil k_2 in k_3 .

Sledi, da je $2^{-k_1} \leq \max\{2^{-k_2}, 2^{-k_3}\}$. Sedaj je jasno, da je $2^{-k_1} \leq 2^{-k_2} + 2^{-k_3}$, to pa je iskana neenakost.

2-adična razdalja je torej metrika, ki generira metrični prostor 2-adičnih števil. Naravno vprašanje je, kaj nam ta metrika 'meri'. Izkaže se, da nam 'meri' stopnjo deljivosti racionalnega števila s številom 2. 'Bolj' kot je racionalno število deljivo z 2, 'bližje' ničli je.

Na primer, 8 je 'bližje' ničli kot $\frac{1}{2}$, 16 je 'bližje' ničli kot 8 in 384 je 'bližje' ničli kot 480.

Pri dokazu, da je 2-adična razdalja metrika, smo dokazali še celo več kot samo trikotniško neenakost:

Posledica 1: Razdalja $\rho(a, c)$ je manjša ali enaka večji od razdalj $\rho(a, b)$ in $\rho(b, c)$.

Dana posledica nam da zanimive rezultate (v nadaljevanju). Me-

trične prostore, v katerih velja ta posledica, imenujemo *ultrametrični prostori*.

Definicija 2: Naj bo a racionalno število in r pozitivno realno število. Množico vseh racionalnih števil x , ki ustrezajo pogoju

$$\rho(a, x) < r,$$

imenujemo 2-adični krog z radijem r in središčem v a .

Trditev 1: Če $\rho(a, b) \neq \rho(b, c)$, potem je $\rho(a, c)$ enaka večji od razdalj $\rho(a, b)$ in $\rho(b, c)$. Če pa $\rho(a, b) = \rho(b, c) \neq 0$, potem je $\rho(a, c) < \rho(a, b)$.

Dokaz: Rezultat sledi direktno iz zgornjega dokaza trikotniške neenakosti.

Trditev 2: Če imata dva 2-adična kroga neprazen presek, potem je eden od teh dveh krogov vsebovan v drugem.

Dokaz: Naj bo število a vsebovano v preseku dveh 2-adičnih krogov. Prvi krog naj ima središče s_1 in radij r_1 , drugi pa središče s_2 in radij r_2 . Privzemimo, da je $r_1 \geq r_2$. Dokažimo sedaj, da je drugi krog vsebovan v prvem. b naj bo poljubno število iz drugega kroga. Sledi: 2-adična razdalja med s_1 in a je manjša od r_1 , 2-adična razdalja med a in s_2 je manjša od r_2 , 2-adična razdalja med s_2 in b je manjša od r_2 . Iz trditve 1 vidimo, da je 2-adična razdalja med s_1 in b manjša od r_1 .

Analogno z absolutno vrednostjo realnega števila lahko definiramo 2-adično absolutno vrednost $\|a\|_2$ racionalnega števila a , kot 2-adično razdaljo tega števila do števila 0.

Definicija 3: Za racionalno število a velja: če

$$a = 2^k \cdot \frac{m}{n},$$

kjer sta m in n lihi števili, potem je

$$\|a\|_2 = \rho(0, a) = 2^{-k}.$$

Posledica 2: $\|a\|_2 > 0$, če $a \neq 0$ in $\|0\|_2 = 0$.

Dokaz: Število $2^{-k} \geq 0$, za vsako celo število k . Če je $a = 0$,

potem po definiciji 1 vemo, da je $\|a\|_2 = 0$.

Posledica 3: Če je $\|a\|_2 > \|b\|_2$, potem je $\|a + b\|_2 = \|a\|_2$ in če je $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$, potem je $\|a + b\|_2 < \|a\|_2$ ($\|a + b\|_2$ je vedno manjše ali enako $\|a\|_2 + \|b\|_2$).

Dokaz: Definiramo po že znanem principu:

$$a = 2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1},$$

$$b = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Po predpostavki vemo, da je $k_1 < k_2$. Računajmo:

$$\|a + b\|_2 = \|2^{k_1} \cdot (\frac{m_1}{n_1} + 2^{k_2-k_1} \cdot \frac{m_2}{n_2})\|_2 = 2^{-k_1} = \|a\|_2.$$

Števili a in b naj bosta definirani kot zgoraj. Po predpostavki sedaj vemo, da je $k_1 = k_2 \neq 0$. Ponovno računamo:

$$\|a + b\|_2 = \|2^{k_1} \cdot (\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2})\|_2.$$

Vsota ulomkov v oklepaju nam da nov okrajšan ulomek, v katerem je v razcepu števca na prafaktorje število 2^x , x je naravno število (ne pozabimo, da so števila m_1 , m_2 , n_1 in n_2 liha cela). Sedaj je očitno, da je $\|a + b\|_2 < \|a\|_2$.

Trditev v oklepaju je direktna posledica prvega in drugega dela posledice 3.

Posledica 4: $\|a \cdot b\|_2 = \|a\|_2 \cdot \|b\|_2$.

Dokaz: a in b sta definirana isto kot v prejšnjem dokazu. Računajmo:

$$\|a \cdot b\|_2 = \|2^{k_1+k_2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}\|_2 = 2^{-k_1-k_2}.$$

Po drugi strani pa je

$$\|a\|_2 \cdot \|b\|_2 = 2^{-k_1} \cdot 2^{-k_2} = 2^{-k_1-k_2}.$$

Posledica je dokazana.

Posledica 5: $\|-a\|_2 = \|a\|_2$.

Dokaz: Očitno.

Posledica 6: Če $\|a\|_2 \neq \|b\|_2$, potem $\|a - b\|_2 = \|a + b\|_2$.

Dokaz: BŠS lahko privzamemo, da je $\|a\|_2 > \|b\|_2$. Vemo že, da je $\|a + b\|_2 = \|a\|_2$. Analogno dokazu prvega dela posledice 3 lahko dokažemo, da je $\|a - b\|_2 = \|a\|_2$. Sledi $\|a + b\|_2 = \|a\|_2 = \|a - b\|_2$.

Vpeljana metrika se nam mogoče na prvi pogled zdi neuporabna izven analize ali teorije števil. Naslednji zgled nas bo prepričal, da temu še zdaleč ni tako. S pomočjo vpeljane metrike bomo namreč rešili problem v geometriji.

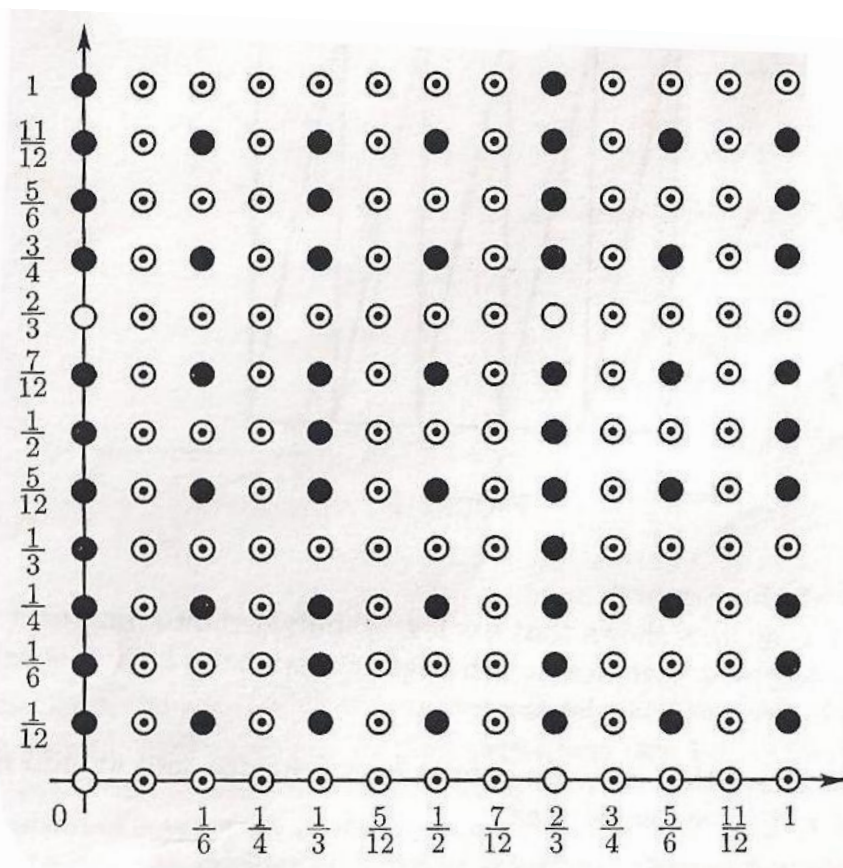
Kvadrat očitno lahko razdelimo na sodo mnogo trikotnikov, ki imajo enako ploščino. Vprašanje je, ali lahko kvadrat razdelimo na liho mnogo takih trikotnikov. Odgovor je *NE*.

Trditev 3: Kvadrata ne moremo razdeliti na liho mnogo trikotnikov, ki imajo vsi enako ploščino.

Trditev bomo dokazali s pomočjo 2-adične metrike. Označimo najprej oglišča kvadrata z $0, A, B$ in C . Sedaj vpeljimo primeren koordinatni sistem na ravnino, na kateri kvadrat leži. Oglišče 0 naj bo izhodišče, oglišče A naj ima koordinati $(1, 0)$, oglišče B $(1, 1)$ in oglišče C $(0, 1)$. Sedaj označimo točke v kvadratu, ki imajo za koordinati (x, y) racionalni števili na naslednji način:

- če je $\|x\|_2 < 1$ in $\|y\|_2 < 1$ točko označimo z \circ ,
- če je $\|x\|_2 \geq 1$ in $\|x\|_2 \geq \|y\|_2$ točko označimo z \odot ,
- če je $\|y\|_2 \geq 1$ in $\|y\|_2 > \|x\|_2$ točko označimo z \bullet .

Poglejmo, kakšne barve so oglišča kvadrata. Izhodišče $(0, 0)$ je označeno z \circ , oglišči $A(1, 0)$ in $B(1, 1)$ z \odot in oglišče $C(0, 1)$ z \bullet .



Vidimo, da s takim barvanjem pobarvamo vse točke z racionalnima koordinatama.

Ploščina enega trikotnika, ko kvadrat razdelimo na n trikotnikov, je $\frac{1}{n}$. Če je število n sodo, potem je $\|\frac{1}{n}\|_2 > 1$, če pa je n liho, potem je $\|\frac{1}{n}\|_2 = 1$.

Dokažimo sedaj 3 leme, ki nam bodo koristile pri nadaljnjem dokazovanju.

Lema 1: Če je točka P označena s \bigcirc , potem z vzporednim premikom za vektor $\vec{P0}$ (kjer z 0 označimo izhodišče koordinatnega sistema) vsako točko preslikamo v enako označeno točko.

Dokaz: Točko P označimo z (x, y) . Vektor $\vec{P0}$ je torej brez škode za splošnost enak (x, y) , $\|x\|_2, \|y\|_2 < 1$. Poglejmo, kam se s tem vektorjem preslikajo vsi trije tipi točk. Spodnji razmisleki sledijo

direktno iz posledic 2 - 6.

○: $(x_1 + x, y_1 + y)$

$$\|x_1 + x\|_2 \begin{cases} = \max\{\|x_1\|_2, \|x\|_2\} & , \text{ če } \|x_1\|_2 \neq \|x\|_2; \\ < \|x_1\|_2 & , \text{ če } \|x_1\|_2 = \|x\|_2. \end{cases}$$

Obe možnosti očitno ustrezata zahtevam, da je $\|x_1 + x\|_2 < 1$. Povsem isto za drugo koordinato.

⊙: $(x_2 + x, y_2 + y)$

$$\|x_2 + x\|_2 = \|x_2\|_2$$

$$\|y_2 + y\|_2 \begin{cases} = \max\{\|y_2\|_2, \|y\|_2\} & , \text{ če } \|y_2\|_2 \neq \|y\|_2; \\ < \|y_2\|_2 & , \text{ če } \|y_2\|_2 = \|y\|_2. \end{cases}$$

Obe možnosti očitno ustrezata predpisanim zahtevam.

●: $(x_3 + x, y_3 + y)$

$$\|y_3 + y\|_2 = \|y_3\|_2$$

$$\|x_3 + x\|_2 \begin{cases} = \max\{\|x_3\|_2, \|x\|_2\} & , \text{ če } \|x_3\|_2 \neq \|x\|_2; \\ < \|x_3\|_2 & , \text{ če } \|x_3\|_2 = \|x\|_2. \end{cases}$$

Obe možnosti ponovno ustrezata predpisanim zahtevam.

Lema 2: Na nobeni premici skozi kvadrat ni treh točk, ki bi bile vse pobarvane različno.

Dokaz: Recimo, da to ni res, torej, da na neki premici ležijo točke, ki so vse pobarvane različno. Po lemi 1 lahko predpostavimo, da premica poteka skozi izhodišče. Dokažimo, da na premici z naklonom λ , ko je $\|\lambda\|_2 < 1$, ne ležijo točke, ki so pobarvane ●. Koordinati takih točk označimo z (x, y) .

$$\|\lambda\|_2 = \left\| \frac{y}{x} \right\|_2 = \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} > 1$$

Podobno dokažemo za primer, ko je $\|\lambda\|_2 \geq 1$. Vidimo še, da na premici skozi točki 0 in C ne ležijo točke ⊙.

Lema 3 (splošnejša lema): Naj bo kvadrat $OABC$ razdeljen v nekaj trikotnikov. Predpostavimo, da je vsako oglišče trikotnika označeno z ○, ⊙ ali ● na tak način, da ustrezajo lemi 2. Točko 0 označimo z ○, A in B označimo z ⊙ in C z ●. Sledi, da je izmed trikotnikov

vsaj en tak, ki ima vsa tri oglišča označena drugače.

Dokaz: V dokazu bodo imela pomembno vlogo razbitja stranic trikotnikov na krajše odseke, katerih krajišča so oglišča nekih drugih trikotnikov v razbitju kvadrata. Poglejmo si krajišči nekega odseka. Možnosti za njuno obarvanje je 6: bodisi sta oba pobarvana isto (3 možnosti), bodisi sta si različna (izmed treh možnih izberemo 2, $\binom{3}{2} = 3$ možnosti). Dokažimo sedaj, da je na stranicah nekega trikotnika, ki vseh treh oglišč nima pobarvanih različno, sodo odsekov tipa $\odot\odot$ (eno krajišče je \odot , drugo pa \odot). Vemo, da na nobeni premici ni točk vseh treh barv, torej taki odseki ležijo le na stranicah tipa $\odot\odot$, $\odot\odot$ in $\odot\odot$. Jasno je tudi, da je število odsekov tipa $\odot\odot$ na stranicah tipa $\odot\odot$ in $\odot\odot$ sodo, na stranicah tipa $\odot\odot$ pa liho. Če pregledamo vseh 9 možnih trikotnikov in upoštevamo zgornje ugotovitve in lemo 2, vidimo, da je iskanih odsekov na stranicah trikotnikov res sodo. Sledi končni del dokaza. Prepostavimo, da izmed trikotnikov v razbitju kvadrata ni nobenega, ki ima vsa tri oglišča pobarvana različno. Vemo, da vsi odseki, ki ležijo na stranicah kvadrata, ležijo tudi na stranicah nekih trikotnikov. Vsak odsek v notranjosti kvadrata leži na dveh trikotnikih. Iz predpostavke in zgornjih dveh ugotovitev sledi, da je število odsekov $\odot\odot$ na stranicah kvadrata sodo. Pa preštejmo odseke tega tipa še direktno. Na stranicah OC in BC takih odsekov ni, na stranici OA jih je liho, na stranici AB pa sodo. Protislovje. V razbitju kvadrata je vsaj en trikotnik, ki ima vsa tri oglišča pobarvana različno.

Nadaljujmo z dokazom Trditve 3. Recimo sedaj, da ima nek trikotnik v razdelitvi kvadrata vsa tri oglišča označena različno (po lemi 3 tak trikotnik obstaja). Naj bo K oglišče tega trikotnika, označeno z \odot . Po lemi 1 lahko ta trikotnik prestavimo z vektorjem $\vec{K0}$ tako, da ponovno dobimo trikotnik, ki ima vsa tri oglišča označena različno, eno oglišče pa je v izhodišču koordinatnega sistema. Drugo oglišče, pobarvano z \odot , označimo z $L_1(x_1, y_1)$, tretje, označeno z \bullet , pa z $L_2(x_2, y_2)$. Ker je drugi trikotnik dobljen z vzporednim premikom prvega, je njegova ploščina prav tako enaka $\frac{1}{n}$. Po drugi strani pa lahko ploščino tega trikotnika izračunamo na standardni način, ko imamo podane koordinate vseh treh oglišč.

$$2 \cdot P = |x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)|$$

Če vstavimo naše podatke dobimo

$$P = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|.$$

Sedaj imamo enakost

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1|.$$

Z oznak oglišč vidimo, da je $\|x_1\|_2 \geq \|y_1\|_2$ in $\|y_2\|_2 > \|x_2\|_2$. Zmnožimo levo in desno stran neenakosti in dobimo

$$\|x_1\|_2 \cdot \|y_2\|_2 > \|x_2\|_2 \cdot \|y_1\|_2.$$

Po posledici 4 je

$$\|x_1 \cdot y_2\|_2 > \|x_2 \cdot y_1\|_2.$$

Iz posledic 3 in 6 sledi

$$\|x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1\|_2 = \|x_1 \cdot y_2\|_2.$$

Vemo še, da je $\|x_1\|_2 \geq 1$ in $\|y_2\|_2 \geq 1$. Sledi:

$$\left\| \frac{1}{n} \right\|_2 = \left\| \frac{1}{2} \right\|_2 \cdot \|x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1\|_2 = 2 \cdot \|x_1\|_2 \cdot \|y_2\|_2 \geq 2.$$

Sledi, da je število kongruentnih trikotnikov v razbitju vedno sodo, torej, da kvadrata ne moremo razdeliti na liho mnogo trikotnikov z enako ploščino.

V splošnem bi morali dokazati še, da se 2-adična absolutna vrednost lahko razširi na množico vseh realnih števil, to pomeni, da obstaja funkcija $x \rightarrow \|x\|_2$, definirana na množici realnih števil, ki ustreza posledicam 2 - 4 in se na množici racionalnih števil ujema z 2-adično absolutno vrednostjo (ker so racionalna števila gosta podmnožica realnih številih). Taka funkcija obstaja, vendar je v tem seminarju ne bomo iskali.

Čas je, da vpeljemo pojem 2-adičnih števil. Vsako naravno število lahko zapišemo kot vsoto nenegativnih potenc števila 2.

Primer:

$$1000 = 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9.$$

Dani razvoj pa lahko poiščemo tudi drugače, z uporabo 2-adične razdalje. Poiščimo najprej število oblike 2^k , kjer je k celo število, večje ali enako 0, katerega 2-adična absolutna vrednost je enaka 2-adični absolutni vrednosti števila 1000. Iskano število je $8 = 2^3$. Število 2^3 sedaj odštejmo od prvotnega števila in dobimo 992. Postopek nadaljujemo.

Če lahko v razvoju uporabimo tudi negativne potence števila 2, lahko v končno vsoto razvijemo tudi racionalna števila oblike $\frac{m}{2^k}$, kjer sta m in k naravni števili.

Primer:

$$\frac{1477}{256} = \frac{1 + 2^2 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10}}{2^8} = 2^{-8} + 2^{-6} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^2.$$

Nobeno drugo racionalno število ne moremo zapisati kot končno vsoto potenc števila 2. Vidimo pa, da lahko vsako racionalno število poljubno aproksimiramo z vsoto potenc števila 2.

Pokažimo zgornjo trditev. Naj bo a racionalno število in $\|a\|_2 = 2^{-k_1}$. Sedaj definirajmo $a_1 := a - 2^{k_1}$. Po trditvi 1 je a_1 bližje ničli kot a . Sledi, da $a_1 = 0$ ali $\|a_1\|_2 = 2^{-k_2}$, kjer je $k_2 > k_1$. Postopek nadaljujemo z definiranjem števila a_2 kot razlike a_1 in 2^{k_2} in nato na isti način števil a_3, a_4, a_5, \dots . Če je neko število a_i enako 0, postopek ustavimo, sicer delamo naprej. V prvem primeru število a zapišemo kot končno vsoto potenc števila 2, v drugem primeru pa lahko a aproksimiramo z delnimi vsotami potenc števila 2 do poljubne natančnosti.

Oglejmo si dva zanimiva primera:

- $-1 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots$
- $\frac{1}{6} = 2^{-1} + 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots$

Videli smo torej, da lahko vsako racionalno število zapišemo kot:

KONČNO VSOTO $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$, kjer je $k_1 < k_2 < \dots < k_n$,

ali kot

NESKONČNO VSOTO $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots$, kjer je $k_1 < k_2 < \dots$

k_i so cela števila.

V obeh primerih lahko število zapišemo v obliki

$$\epsilon_k 2^k + \epsilon_{k+1} 2^{k+1} + \dots,$$

kjer je k celo število, vsako izmed števil $\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \dots$ je enako 0 ali 1, ϵ_k pa je enako 1.

Števila $\epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots$ imenujemo 2-adične številke danega racionalnega števila. 2-adični zapis tega števila je enak $\epsilon_k \dots \epsilon_0 . \epsilon_1 \epsilon_2 \dots_2$. 2-adični zapis števila -1 v 2-adični bazi je torej enak $1.1111\dots_2$, števila $\frac{1}{6}$ pa $11.010101\dots_2$.

Vemo, da se v 'normalnem' decimalnem zapisu racionalnega števila številke enkrat začnejo ponavljati. Enako velja za zapis 2-adičnih števil, ki so generirana z racionalnimi števili. V množico vseh 2-adičnih števil pa lahko vzamemo tudi vsa števila, katerih številke se nikoli ne začnejo ponavljati. Unija obeh množic nam da množico Q_2 , katere elementi so *2-adična števila*.

Za konec si pogledjmo še, kako ta števila seštevamo in množimo.

SEŠTEVANJE: 2-adična števila seštevamo normalno, le da ne z desne proti levi, temveč obratno.

Primer: Seštejmo števili 200 in 205.

$$\begin{aligned} 200 &= 2^3 + 2^6 + 2^7 = 0.0010011_2 \\ 205 &= 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 = 1.0110011_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0.0010011_2 \\ +1.0110011_2 \\ \hline 1.01010011_2 \end{array}$$

Pretvorimo dobljeno 2-adično število nazaj v realno.

$$1.01010011_2 = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^7 + 2^8 = 405$$

Vidimo, da je vsota ista kot pri realnih številih.

MNOŽENJE: Množimo isto kot realna števila.

Primer: Zmnožimo števili 14 in 7.

$$\begin{aligned} 14 &= 2^1 + 2^2 + 2^3 = 0.111_2 \\ 7 &= 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1.11_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
0.111_2 \\
\cdot 1.11_2 \\
\hline
0.111_2 \\
0.0111_2 \\
0.00111_2 \\
\hline
0.100011_2
\end{array}$$

Pretvorimo dobljeno 2-adično število nazaj v realno.

$$0.100011_2 = 98$$

Tudi zmnožek je isti kot pri realnih številih.

Metrični prostor 2-adičnih števil je zelo zanimiv, uporaben in niti ne toliko kompleksen. Na njem lahko vpeljemo različne topologije (pri nekaterih pridobi Hausdorffovo lastnost, pri nekaterih kompaktnost ali le lokalno kompaktnost), opremljenega s primernima operacijama ga lahko predstavimo kot kolobar in celo polje (če definiramo seštevanje in množenje kot zgoraj), v njem pa velja mnogo zanimivih, nenavadnih in hkrati pogosto zelo uporabnih karakterizacij.

Literatura

- [1] Kvant Selecta: *Algebra and Analysis*, I, AMS 1999, 99-109
- [2] Fernando Q. Gouvea, *p-adic numbers : an introduction*, Springer, cop. 1993
- [3] Jože Grasselli, *Enciklopedija števil*, Ljubljana : DMFA - založništvo, 2008
- [4] <http://en.wikipedia.org/wiki/P-adic-number>; 15.4.2011