

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

PASCALOVE MATRIKE

SEMINAR I

Mentor: Milan Hladnik

Avtor: Klemen Pavlič
Kamnik, april 2011

Ugotovili smo torej, da so vse tri matrike obrnljive, zanima pa nas, če veljajo še kakšne posebne lastnosti.

Res med njimi velja povezava:

$$S_n = L_n U_n.$$

To velja za vsak n , torej:

$$S = LU.$$

Podali bomo štiri dokaze te trditve, ki nam pokažejo različne vidike zgornje enakosti. Posledica te enakosti je tudi $\det(S_n) = \det(L_n)\det(U_n) = 1$.

1. dokaz

Lotili se ga bomo s pomočjo množenja matrik L in U . Število S_{ij} je (i, j) -ti element matrike S , enako je j -temu elementu $(i + j)$ -te vrstice Pascalovega trikotnika. Naš cilj je pokazati, da je enako produktu i -te vrstice L in j -tega stolpca U :

$$(1) \quad S_{ij} = \binom{i+j}{i} = \sum L_{ik} U_{kj} = \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} \binom{j}{k}.$$

Oglejmo si zdaj $\binom{i+j}{i}$. To predstavlja število izborov i -elementov izmed $(i+j)$ -elementov. Imejmo sedaj $i+j$ elementov in jih razdelimo v dve skupini, prva naj vsebuje i , druga pa j elementov. Če izberemo $i-k$ elementov iz prve in k iz druge skupine, smo izbrali i elementov izmed $i+j$ elementov. Prvih $i-k$ elementov izmed i elementov lahko izberemo na $\binom{i}{i-k}$ načinov, kar je enako $\binom{i}{k} = \binom{i}{i-k}$. Podobno lahko izberemo k izmed j elementov na $\binom{j}{k}$ načinov. Enakost torej velja. ■

Vemo, da je $\binom{n}{k} = 0$ za $k > n$.

Enakost (1) lahko prepišemo v naslednjo obliko:

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i}.$$

Iz zadnje enačbe (2) je boljše razvidno, da se res množijo vrstice Pascalovega trikotnika.

2. dokaz

Ta dokaz bo potekal s pomočjo Gaussove eliminacije. Oglejmo si sedaj matriko L_4 (slika 4).

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 4: Matrika L_4

Opazimo, da se lahko enic v prvem stolpcu pod prvo vrstico znebimo tako, da od vsake vrstice odštejemo eno vrstico nad njo, začenši spodaj. Tako dobimo matriko (slika 5):

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

Slika 5: Premaknjena matrika L

Elementi eliminacijske matrike E so enaki $E_{ii} = 1$ in $E_{i,i-1} = -1$. Za naš primer 4×4 matrik je torej:

$$E_4 L_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da produkt EL ustreza Pascalovi rekurziji:

$$L_{i,k} - L_{i-1,k} = L_{i-1,k-1}.$$

Ta produkt si lahko predstavljamo tudi kot L_{n-1} premaknjen navzdol kot zgoraj. Podobno velja:

$$U_4 E_4^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix}.$$

To nas napelje na misel dokaza z indukcijo. Predpostavimo $L_{n-1}U_{n-1} = S_{n-1}$. Enačbi

$$EL_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U_n E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$$

dasta

$$(EL_n)(U_n E^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sedaj moramo pokazati, da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{bmatrix}$$

sovpada z $ES_n E^T$.

Oglejmo si zopet (i, j) -ti element ES_n in $ES_n E^T$ in sicer najprej na primeru matrik dimenzije $n = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_3 \end{bmatrix}.$$

Kot je nazorno v primeru zgoraj:

$$(ES_n)_{i,j} = S_{i,j} - S_{i-1,j},$$

$$(ES_n E^T)_{i,j} = (S_{i,j} - S_{i-1,j}) - S_{i,j-1} = S_{i-1,j-1}.$$

Sledi

$$ES_n E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pokazali smo, da velja

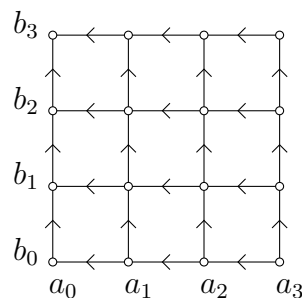
$$(EL_n)(U_n E^T) = ES_n E^T.$$

Preostane nam le še, da enačbo pomnožimo z leve z E^{-1} in z desne z $(E^T)^{-1}$ in dobimo $L_n U_n = S_n$. ■

Oglejmo si sedaj še dva malo bolj domiselna dokaza iste trditve.

3. dokaz

Dokaza identitete $S = LU$ se bomo lotili s pomočjo lepljenja grafov. Za začetek si oglejmo graf (slika 6), v katerem se lahko premikamo le levo in gor.



Slika 6: Usmerjen graf za štetje poti v matriki S

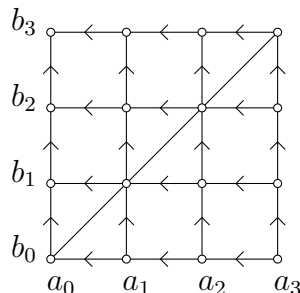
Enačimo z S_{ij} število poti od a_i do b_j v grafu kot na sliki 6. Poglejmo sedaj število poti od a_0 do b_j : opazimo da gre tja ena sama pot, to dejstvo pa sovпада s tem, da je $S_{0j} = 1$. Analogno število poti od a_i do b_0 sovпада z $S_{i0} = 1$, saj vodi le ena pot direktno od a_i do b_0 . Želimo pokazati, da nam da štetje poti isto matriko kot rekurzija, s katero je sestavljen Pascalov trikotnik in matrika S, torej da predpisa sovpadata. Poglejmo si primer S_{22} . V matriki S je ta element $\binom{4}{2} = 6$. V našem grafu pa šteje število poti od a_2 do b_2 . Opazimo, da je od a_2 do b_2 tudi 6 poti, to je tri ki se začnejo navzgor in tri ki se začnejo levo.

Poti, ki se začnejo levo, grejo od a_{i-1} do b_j (v našem primeru od a_1 do b_2), po indukcijski predpostavki je njihovo število enako $S_{i-1,j}$ (v našem primeru je njihovo število enako S_{12}). Podobno poti, ki se začnejo navzgor, potekajo z nivoja 1 do b_j . Njihovo število je enako $S_{i,j-1}$ (v našem

primeru to pomeni, da je število poti enako S_{21}) Pokazali smo torej, da je število poti od a_i do b_j enako

$$S_{i,j} = S_{i-1,j} + S_{i,j-1}.$$

Vemo pa, da so elementi matrike S podani z isto rekurzijo, torej predpisa za štetje poti v grafu in element matrike sovpadata. Sedaj pa naš graf prerežemo po diagonali pod kotom 45° tako kot na sliki 7.



Slika 7: Graf z diagonalo, po kateri ga razdelimo

Dokazati želimo, da L_{ik} šteje poti od a_i do točke (k, k) na diagonali in da U_{kj} šteje poti od točke na diagonali do b_j . Lotimo se tega z indukcijo. L_{ik} je element Pascalovega trikotnika, torej je $L_{ik} = L_{i-1,k-1} + L_{i-1,k}$. Število poti od a_i do $(0, 0)$ je 1, kar sovpada z L_{i0} . Prav tako velja, da je $L_{ii} = 1$ za pot od a_i do (i, i) . Po indukcijski predpostavki velja, da je število poti, ki gredo levo od a_i enako $L_{i-1,k}$ (to so ravno poti od a_{i-1} do (k, k)). Podobno je število poti, ki gredo navzgor iz a_i do (k, k) enako $L_{i-1,k-1}$ (njihovo število dobimo tako, da graf premaknemo za ena levo in za ena dol in si predstavljamo, da grejo te poti od a_{i-1} do $(k-1, k-1)$). Izkaže se torej, da je število poti enako

$$L_{i-1,k} + L_{i-1,k-1},$$

kar sovpada s Pascalovo rekurzijo.

Na podoben način dokažemo, da U_{kj} šteje poti od (k, k) do b_j .

Sedaj je potrebno pokazati še, da je množenje matrik L in U ekvivalentno zlepljenju grafov. Člen $L_{ik}U_{kj}$ šteje poti od a_i do b_j preko (k, k) . Vsota po vseh k -jih potem prešteje vse poti in ravno sovpada z S_{ij} . ■

V primeru poti od a_2 do b_2 je število poti torej $1 * 1 + 2 * 2 + 1 * 1 = 6 = S_{22}$.

POTENCE, INVERZ IN LOGARITEM L

Kot pripravo na 4. dokaz pogledjmo na L kot na funkcijo. Spomnimo se tudi, da funkcijo $f(x)$ lahko predstavimo kot Taylorjevo vrsto $\sum a_k x^k$. Taylorjeva vrsta je enaka skalarnemu produktu dveh neskončnih vektorjev $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ in $v = (1, x, x^2, \dots)$:

$$\sum a_k x^k = a^T v = aL^{-1}Lv.$$

L je neskončna spodnje trikotna Pascalova matrika. Produkt Lv je enak vektorju, ki ima za komponente potence $(1+x)$:

$$Lv = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ (1+x)^3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Če zgornje še enkrat pomnožimo z L , dobimo potence $(2+x)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ (1+x)^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+(1+x) \\ 1+2(1+x)+(1+x)^2 \\ 1+3(1+x)+3(1+x)^2+(1+x)^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+x \\ (2+x)^2 \\ (2+x)^3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Vidimo torej, da je $L(Lv) = L^2v = [1, 2+x, (2+x)^2, (2+x)^3, \dots]^T$. Ugotovili smo torej, da nam da množenje z L^p potence $(p+x)$. Tako je (i, j) -ti element matrike L^p enak

$$p^{i-j} \binom{i}{j}.$$

Primer ($n=4$):

$$L_4^p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ p & 1 & & \\ p^2 & 2p & 1 & \\ p^3 & 3p^2 & 3p & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja tudi enakost $L^p L^q = L^{p+q}$. Podobno velja za vse $p \in \mathbb{Z}$, zato je tudi L^{-1} take oblike ($p=-1$).

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementi L^{-1} so torej oblike $(-1)^{i-j} \binom{i}{j}$. Matriko L^{-1} lahko zapišemo kot DLD^{-1} , kjer je D diagonalna matrika, ki ima na diagonalni 1 in -1 kot spodaj:

$$(3) \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si zdaj še logaritme. Matrika L^p ima eksponentno obliko in jo zato lahko zapišemo kot e^{pA} , kjer je A neka matrika. Iz enakosti $L^p = e^{pA}$ dobimo $A = \log L$.

Matriko A pa lahko izračunamo tudi kot

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pA} - I}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L^p - I}{p} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

LASTNE VREDNOSTI PASCALOVIIH MATRIK

Lastne vrednosti matrike L in U so vse enake 1. V enakosti (3) smo pokazali, da je matrika L podobna svoji inverzni matriki. Transponiranje te enakosti $L^{-1} = DLD^{-1}$ nam da $U^{-1} = DUD^{-1}$, saj je $D^{-1} = D^T = D$ (D je namreč diagonalna). Sledi, da je U podobna svoji inverzni matriki. Pokažimo sedaj, da je tudi S^{-1} podobna S :

$$\begin{aligned}
S^{-1} &= (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = DUD^{-1}DL D^{-1} = DULD^{-1} = DUL(UU^{-1})D^{-1} = \\
&= (DU)(LU)(U^{-1}D^{-1}) = (DU)(LU)(DU)^{-1} = (DU)S(DU)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ker sta S in S^{-1} podobni, sledi da morajo lastne vrednosti S nastopati v parih λ in $\frac{1}{\lambda}$.
Zgled: lastne vrednosti S_3 so

$$\lambda_1 = 4 + \sqrt{15}, \quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{15}, \quad \lambda_3 = 1.$$

Res $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ in λ_3 je sama sebi recipročna.

4. dokaz

Tega dokaza se bomo lotili z enakostjo funkcij. Če se namreč $Sv = LUv$ ujema za dovolj vektorjev bomo zaključili, da je $S = LU$. V ta namen si izberimo neskončen vektor $v = (1, x, x^2, x^3, \dots)$.

$$Sv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1-x) \\ 1/(1-x)^2 \\ 1/(1-x)^3 \\ 1/(1-x)^4 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Prva vrsta Sv je enaka geometrijski vrsti

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

vsako naslednjo pa dobimo iz odvoda prejšnje. Vzeti moramo $|x| < 1$, da bo vrsta konvergirala. Isti rezultat moramo dobiti iz produkta LUv . Oglejmo si torej najprej produkt Uv :

$$Uv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(1-x) \\ x/(1-x)^2 \\ x^2/(1-x)^3 \\ x^3/(1-x)^4 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Izpostavimo iz vektorja Uv faktor $\frac{1}{1-x}$:

$$Uv = \frac{1}{1-x} \left(1, \frac{x}{1-x}, \frac{x^2}{(1-x)^2}, \dots \right)^T.$$

Če definiramo $y = \frac{1}{1-x}$, lahko zgornje zapišemo kot:

$$Uv = \frac{1}{1-x} (y^0, y^1, y^2, y^3, \dots)^T.$$

Sedaj pa pomnožimo Uv še z L (to lahko storimo, saj so vse vsote končne):

$$L(Uv) = \frac{1}{1-x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{1-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+y \\ (1+y)^2 \\ (1+y)^3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Vidimo torej, da je n -ta vrstica matrice L , pomnožena s stolpcem Uv , enaka $(1+y)^n$. Če namesto y spet vstavimo $\frac{1}{1-x}$ dobimo:

$$(1+y)^n = \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n.$$

Produkt LUv je enak:

$$L(Uv) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x} \\ \frac{1}{(1-x)^2} \\ \frac{1}{(1-x)^3} \\ \frac{1}{(1-x)^4} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Pokazali smo torej, da je $Sv = LUv$ za vektor $v = (1, x, x^2, x^3, \dots)$. Sedaj se nam postavlja vprašanje, če od tod že sledi $S = LU$. Če si izberemo $x = 0$, dobimo vektor $v_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$. Enakost $Sv_0 = LUv_0$ nam da enakost prvih stolpcev matrik S in LU . Sedaj pa iz vektorja v skonstruiramo še druge koordinatne vektorje in če $Sv_i = LUv_i$ velja za te vektorje, potem smemo sklepati, da istoležni stolpci matrik S in LU sovpadajo. Vektor $v = (0, 1, 0, 0, \dots)$ dobimo, če odvajamo vektor v po komponentah pri $x = 0$. Vpeljimo vektor $v_\Delta = (1, \Delta, \Delta^2, \Delta^3, \dots)$ in linearno kombinacijo v_Δ in v_0 :

$$S\left(\frac{v_\Delta - v_0}{\Delta}\right) = LU\left(\frac{v_\Delta - v_0}{\Delta}\right).$$

Pošljimo $\Delta \rightarrow 0$. Vidimo, da druga stolpa matrik S in LU sovpadata. Z uporabo višjih odvodov dobimo še ostale koordinatne vektorje, za katere podobno vidimo, da istoležni stolpci v S in LU sovpadajo. ■

INVERTIRANJE VSOTE PASCALOVE MATRIKE IN IDENTITETE

Pokazali smo že, kako izračunamo inverz spodnje trikotne Pascalove matrice L_n , zato se lotimo problema napovedanega v naslovu.

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 2 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 2 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & \frac{-2}{4} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & \frac{4}{8} & 0 & \frac{-4}{4} & \frac{1}{2} & \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{10}{8} & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Slika 8: Vsota 6×6 spodnje trikotne Pascalove matrice in identitete ter njen inverz

Če podrobno pogledamo na desno matrico na sliki 8 vidimo, da je podobne oblike kot Pascalove matrice, le da ima poddiagonale pomnožene z neko konstanto, natančneje, Pascalova matrica se

pojavlja ravno v števcih. Glavna diagonala je pomnožena z $\frac{1}{2}$, prva poddiagonala z $\frac{-1}{4}$, naslednja z 0 in tako dalje. Opazimo torej, da inverz dobimo tako, da poddiagonale Pascalove matrike pomnožimo s konstantami:

$$\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{-1}{4}.$$

Izkaže se, da so te konstante enake vrednostim Dirichletove funkcije eta izračunane na negativnih celih številih oziroma splošneje, enake so vrednostim nekih polilogaritemskih funkcij v točki -1 . Tudi v splošnejših linearnih kombinacijah Pascalove matrike in identitete se pojavljajo polilogaritemske funkcije.

RAČUNANJE INVERZA SPLOŠNE PASCALOVE MATRIKE

Naj bo a poljubno kompleksno število. Z $L(a)$ označimo splošno Pascalovo matriko (gre za spodnje trikotno matriko). Njen (m, n) -ti element je enak

$$L_{mn}(a) = \binom{m}{n} a^{m-n}.$$

Tu je $0 \leq n \leq m < \infty$. Matrika $L(a)$ ima obliko neskončne spodnje trikotne matrike (slika 9):

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Slika 9: $L(a)$

Če matriko $L(a)$ pomnožimo z vektorjem $\vec{x} = (1, x, x^2, x^3, \dots)^T$ dobimo vektor, katerega komponente so potence $(x + a)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x + a \\ (x + a)^2 \\ (x + a)^3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Vpeljimo oznako $y = x + a$ in $L(a)\vec{x} = \vec{y}$. Izračunajmo sedaj $L(b)\vec{y}$ in dobimo:

$$L(b)\vec{y} = (1, b + y, (b + y)^2, \dots)^T.$$

Vidimo torej, da velja formula (brez dokaza):

$$L(a)L(b)\vec{x} = L(a + b)\vec{x} = \overrightarrow{(x + a + b)}.$$

Poglejmo si sedaj skrajšane podmatrike $L_N(a)$ matrike $L(a)$, namesto vektorja \vec{x} pa vzemimo Vandermondovo matriko reda $(N + 1) \times (N + 1)$ (slika 10):

Če zgornjo enačbo preoblikujemo, dobimo

$$L_N(a)L_N(b)X_N = L_N(a + b)X_N.$$

$$X_n = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_N^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_N^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^N & x_1^N & x_2^N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}.$$

Slika 10: Vandermondova matrika

V produktu splošne Pascalove matrike in Vandermondove matrike imajo vsi stolpci obliko podobno stolpcu, ki ga dobimo kot produkt matrike $L(a)$ in vektorja \vec{x} . Če za elemente x_N matrike X_N vzamemo različna števila, je matrika X_N obrnljiva, potence x_N pa potem res tvorijo bazo prostora \mathbb{R}^{N+1} . Potem velja naslednja enakost:

$$L(a)L(b) = L(a + b).$$

To povzemimo v naslednjem izreku:

IZREK 1: *Pravilo za množenje splošnih Pascalovih matrik je*

$$L(a)L(b) = L(a + b).$$

Dokaz: Zgoraj smo pokazali, da to drži za vsako končno matriko, zato drži tudi za neskončne spodnje trikotne matrike. ■

Posledica 1: *Za vsako celo število k , je k -ta potenca splošne Pascalove matrike enaka $L(a)^k = L(ka)$ in je spet Pascalova matrika.*

Posledica 2: *Inverz splošne Pascalove matrike je spet Pascalova matrika. Velja:*

$$L(a)^{-1} = L(-a).$$

Dokaz: V prvem primeru uporabimo le zgornji izrek, druga posledica pa sledi iz prve. ■

Posvetimo se sedaj našemu glavnemu cilju, to je iskanju inverza matrike $I + L$. V ta namen izračunajmo $[I - \lambda L(a)]^{-1}$. Pojavi se vprašanje, kako to naredimo, matrika je namreč neskončna in neomejena. Ker pa je spodnje trikotna lahko izračunamo inverz tako, da izračunamo inverz vsake končne podmatrike te oblike (te so omejene) in za dovolj majhen λ izrazimo inverz končne matrike kot geometrijsko vrsto matrik (ta konvergira, saj smo λ izbrali primerno majhen).

$$[I - \lambda L_N(a)]^{-1} = I + \lambda L_N(a) + \lambda^2 L_N(a)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_N(a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_N(ka).$$

Označimo s $Q_N(a, \lambda) = [I - \lambda L_N(a)]^{-1}$, s $Q(a, \lambda)$ pa neskončno matriko, katere skrajšane podmatrike so

$$Q_0(a, \lambda), Q_1(a, \lambda), Q_2(a, \lambda), \dots$$

Sedaj lahko izračunamo elemente pod in na diagonali ($m \geq n$) matrike $Q(a, \lambda)$:

$$Q_{mn}(a, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_{mn}(a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_{mn}(ka) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \binom{m}{n} (ka)^{m-n} =$$

$$= \binom{m}{n} a^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k k^{m-n} = L_{mn}(a) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{m-n} \lambda^k \right).$$

$\sum_{k=0}^{\infty} k^{m-n} \lambda^k$ je, kot bomo videli, polilogaritmična funkcija Li_{n-m} za $m - n > 0$. V primeru ko je $m - n = 0$ gre za običajno geometrijsko vrsto z vsoto $\frac{1}{1-\lambda} = \frac{Li_0(\lambda)}{\lambda}$. Elemente matrike $Q(a, \lambda)$ sedaj lahko zapišemo kot $Q_{nn}(a, \lambda) = L_{nn}(a) \frac{Li_0(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$ na glavni diagonali in kot $Q_{mn}(a, \lambda) = L_{mn}(a) Li_{n-m}(\lambda)$ sicer. Ta predpis je dobro definiran za vse $\lambda \neq 1$. $Q(a, \lambda)$ je torej inverz $I - \lambda L(a)$ za vse $\lambda \neq 1$. Povzemimo to v izreku.

IZREK 2: *Inverzna matrika matrike $I - \lambda L(a)$ je definirana za vsak $\lambda \neq 1$. Označimo jo s $Q(a, \lambda)$. Njeni elementi so $Q_{nn}(a, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}$ na glavni diagonali in $Q_{mn}(a, \lambda) = L_{mn}(a) Li_{n-m}(\lambda)$ za $m > n$, kjer je Li_{n-m} polilogaritmična funkcija.*

Skica dokaza:

Za $\forall N < \infty$ končna podmatrika $Q_N(a, \lambda)$ matrike $Q(a, \lambda)$ zadošča enakosti za vsak λ dovolj majhen.

$$(4) \quad I = Q_N(a, \lambda)(I - \lambda L_N(a)) = (I - \lambda L_N(a))Q_N(a, \lambda)$$

To vidimo iz naslednjega razvoja vrst:

$$(5) \quad (I - \lambda L_N(a))Q_N(a, \lambda) = (I - \lambda L_N(a))(I + \lambda L_N(a) + \lambda^2 L_N(a)^2 + \dots)$$

Vidimo, da se v enačbi 5 vsi členi razen I odštejejo. Ker to velja za vse končne podmatrike, je res tudi za neskončne matrike:

$$(6) \quad I = Q(a, \lambda)(I - \lambda L(a)) = (I - \lambda L(a))Q(a, \lambda).$$

S tem smo pokazali, da to velja za vsak dovolj majhen λ , za katerega vrste konvergirajo. Pokazati bi bilo potrebno še, da to velja za vsak $\lambda \neq 1$. Za ta del dokaza pa je potrebno znanje iz analitičnega razširjanja vrst, ki pa ga žal še nimamo, zato bomo ta del dokaza spustili. ■

V prvi enačbi (4) sta oba faktorja definirana za $\lambda \neq 1$, torej velja spodnja enakost (6) za vsak $\lambda \neq 1$. Od tod pa sledi kakšen je inverz matrike iz naslova.

Posledica: *Inverz neskončne matrike $I + L$ je $Q(1, -1)$. Elementi inverza so*

$$Q_{nn}(1, -1) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

na glavni diagonali in

$$Q_{mn}(1, -1) = \binom{m}{n} Li_{n-m}(-1)$$

za $m > n$.

Dokaz: Uporabimo izrek 2. Vstavimo $a = 1$, $\lambda = -1$ ■

Inverz je torej enak originalni Pascalovi matriki, katere glavno diagonalo in poddiagonale pomnožimo s konstantami $\frac{Li_0(-1)}{-1}$, $Li_{-1}(-1)$, $Li_{-2}(-1)$, ...

POLILOGARITMIČNE FUNKCIJE

Polilogaritmi so definirani kot analitične razšitve določenih vrst in jih lahko zapišemo kot

$$Li_m(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k^m}, m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

V prejšnjem razdelku smo videli, da je to ravno vrsta, ki se pojavlja v inverznih matrikah. Za $m < 0$ dobimo

$$Li_{-m}(\lambda) = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^{m+1}} \sum_{n=1}^m \left\langle \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\rangle \lambda^{m-n},$$

kjer so $\left\langle \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\rangle$ Eulerjeva števila podana z

$$\left\langle \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\rangle = \sum_{j=0}^n \binom{m+1}{n} (n-j)^m.$$

Primer Eulerjevega števila:

$$\left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \sum_{j=0}^2 \binom{3+1}{2} (2-j)^3 = \binom{4}{2} 2^3 + \binom{4}{2} (2-1)^3 + \binom{4}{2} (2-2)^3 = 54.$$

PRIMER UPORABE

Pascalove matrike se uporabljajo na različnih področjih matematike, zato si sedaj oglejmo primer uporabe v verjetnosti.

Opazujemo zaporedje n metov nepravičnega kovanca. Če je pri vsakem metu verjetnost, da pade glava, enaka p , je posledično verjetnost, da pade cifra $1-p$. Verjetnost kateregakoli dogodka v zaporedju n metov je potem enaka:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i,$$

kjer so a_i števila, ki so odvisna od dogodka, $0 \leq a_i \leq \binom{n}{i}$. To lahko pomnožimo in dobimo polinom s celimi koeficienti stopnje n v neznaniki p . Pojavi se vprašanje, kdaj je polinom v p -ju s celimi koeficienti formula za verjetnost nekega dogodka. Oglejmo si še enkrat formulo za verjetnost nekega dogodka in razvijmo $(1-p)^i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i &= \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-p)^{i-j} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i p^{n-j} a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n p^{n-j} a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j}. \end{aligned}$$

Označimo sedaj z:

$$b_j = \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} (-1)^{i-j}.$$

Zgornje prepišemo:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} (1-p)^i = \sum_{j=0}^n b_j p^{n-j}.$$

Izkaže se, da povezava med a_i -ji in b_i -ji vsebuje spodnje trikotno Pascalovo matriko reda $(n+1) \times (n+1)$. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} vektorja $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Po definiciji b_j velja

LITERATURA

- [1] Lidia Aceto, Donato Trigiane, *The Matrices of Pascal and Other Greats*, The American Mathematical Monthly **108**(2001), 232-245.
- [2] Alan Edelman, Gilbert Strang, *Pascal Matrices*, The American Mathematical Monthly **111** (2004), 189-197.
- [3] Rita Aggarwala, Michael P. Lamoureux, *Inverting the Pascal Matrix Plus One*, The American Mathematical Monthly **109** (2002), 371-377.
- [4] Gregory S. Call, Daniel J. Velleman, *Pascal's Matrices*, The American Mathematical Monthly **100** (1993), 372-376.
- [5] E. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.