

6 Stirlingovo delo

Matija Pestotnik, 17. 11. 2009

V tem poglavju se bomo ukvarjali predvsem z ocenami števila $n!$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Izpeljali bomo kar nekaj ocen in s pomočjo integrala poskušali oceno izboljšati. Na koncu bomo pogledali še limitno število razmerja med našo najboljšo oceno in $n!$. V tem poglavju bomo privzel tudi nekaj stvari, ki so bile povedane na prejšnjih seminarjih.

6.1 Uvod

Vsi vemo, kaj nam $n!$ predstavlja. Kombinatorično nam predstavlja število vseh možnih razporeditev n objektov v vrsto. Za prvi objekt imamo n možnosti, za drugi objekt $n - 1$ možnosti, ... in za zadnji objekt eno samo možnost. Torej velja:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n.$$

PROBLEM 6.1 S pomočjo različnih operacij in ročnega kalkulatorja izračunajte naslednje:

(1) e^{2345}

(2) 2345^{2345}

(3) $2345!$

Prva dva primera se izračunata na izredno enostaven način, zadnji primer pa v tem trenutku še ne znamo. V teku besedila se bomo tudi to naučili. Poizkusimo sedaj izračunati vsaj prva primera. Pomagajmo si z logaritemsko funkcijo.

$$\begin{aligned} \log(e^{2345}) &= 2345 \log(e) \approx 1018.42 \dots \\ \Rightarrow e^{2345} &= 10^{\log(e^{2345})} = 10^{1018.42 \dots} = 2.63 \times 10^{1018} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(2345^{2345}) &= 2345 \log(2345) \approx 7902.98 \dots \\ \Rightarrow 2345^{2345} &= 10^{\log(2345^{2345})} = 10^{7902.98 \dots} = 9.66 \times 10^{7902} \end{aligned}$$

Vrnimo se nazaj k računanju $n!$. To število izredno hitro narašča ko n povečujemo, zato so se včasih ukvarjali z iskanjem približka za to diskretno funkcijo.

Marsikdo se bo vprašal, zakaj bi sploh potrebovali približek zanjo, saj je produkt naravnih števil tudi naravno število. V zgornjem primeru $(2345!)$ enostavno zmnožimo vsa števila med 1 in 2345. Ampak to je časovno izredno zahtevno, saj bi potrebovali veliko spomina kot tudi operacij.

Najprej poizkusimo oceniti vsaj velikostni red $n!$. Očitno je $n! \leq n^n$, saj so vsi členi v produktu manjši od n , le teh pa je n . Boljša ocena bi bila $(\frac{n}{2})^n$, saj je ravno pol členov v produktu manjših in pol večjih od $\frac{n}{2}$. Vendar sta zgornja približka izredno slaba, ampak še vedno dovolj dobra, da dobimo vsaj približen velikostni red za $n!$.

Tabela 1: Približek za $n!$

n	$n!$	$(\frac{n}{2})^n$
1	1	0.5
2	2	1
3	6	3.375
4	24	16
⋮	⋮	⋮
10	3.63×10^6	9.77×10^6
⋮	⋮	⋮
100	9.33×10^{157}	7.80×10^{169}

Skozi 18. stoletje so se izredno trudili, da bi dobili boljši približek za $n!$, večinoma neuspešno. Prvi, ki je ta približek izredno izboljšal, je bil **James Stirling**. V naslednjem poglavju bomo razložili, kaj je odkril in kako.

6.2 Prvi boljši približek za $n!$

V zgornjih približkih smo lahko opazili, da so vsi približki izhajali direktno iz $n!$. Pri *Analizi 1* smo spoznali, da lahko vsoto zelo dobro aproksimiramo s pomočjo integrala. Ravno to je v svoji izpeljavi ocene uporabil James Stirling. Kako produkt spremeniti v vsoto, vemo že iz srednje šole. Namreč za logaritemsko funkcijo velja, da je logaritem produkta enaka vsoti logaritmov.

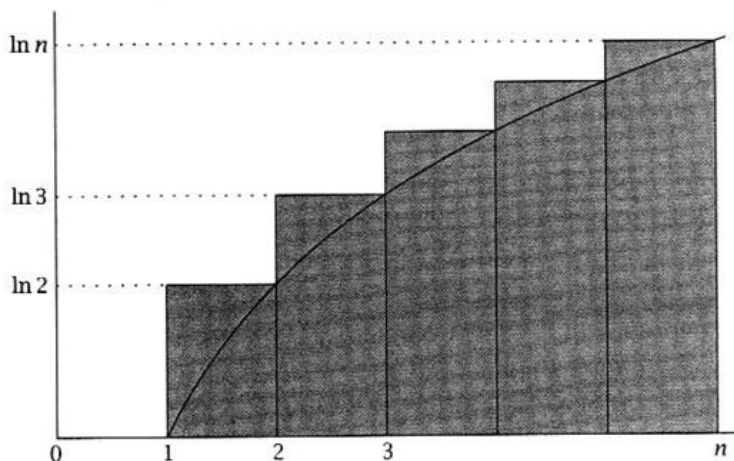
$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$$

Poglejmo si sedaj

$$\sum_{k=1}^n \ln k.$$

Vidimo, da je pri $k = 1$, $\ln 1 = 0$, torej dejansko lahko vsoto pišemo od $k = 2$ dalje. Slika 1 prikazuje graf funkcije $y = \ln x$ na intervalu $[1, n]$

skupaj z pravokotniki na intervalu $[1, 2]$, $[2, 3]$ in tako dalje. Širina vsakega pravokotnika je 1 in njegova višina zaporedoma $\ln 2, \ln 3, \dots, \ln n$.



Slika 1: Približek za vsoto logaritmov.

Torej je skupna vsota pravokotnikov ravno naša željena vsota:

$$\sum_{k=2}^n \ln k.$$

Naš prvi približek bo ploščina pod krivuljo $y = \ln x$ na intervalu $[1, n]$. Dobimo naslednje:

$$\int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

Tako dobimo naslednji približek:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1$$

oziroma, če antilogaritmujemo dobimo

$$\boxed{n! = n^n e^{1-n}} \tag{1}$$

Tabela 2 nam pokaže, da je naš novi približek precej dober sploh za velike n . Iz tabele razberemo, da je približek vedno manjši kot $n!$. To nikakor ni presenečenje, saj smo $n!$ aproksimirali s funkcijo, ki na celotnem intervalu leži v notranjosti pravokotnikov. V nadaljevanju bomo poizkusili našo oceno še izboljšati. To nas privede do naslednjega problema.

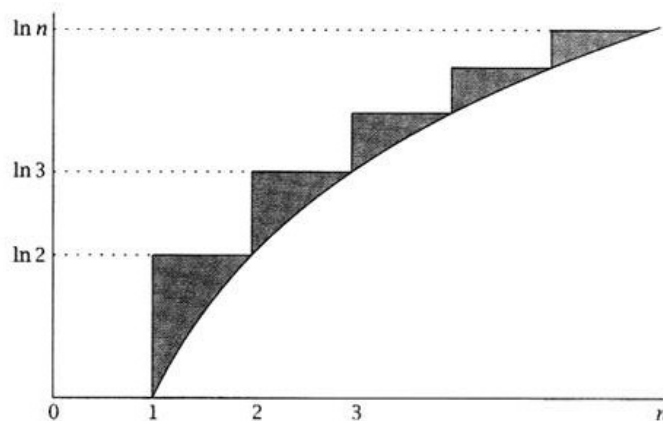
PROBLEM 6.2 Razmisli, kako bi bolj natančno lahko aproksimirali razliko med območjem pravokotnikov in območjem pod grafom na sliki 1? Na to vprašanje bomo odgovorili v nadaljevanju.

Tabela 2: Boljši približek za $n!$

n	$n!$	$n^n e^{1-n}$
1	1	1
2	2	1.47
3	6	3.65
4	24	12.74
\vdots	\vdots	\vdots
10	3.63×10^6	1.23×10^6
\vdots	\vdots	\vdots
100	9.33×10^{157}	1.01×10^{157}

6.3 Drugi boljši približek za $n!$

Poglejmo si še enkrat sliko 1. Razmislimo, kako bi lahko boljše aproksimirali območje, ki ga določajo pravokotniki in območje nad grafom. Oglejmo si to območje malo bolj podrobno na sliki 2.



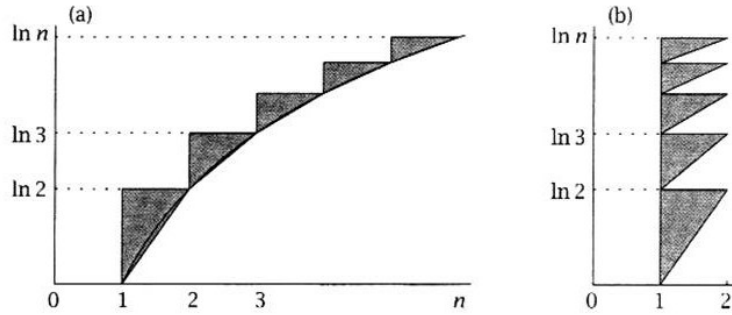
Slika 2: Območje, ki ga želimo aproksimirati.

Na sliki 2 opazimo, da območje, ki ga želimo aproksimirati ni enostavno, saj je sestavljeno s krivočrtnih tirkotnikov. Dobimo idejo, da bi območje aproksimirali s pravokotnimi trikotniki, kot je narisano na sliki 3 (a). Vprašamo se, koliko je ploščina vseh teh pravokotnikov. Za lažje računanje si jih zložimo v isti stolpec kot kaže slika 3 (b). Očitno je ploščina tega območja enaka

$$\frac{\ln n}{2}.$$

Dobili smo še malo boljši približek

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1.$$



Slika 3: Območje aproksimiramo s pomočjo trikotnikov.

Če antilogaritmiramo, dobimo

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}. \quad (2)$$

Tabela 3: Še boljši približek za $n!$

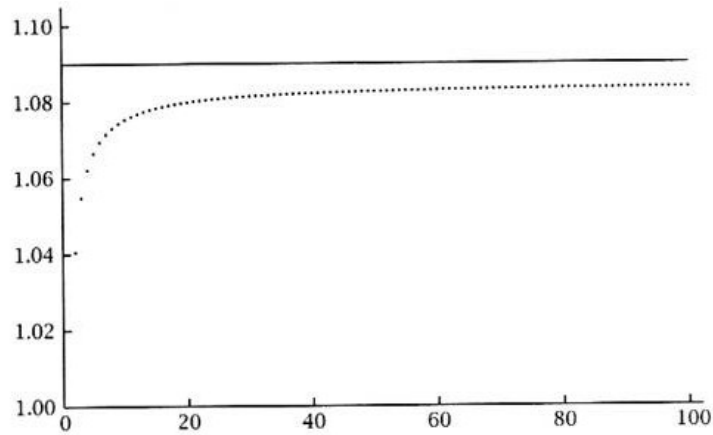
n	$n!$	$n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}$	razmerje
1	1	1	1
2	2	2.08	1.041
3	6	6.33	1.055
4	24	25.49	1.062
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
10	3.63×10^6	3.90×10^6	1.075
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	9.33×10^{157}	1.01×10^{158}	1.084

Iz tabele 3 je razvidno, da je naš približek zelo dober. V zadnji stolpec smo pripisali še razmerje med našim približkom in $n!$. Opazimo, ko n povečujemo, se naše razmerje malenkostno povečuje. V nadaljevanju nas bo zanimalo, kaj se dogaja z razmerjem, ko $n \rightarrow \infty$. Imamo samo dve možnosti. Bodisi razmerje konvergira proti neki vrednosti bodisi razmerje divergira. Če je kaj pravice, se bo zgodila prva možnost. Iz slike 4 je razvidno, da res razmerje konvergira proti nekemu številu, npr. 1.085. Tako lahko naš približek se izboljšamo. Dobimo:

$$n! \approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}}{1.085} \quad (3)$$

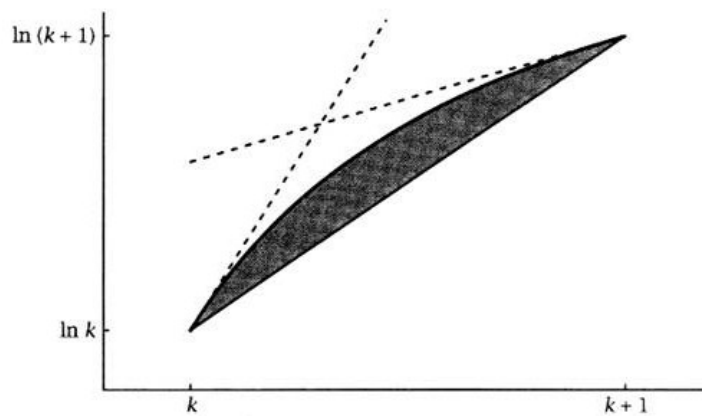
PROBLEM 6.3 Izračunaj $2345!$ v standardni notaciji.

$$2345! \approx \frac{e^{-2344} 2345^{2345.5}}{1.085} = 4.45 \times 10^{6886}$$



Slika 4: Limitno razmerje.

6.4 Limitno razmerje



Slika 5: Aproximacija pobarvanega dela.

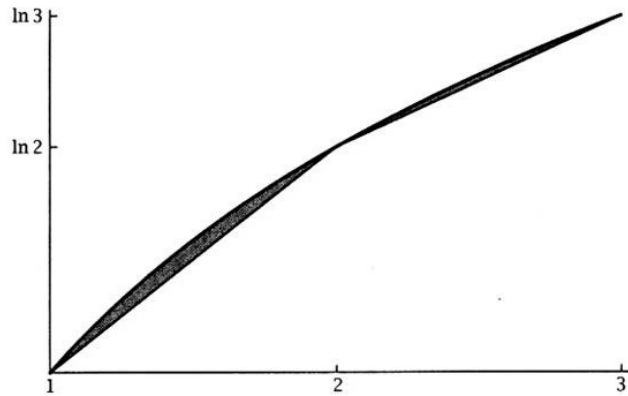
Glavni cilj tega poglavja je povedati, zakaj se razmerje

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}}{n!}$$

približuje limitni vrednosti. Izraz $\ln(n!)$ smo v prejšnjem razdelku aproksimirali z $(n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1$. Aproximacija, ki smo jo navedli ni točna, saj smo dodali malo preveč. Dodati bi mogli ukrivljene trikotnike in ne ravne, zato je naša napaka

$$(n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1 - \ln(n!),$$

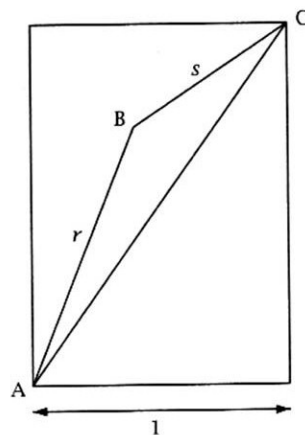
kot prikazuje obarvan del na sliki 6.



Slika 6: Napaka pri aproksimaciji.

Razlika med aproksimacijo in resnično vrednostjo $\ln(n!)$, ki je $(n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1 - \ln(n!)$, je prava stvar, ki jo iščemo, če želimo raziskati razmerje. Zakaj je to tako? Ker je logaritem kvocienta enak razliki logaritmov. Naš cilj je torej preveriti, da se razlika $\ln(n!)$ $(n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1 - \ln(n!)$ res približuje limitni vrednosti. Preveriti moramo, da obstaja neka zgornja meja, ki jo razlika ne preseže. Na koncu prejšnjega poglavja smo že ugibali kakšno bi lahko to število bilo. Bližje si pogledjmo interval $[k, k+1]$ in poskusimo oceniti obarvan del na sliki 5.

PROBLEM 6.4 Denimo, da je podan pravokotnik neznane višine. Na vrhu diagonale in v notranjosti pravokotnika narišemo trikotnik ABC, katerega stranici imata strmino s in r . Zanima nas, koliko je največ lahko ploščina tega trikotnika, neodvisno od višine pravokotnika. Glej sliko 7.



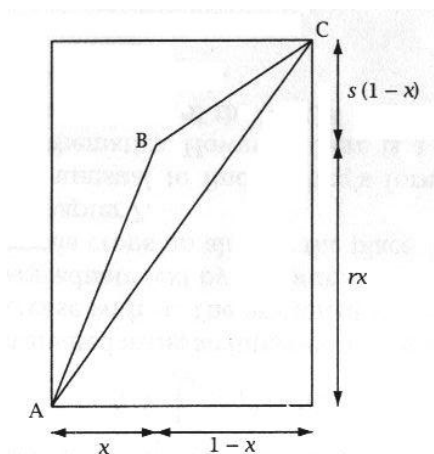
Slika 7: Trikotnika z določenima strminama.

Pokazali bomo, da je ploščina trikotnika ABC največ $\frac{r-s}{8}$, kjer sta r in s strmini daljice AB in BC. Predpostavimo, da je $A(0,0)$ in naj bo $B(x,rx)$. Potem je $C(1,rx+s(1-x))$. Več na sliki 8. Sedaj lahko izračunamo ploščino, ki je

$$S = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -(rx + s(1-x)) \\ x & -1 & rx - (rx + s(1-x)) \end{vmatrix} = \frac{x(1-x)(r-s)}{2}.$$

Sedaj ocenimo ploščino s pomočjo maksimuma funkcije $x(1-x)$. Ker je to parabola je maksimum dosežen v temenu, ki je $x = \frac{1}{2}$. Torej

$$\frac{x(1-x)(r-s)}{2} \leq \frac{r-s}{8}$$



Slika 8: Ploščina trikotnika z določenima strminama s in r .

Ocenili smo, da je ploščina osenčenega dela na sliki 6 največ $\frac{r-s}{8}$. Pri aproksimaciji smo uporabili funkcijo $y = \ln x$, njen odvod je $y' = \frac{1}{x}$, torej je $r = \frac{1}{k}$ in $s = \frac{1}{k+1}$. Uporabimo rezultat od problema za trikotnik na intervalu $[k, k+1]$ in dobimo

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Nas seveda zanima koliko je ploščina vseh takih trikotnikov ko teče k od 1 do n . Torej:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Zanima nas limitna vrednost tega izraza, tako da lahko pozabimo na $\frac{1}{n}$. Dobimo, da je ploščina vseh trikotnikov manjša od $\frac{1}{8}$. Iz naštetega sledi:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + 1 - \ln(n!) \leq \frac{1}{8}$$

Izpeljali smo, da je razmerje

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}}{n!} \approx e^{\frac{1}{8}} \approx 1.13$$

Recimo, da limitno vrednost označimo z r , potem velja:

$$n! \approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}}{r} = \frac{e}{r}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} = cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Lepo bi bilo, če bi bil približek za c lep, npr 2.5, glede na tabelo 4. V naslednjem poglavju bomo ugotovili, da temu ni tako.

Tabela 4: Približek za c v Stirlingovi formuli.

n	n!	$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$	približek za c
1	1	0.368	2.718
2	2	0.766	2.612
3	6	2.328	2.577
4	24	9.378	2.559
⋮	⋮	⋮	⋮
10	3.63×10^6	1.436×10^6	2.528
⋮	⋮	⋮	⋮
100	9.33×10^{157}	3.720×10^{157}	2.509

6.5 Stirlingova formula

Cilj tega poglavja bo, da natančno ugotovimo vrednost konstante c v izrazu:

$$n! = ce^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}.$$

Uporabili bomo zvezo, ki je bila dokazana na prejšnjem seminarju.

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!} \approx \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Vstavimo naš približek namesto fakultete in dobimo:

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!} \approx \frac{ce^{-2m}(2m)^{2m+\frac{1}{2}}}{ce^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}ce^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2m}\sqrt{2}}{c\sqrt{m}}.$$

Iz tega sledi, da je $c = \sqrt{2\pi}$

Dobili smo torej najboljši približek za $n!$, ki je:

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \tag{4}$$

Literatura

- [1] Keith Ball, Strange Curves, Counting Rabbits and Other Mathematical Explorations, Princeton University Press 2003.
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling>
- [3] <http://www.gap-system.org/history/Biographies/Stirling.html>