

# Fibonaccijevo zaporedje - 1.del

Barbara Klanjšek, 8. december 2009

Fibonaccijevo zaporedje je zagotovo eno najbolj znanih v matematiki. Le kdo ne pozna prvih nekaj členov tega zaporedja? Morda nam bodo števila 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... v takem vrstnem redu povedali že otroci v osnovni šoli, zagotovo pa bodo zanje vedeli dijaki v srednjih šolah.

Fibonacci je bil vzdevek enega izmed najbolj nadarjenih italijanskih matematikov, Leonarda Pisana Bogolla (znanega tudi kot Leonardo iz Pise). Fibonacci je to zaporedje predstavil kot teorijo o reprodukciji kuncev, pomembnost zaporedja pa je odkril šele francoski matematik Edouard Lucas, in to kar 600 let po Fibonaccijevi smrti. Fibonaccijevo zaporedje ima neskončno zanimivih lastnosti, teh je toliko, da so jim posvetili kar celo revijo (The Fibonacci Quartely), v tem seminarju si bomo pogledali le ščepec od njih.

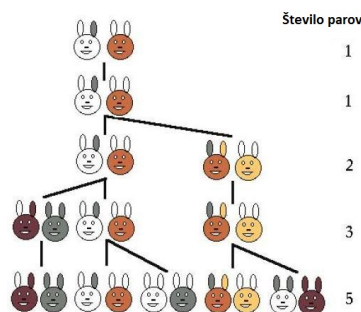
## 1 Štetje kuncev

Fibonacci je svojo teorijo o reprodukciji kuncev predstavil v svojem najpomembnejšem delu z imenom Liber Abaci. Naloga, ki si jo je zastavil, se glasi takole:

V ograjen prostor damo en par kuncev. Narava teh kuncev je taka, da vsak par na mesec skoti nov par kuncev, ki je ploden od konca drugega meseca svojega življenja naprej. Koliko parov kuncev bo živelo po enem letu, če v tem času noben ne pogine?

V 1. mesecu bomo imeli en par kuncev, ki pa še ni ploden, torej imamo tudi v 2. mesecu samo en par kuncev. V 3. mesecu bomo imeli dva para kuncev (en stari par in en par mladih). V 4. mesecu bo stari par zopet imel en par mladičev, mladi par pa še ni ploden, torej imamo skupaj tri pare kuncev. V 5. mesecu bomo imeli en par iz 1. meseca, ki bo zopet imel mladiče, en par iz 3. meseca, ki ima v tem mesecu prvič mladiče in en mladi par iz prejšnjega meseca, ki še ni ploden. Torej imamo skupaj pet parov.

Slika 1: Razmnoževanje kuncev.



Zapišimo si zaporedje števil, ki predstavljajo število parov v določenem mesecu:

mesec	število parov
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144

Iz tabele hitro vidimo, kako lahko izračunamo število parov v poljubnem mesecu.

## 2 Fibonaccijevo zaporedje in zlati rez

Zaporedja lahko podamo tako, da naštejemo člene, lahko pa jih zapišemo s pomočjo rekurzivne formule. Vidimo, da je rekurzivna formula, ki ustreza Fibonaccijevemu zaporedju enaka

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (1)$$

z začetnimi pogoji

$$u_1 = 1,$$

$$u_2 = 1.$$

Problem pri rekurzivnih zvezah se pojavi, kadar moramo izračunati  $n$ -ti člen, pri čemer je  $n$  zelo velik. Če bi želeli izračunati  $n$ -ti člen, bi torej potrebovali  $n - 1$  prejšnjih členov, kar pa je časovno zelo zahtevno. Zato poiščemo eksplicitno formulo za hitrejše računanje  $n$ -tega člena zaporedja.

Za začetek si pogledjmo malo bolj enostavno zaporedje, in sicer zaporedje, ki je rekurzivno podano na naslednji način:

$$v_0 = 1,$$

$$v_n = 2v_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Z lahkoto izračunamo člene tega zaporedja: 1, 2, 4, 8, ..., prav tako brez težav vidimo, da je eksplicitna formula za izračun  $n$ -tega člena enaka  $v_n = 2^n$ . Iz tega lahko sklepamo, da bo tudi eksplicitna formula za naše zaporedje izgledala zelo podobno. Torej poskusimo z nastavkom  $r^n$ .

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

$$\begin{aligned}
r^n &= r^{n-1} + r^{n-2} \\
r^2 - r - 1 &= 0 \\
r_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Število  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ( $\approx 1.618034\dots$ ) označimo z grško črko  $\phi$ , najbolj pa je znano pod imenom zlati rez. Druga rešitev je enaka  $1 - \phi$  in jo označimo z grško črko  $\psi$ . Ugotovili smo torej, da velja  $r = \phi$  in  $r = \psi$  in  $r^n$  reši zgornjo rekurzivno enačbo. Torej lahko rečemo, da je zaporedje oblike

$$u_n = A\phi^n + B\psi^n,$$

kjer A in B izračunamo iz začetnih pogojev ( $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  in  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ), tako dobimo spodnjo eksplicitno formulo za izračun n-tega člena Fibonaccijevega zaporedja:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (2)$$

Tej formuli rečemo tudi Binetova formula po francoskem matematiku Binetu. Če  $\sqrt{5}$  izrazimo s pomočjo števil  $\phi$  in  $\psi$ , lahko formulo 2 zapišemo še lepše:

$$u_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} \quad (3)$$

Binetova formula je sicer primerna za računanje n-tega Fibonaccijevega števila, vendar iz nje ne moremo sklepati, ali je to število celo ali ne.

**Naloga 1** Poiščimo Binetovo formulo za Lucasova števila, ki so rekurzivno podana na naslednji način. Naj bo  $u_n$  n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja. Potem je n-to Lucasovo število definirano kot:

$$L_n = u_{n-1} + u_{n+1},$$

definiramo še 0-ti člen Fibonaccijevega zaporedja,  $u_0 = 0$ .

**Rešitev 1** Za lažjo predstavbo si najprej zapišimo nekaj členov Fibonaccijevega in Lucasovega zaporedja.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n$	0	1	1	2	3	5	8	13
$L_n$		1	3	4	7	11	18	29

Namesto  $u_n$  vstavimo Binetovo formulo za n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja.

$$\begin{aligned}
L_n &= u_{n-1} + u_{n+1} \\
&= \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} \\
&= \frac{1}{\phi - \psi} (\phi^{n+1} + \phi^{n-1} - \psi^{n+1} - \psi^{n-1})
\end{aligned}$$

Iz definicije Lucasovih števil vidimo, da Lucasova števila ustrezajo isti rekurzivni formuli kot Fibonaccijeva števila, torej jih lahko predstavimo kot

$$L_n = A\phi^n + B\psi^n,$$

$A$  in  $B$  pa izračunamo iz začetnih pogojev. Za  $n = 1$  in  $n = 2$  iz zgornje formule dobimo:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\phi^2 - \psi^2}{\phi - \psi} \\ &= \phi + \psi \\ L_2 &= \frac{\phi^3 + \phi - \psi^3 - \psi}{\phi - \psi} \\ &= \frac{(\phi - \psi) + (\phi - \psi)(\phi^2 + \phi\psi + \psi^2)}{\phi - \psi} \\ &= 1 + \phi^2 + \phi\psi + \psi^2 \\ &= \phi^2 + \psi^2, \end{aligned}$$

ker velja:

$$\begin{aligned} \phi\psi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa po definiciji Lucasovih števil velja

$$\begin{aligned} L_1 &= u_2 + u_0 \\ &= 1 \\ L_2 &= u_3 + u_1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} L_1 &= \phi + \psi = 1 \\ L_2 &= \phi^2 + \psi^2 = 3. \end{aligned}$$

Iz tega z lahkoto vidimo, da velja  $A = 1$  in  $B = 1$ . Lucasova števila lahko torej eksplicitno zapišemo kot

$$L_n = \phi^n + \psi^n.$$

Poglejmo si razmerja prvih nekaj Fibonaccijevih števil.

n	$u_{n+1}/u_n$
1	1/1 = 1
2	2/1 = 2
3	3/2 = 1.5
4	5/3 = 1.666...
5	8/5 = 1.6
6	13/8 = 1.625
7	21/13 = 1.615...
8	34/21 = 1.619...
9	55/34 = 1.6176...

Iz tabele lahko numerično vidimo, da je razmerje dveh sosednjih Fibonaccijevih števil približno  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Kolikšno je razmerje lahko vidimo še drugače. Naj bo  $r_n$  n-to razmerje  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} \\ &= 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ r_n &= 1 + \frac{1}{r_{n-1}} \end{aligned}$$

Denimo, da se razmerje približuje neki limiti, ko gre n v neskončnost. Tedaj lahko zapišemo:

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

oz.

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Za to enačbo pa vemo, da ima rešitve  $\phi$  in  $\psi$ , očitno pa je, da se razmerje ne približuje številu  $\psi$  (ker je  $\psi$  negativno število, Fibonaccijeva števila pa so vsa pozitivna).

### 3 Zlati rez kot verižni ulomek

Zaporedje n-tih razmerij lahko zapišemo na naslednji način:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_n &= 1 + \frac{1}{r_{n-1}}, n \geq 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Torej lahko n-ta razmerja zapišemo:

$$\begin{aligned} r_2 &= 1 + \frac{1}{1} \\ r_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \\ r_4 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \end{aligned}$$

Takim izrazom pravimo tudi verižni ulomki.

Ker vemo, da se zaporedje n-tih razmerih približuje številu  $\phi$ , lahko to število zapišemo kot

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Takemu izrazu pa rečemo neskončni verižni ulomek.

Vsako pozitivno število  $x$  lahko zapišemo v obliki verižnega ulomka

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \ddots}}}}$$

kjer je  $a_i$  nenegativno celo število za vsak  $i$ .

Ko gradimo verižni ulomek za zlati rez, ga gradimo postopoma. Vzamemo recipročno vrednost prejšnje vrednosti in ji dodamo 1. Za večino števil pa to ni možno. Npr. za število  $\pi$  najprej vzamemo njegovo numerično vrednost, 3.14159265..., in mu odvzamemo celi del. Nato vzamemo recipročno vrednost decimalnega dela

$$\frac{1}{0.14159265\dots} = 7.062513\dots$$

in ji zopet odvzamemo celi del, od decimalnega dela pa vzamemo recipročno vrednost

$$\frac{1}{0.062513\dots} = 15.996\dots$$

Tako lahko nadaljujemo naprej

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

Za vsako število  $x$  nam razvoj v verižni ulomek pove, kako dobra je aproksimacija števila  $x$  z racionalnim številom. Če je število  $x$  racionalno, potem je verižni ulomek končni. V primeru, ko je  $x$  iracionalen (npr. število  $\pi$  ali  $\phi$ ), pa je verižni ulomek neskončen. Razvoj v tak ulomek nam da aproksimacijo iracionalnega števila, torej v primeru števila  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3 \\ \pi &\approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \\ \pi &\approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} \\ \pi &\approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{335}{113} \end{aligned}$$

Približki za število  $\phi$  pa so ravno razmerja sosednjih Fibonaccijevih števil:  $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$ . Ti ulomki predstavljajo tudi "najboljšo" aproksimacijo za število  $\phi$ . Dejstvo, da so v razvoju števil  $\phi$  v verižni ulomek, vsi celi deli enaki 1 (torej so najmanjši možni), nam pove, da je število  $\phi$  zelo težko učinkovito zapisati z ulomkom.

## 4 Fibonaccijeva hiperbola

Definirajmo  $n$ -to aproksimacijo iracionalnega števila  $x$ :

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

potem velja:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

Zgornjo enakost lahko dokažemo z indukcijo na  $n$  in uporabo zveze

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

To zvezo pa zopet lahko dokažemo s pomočjo indukcije na  $n$ . Tukaj dokaza za splošne verižne ulomke ne bomo delali, pogledali si bomo samo zvezo, ki velja za verižni ulomek, ki aproksimira zlati rez.

Vemo, da je  $n$ -ta aproksimacija števila  $\phi$  je enaka

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

zgornja formula pa postane

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n. \quad (5)$$

Dokažimo, da formula 5 velja za vsak  $n$ . Najprej definirajmo število  $P_n$ ,  $P_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$  in dokažimo, da formula velja za  $n = 1$ :  $P_1 = u_2u_0 - u_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1$ . Da dokažemo, da velja  $P_n = (-1)^n$ , je dovolj, da pokažemo, da za vsak par  $(P_{n-1}, P_n)$  velja  $P_{n-1} + P_n = 0$ . Torej:

$$\begin{aligned} P_{n-1} + P_n &= u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2 + u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 \\ &= u_{n-1}(u_{n+1} - u_{n-1}) - u_n(u_n - u_{n-2}) \\ &= u_{n-1}u_n - u_n u_{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zgoraj uporabimo definicijo Fibonaccijevih števil:  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  oz.  $u_{n+1} - u_{n-1} = u_n$ .

Poglejmo si še posledico formule 5 : najprej fiksirajmo  $n$  in pišimo  $r = \frac{p}{q}$ , pri čemer je  $p = u_{n+1}$  in  $q = u_n$ . Potem lahko pišemo  $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n = p - q$ . Torej lahko formulo 5 zapišemo kot  $p(p-q) - q^2 = (-1)^n$  oz.  $p^2 - pq - q^2 = (-1)^n$ . Če delimo enčbo s  $q^2$  dobimo

$$\frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} - 1 = \frac{(-1)^n}{q^2},$$

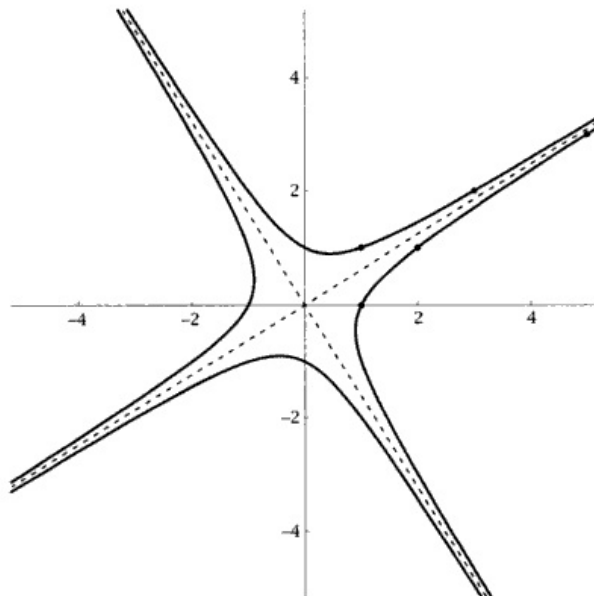
to pa lahko zapišemo kot

$$r^2 - r - 1 = \frac{(-1)^n}{q^2}.$$

Če bi na desni strani imeli 0, bi bile rešitve te enačbe kar  $\phi$  in  $\psi$ . Število  $\frac{(-1)^n}{q^2}$  nam pove, kako dobra aproksimacija je  $r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$  za  $\phi$ .

Enačba  $p^2 - pq - q^2 = \pm 1$  ima zelo lepo geometrijsko interpretacijo. Ta pravi, da točka  $(p, q)$  v ravnini leži na eni izmed hiperbol  $x^2 - xy - y^2 = 1$  oz.  $x^2 - xy - y^2 = -1$ . Asimptoti imata enačbi  $x = \phi y$  in  $x = \psi y$ , torej če je  $(p, q)$  točka blizu asimptote  $x = \phi y$ , potem je  $\frac{p}{q}$  približno  $\phi$ .

Slika 2: Fibonaccijeva hiperbola.



**Naloga 2** Vse Fibonaccijeve točke (koordinati sta sosednji Fibonaccijevi števili) ležijo v prvem kvadrantu. Na hiperboli ležijo še ostale mrežne točke (to so točke, ki imajo za obe koordinati celo število). Dokažimo, da so vse takšne točke ali Fibonaccijeve točke ali pa jih dobimo z rotacijo Fibonaccijevih števil okoli izhodišča.

**Rešitev 2** Najprej naštejmo nekaj Fibonaccijevih točk

$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 3), \dots$$

Takšna števila zgradimo postopoma na naslednji način

$$(a, b) \mapsto (a + b, a).$$

Želimo dokazati, da je vsaka mrežna točka, ki ima pozitivne koordinate in leži na hiperboli, zgrajena na tak način. Izberemo si torej neko poljubno takšno točko  $(p, q)$  in na njej zaporedoma izvajamo inverzno funkcijo, torej

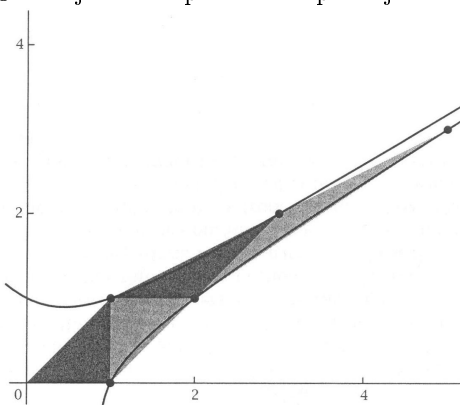
$$(p, q) \mapsto (q, p - q).$$

Pokazati želimo, da prej ko slej pridemo do točke  $(1, 1)$ . Nova točka  $(q, p - q)$  še vedno leži na hiperboli, saj velja

$$\begin{aligned} q^2 - q(p - q) - (p - q)^2 &= q^2 - qp + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 \\ &= q^2 + pq - p^2 \\ &= -(p^2 - pq - q^2), \end{aligned}$$

in vemo, da točka  $(p, q)$  leži na hiperboli. Nova točka  $(q, p-q)$  bo imela pozitivne koordinate tako dolgo, dokler bo  $p > q$ . To vidimo iz grafa, da velja povsod, razen v primeru, ko je  $p = q = 1$ . To pomeni, da izvajamo inverzno transformacijo vse dokler ne pridemo do točke  $(1, 1)$ . Do te točke pa pridemo zagotovo, saj se z vsako transformacijo premaknemo levo (ker je  $q < p$ ), ne moremo pa se neskončnokrat premikati v levo in imeti vseskozi pozitivne koordinate. Trditev lahko dokažemo tudi s pomočjo Pickovega izreka. Zopet gledamo samo prvi kvadrant. Območje med dvema vejama hiperbole pokrijemo s trikotniki, ki imajo za oglišča kar Fibonaccijeve točke.

Slika 3: Območje med hiperbolama prekrijemo s trikotniki.



Želimo dokazati, da so to ravno vse mrežne točke, ki ležijo na hiperboli. Najprej se spomnimo Pickovega izreka. Ta pravi, če je ploščina trikotnika enaka  $\frac{1}{2}$ , potem ta trikotnik ne vsebuje nobene mrežne točke, razen svojih oglišč. Torej izračunamo ploščino enega trikotnika z oglišči

$$(u_n, u_{n-1}), (u_{n+2}, u_{n+1}), (u_{n+1}, u_n).$$

Splošna formula za izračun ploščine trikotnika

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|,$$

v našem primeru preide v

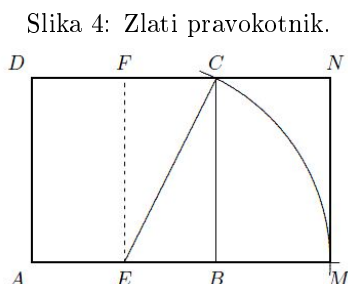
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(u_{n+2} - u_n)(u_n - u_{n-1}) - (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} - u_{n-1})| \\ &= \frac{1}{2} |u_{n+2}u_n - u_{n+2}u_{n-1} - u_n^2 + u_nu_{n-1} - u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n-1} + u_nu_{n+1} - u_nu_{n-1}| \\ &= \frac{1}{2} |u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 - u_{n-1}(u_{n+2} - u_n) + u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 + u_n(u_{n+1} - u_{n-1})| \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Na koncu smo upoštevali formuli 1 in 5. Dokazali smo, da ima vsak trikotnik, ki ima za oglišča Fibonaccijeve točke, ploščino  $\frac{1}{2}$ , torej ne vsebuje nobene druge mrežne točke. Ker ti trikotniki pokrijejo vso območje med hiperbolama, tudi na hiperboli ni nobene druge mrežne točke, kakor Fibonaccijeve.

## 5 Geometrijska interpretacija zlatega reza

Pravokotnik, ki ima stranici v razmerju zlatega reza skonstruiramo na naslednji način:

1. Najprej narišemo daljico AB dolžine 1.
2. Daljico AB razpolovimo, razpolovišče označimo s točko E.
3. Pravokotno na daljico AB narišemo daljico BC, ki je skladna daljici AB.
4. Narišemo krožnico s središčem E in polmerom EC.
5. Kjer krožnica seka nosilko daljice AB, dobimo novo točko M.
6. AM je daljša stranica pravokotnika, daljica MN (vzporedna daljici BC in iste dolžine) pa krajša stranica pravokotnika.



Hitro preverimo, da sta stranici res v razmerju zlatega reza.

$$|AB| = |BC| = 1$$

$$|EB| = \frac{1}{2}$$

$$|EC| = \sqrt{|EB|^2 + |BC|^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|EC| = |EM| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|AM| = |AE| + |EM| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$



Zdaj, ko smo se vsega spomnili, lahko začnemo z dokazovanjem.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
 &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \\
 &\quad + \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \dots + \binom{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \\
 &= u_{n+1} + u_n \\
 &= u_{n+2}
 \end{aligned}$$

## Literatura

- [1] Keith Ball, *Strange Curves, Counting Rabbits and Other Mathematical Explorations*, Princeton University Press 2003.
- [2] <http://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html>
- [3] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html#phi2D>