Fakulteta za matematiko in fiziko

Jadranska 19

1000 Ljubljana

Seminarska naloga pri predmetu Seminar 2

Pickov izrek

Mentor: Milan Hladnik

Avtor: Alenka Trpin

Ljubljana: 14.12. 2009

KAZALO

1. Uvod

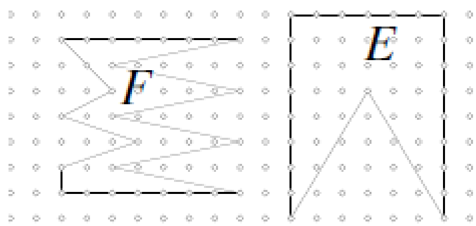
V nalogi bom predstavila, kako izračunati ploščino mrežnih likov s pomočjo Pickove formule. Dokazala bom Pickov izrek ter navedla nekaj primerov uporabe.

Georg Alexander Pick se je rodil v judovski družini na Dunaju, 10.8.1859. Študiral je na Dunajski univerzi, pri profesorju Levu Koenigsbergerju. Kasneje je poučeval na Univerzi v Pragi, kjer se je srečal z Albertom Einsteinom. Bila sta zelo dobra prijatelja (skupaj sta igrala violino).
Ko se je začela vojna 13. julija 1945, je bil pripeljan v kocentracijsko taborišče Theresienstadt, kjer je pri 82 letih tudi umrl.

Pickova formula je dobila pozornost šele leta 1969 v Steinhausovi knjigi Mathematical Snapshots. Kasneje so jo uporabljali v zvezi z Eulerjevo karakteristiko, Weierstrassovo zeta funkcijo, veliko se uporablja kot ideja tudi v kombinatoriki, algebraični geometriji, kompleksni analizi.

2. Pickova formula

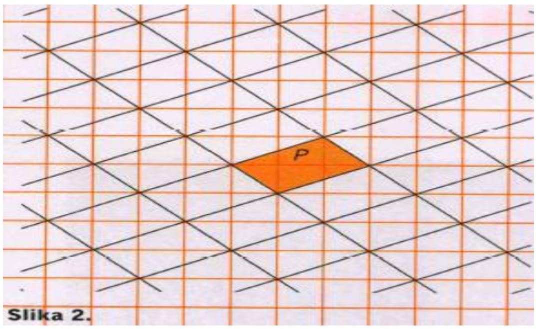
Verjetno ste se že srečali s problemom, kako izračunati ploščino poljubnega lika narisanega na mreži iz kvadratkov ploščine 1? Primer na sliki 1:

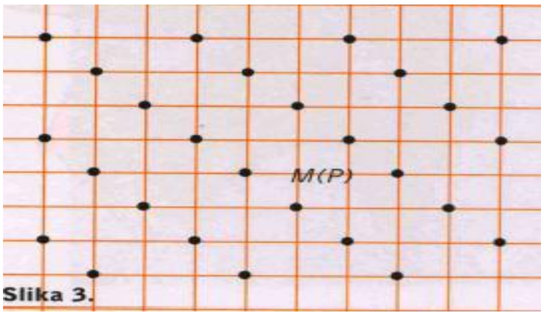


Slika 1:

Najenostavneje je lik razrezati na trikotnike in kvadrate, izračunati njihovo ploščino in vse skupaj sešteti. S formulo, ki jo bom predstavila pa lahko ploščino lika izračunamo hitreje.
Ploščina je enaka: $p = r/2 + k - 1$, kjer je r število točk na mreži, ki leže na robu lika, k pa število točk na mreži v notranjosti večkotnika.
Če se vrnemo na sliko1, za E dobimo: $k = 22$, $r = 24$ torej $p = 22 + 12 - 1 = 33$ in F: $k = 9$, $r = 26$ in $p = 9 + 13 - 1 = 21$.
To enakost je Pick odkril leta 1899 in se zato tudi imenuje Pickova formula.
Ta formula deluje, če je večkotnik preprost – to je, dokler ne seka sam sebe.
Torej, če povzamemo zgoraj povedano v izrek:

PICKOV IZREK: Naj bo P preprost večkotnik (nesekajoč, brez lukenj) na mreži, ki vsebuje r robnih in k notranjih točk na mreži. Potem ploščino lika lahko zapišemo kot: $p = r/2 + k - 1$.
Dokaz:
Dokazovali bomo postopoma s pomočjo enostavnih paralelogramov in večkotnikov. Najprej na obravnavano kvadratno mrežo položimo ravnino $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tako da bodo točke s celoštevilskimi koordinatami pokrile vsa križišča mreže. Tedaj tvorijo križišča množico celih števil $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Naj bo sedaj P paralelogram, ki ima oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Z njim določimo novo mrežo, sestavljeno iz samih skladnih paralelogramov. Te dobimo z vzporednimi premiki paralelograma P (slika 2).





Označimo z M(P) množico vseh križišč te nove mreže (slika3) in trdimo (brez dokaza):
Trditev 1: Množica M(P) je vsebovana v $\mathbb{Z}^2$.
Trditev 2: Tri različne točke iz $\mathbb{Z}^2$ so oglišča treh različnih paralelogramov P_1, P_2, P_3. Vsi trije določajo mreže z istimi križišči, torej $M(P_1) = M(P_2) = M(P_3)$.

Naj ima paralelogram eno oglišče v točki O = (0,0), dve drugi pa v točkah A in B. Uporabimo trditev 2 in vidimo da se celoštevilski večkratniki vektorja $\overrightarrow{OA}$ končajo v tistih točkah množice M(P), ki ležijo na nosilki daljice OA. Podobno velja tudi za vektor $\overrightarrow{OB}$. Od tod dobimo, da konci vektorjev oblike

- $m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, kjer sta n, m $\in \mathbb{Z}$ (1*)

tvorijo množico M(P).
Definirajmo še pojem enostaven lik:
Paralelogram oziroma trikotnik je *enostaven* (z oglišči v $\mathbb{Z}^2$), če razen oglišč ne vsebuje nobene točke iz $\mathbb{Z}^2$.

Navedemo še dve trditvi brez dokaza:
Trditev 3: Če je trikotnik z oglišči A, B, C $\in \mathbb{Z}^2$ enostaven, so vsi paralelogrami z oglišči v točkah A, B, C enostavni.
Trditev 4: Paralelogram P z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je enostaven natanko takrat, ko množica M(P) sovpada z $\mathbb{Z}^2$.

Spomnimo se, da lahko ploščino trikotnika z oglišči $A = (a_1,a_2)$, $B = (b_1,b_2)$ in $C = (c_1,c_2)$ izračunamo kot:

- $2p = |a_1 (b_2 - c_2) + b_1 (c_2 - a_2) + c_1 (a_2 - b_2)|$. (2*)

Torej če so A, B, C $\in \mathbb{Z}^2$, je na desni strani enakosti celo število in vidimo, da ploščina takega trikotnika meri vsaj ½.

Izrek 1: Trikotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ ima ploščino enako ½ natanko tedaj, ko je enostaven.
Dokaz: (→)
Recimo, da trikotnik z oglišči A, B, C $\in \mathbb{Z}^2$ ni enostaven. Potem vsebuje vsaj eno točko D $\in \mathbb{Z}^2$, ki ni njegovo oglišče. Če D leži v notranjosti trikotnika, ta razpade na trikotnike ABD, BCD in CAD, zato je njegova ploščina vsaj 3/2. Če D leži na stranici trikotnika ABC, le ta razpade na trikotnika ABD in CDB, in je njegova ploščina vsaj 1. Torej je trikotnik s ploščino ½ enostaven.
(←)
Naj bo trikotnik z oglišči A, B, C $\in \mathbb{Z}^2$ enostaven in P paralelogram z oglišči A, B, C, D. Iz trditve 3 sledi, da je tudi P enostaven, po trditvi 4 pa velja M(P) $\in \mathbb{Z}^2$.
Brez škode za splošnost smemo privzeti, da oglišče C leži v izhodišču O = (0,0). Ker velja (1*), obstajata taki celi števili m, n, da velja:

- $m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$,

kjer je S = (1,0). Če vzamemo A = (a_1,a_2) in B = (b_1,b_2) dobimo:

- $ma_1 + nb_1 = 1$
- $ma_2 + nb_2 = 0$

Iz tega sledi:

- $m(a_1 b_2 – a_2 b_1) = b_2$
- $n(a_1 b_2 – a_2 b_1) = -a_2$

Ti dve formuli povesta, da celo število $d = a_1 b_2 – a_2 b_1$ deli b_2 in a_2. Če namesto točke S vzamemo točko T = (0,1), na enak način dobimo, da d deli tudi a_1 in b_1. Potem pa je d deljiv tudi z d^2 in zato je enak -1, 0 ali 1. Ploščina trikotnika ABC je različna od nič in po formuli (2*) je enaka:
$p = ½ | a_1 b_2 + b_1 a_2 | = | d |/2$.
Torej enaka ½ kar smo hoteli dokazati.

Sedaj dokažimo Pickovo formulo:
Naj bo r točk iz $\mathbb{Z}^2$ na robu n-kotnika P z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ (velja $r \geq n$), k pa v njegovi notranjosti. Razparcelirajmo večkotnik P na trikotnike z oglišči v vseh r + k točkah, tako da poljubna dva trikotnika bodisi nimata nobene skupne točke ali pa imata skupno le oglišče ali le stranico.
Vsak trikotnik na koncu razkosanja ima samo oglišča v $\mathbb{Z}^2$, torej je enostaven. Po izreku 1 ima ploščino enako ½, zato je ološčina n-kotnika P enaka p(P) = m/2, ker je m število trikotnikov razkosanja.Če uspemo dokazati, da je m = r + 2k – 2, bomo dokazali Pickovo formulo.
Vsota vseh notranjih kotov trikotnikov razparceliranja je enaka m180°. Enako vsoto dobimo, če seštejemo notranje kote n-kotnika P (vemo, da je to (n - 2)180°), polne kote ob točkah iz $\mathbb{Z}^2$ v P (teh je k) in iztegnjene kote ob vseh točkah na robu P, ki niso oglišča P-ja (teh pa je r – n). Dobimo:

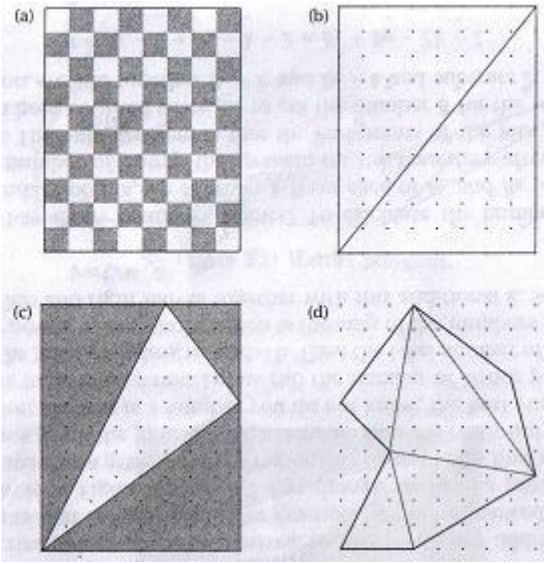
- m180° = (n - 2)180° + k360° + (r - n)180° ,

od koder sledi m = r + 2k – 2 in od tod p(P) = m/2 = r + 2k – 2 .

■

Lahko dokažemo drugače:
Pickovo formulo lahko zapišemo tudi za sestavljene večkotnike: naj velja za prvi večkotnik P_1, da ima r_1 število točk na mreži, ki leže na robu lika (robne točke) in k_1 število točk na mreži v notranjosti lika (notranje točke), za drugega P_2 pa označimo r_2 in k_2. Oglejmo si celotni večkotnik P (sestavljen iz lika 1 in 2). Naj bo število stičiščnih točk s (tega števila ne poznamo in kadar števila ne poznamo mu damo ime oziroma indeks) – te točke so notranje za P. Število notranjih točk je : $k = k_1 + k_2 + s$
Število robnih točk celotnega lika pa : $r = r_1 - s + r_2 - s – 2 = r_1 + r_2 - 2s - 2$
(odštejemo s od prvega in drugega lika, da dobimo točke po leplenju; stičiščne točke na koncu lika smo šteli dvakrat, zato odštejemo 2).
Zapišemo formulo za celoten večkotnik:
$$r/2 + k – 1 = (r_1 + r_2 – 2s – 2)/2 + k_1 + k_2 + s – 1 =$$
$$= (r_1/2 + k_1 – 1) + (r_2/2 + k_2 – 1)$$
Torej formula velja, tudi če dva večkotnika združimo (torej smo dokazali aditivnost).
Sedaj dokažimo Pickovo formulo:
Začnemo z enotskim kvadratom: ima 4 točke in vse so robne, nima notranjih točk (to je r = 4, k= 0) zato je ploščina enaka p = 2 – 1= 1. Če imamo pravokotnik, ga razrežemo na enotske kvadratke (slika 4a) in uporabimo aditivnost. Vidimo, da Pickov izrek velja za pravokotnike. Zaradi aditivnosti lahko sklepamo, da izrek velja za polovico pravokotnika (slika 4b). Trikotnika imata enako število robnih in notranjih točk, torej imata enaki ploščini in izrek velja za trikotnika. Podobno sklepamo tudi za pravokotne trikotnike (slika 4c). Od tod sledi, da velja za večkotnike, ki jih razrežemo na trikotnike (slika 4d). Pickova formula je tako dokazana.

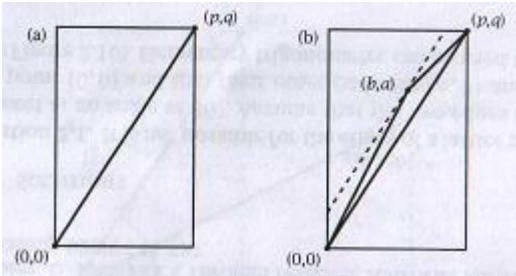
Slika 4:



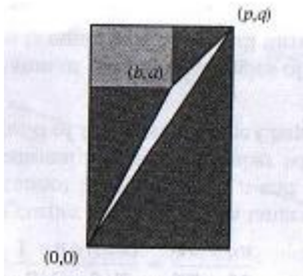
3. Uporaba Pickove formule

Primer 1: V aritmetiki
(1*) lahko povemo tudi drugače:
Naj bosta p in q tuji, celi števili (števili p, q sta si tuji, če največji skupni delitelj D(p,q) = 1).
Trditev: Če je D(p,q) največji skupni delitelj celih števil p in q, obstajata taki celi števili a in b, da velja ap + bq = D(p,q).
(Trditev lahko dokažemo s pomočjo Evklidovega algoritma).
V našem primeru je D(p,q) = 1, torej imamo enačbo ap + bq = 1. Iščemo rešitve te enačbe in jih gledamo kot par (a,b).
Kako dobimo ustrezne pare (a,b) s pomočjo Pickovega izreka?
Naj bosta p in q brez skupnih faktorjev. Na celoštevilski mreži narišemo pravokotnik in povežemo točki O = (0,0) in A = (p,q) (slika 7a).
Ker sta si p in q tuji, ni nobenih mrežnih točk na daljici OA, razen O in A. Nato narišemo levo zgoraj vporednico skozi prvo mrežno točko (delamo vzporednice k daljici OA, proti levemu zgornjemu kotu, dokler ne zadanemo ob prvo mrežno točko). Imenujmo to mrežno točko B = (b,a) (slika7b). Trikotnik OAB v svoji notranjosti in robu ne vsebuje nobene mrežne točke, razen teh treh. Pickova formula nam da: 0 + 3/2 – 1 = ½ .
Sledilo bo ap – bq = 1 natanko tedaj, ko je ploščina trikotnika OAB enaka (ap – bq)/2.
Torej: od ploščine velikega pravokotnika (slika 7c): p(1) = pq odštejemo ploščino vseh treh malih trikotnikov: p(2) = ab/2, p(3) = (p - b) (q - a)/2 in ploščino malega pravokotnika p(4) = b(q – a).
Dobimo: p(OAB) = pq – pq/2 – ab/2 - (p - b) (q - a)/2 - b(q – a) = $\frac{ap-bq}{2}$

Slika 7:



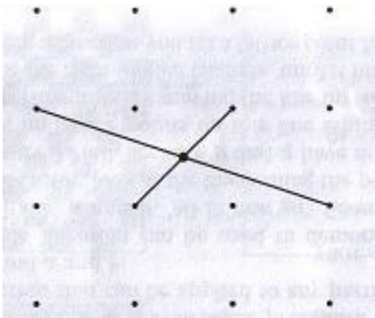
Slika 7c:



Primer 2:

Definirajmo pojem *polovične točke*: to je točka, ki ima koordinate oblike (m/2,n/2), kjer sta m, n ∈ $\mathbb{Z}$ (padajoča zaporedje točk, ko gresta m, n v ∞). Vsaka polovpčna točka je reprezentirana kot vmesna točka dveh sekajočih se daljic, ki imata začetne in končne točke na mreži (slika 8). Predpostavimo, da ima večkotnik znotraj polovično točko. Ali lahko zapišeš plovoično točko kot vmesno točko dveh mrežnih točk, ki sta na večkotniku in ležita na mreži?

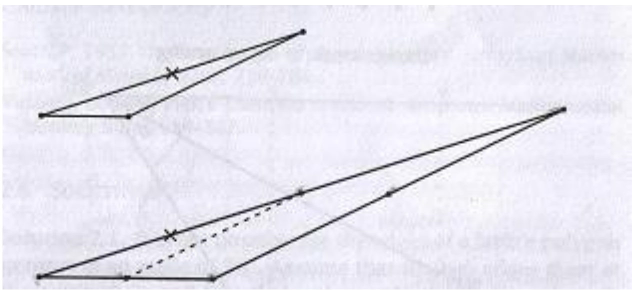
Slika 8:



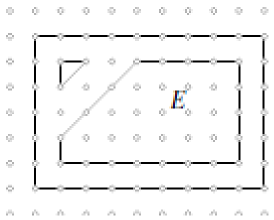
Začnemo v polovični točki v notranjosti večkotnika. Če se da, najprej večkotnik razrežemo na manjše večkotnike - to delamo dokler gre. Dobimo trikotnike (v notranjosti nimajo nobene mrežne točke), kar pomeni, da je sestavljen le iz treh mrežnih točk (oglišča). Radi bi pokazali, da je polovična točka ena izmed teh treh oziroma, da trikotnik ne vsebuje polovične točke na robu.

Imamo trikotnik in po Pickovi formuli velja p = 3/2 – 1 = ½. Recimo, da trikotnik povečamo (oziroma raztegnemo - s pomočjo vektorskega zapisa (slika 9)) za faktor 2 (točke so še vedno na mreži). Nov trikotnik vsebuje 6 mrežnih točk na robu - oglišča in robne. Ploščina novega trikotnika je: p_1 = 4p = 2. Ampak Pickova formula za nov trikotnik pa nam da 6/2 – 1 = 2, torej so te točke edine možne (če bi bila še polovična na trikotniku, bi po formuli veljalo 7/2 – 1).

Slika 9:



Primer 3:
Pickova formula velja tudi za večkotnike, ki imajo luknje (slika 10):
Izrek 2:
Večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ naj ima L večkotniških lukenj, ki *se ne dotikajo* in imajo oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Če je r točk (iz $\mathbb{Z}^2$) na robu preluknjanega večkotnika, k pa v njegovi notranjosti, meri njegova ploščina:
p = r/2 + k + L -1.

Slika 10: 

p = 52/2 + 3 + 2 - 1= 30

Dokaz: Označimo večkotniške luknje z $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_l$, nepreluknjan večkotnik pa z V_0. Naj $r_l \in \mathbb{Z}^2$ točk leži na robu večkotnika V_i ($i = 1, .., l$), k_i pa v njegovi notranjosti. Preštejemo točke na robu preluknjanega večkotnika: $r = r_0 + r_1 + \ldots + r_l$ in v notranjosti nepreluknjanega V_0:
$k_0 = k + (r_1 + k_1) + \ldots + (r_l + k_l)$
Po Pickovi formuli je ploščina V_i enaka $p_i = r_i/2 + k_i - 1$, zato ploščina preluknjanega večkotnika meri:

$$
\begin{aligned}
p = p_0 - (p_1 + \ldots + p_l) &= r_0/2 + k_0 - 1 - (r_1/2 + \ldots + r_l/2 + k_1 + \ldots + k_l) + l = \\
&= r_0/2 + k + (r_1 + \ldots + r_l) + (k_1 + \ldots + k_l) - (r_1 + \ldots + r_l)/2 - (k_1 + \ldots + k_l) + l - 1 \\
&= (r_0 + r_1 + \ldots + r_l)/2 + k + l - 1 \\
&= r/2 + k + l - 1
\end{aligned}
$$

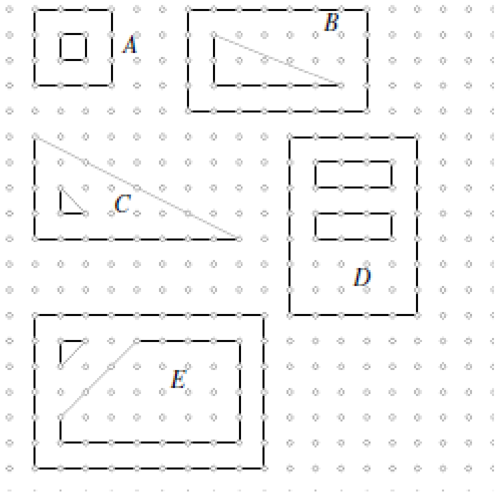
■

4. Pickova formula v višjih dimenzijah

Oglejmo si primer v tridimenzionalnem prostoru: imamo mrežo, ki jo položimo v ravnino $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tako da bodo točke s celoštevilskimi koordinatami pokrile vsa križišča mreže. Tedaj tvorijo križišča množico celih števil $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zanima nas, ali lahko poiščemo formulo za volumen tridimenzionalnega večkotnika, ki bi ga opisali z številom robnih, notranjih točk in morda še s številom ploskev. Oglejmo si primer tetraedra, ki je omejen s točkami (0,0,k) - na neki višini $k \in \mathbb{Z}$; (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) - na ravnini xy. Opazimo, da je V = k/6, problem pa je, da se k spreminja in dobimo različne prostornine (pri istem številu robnih točk).

Vendar pa velja (za telesa brez lukenj):
Označimo celotno mrežo z M. Naj bo M_n, $n \in \mathbb{Z}$ mreža vseh točk oblike x/n, kjer je $x \in M$. Na primer $M_2 = \{ (a/2, b/2, c/2);\ a,b,c \in \mathbb{Z} \}$ - glej primer 2.
Naj bo sedaj P telo z oglišči na mreži z $R(R_n)$ notranjih mrežnih točk, $K(K_n)$ pa mrežne na ploskvah $M(M_n)$. Volumen je enak:
$2(n - 1)\, n\, (n + 1)\, V(P) = 2(R_n - nR) - (K_n - nK)$.
Dokaz je težak. Upoštevati je treba tudi, kako je telo poravnano oziroma nagnjeno. Upoštevati pa je treba tudi Eulerjevo karakteristiko (saj je topološka invarianta – ohranja se s homeomorfizmi).

Še nekaj primerov:



	I	B	$\mathcal{A}$
A	0	16	8
B	8	30	23
C	6	19	15.5
D	8	40	29
E	3	52	30

I označuje mrežne notranje točke, *B* robne točke in $\mathcal{A}$ ploščino.

5. Zaključek

V seminarski nalogi sem predstavila Pickovo formulo in Pickov izrek. S Pickovo formulo najhitreje in najlažje izračunamo ploščino mrežnega lika.

6. Viri in literatura

- Keith Ball. Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations, Princeton University Press (2003), 25-40.
- Paul Scott. The fascination of elementary. American Mathematical Monthly 92(8), (1987), 759-768.
- Dale Varberg. Picks Theorem revisited. American Mathematical Monthly 92(8) (1985), 584-587.
- Presek.Lavič Boris. Večkotniki na kvadratni mreži. Presek, letnik 32 (2004/2005), številka 2-3.
- www.math.jhu.edu/~wright/Cantor_Pick_phi