UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika - 1. stopnja

Mitja Nedić

Rešitev Eulerjevega Baselskega Problema z L'Hospitalom

Delo seminarja 1

Mentor: izred. prof. dr. Milan Hladnik

Ljubljana, 2011

Vsak študent matematike se je tekom študija zagotovo srečal z L'Hospitalovim pravilom in njegovo uporabo v matematični analizi. Nič manj slaven ni Baselski problem, ki ga danes srečamo kot primer pri obravnavi številskih vrst. Na prvi pogled dva nesorodna matematična koncepta pa je mojstrsko združil Leonard Euler pri dokazu Baselskega problema, kot bomo sedaj spoznali.

1 L'Hospitalovo Pravilo

L'Hospitalovo pravilo je danes zelo uporabno matematično orodje, predvsem ko je potrebno računati limite zaporedji in funkcij nedoločene oblike. Prav zato se včasih ne zavedamo, da so L'Hospitalovo pravilo matematiki uporabljali že pred stoletji, med njimi tudi slavni Euler.

1.1 Eulerjeva vezija in dokaz

Euler je začel tako, da je uvedel količnik $y = \frac{P}{Q}$, pri čemer sta P in Q funkciji spremenljivke x. Za vrednost $x = a$ je Euler predpostavil, da tako števec kot imenovalec izgineta, tako da ostane izraz oblike $\frac{0}{0}$. V tem primeru je Euler trdil, da se vrednost sicer zdi nedoločena, a bi jo mogoče vseeno lahko našli.

V ta namen je Euler vpeljal naslednjie pravilo:

IZREK. *Če je $y = \frac{P}{Q}$ in za $x = a$ je $P(a) = Q(a) = 0$, potem $\frac{dP}{dQ}$ zavzame isto vrednost kot $\frac{P}{Q}$.*

Opomba. V zgornjem izreku prepoznamo L'Hospitalovo pravilo, le da je zapisan v jeziku matematične analize, kakršnega so uporabljali matematiki pred približno 300 leti.

DOKAZ. Euler je izrek dokazal s pomočjo uporabe neskončno majhnih količin, saj kot je sam trdil: „končna količina se ne more ne povečati ne zmanjšati z prištevanjem ali odštevanjem neskončno majhne količine" [3].

Ugotovil je, da se bo y spremenil za nek neskončno majhni dy, če je $y = y(x)$ in količini a dodamo neskončno majhni dx. Potem je $dy = y(a + dx) - y(a)$. Odtod sledi

$$y(a + dx) = y(a) + dy. \tag{1}$$

Naj bo sedaj $y = \frac{P}{Q}$ tak kot v izreku, torej za $x = a$ je $P(a) = Q(a) = 0$. Ker zamenjava a z $a + dx$ ne spremeni ničesar, sledi po (1)

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(a + dx)}{Q(a + dx)} = \frac{P(a) + dP}{Q(a) + dQ} = \frac{0 + dP}{0 + dQ} = \frac{dP}{dQ}.$$

□

1.2 Moderna oblika

L'Hospitalovo pravilo, kot ga matematiki poznamo danes, nastopa v drugačni obliki kot ga je svojčas uporabljal Euler. V ta namen si oglejmo še „moderno“ obliko tega pravila, kjer nastopa tudi pojem limite, ki se je razvil šele v 19. stoletju. Za dokaz L'Hopitalovega pravila bomo potrebovali naslednji izrek:

IZREK. *Naj bosta f in g zvezni na $[a,b]$, odvedljivi na (a,b) in naj bo $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Tedaj obstaja točka $c \in (a,b)$, da velja*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

Dokaz izpustimo. Omenimo le, da je potrebno uporabiti Lagrangev in Rolleov izrek, bralec pa si lahko dokaz v celoti prebere v [1] ali v [4].

Dokažimo sedaj z uporabo tega izreka L'Hospitalovo pravilo:

IZREK(L'Hospital). *Naj bosta f in g odvedljivi na (a,b). Naj bo $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a,b)$. Naj bo*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0 \text{ in } \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0.$$

Potem če obstaja limita

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

obstaja tudi limita

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

in obe limiti sta enaki, torej

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DOKAZ. Ker $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0$ in $\lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$, lahko funkciji f in g razširimo do zveznih funkcij na $[a,b)$ tako, da postavimo $f(a) = 0$ in $g(a) = 0$. Naj bo $x \in (a,b)$. Uporabimo (2) za interval $[a,x]$. Torej obstaja za vsak $x \in (a,b)$ tak $c_x \in (a,x)$, da je

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Denimo, da obstaja $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $a < x < a + \delta$ sledi

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Ker je $a < x < a + \delta$, je $a < c_x < x < a + \delta$. Torej velja tudi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

za vsak $a < x < a + \delta$. Torej je $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. □

Poleg tega primera poznamo dandanes tudi druge oblike L'Hospitalovega pravila, s pomočjo katerih znamo izračunati nekatere limite v neskončnosti, ali pa limite, kjer naletimo na izraz oblike $\frac{\infty}{\infty}$. Bralec si lahko te primere ogleda v [1] ali v [4].

2 Eulerjeva uporaba L'Hospitalovega pravila

Euler ni želel le napisati in dokazati nekaj izrekov in pravil, ampak je želel ponazoriti tudi njihovo praktično uporabo. V ta namen si oglejmo nekaj zgledov, ki jih je Euler podal v svojih člankih in knjigah.

Zgled 1. Koliko je $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ ko je $x = \frac{\pi}{2}$?

Po uporabi L'Hospitalovega pravila na $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ dobimo $\frac{-\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}$, kar je enako 1 ko je $x = \frac{\pi}{2}$.

Alternativno je Euler ponudil rešitev, kjer je potrebno uporabiti le trigonometrijo. To naredimo tako, da zapišemo

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 + \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x}.$$

Tako se nam začetni izraz spremeni v

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} &= \frac{(1 - \sin x) + \cos x}{\cos x - (1 - \sin x)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}\,\sqrt{1 - \sin x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}.\end{aligned}$$

Pri $x = \frac{\pi}{2}$ je tako rešitev $\frac{\sqrt{1-1}+\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}-\sqrt{1-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. ◊

Zgled 2. Koliko je $\frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$ ko je $x = 1$?

Ta primer je zanimiv, ker se izkaže, da je potrebna dvakratna zaporedna uporaba L'Hospitalovega pravila da pridemo do rešitve, poleg tega pa je potrebno biti vešč v odvajanju funkcije x^x. Po prvi uporabi L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\frac{x^x(1 + \ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}}.$$

Po drugi uporabi pa

$$\frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}.$$

Kar je enako -2, ko je $x = 1$. $\Diamond$

2.1 Končne vsote

Dokažimo formuli za končne vsote s pomočjo uporabe L'Hospitalovega pravila tako, kot je to svojčas naredil Euler.

Trditev. *Za vsako naravno število n velja*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Dokaz. Začnimo s formulo za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja, ki jo je poznal tudi že Euler:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

Če obe strani zgornje formule odvajamo po x, dobimo

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - x^n - nx^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Sedaj pomnožimo obe strani z x, da ugotovimo

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - x^{n+1} - nx^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Če vstavimo v zgornjo enačbo $x = 1$, dobimo na levi strani ravno $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, na desni strani pa dobimo nedoločen izraz oblike $\frac{0}{0}$, torej je ta stran ravno pravšnji kandidat za uporabo L'Hospitalovega pravila. Ko to storimo, dobimo

$$\frac{1 - (n+1)x^n - n(n+1)x^n + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}.$$

Če bi sedaj vstavili za $x = 1$, bi zopet dobili nedoločen izraz oblike $\frac{0}{0}$, zato ponovno uporabimo L'Hospitalovo pravilo, nakar dobimo

$$\frac{-n(n+1)x^{n-1} - n^2(n+1)x^{n-1} + n(n+1)(n+2)x^n}{2}.$$

Dvakratna uporaba L'Hospitalovega pravila se je tako izplačala, saj če zdaj vstavimo $x = 1$, najdemo

$$\frac{-n(n+1) - n^2(n+1) + n(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)(-1-n+n+2) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$\square$

Trditev. *Za vsako naravno število n velja*

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Dokaz. Začnemo na enak način kot pri prejšnji trditvi. Obe strani formule za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja najprej odvajamo po x, nato pa še pomnožimo z x, tako da dobimo

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - x^{n+1} - nx^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Sedaj zopet odvajamo obe strani zgornje formule, Na levi strani dobimo $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$, na desni strani pa po sicer ne prezahtevnem, a mogoče malo dolgoveznem, odvajanju količnika, ki je prepuščen bralcu, dobimo

$$\frac{1 + x - (n+1)^2x^n - (1 - 2n - 2n^2)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

Če pomnožimo obe strani formule z x, ugotovimo

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x^n = \frac{x + x^2 - (n+1)^2x^{n+1} - (1 - 2n - 2n^2)x^{n+2} - n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Ko vstavimo sedaj za $x = 1$, na levi strani dobimo želeno vsoto $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$, na desni strani pa nedoločen izraz oblike $\frac{0}{0}$, na katerem uporabimo L'Hospitalovo pravilo. Po prvi uporabi tako dobimo

$$\frac{1 + 2x - (n+1)^3x^n - (1 - 2n - 2n^2)(n+2)x^{n+1} - n^2(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2}.$$

Ker je to še vedno nedoločen izraz, postopek ponovimo in najdemo

$$\frac{2 - n(n+1)^3x^{n-1} - (1 - 2n - 2n^2)(n+2)(n+1)x^n - n^2(n+3)(n+2)x^{n+1}}{6(1-x)}.$$

Še vedno imamo nedoločen izraz, torej bo potrebna še ena uporaba L'Hospitalovega pravila, ki nam vrne

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3x^{n-2} - (1 - 2n - 2n^2)(n+2)(n+1)nx^{n-1} - n^2(n+3)(n+2)(n+1)x^n}{-6}.$$

Sedaj lahko končno vstavimo $x = 1$ in tako dobimo

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 - (1 - 2n - 2n^2)(n+2)(n+1)n - n^2(n+3)(n+2)(n+1)}{-6}.$$

Ali potem ko izpostavimo $\frac{1}{6}n(n+1)$:

$$\frac{1}{6}n(n+1)((n-1)(n+1)^2+(1-2n-2n^2)(n+2)+n(n+3)(n+2)) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$\square$

Seveda je možno isti formuli dokazati tudi na lažje načine. S postopkom matematične indukcije bi moral biti zgornji trditvi sposoben dokazati vsak, ki ima vsaj osnovno znanje matematične analize.

3 Baselski problem

Italijanski matematik Pietro Mengoli je leta 1644 predstavil problem vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. To vprašanje, ki ga danes poznamo pod imenom *Baselski problem*, je begalo tudi najboljše matematike tistega časa, vse do leta 1735, ko ga je rešil takrat osemindvajsetletni Leonhard Euler.

Dokaz, ki ga bom opisal v tem članku, temelji na uporabi L'Hospitalovega pravila, Eulerjev prvotni dokaz pa si bralec lahko prebere v [2] ali v [5].

3.1 Dokaz z uporabo L'Hospitala

Da bomo dokazali Baselski problem, si najprej pripravimo teren z dokazom dveh lem in trditve, ki nam bo kasneje služila kot izhodišče za željeni dokaz.

Lema 1. *Velja:*

$$\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{4-y^2}+\frac{1}{9-y^2}+\ldots = \frac{1}{2y^2}-\frac{\pi\cos\pi y}{2y\sin\pi y}.$$

Dokaz. Euler je začel tako, da je zapisal $\sin t$ kot neskončen produkt:

$$\sin t = t\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\left(1+\frac{t}{\pi}\right)\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)\left(1-\frac{t}{3\pi}\right)\left(1+\frac{t}{3\pi}\right)\ldots$$

Takšen pristop je bil pri Eulerju zelo priljubljen, utemeljeval pa ga je z argumentom, da ima enčba $\sin t = 0$ rešitve $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, ki nam dajo pripadajoče faktorje na desni strani. Zamenjajmo sedaj t z πy in zmnožimo sosednja dva člena, tako da dobimo

$$\begin{aligned}
\sin\pi y &= \pi y(1-y)(1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{3}\right)\left(1+\frac{y}{3}\right)\ldots \\
&= \pi y(1-y)(1+y)\left(\frac{2-y}{2}\right)\left(\frac{2+y}{2}\right)\left(\frac{3-y}{3}\right)\left(\frac{3+y}{3}\right)\ldots \\
&= \pi y(1-y^2)\left(\frac{4-y^2}{4}\right)\left(\frac{9-y^2}{9}\right)\ldots
\end{aligned}$$

Euler je nato vzel logaritem obeh strani, da je našel

$$\begin{aligned}\ln(\sin \pi y) &= \ln\left(\pi y(1-y^2)\left(\frac{4-y^2}{4}\right)\left(\frac{9-y^2}{9}\right)\dots\right)\\ &= \ln \pi + \ln y + \ln(1-y^2) + \ln(4-y^2) - \ln 4 + \ln(9-y^2) - \ln 9 + \dots\end{aligned}$$

Nato je še obe strani odvajal po y, nakar je dobil

$$\frac{\pi \cos \pi y}{\sin \pi y} = \frac{1}{y} + \frac{-2y}{1-y^2} + \frac{-2y}{4-y^2} + \frac{-2y}{9-y^2} + \dots$$

Lema 1 sledi takoj iz zgornje enakost, saj če nesemo člen $\frac{1}{y}$ na drugo stran in delimo celo enakost z $-2y$, dobimo ravno enakost, ki smo jo želeli dokazati. □

Lema 2. *Velja:*

$$\frac{\pi \cos(-i\pi b)}{2ib \sin(-i\pi b)} = \frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{b(e^{2\pi b}-1)}.$$

Dokaz: Začnimo z Eulerjevo predstavitvijo funkcij sinus in kosinus s pomočjo eksponentnih funkcij kompleksne spremenljivke:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\\ \cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.\end{aligned}$$

Sledi:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})} = \frac{i(e^{2iz}+1)}{(e^{2iz}-1)}.$$

Zamenjajmo sedaj z z $-i\pi b$, da dobimo člene, kot nastopajo v lemi:

$$\frac{\pi \cos(-i\pi b)}{2ib \sin(-i\pi b)} = \frac{\pi}{2ib}\left(\frac{i(e^{2\pi b}+1)}{(e^{2\pi b}-1)}\right) = \frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{b(e^{2\pi b}-1)}.$$

□

Obe lemi bomo sedaj potrebovali pri dokazu naslednje trditve.

Trditev. *Velja enakost:*

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \frac{1}{16+x^2} + \dots = \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}.$$

Dokaz. Eulerjeva zamisel je bila, da v enakosti iz leme 1 zamenjamo y z $-ix$, ter tako y^2 z $-x^2$, od koder je dobil

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \frac{1}{16+x^2} + \dots = \frac{-1}{2x^2} + \frac{\pi \cos(-i\pi x)}{2ix \sin(-i\pi x)}.$$

Na drugem členu na desni sedaj uporabimo lemo 2 in tako se desna stran spremeni v

$$\frac{-1}{2x^2} + \frac{\pi\cos(-i\pi x)}{2ix\sin(-i\pi x)} = \frac{-1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)} = \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}.$$

□

Tako smo si dobro pripravili teren za Eulerjev dokaz baselskega problema z uporabo L'Hospitalovega pravila.

IZREK. *Velja enakost:*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

DOKAZ. Euler je začel tako, da je desni člen trditve dal na skupni imenovalec:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \frac{1}{16+x^2} + \ldots &= \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)} \\ &= \frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} - \pi x - 1}{2x^2 e^{2\pi x} - 2x^2}.\end{aligned}$$

Za $x = 0$ dobimo na levi strani željeno neskončno vrsto, na desni pa nedoločen izraz oblike $\frac{0}{0}$, torej lahko na desnem ulomku uporabimo L'Hospitalovo pravilo, ki nam da

$$\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi^2 x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x} + 4\pi x^2 e^{2\pi x} - 4x}.$$

To je še vedno nedoločen izraz pri $x = 0$, zato ponovimo postopek in dobimo

$$\frac{4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 16\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 4} = \frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}.$$

Ker je to zopet nedoločen izraz, je Euler moral še tretjič uporabiti L'Hospitalovo pravilo. Tako je dobil

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}.$$

Ko je Euler nato postavil $x = 0$, je tako dobil $\frac{\pi^3}{4\pi+0+2\pi} = \frac{\pi^2}{6}$, s čimer je Baselski problem dokazan. □

3.2 Alternativni Dokazi

Eulerjeva genialnost pri reševanju problemov pride še bolj do izraza, ko ugotovimo, koliko različnih poti do rešitve je našel pri posameznem problemu. Oglejmo si zato še dva Eulerjeva alternativna dokaza Baselskega problema, pri katerih ključno vlogo igra lema 1, ki smo jo prej spoznali.

IZREK. *Velja enakost:*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

DOKAZ 1. Začnimo z lemo 1:

$$\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{4-y^2}+\frac{1}{9-y^2}+\ldots=\frac{1}{2y^2}-\frac{\pi\cos\pi y}{2y\sin\pi y}=\frac{\sin\pi y-\pi y\cos\pi y}{2y^2\sin\pi y}.$$

Za $y=0$ dobimo na levi željeno neskončno vrsto, na desni pa nedoločen izraz oblike $\frac{0}{0}$. Na desni strani tako uporabimo L'Hospitalovo pravilo in dobimo

$$\frac{\pi^2 y\sin\pi y}{4y\sin\pi y+2y^2\pi\cos\pi y}.$$

Ko postopek še enkrat ponovimo, dobimo

$$\frac{\pi^2\sin\pi y+\pi^3 y\cos\pi y}{4\sin\pi y+8\pi y\cos\pi y-2\pi^2y^2\sin\pi y}.$$

Po še eni ponovitvi pa dobimo

$$\frac{2\pi^3\cos\pi y-\pi^4 y\sin\pi y}{12\pi\cos\pi y-12\pi^2 y\sin\pi y-2\pi^3y^2\cos\pi y}.$$

Sedaj lahko vstavimo $y=0$ in dobimo: $\frac{2\pi^3-0}{12\pi-0-0}=\frac{2\pi^3}{12\pi}=\frac{\pi^2}{6}$. $\square$

DOKAZ 2. Ponovno začnemo z lemo 1:

$$\frac{1}{1-y^2}+\frac{1}{4-y^2}+\frac{1}{9-y^2}+\ldots=\frac{1}{2y^2}-\frac{\pi\cos\pi y}{2y\sin\pi y}=\frac{\sin\pi y-\pi y\cos\pi y}{2y^2\sin\pi y}.$$

Eulerjeva ideja je bila sedaj naslednja: zamenjajmo y z diferencialom dx:

$$\frac{1}{1-(dx)^2}+\frac{1}{4-(dx)^2}+\frac{1}{9-(dx)^2}+\ldots=\frac{\sin(\pi\,dx)-\pi y\cos(\pi\,dx)}{2y^2\sin(\pi\,dx)}.$$

Spremenimo sedaj na desni strani funkciji $\sin$ in $\cos$ v njuni pripadajoči Taylorjevi vrsti:

$$\frac{\left(\pi\,dx-\frac{\pi^3(dx)^3}{3!}+\frac{\pi^5(dx)^5}{5!}-\ldots\right)-\pi(dx)\left(1-\frac{\pi^2(dx)^2}{2!}+\frac{\pi^4(dx)^4}{4!}-\ldots\right)}{2(dx)^2\left(\pi\,dx-\frac{\pi^3(dx)^3}{3!}+\frac{\pi^5(dx)^5}{5!}-\ldots\right)}.$$

Če na tem mestu odpravimo oklepaje in pokrajšamo v števcu $\pi\,dx$, nato pa izpostavimo iz vseh preostalih členov $\pi(dx)^3$, nam ostane

$$\frac{\pi(dx)^3\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{30}(dx)^3+\ldots\right)}{\pi(dx)^3\left(2-\frac{\pi^2}{3}(dx)^2+\frac{\pi^4}{60}(dx)^4-\ldots\right)}=\frac{\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{30}(dx)^3+\ldots}{2-\frac{\pi^2}{3}(dx)^2+\frac{\pi^4}{60}(dx)^4-\ldots}.$$

Tako smo prvotno enakost spremenili v

$$\frac{1}{1-(dx)^2}+\frac{1}{4-(dx)^2}+\frac{1}{9-(dx)^2}+\ldots=\frac{\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{30}(dx)^3+\ldots}{2-\frac{\pi^2}{3}(dx)^2+\frac{\pi^4}{60}(dx)^4-\ldots}.$$

Ker je diferencial dx infinitezimalno majhen proti končnim količinam, je $dx \approx 0$, tako da imamo

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\frac{\pi^2}{3}}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

Zaključna misel

Tako smo spoznali, kako je Euler v svojem dokazu mojstrsko združil različne matematične koncepte. V mešanici sinusov in kosinusov, logaritmov in eksponentov, funkcij v realnem in kompleksnem, odvodov in diferencialov, ter ob Eulerjevem spretnem premetavanju simbolov, smo tako enega klasičnih matematičnih problemov rešili na nekoliko drugačen, a nič manj zanimiv način.

Literatura

[1] M. Brojan, J. Globevnik: *Analiza 1*, DMFA-založništvo, Ljubljana 2008.

[2] W. Dunham: Euler: *The Master of Us All*, MAA, 1999.

[3] W. Dunham: When Euler Met L'Hospital, *Mathematics Magazine* 82 (Februar 2009), 16-25.

[4] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Co. - Singapore, 1976.

[5] A. Simonič: Baselski problem, *Obzornik za Matematiko in Fiziko* 58 (Marec 2011), 1-11.