O NEKI ZVEZI MED RIEMANNOVO FUNKCIJO ZETA IN PRAŠTEVILI

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 40A30, 40B05, 11A25

V članku se ukvarjamo s posplošitvijo neke relacije med praštevili in funkcijo ζ. V nadaljevanju je pokazano, kako priti do vsote $\sum_p f(p^{-s})$ s pomocjo funkcije ζ, pri čemer je f analitična funkcija.

ABOUT SOME RELATION BETWEEN RIEMANN ZETA FUNCTION AND PRIMES

The article discusses a generalization of some relation between ζ and primes. It is shown below, how to get the sum $\sum_p f(p^{-s})$ in terms of ζ, where f is analytic function.

1 Uvod

Riemannova funkcija zeta je definirana kot funkcijska vrsta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

kompleksne spremenljivke s. Kot realna funkcija je bila obravnavana že s strani **Leonharda Eulerja** (1707-1783). Njemu gre tudi pripisati odkritje neskončnega praštevilskega produkta in zveze s funkcijo ζ

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{2}$$

Vendar jo je šele **Bernhard Riemann** (1826-1866) v članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, objavljenem leta 1859, obravnaval kot funkcijo kompleksne spremenljivke, kjer jo je tudi analitično razširil na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ker pa bomo v nadaljevanju uporabljali enake oznake kakor Riemann na funkciji (1), povejmo kaj o številu s.

Definicija 1. Kompleksno število s naj bo oblike $\sigma + it$, pri čemer je $\sigma > 1$.

Za taka števila s je vrsta (1) absolutno konvergentna, prav tako velja enakost (2).

Eulerjev produkt (2) nam da slutiti, kako je funkcija zeta povezana s praštevili. In res, na njem sloni *praštevilski izrek*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

kjer $\pi(x)$ označuje število praštevil, ki ne presegajo x. Ob študiju funkcije zeta in praštevilskega izreka pogosto naletimo na zvezo

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \log\zeta(s), \tag{3}$$

ki se pojavlja v dokazu **J. S. Hadamarda** (1865-1963) in **C. J. G. N. de la Vallée Poussina** (1866-1962), da razširjena funkcija $\zeta(s)$ nima ničel na premici $\sigma = 1$.

Preko (3) se da izpeljati

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log\zeta(sn), \tag{4}$$

kjer se vrsta na levi imenuje *praštevilska funkcija zeta*, $\mu(n)$ pa predstavlja *Möbiusovo funkcijo*.

V članku bomo pokazali, da se da rezultat (3) in s tem tudi (4) posplošiti na primer sumacije $f(p^{-sn})/n$ oz. $f(p^{-s})$, kjer je $f(z)$ analitična funkcija.

2 Prva posplošitev

Opravka bomo imeli z analitično funkcijo $f(z)$. Povejmo kaj o njenem razvoju v potenčno vrsto.

Definicija 2. Funkcija $f(z)$ naj bo definirana s potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

ki ima konvergenčni radij $R > 2^{-\sigma}$.

Izrek 1. *Za* $|z| \le 2^{-\sigma}$ *velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \log(1 - z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n}. \tag{5}$$

Dokaz. Dobro znana je potenčna vrsta

$$-\log(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad (|z|<1).$$

Radi bi pokazali, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty}-a_n\log(1-z^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_n\frac{z^{mn}}{m}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{z^{mn}}{m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(z^n)}{n}$$

za $|z|\leq 2^{-\sigma}$. Prvi in tretji enačaj sledita iz definicije dvakratnih vrst in definicije (2). Preverimo konvergenco prve vrste

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||\log(1-z^n)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n||\log|1-z^n||+|a_n||\arg(1-z^n)|\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}4|a_n||z|^n.\end{aligned}$$

Majoranta konvergira po definiciji (2), saj je $|z|<R$. Pri ocenjevanju smo uporabili neenakosti $|\log|1-z^n||\leq 2|z|^n$ in $|\arg(1-z^n)|\leq 2|z|^n$. Prva sledi iz $1-|z|^n\leq|1-z^n|\leq 1+|z|^n$ in

$$|\log(1-|z|)|\leq 2|z| \quad \text{za} \quad |z|<1/2. \tag{6}$$

Prav tako velja za $|z|<1/2$ neenakost $|\arg(1-z^n)|\leq\arcsin|z|^n\leq 2|z|^n$. Pokazati moramo veljavnost drugega enačaja. Uporabimo *Cauchyjev izrek o dvakratnih vrstah*, torej preverimo konvergenco druge vrste, pri kateri zamenjamo člene z absolutnimi vrednostmi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_n|\frac{|z|^{mn}}{m}=\sum_{n=1}^{\infty}-|a_n|\log(1-|z|^n).$$

Vrsta konvergira po zgoraj dokazanem. Enakost (5) je s tem dokazana. ■

Sedaj smo pripravljeni na posplošitev izraza (3).

Izrek 2. *Velja*

$$\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\log\zeta(sn).$$

Dokaz. Po izreku (1) lahko pišemo

$$\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n}=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\log\frac{1}{1-p^{-sn}}.$$

Pokažimo, da desna dvakratna vrsta izpolnjuje pogoje *Cauchyjevega izreka*. Seštevali bomo po stolpcih in pri tem uporabili logaritemsko obliko izraza (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p} a_n \log \frac{1}{1-p^{-sn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn).$$

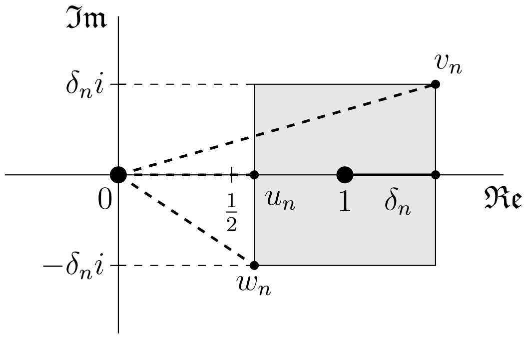
Najprej se prepričajmo, da je tako dobljena vrsta konvergentna. Ocenimo realno in imaginarno komponento funkcije $\zeta(sn)$. Funkcija se zapiše v kompleksnem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{sn}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(t\log k)}{k^{\sigma n}} - i\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(t\log k)}{k^{\sigma n}}.$$

Velja $1-(\zeta(\sigma n)-1) \leq \mathfrak{Re}\,\zeta(sn) \leq 1+(\zeta(\sigma n)-1)$ in $-(\zeta(\sigma n)-1) \leq \mathfrak{Im}\,\zeta(sn) \leq (\zeta(\sigma n)-1)$. Ker pa je $(\zeta(\sigma n)-1) \leq \delta_n$, pri čemer je

$$\delta_n = \frac{1}{2^{\sigma n}}\left(1+\frac{2}{1-2^{1-\sigma n}}\right),$$

velja $1-\delta_n \leq \mathfrak{Re}\,\zeta(sn) \leq 1+\delta_n$ in $-\delta_n \leq \mathfrak{Im}\,\zeta(sn) \leq \delta_n$ (slika 1).



Slika 1: Območje nahajanja vrednosti funkcije $\zeta(sn)$ za dovolj velik n.

Ker je zaporedje $\{\delta_n\}$ monotono padajoče, obstaja tak n_0, da za vsak $n > n_0$ velja $\delta_n < 1/2$. Za taka števila n velja $\log(1-\delta_n) = \log|u_n| \leq \log|\zeta(sn)| \leq \log|v_n| \leq \log(1+2\delta_n)$ in po neenakosti (6) $|\log|\zeta(sn)|| \leq 2\delta_n$. Prav tako $|\arg\,\zeta(sn)| \leq |\arg\,w_n| = \arctan(\delta_n/(1-\delta_n)) \leq 2\delta_n$. S tem dobimo

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n||\log\zeta(sn)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4|a_n|\delta_n.$$

Po definiciji (2) in *Cauchy-Hadamardovega* izreka sledi $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 2^{\sigma}$. Izračunamo še $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\delta_n} = 2^{-\sigma}$. Sledi $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\delta_n} < 1$ in s tem konvergenca zgornje desne vrste, torej preučevana vrsta konvergira. Preveriti moramo še konvergenco vrste z absolutnimi členi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}|a_n||\log(1-p^{-sn})| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}3|a_n|p^{-n\sigma} \le \sum_{n=1}^{\infty}3|a_n|\delta_n,$$

kar pa konvergira po zgoraj dokazanem. Trditev je tako dokazana. ■

Opomba. Za $f(z) = z$ dobimo že znano zvezo (3).

Dokaz sloni na definiciji (1). Vendar z majhno predpostavko lahko razširimo območje na $\sigma > 0$. Naj bo n_0 takšno naravno število, da bo veljalo $n_0\sigma \le 1$ in $(n_0+1)\sigma > 1$. Če velja $a_n = 0$ za vsak $n \le n_0$, se lahko brez večjih težav prepričamo, da izreka (1) in (2) še vedno veljata.

3 Druga posplošitev

Oglejmo si naslednji problem. V dokazu izreka (1) smo dokazali absolutno konvergenco dvakratne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m}. \tag{7}$$

Seštevali smo po vrsticah in stolpcih, vendar zaradi absolutne konvergence lahko v kateremkoli vrstnem redu. Poskusimo sešteti vrsto (7) tako, da ponovno dobimo potenčno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(z^n)}{n} = a_1 z + \frac{1}{2}(a_1+2a_2)\,z^2 + \frac{1}{3}(a_1+3a_3)\,z^3 + \frac{1}{4}(a_1+2a_2+4a_4)\,z^4 + \cdots$$

Opazimo, da lahko vrsto pišemo kompaktneje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(z^n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad \text{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n}\frac{d}{n}a_d.$$

Ta vrsta predstavlja neko novo funkcijo, recimo ji $F(z)$. Očitno vrsta konvergira za $|z| < 2^{-\sigma}$. Po izreku (2) lahko namesto dvakratne vrste krajše pišemo

$$\sum_{p} F(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log\zeta(sn).$$

V tem primeru imamo koeficiente a_n dane, računamo koeficiente A_n nove vrste, ki predstavlja funkcijo $F(z)$. Vendar bi se radi problema lotili z druge strani. Na primer, da imamo funkcijo $F(z)$ že zapisano v potenčni vrsti. Bi znali določiti koeficiente a_n? Odgovor se skriva v t.i. *Möbiusovi inverzni formuli*.

Definicija 3. Označimo s $\mu(n)$ funkcijo, definirano na območju naravnih števil (*aritmetična funkcija*), katere vrednosti so

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = \text{produkt } k \text{ različnih praštevil} \\ 0, & n \text{ deljiv s kvadratom kakšnega praštevila.} \end{cases}$$

Funkcijo $\mu(n)$ imenujemo *Möbiusova funkcija.*

Predno gremo na inverzno formulo, si poglejmo naslednjo lemo, ki podaja osnovno lastnost funkcije $\mu(n)$.

Lema 1. *Za vsako naravno število n velja*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

Dokaz. Za $n = 1$ je po definiciji (3) $\mu(1) = 1$. Naj bo $n > 1$. Po osnovnem izreku aritmetike lahko pišemo $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, kjer so $n_1, n_2, ..., n_k > 0$. K vsoti prispevajo samo tisti deljitelji, ki imajo v praštevilskem razcepu potence 1, torej sestavljajo množico deliteljev kombinacije brez ponavljanja množice $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Potem imamo

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} = (1-1)^k = 0.$$

■

Izrek 3. *Naj bosta $f(n)$ in $g(n)$ poljubni aritmetični funkciji. Potem velja*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pišemo lahko

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{q|d} f(q).$$

Za $q = n$ dobimo $\mu(1)f(n) = f(n)$. Naj bo sedaj $q < n$ in si poglejmo, kateri členi so pred $f(q)$. Imamo $d = lq$, kjer $l|n/q$. Potem je koeficient pred $f(q)$ enak

$$\sum_{l|n/q} \mu\left(\frac{n/q}{l}\right) = 0,$$

kar je res po lemi (1).
($\Leftarrow$) Dokažemo na podoben način, zato dokaz prepučamo bralcu. ■

Sedaj smo pripravljeni na naslednji izrek, ki posplošuje zvezo (4).

Izrek 4. *Funkcija $F(z)$ naj bo definirana s potenčno vrsto*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n,$$

ki ima konvergenčni radij $R > 2^{-\sigma}$. Potem velja

$$\sum_p F(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn), \quad \textit{kjer je} \quad a_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d.$$

Dokaz. Naj bosta $f(n) = na_n$ in $g(n) = nA_n$. Ker je $\sum_{d|n} f(d) = g(n)$ sledi iz izreka (3)

$$a_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d.$$

Pokazati moramo še konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ za $|z| \leq 2^{-\sigma}$. Ker je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \frac{d}{n} |A_d||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |A_n| \frac{|z|^{mn}}{m} < \infty$$

za $|z| \leq 2^{-\sigma}$ (ponovimo dokaz izreka (1)), konvergenca vrste sledi. ■

4 Primeri

Za $F(z) = z$ dobimo $a_n = \mu(n)/n$, kar potrjuje enakost (4).

Za $F(z) = -\log(1-z)$ dobimo $A_n = 1/n$ in po lemi (1)

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Dobili smo logaritemsko obliko *Eulerjevega produkta.*

Pri naslednjem primeru bomo izkoristili dejstvo, da je

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

kjer se aritmetična funkcija $\varphi(n)$ imenuje *Eulerjeva funkcija*[1]. Po izreku (3) sledi

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d}{n}.$$

[1] [1], str. 30

Če postavimo $A_n \equiv 1$, dobimo po izreku (4)

$$\sum_p \frac{1}{p^s - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \log \zeta(sn).$$

Pri naslednjem primeru bomo poiskali numerično vrednost praštevilske vrste na šest mest natančno. Imamo funkcijo

$$F(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \cdots .$$

Ker je $A_1 = 0$, lahko uporabimo izrek (4) za $\sigma = 1$.

$$\sum_p F(p^{-1}) = \sum_p \frac{1}{(p-1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \log \zeta(n),$$

kjer je

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d(d-1)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Za $n > 2$ imamo $\log \zeta(n) < 5/2^n$. Prav tako imamo

$$|a_{2k}| < \frac{1}{2k} \sum_{n=1}^{k} n(n-1) + 2k - 1 = \frac{k^2 + 12k - 7}{6}$$

$$|a_{2k+1}| < \frac{1}{2k} \sum_{n=1}^{k} n(n-1) + 2k = \frac{k^2 + 12k - 1}{6}.$$

Ocenitev ostanka sledi

$$\sum_{n=2N}^{\infty} |a_n| \log \zeta(n) < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{5(n^2 + 12n - 5)}{4^{n+1}} = \frac{45N^2 + 570N - 20}{27 \cdot 4^n}.$$

Za $N = 15$ dobimo

$$\sum_p \frac{1}{(p-1)^2} = \sum_{n=2}^{29} a_n \log \zeta(n) + \frac{\alpha}{10^{-6}}; \quad |\alpha| < 1,$$

po uporabi računalnika pa

$$1,375064 < \sum_p \frac{1}{(p-1)^2} < 1,375066.$$

S temi primeri zaključujemo članek, bralec pa lahko z uporabo drugih aritmetičih funkcij najde še kakšen zanimiv primer.

Literatura

[1] J. Bračič: *Uvod v analitično teorijo števil*, Ljubljana, DMFA-založništvo, 2003.

[2] K. Knopp: *Theory and Application of Infinite Series*, New York, Dover publications, 1990.

[3] E. C. Titchmarsh: *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford, Clarendon Press, 1986.