Izreki o tetivah

Gregor Grasselli

15. september 2011

Za tetive funkcije bomo vzeli z abscisno osjo vzporedne daljice, ki se začnejo in končajo na grafu funkcije. Definirajmo

Definicija 1 *Naj bo f funkcija, ki slika z intervala I, ki je lahko tudi neomejen, v realna števila. Množico*

$$H(f) = \{h \in [0, \infty); \exists x \in I. f(x) = f(x + h)\}$$

bomo imenovali tetivna množica funkcije f.

Rekli bomo, da ima funkcija vse tetive, kadar je $H(f) = [0, \infty)$.

Izrek 1 *Vsaka zvezna periodična funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ima vse tetive.*

Dokaz: Najprej dokažimo, da je integral

$$I(x) = \int_x^{x+p} f(t)dt$$

neodvisen od x, kjer p pomeni periodo funkcije f. Naj bosta x in y dve različni realni števili. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je y večji od x. Naj bo $u = \left\lfloor \frac{y-x}{p} \right\rfloor \cdot p + x$, kjer $\lfloor x \rfloor$ pomeni celi del števila x. V $I(x)$ vstavimo substitucijo $t = v - u + x$. Dobimo:

$$I(x) = \int_x^{x+p} f(t)dt = \int_u^{u+p} f(v - \left\lfloor \frac{y-x}{p} \right\rfloor \cdot p)dv = \int_u^{u+p} f(v)dv = I(u).$$

Ker je $y - u < p$, lahko napišemo $I(x) - I(y) = I(u) - I(y) = \int_u^y f(t)dt + \int_y^{u+p} f(t)dt - \int_y^{u+p} f(t)dt - \int_{u+p}^{y+p} f(t)dt = \int_u^y f(t)dt - \int_{u+p}^{y+p} f(t)dt$. Po substituciji $t = v - p$ vidimo, da sta oba integrala enaka. Torej je razlika $I(x) - I(y) = 0$. Za dokaz izreka si izberimo poljuben $a \in [0, \infty)$ in si oglejmo integral $\int_0^p [f(t + a) - f(t)]dt$. Po prej dokazanem je vrednost tega integrala enaka 0.

To pa pomeni, da mora imeti funkcija $f(x+a) - f(x)$ na intervalu $[0, p]$ vsaj eno ničlo. Tako vidimo, da je res vsako nenegativno realno število tetiva zvezne periodične funkcije.

Naslednji izrek bo pokazal, da je lastnost, da ima funkcija vse tetive, lastna dosti večjemu razredu funkcij.

Definicija 2 *Funkcija f definirana na intervalu, je pozitivno (negativno) rekurentna v točki x_0, če je za vsak $\epsilon > 0$ množica $\{x \in \mathbb{R}; |f(x_0) - f(x)| < \epsilon\}$ navzgor (navzdol) neomejena. Funkcija je pozitivno (negativno) rekurentna, če je pozitivno (negativno) rekurentna v vseh točkah svoje domene.*

Izrek 2 *Naj bo f pozitivno ali negativno rekurentna zvezna funkcija, katere domena je interval. Potem ima f vse tetive.*

Dokaz: Naj bo $h \in [0, \infty)$, $h \notin H(f)$. Potem je funkcija $g(x) = f(x+h) - f(x)$ zvezna in ker nima ničle, je ves čas pozitivna ali ves čas negativna. Ker imajo funkcije $f(x)$, $f(-x)$, $-f(x)$ in $f(x-c)$ za $c \in \mathbb{R}$ isto tetivno množico (zrcaljenja in premiki očitno ne vplivajo na tetivno množico), lahko predpostavimo, da je f pozitivno rekurentna, da je $g > 0$ in da definicijsko območje f vsebuje interval $[0, \infty)$. Naj f doseže svoj minimum na intervalu $[0, h]$ v točki x_0, svoj minimum na intervalu $[h, 2h]$ pa v točki x_1. Če je $x > h$, potem obstaja nenegativno celo število n, da je $x - nh \in [h, 2h)$. Velja:

$$f(x) > f(x-h) > f(x-2h) > \cdots > f(x-nh) \geq f(x_1) > f(x_1 - h) \geq f(x_0).$$

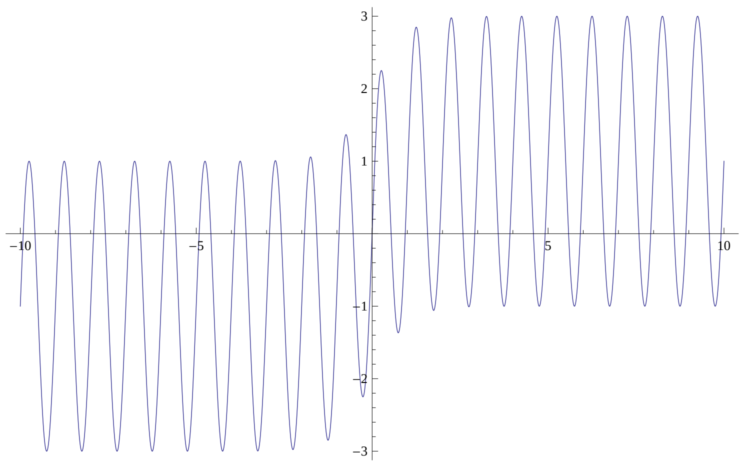
Torej je $f(x) - f(x_0) > f(x_1) - f(x_0)$ za vsak $x > h$. Potem je za $\epsilon = f(x_1) - f(x_0)$ množica $\{x; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ navzgor omejena s h, kar pa je v protislovju s tem, da je funkcija f pozitivno rekurentna.

Očitno lahko prvi izrek vidimo kot posledico tega, saj je vsaka periodična funkcija pozitivno rekurentna.

V zgornjem izreku ni dovolj, da je funkcija sicer pozitivno ali negativno rekurentna v vsaki točki, ni pa v vseh točkah pozitivno rekurentna ali pa v vseh točkah negativno rekurentna. Oglejmo si na primer funkcijo:

$$f(x) = 2\sin 2\pi x + \tanh x$$

Vidimo, da vsaka vodoravna premica, ki seka graf, to stori neskončnokrat, torej je funkcija res v vsaki točki ali pozitivno ali negativno rekurentna, prav tako je ta funkcija zvezna. Kljub temu, pa nima nobene tetive dolžine 1: $f(x+1) - f(x) = 2\sin(2\pi + 2\pi x) + \tanh(x+1) - 2\sin 2\pi x - \tanh x = \frac{\tanh x + \tanh 1}{1 + \tanh x \tanh 1} - \tanh x = \frac{\tanh 1 - \tanh^2 x \tanh 1}{1 + \tanh x \tanh 1}$. To bo enako nič natanko tedaj, ko bo $\tanh^2 x = 1$, kar pa se nikoli ne zgodi, saj zasede funkcija tanh le vrednosti na odprtem intervalu $(-1, 1)$.



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = 2\sin 2\pi x + \tanh x$

Prepričajmo se še, da izrek ne velja niti za rekurentne odvode, ki imajo po Darbouxjevem izreku lastnost vmesne vrednosti. Torej je v izreku potrebno zahtevati, da je funkcija zvezna in ni dovolj, da ima lastnost vmese vrednosti. Naj bo

$$f(x) = 2^{\lfloor x \rfloor}\left(1 + \{x\} + \sin\frac{\pi}{\{x\}}\right),$$

kjer $\lfloor x \rfloor$ pomeni celi del, $\{x\}$ pa neceli del števila x. Ta funkcija je zvezna vedno, razen kadar je x celo število. Če se x bliža celi vrednosti z leve, se vrednost funkcije bliža $2^{\lfloor x \rfloor+1}$, torej je funkcija z leve zvezna, tudi če je x celo število, in je $f(n) := 2^n$ za vsako celo število n. Če pa se x bliža celi vrednosti z desne, potem funkcija f v vsaki okolici $\lfloor x \rfloor$ zavzame vse vrednosti med 0 in $2^{\lfloor x \rfloor+1}$. Zato je ta funkcija pozitivno rekurentna. Preveriti je potrebno še, da je f odvod funkcije

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Kadar x ni celo število, je to res po osnovnem izreku integralnega računa. Torej je to potrebno preveriti še za cele vrednosti x in sicer le z desne, saj je f z leve zvezna in je torej levi odvod funkcije F tudi v celih točkah enak f. Naj bo torej n celo število in $h \in (0,1)$. Potem je

$$F(n+h) - F(n) - hf(n) = \int_{n}^{n+h} 2^n\left(1 + x - n + \sin\frac{\pi}{x-n}\right)dx - 2^n h =$$

$$= 2^{n-1}h^2 + 2^n\int_0^h \sin\frac{\pi}{t}dt,$$

kjer je $t = x - n$. Če zamenjamo $\sin\frac{\pi}{t}$ z izrazom

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{t}\right) - \frac{2t}{\pi}\cos\frac{\pi}{t},$$

dobimo

$$2^{n-1}h^2 + \frac{2^n h^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{h} - \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^h t\cos\frac{\pi}{t}dt,$$

kar je, ker je $h \in (0,1)$, manj od $2^{n+1}h^2$. Torej je tudi desni odvod funkcije F v celih točkah enak f. Tako je f res odvod. Vendar pa nima nobene tetive dolžine 1, saj je $f(x+1) - f(x) = f(x) > 0$ za vsak x.

Tetivna množica poljubne zvezne funkcije, ima zanimivo lastnost, ki jo je odkril P. Levy.

Izrek 3 ***Splošni izrek o tetivah***

1. *Naj bo f zvezna funkcija, ki slika iz povezane podmnožice realnih števil v realna števila. Potem velja: Če je $h \in H(f)$, potem je za vsako naravno število n tudi $\frac{h}{n} \in H(f)$.*

2. *Naj bosta a in h taki pozitivni števili, da ne obstaja naravno število n, za katero bi veljalo $a = \frac{h}{n}$. Potem obstaja zvezna funkcija f, ki slika iz povezane podmnožice realnih števil v realna števila, za katero velja $h \in H(f)$ in $a \notin H(f)$.*

Dokaz: Prvi del dokažemo s protislovjem. Naj bo $h \in H(f)$ in n naravno število. Potem obstaja x_0, da je $f(x_0) = f(x_0 + h)$. Denimo, da $\frac{h}{n} \notin H(f)$. Potem funkcija $f(x + \frac{h}{n}) - f(x)$ nima ničel nikjer na intervalu $[x_0, x_0 + h - \frac{h}{n}]$. Ker je zvezna, mora biti na tem intervalu ali povsod pozitivna ali pa povsod negativna. Ker se tetivna množica nič na spremeni, če graf funkcije prezrcalimo čez realno os, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $f(x+\frac{h}{n})-f(x)$ na intervalu $[x_0, x_0+h-\frac{h}{n}]$ povsod večja od nič. Potem pa je $f(x_0) < f(x_0+\frac{h}{n}) < f(x_0 + \frac{2h}{n}) < \cdots < f(x_0 + \frac{(n-1)h}{n} < f(x_0 + h)$, kar pa je v protisvju s tem, da je $f(x_0) = f(x_0 + h)$. Funkcija, ki jo je za dokaz drugega dela podal Levy, je $f(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{a}) - \frac{x}{h}\sin^2(\frac{\pi h}{a})$. Ker sta 0 in h ničli te funkcije, ima f tetivo dolžine h. Prepričajmo se še, da f nima tetive dolžine a.

$$f(x+a) - f(x) = \frac{x}{h}\sin^2(\frac{\pi h}{a}) - \frac{x+a}{h}\sin^2(\frac{\pi h}{a}) =$$

$$= \left(\frac{x}{h} - \frac{x+a}{h}\right)\sin^2(\frac{\pi h}{a}).$$

Ta zmnožek je vedno različen od 0, saj so edine ničle funkcije $\sin^2$ celi večkratniki števila π, število $\frac{h}{a}$ pa ni celo po predpostavki.

Ker je dokaz prvega dela izreka temeljil izključno na dejstvu, da imajo zvezne funkcije lastnost srednje vrednosti, je očitno, da bi isti dokaz lahko ponovili, tudi če bi bila funkcija v izreku odvod, ki ima po Darbouxjevem izreku lastnost vmesne vrednosti.

Splošneje je problem opazovanja tetiv zastavil Heinz Hopf, ki je s svojim izrekom karakteriziral tetivne množice vseh zaprtih, povezanih in omejenih podmnožic ravnine.

Definicija 3 *Naj bo S podmnožica ravnine. Množico*

$$\{h \in [0, \infty); \exists(x, y) \in S.(x + h, y) \in S\}$$

imenujemo tetivna množica množice S.

Definicija 4 *Podmnožica A intervala $[0, \infty)$ je aditivna, če je za vsak par a, $b \in A$ tudi $a + b \in A$. Podmnožica intervala $[0, \infty)$ je koaditivna, če je njen komplement aditivna množica.*

Izrek 4 ***Hopf***

1. *Tetivna množica vsake kompaktne povezane podmnožice ravnine $K \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktna in koaditivna.*

2. *Naj bo A^* neprazna odprta aditivna podmnožica intervala $(0, \infty)$. Potem obstaja omejena, zaprta in povezana podmnožica ravnine, tako da je $A = [0, \infty) - A^*$ njena tetivna množica. Če je $A \neq \{0\}$, potem obstaja zvezna funkcija $f : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}$, da je $A = H(f)$.*

Dokaz: Dokaz prvega dela Hopfovega izreka. Zaprtost in omejenost tetivne množice A množice K, sledita iz zaprtosti in omejenosti množice K. Potrebno je videti še, da je A^* aditivna. Označimo s K_a množico $\{(x + a, y); (x, y) \in K\}$, kjer je a realno število. Potem ima množica K tetivo dolžine a natanko tedaj, ko presek množic K in K_a ni prazen. Če ima namreč K tetivo dolžine a, potem obstaja točka $(x, y) \in K$, da je tudi $(x + a, y)$ v K, hkrati pa je ta točka tudi v K_a. Torej presek $K \cap K_a$ ni prazen. Obratno denimo, da presek $K \cap K_a$ ni prazen. Naj bo (x, y) točka iz tega preseka. Ker je (x, y) iz K_a, je točka $(x - a, y)$ v K. Ker je točka (x, y) tudi v K, ima K tetivo dolžie a. Naj bosta a in b števili iz množice A^*. Potem je po prejšnjem presek množic K in K_a ter presek $K_a \cap (K_a)_b = K_a \cap K_{a+b}$ prazen. Radi bi videli, da je presek množic K in K_{a+b} prav tako prazen. Naj bo x_0 najmanjša abscisa vseh točk iz množice $K \cup K_a \cup K_{a+b}$. Naj bo x_1 največja abscisa točke iz iste množice. Vse točke z absciso x_0 ležijo v K, vse točke z absciso x_1 pa v množici K_{a+b}. Naj bosta y_0 in y_1 navečja in najmajša ordinata točk iz $K \cup K_a \cup K_{a+b}$ in X točka iz množice K_a z ordinato y_0, $Y \in K_a$ pa točka z ordinato y_1. Naj bo $r = \min\{d(K_a, K), d(K_a, K_{a+b})\}$, kjer d pomeni razdaljo. Vzemimo okolico U množice K_a iz vseh točk, ki so od nje oddaljene za manj kot $\frac{r}{2}$. Ker je K_a povezana, je U povezana odprta podmnožica ravnine, ki je zato povezana s potmi. Zato obstaja pot γ, ki povezuje točki X in Y ter je vsa vsebovana v U in zato ne seka nobene od množic K, K_{a+b}. Nadaljujmo pot γ tako, da gremo iz točke Y za 1 navzgor in potem v levo vzporedno z abscisno osjo, dokler ne pridemo do točke, katere abscisa je enaka $x_0 - 1$. Dalje gremo navzdol vzporedno z ordinatno osjo, dokler ne pridemo do točke, katere ordinata je enaka $y_0 - 1$, gremo na desno vzporedno z abscisno osjo, da pridemo točno pod točko X in gremo za 1 navzgor v točko X. Tako smo skonstruirali pot, ki ne seka nobene izmed množic K in K_{a+b}. Tako dobljena pot razdeli ravnino na dve komponenti. Očitno leži K v omejeni komponenti, saj vsak poltrak, ki se začne v K, seka pot. Ker noben poltrak, ki se začne v K_{a+b}, je vzporeden z abscisno osjo in gre proti $+\infty$ ne seka poti, mora K_{a+b} ležati v neomejeni komponenti. Potem pa je njun presek prazen. Tako je prvi del izreka dokazan.

V drugem delu vidimo, da si v primeru, ko je $A = \{0\}$, za iskano množico izberemo kar točko. Zato recimo, da je $A \neq \{0\}$. Dokažimo najprej nekaj lastnosti para množic A in A^*.

1. Prepričajmo se najprej, da je množica A zaprta in omejena. Ker je A^* odprta, je njen komplement zaprt. Ker A^* ni prazna, mora vsebovati interval (a, b). Zaradi aditivnosti mora potem vsebovati tudi vse intervale (na, nb), ko teče n po naravnih številih. Ko je $n > \frac{a}{b-a}$, je $nb > (n + 1)a$, torej od nekod naprej A^* vsebuje vsa realna števila. Zato je njen komplement omejen.

2. Spodnja meja u množice A^* je različna od nič.
   Dokaz: Ker je $A \neq \{0\}$, vsebuje neko pozitivno realno število a. Če vsa pozitivna števila manjša od a pripadajo A, je trditev dokazana. Sicer pa obstaja $x \in A^*, x < a$. Ker je A^* odprta, obstaja interval I, ki vsebuje x in je cel vsebovan v A^*. Interval $J = \{a - t; t \in I\}$ mora biti ves vsebovan v A. Če bi namreč obstajal $y \in J \cap A^*$, potem obstaja $t \in I$, da je $y + t = a$. Zaradi aditivnosti množice A^* bi bil potem $a \in A^*$. Kar pa ni možno. Zato množica A vsebuje interval. Če bi bil $u = 0$, bi množica A^* vsebovala poljubno majhna števila in bi bila potem zaradi aditivnosti gosta v $[0, \infty)$. To pa je v protislovju s tem, da obstaja interval, ki je cel vsebovan v A.

3. Naj bo d dolžina intervala, ki je ves vsebovan v A. Potem je $d \leq u$, kjer u označuje spodnjo mejo A^*.

Dokaz: Vzemimo poljuben interval I, katerega dolžina v je večja od u. Ker je u spodnja meja A^*, obstaja $s \in A^*, u < s < v$. Zaradi aditivnosti množice A^* so vsa števila ns, ko teče n po naravnih številih, v A^*. Potem pa I vsebuje vsaj eno od teh števil, saj je njegova dolžina večja od s. Torej I ni ves vsebovan v A.

4. Če je $s \in A^*$ in je t stekališče A^*, potem je $s + t \in A^*$.
   Dokaz: Ker je A^* odprta, obstaja $\epsilon > 0$, da je $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset A^*$. Ker je t stekališče množice A^*, obstaja δ; $\epsilon > \delta > 0$, tako da je eno od števil $t + \delta$, $t - \delta$ v A^*. Ker je $s + \delta, s - \delta \in A^*$, je ena od vsot $(s - \delta) + (t + \delta)$, $(s + \delta) + (t - \delta)$ iz dveh sumandov, ki sta oba v A^*. Zaradi aditivnosti A^*, je potem $s + t \in A^*$.

Dokaz drugega dela Hopfovega izreka: V točki 1 zgoraj smo dokazali, da je množica A zaprta in omejena. Potem ima maksimum, ki ga označimo s c. Možnost, ko je $c = 0$, smo že obravnavali, zato lahko privzamemo, da je $0 < c$. Rob množice A označimo z $\overline{A}$. Za dokaz izreka, je dovolj poiskati funkcijo $f : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}$, tako da je $H(f) = A$. Iskana množica je potem graf funkcije f. Definirajmo torej

$$f : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} d(x, \overline{A}) & ; x \in A \\ -d(x, \overline{A}) & ; x \in A^* \cup \overline{A} \end{cases}.$$

Očitno je funkcija f zvezna, saj je zvezna na A in na $A^* \cup \overline{A}$, na preseku pa se predpis ujema. Potrebno je videti, da je $H(f) = A$. Najprej bomo dokazali, da je $A \subset H(f)$. Torej da za vsak $h \in A$ obstaja $x \in [0, c]$, da je $f(x) = f(x+h)$. Naj bo h_1 najmanjše število iz $\overline{A}$, ki je večje od h. Ker je interval $[h, h_1]$ vsebovan v A, je $h_1 - h \leq u$, kjer u pomeni spodnjo mejo množice A^*. Zato je $f(h_1 - h) \geq 0$. Vemo še $f(h) \geq 0$, $f(h_1) = 0$, $f(0) = 0$. Zato je $f(x + h) - f(x) \geq 0$ za $x = 0$ in $f(x + h) - f(x) \leq 0$ za $x = h_1 - h$. Zato mora imeti funkcija $f(x + h) - f(x)$ ničlo na intervalu $[0, u]$.

Da dokažemo obratno inkluzijo, bomo pokazali, da nobeno število s iz A^* ni tetiva funkcije f. Natančneje, pokazali bomo, da je $f(x + s) < f(x)$ za vsak $x \in A^*$. Za to ločimo tri primere:

1. Če je $x \in \overline{A}$, potem je po točki 4 zgoraj $x + s$ v A^*. Potem je $f(x + s) < 0 = f(x)$.

2. Če je x iz notranjosti A, imamo za $x + s$ dve možnosti. Prva je $x + s \in A^* \cup \overline{A}$, potem je $f(x) > 0 \geq f(x + s)$. Druga pa je, da je $f(x + s)$ prav tako v notranjosti množice A. Potem je potrebno pokazati, da je $d(x, \overline{A}) > d(x + s, \overline{A})$. Naj bo p največje število iz $\overline{A}$, ki je manjše od x in q najmanjše število iz $\overline{A}$, ki je večje od x. Potem je $d(x, \overline{A}) = \min\{x - p, q - x\} = \min\{(x + s) - (p + s), (q + s) - (x + s)\}$. Po četrti točki od prej pa vemo, da sta $p + s$ in $q + s$ v A^*. Zaradi odprtosti A^* obstaja $\epsilon > 0$, da sta okolici $(p + s - \epsilon, p + s + \epsilon)$ in $(q + s - \epsilon, q + s + \epsilon)$ v celoti vsebovani v A^*. Potem je $d(x + s, \overline{A}) < \min\{(x + s) - (p + s + \epsilon), (p + s - \epsilon) - (x + s)\} = \min\{x - p - \epsilon, q - x - \epsilon\} < \min\{x - p, q - x\}$.

3. Ostane še možnost, da je $x \in A^*$. Potem je tudi $x + s \in A^*$, saj je A^* aditivna. Potem je $f(x) = -d(x, \overline{A})$ in $f(x + s) = -d(x, \overline{A})$. Zato je

potrebno pokazati $d(x, \overline{A}) < d(x+s, \overline{A})$. Oznaki p in q naj imata isti pomen kot v prejšnjem odstavku. Potem je ves interval $(p+s, q+s)$ vsebovan v A^*. Po četrti točki od prej pa vemo, da sta $p+s$ in $q+s$ notranji točki množice A^*. Zato obstaja $\epsilon > 0$, da je tudi ves interval $(p+s-\epsilon, q+s+\epsilon)$ vsebovan v A^*. Potem pa mora biti razdalja od $x+s$ do roba A večja od razdalje $d(x, \overline{A})$, kar je bilo potrebno pokazati.

Hitro se lahko prepričamo, da je splošni izrek o tetivah posledica Hopfovega izreka. Prvi del je posledica aditivnosti komplementa tetivne množice, za drugi del pa potrebujemo le odprto in aditivno množico, ki vsebuje a, ne pa tudi h, kjer imata a in h isti pomen kot v formulaciji splošnega izreka o tetivah. Ker $\frac{h}{a}$ ni celo število, obstaja $\epsilon > 0$, da je $a - \epsilon > 0$ in da nobeden od intervalov $(n(a-\epsilon), n(a+\epsilon))$, ko teče n po naravnih številih, ne vsebuje h. Naj bo $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n(a-\epsilon), n(a+\epsilon))$. Potem je A^* aditivna in odprta in ne vsebuje h, vsebuje pa a. Po drugem delu Hopfovega izreka je torej njen komplement tetivna množica neke zvezne funkcije.

Literatura

[1] J. C. Oxtoby: *Horizontal chord theorems*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No. 5 (May, 1972), pp. 468-475.

[2] H. Hopf: *Ueber die Sehnen ebener Kontinuen und die Schliefen geschlossener Wege*, Coment. Math. Helv., 9 (1937) 303-319.

[3] R. P. Boas: *A Primer of Real Functions*, Carus Mathematical Monograph No. 13, Wiley, New York, 1960.