Tlakovanje pravokotnikov in kvadratov

Oktober 2009

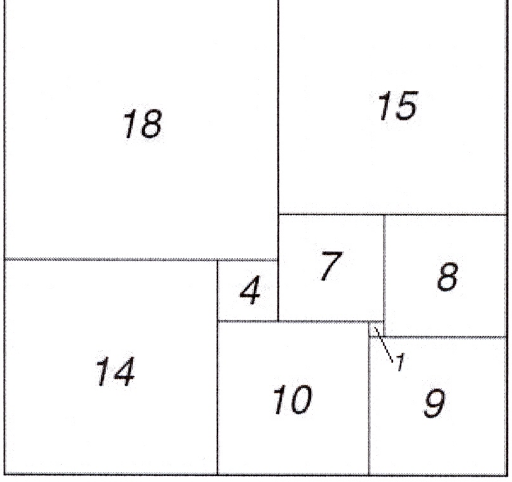
Na prvi pogled je tlakovanje kvadrata ali pravokotnika, ki ima stranici v racionalnem razmerju, npr. 2:1, čisto preprosto. Kvadrat npr. lahko razdelimo na štiri enake manjše kvadrate. Vendar gre v tem primeru pri problemu tlakovanja pravokotnikov in kvadratov, ali kot tudi pravimo, pri problemu *kvadriranja pravokotnikov* oziroma *kvadriranja kvadratov*, za tlakovanje s samimi *različno velikimi* kvadrati: nobena dva ne smeta biti iste velikosti. Takemu kvadriranju rečemo *popolno kvadriranje*, sam lik, sestavljen iz različnih kvadratov pa *popolni lik*. Ta problem je veliko težji.

Če kvadriran pravokotnik ali kvadrat ne vsebuje popolnega podpravokotnika ali popolnega kvadrata, rečemo, da je kvadriranje *enostavno* (oziroma ustrezni kvadriran lik *enostaven*). V nasprotnem primeru je lik *sestavljen*. Uporabljali bomo še en pojem: *red* kvadriranja ali popolnega lika je število (različnih) kvadratov, iz katerih je sestavljen.

V sestavku si bomo ogledali nekaj primerov kvadriranja kvadratov in pravokotnikov, malo teorije, spoznali pa tudi zgodovinski razvoj problema oziroma iskanja popolnih kvadratov.

Kvadriranje kvadratov

Najprej nekaj zgodovine. Problem tlakovanja s kvadrati je najbrz ze zelo star in izhaja iz praktičnih potreb. O njem so v začetku 20. stoletja pisali Max Dehn (1903), Henry Ernest Dudeney (1902, 1907, 1912) in Sam Lloyd (1914) v svojih zbirkah ugank, Zbigniew Moron (1925), ki je odkril popolni pravokotnik velikosti 33 x 32 reda 9 (razrezan na 9 kvadratov), in drugi. Znameniti ruski matematik Nikolaj N. Luzin je npr. v tem času (zmotno) mislil, da popolno kvadriranje kvadrata ni možno.

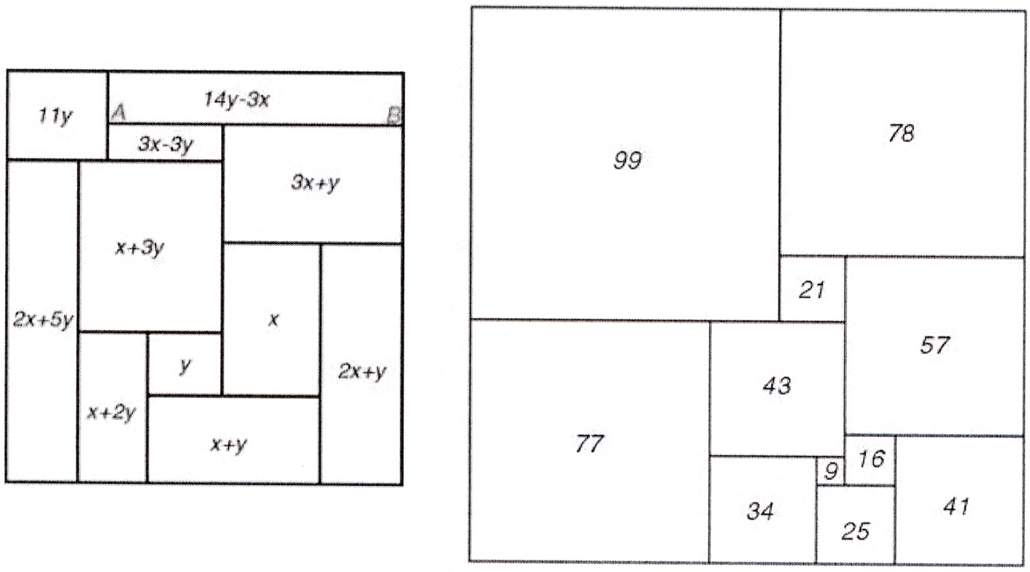


Slika 1: Moronov popolni pravokotnik velikosti 33 x 32, reda 9

Leta 1936 so se štirje študentje matematike s Trinity Collegea univerze v Cambridgeu, R.L. Brooks, C. Smith, A.H. Stone in W.T. Tutte, navdušili nad problemom in ga začeli raziskovati. Zbirali so podatke, poskušali in katalogizirali dobljene popolne enostavne pravokotnike. Njihov cilj je bil poiskati popoln kvadrat.

Algebraična metoda

Pri raziskovanju so uporabljali različne metode. Vsak razrez pravokotnika na podpravokotnike lahko imamo za slabo skico kvadriranja pravokotnika. Če npr. označimo stranico vsakega kvadrata z neznanko, se morajo na stikih dolžine ujemati in dobimo sistem linearnih enačb, ki jim morajo te neznanke zadoščati. Mogoče je pokazati, da je dobljeni homogeni sistem vedno netrivialno rešljiv (glej spodaj). Včasih dobimo negativne rešitve ali rešitve z enakimi komponentami; tedaj kvadriranje ni mogoče. Včasih pa imamo srečo in najdemo pozitivne rešitve z različnimi komponentami; pravokotnik lahko kvadriramo.



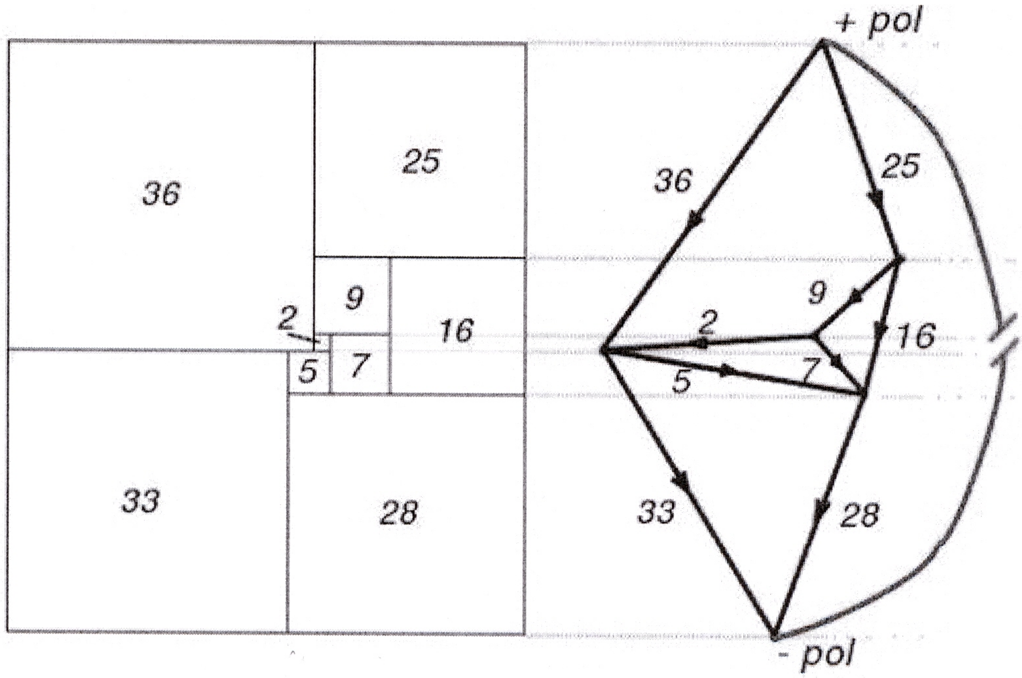
Slika 2: Algebraično reševanje popolnega pravokotnika velikosti 177 x 176, reda 11

Usmerjeni uteženi grafi

Nadaljnji korak je bila povezava kvadriranih pravokotnikov z usmerjenimi uteženimi grafi in s teorijo električnih omrežij. Vsaki vodoravni daljici iz razreda (sestavljeni iz nekaj stranic kvadratov) priredimo točko v grafu. Dve taki točki sta v grafu med seboj povezani, če v razrezu med tema dvema daljicama obstaja kvadrat. Vsako povezavo usmerimo od zgoraj navzdol in ji pripišemo utež velikosti stranice vmesnega kvadrata.

Električno omrežje

Temu usmerjenemu uteženemu grafu lahko damo pomen elktričnega tokokroga (glej sliko 3). Najvišja točka v grafu (zgornja stranica pravokotnika) naj bo pozitivni pol, najnižja (spodnja stranica pravokotnika) pa negativi pol. Vzdolž povezav teče električni tok z jakostjo, enako uteži. Za pretok veljata oba Kirchoffova zakona: zakon o ohranitvi energije (vsota vseh pritekajočih tokov v vsako točko, razen obeh polov, je enaka vsoti vseh odtekajočih tokov) ter zakon o seštevanju napetosti - razlike v potencialu električne energije - vzdolž poti.

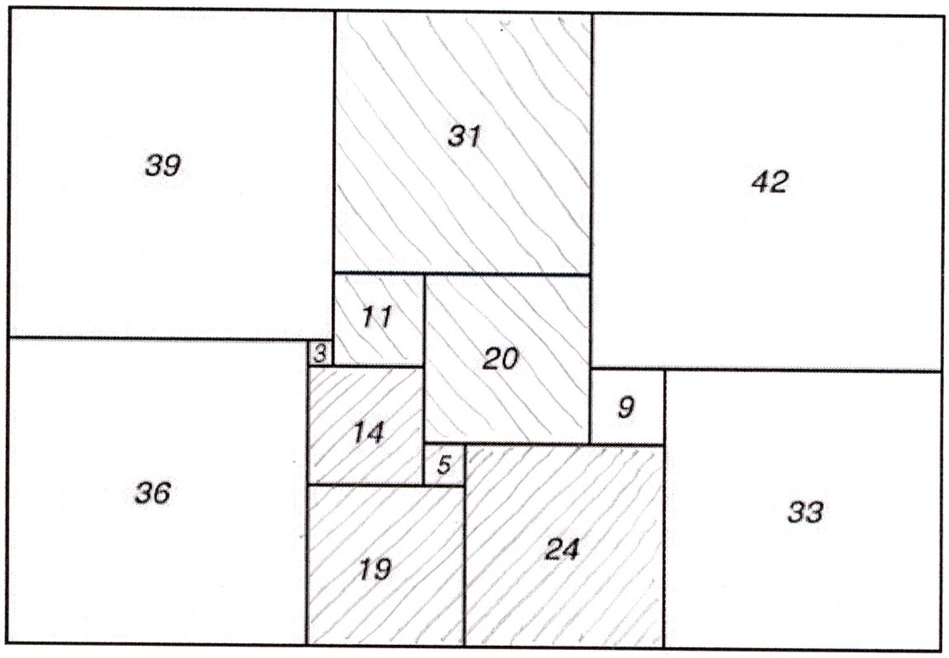


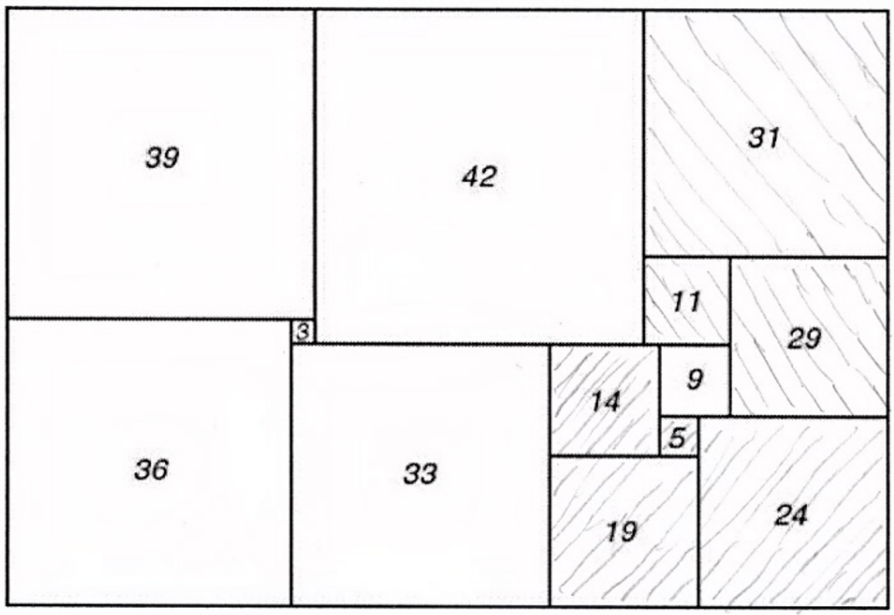
Slika 3: Popolni pravokotnik velikosti 69 x 61, reda 9, in usmerjen graf, oziroma električni tokokrog

Ker se hitro lahko prepričamo, da so upornosti R vseh povezav (vmesnih kvadratov) enake, ne glede na uteži (velikost kvadratov), lahko vzamemo kar $R = 1$, iz Ohmovega zakona vidimo, da $U = I$, torej tudi posamezne napetosti enake utežem; iz Kirchoffovega zakona pa sledi, da je vsota vseh algebraičnih, tj. usmerjenih, tokov v vsakem ciklu enaka nič. Vidimo, da se Kirchoffova zakona ujemata s prejšnjimi kompatibilnostnimi enačbami. Fizikalna interpretacija pa zagotavlja, da tok po električnem omrežju obstaja in je enolično določen, torej je tudi rešitev algebraičnih enačb, če obstaja, ena sama (do proporcionalnega faktorja). Prav tako vidimo, da je celotna upornost pravokotnika velikosti $X \times Y$ enaka Y/X, tj. razmerju stranic (pri kvadratu je 1).

Sestavljenka

Z uporabo grafov oziroma električnega vezja so iskali še druge popolne pravokotnike nizkih redov, vse do reda 13, ko je bil pravokotnik velikosti 112 x 75 še posebno zanimiv, ker je imel majhne stranice. Brooksu je bil tako všeč, da je iz njega napravil sestavljanko. Po mnogo poskusih je njegova mama uspela ta pravokotnik sestaviti, vendar je bila - na veliko presenečenje vseh - njena rešitev drugačna od prvotne.



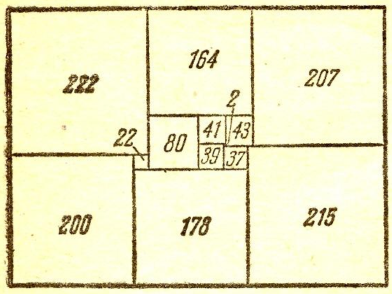


Sliki 4,5: Brooksov popolni pravokotnik velikosti 112 x 75, reda 13, in njegovi dve različici kvadriranja

Prvi popolni kvadrati

To je vzbudilo upanje, da bi morda našli dve različni kvadriranji istega pravokotnika, tako da bi bili vsi kvadrati (v obeh pravokotnikih) med seboj različni. Potem bi lahko s primernim sestavljanjem takoj našli kvadriran popoln kvadrat. Kasneje, leta 1940, je Stone tako res našel pravokotnik velikosti 593 x 422, tudi reda 13, ki se ga da kvadrirati na dva disjunktna načina (in tako iz obeh verzij sestaviti popoln kvadrat).

Istočasno je tudi Tutte pokazal, kako lahko kvadrat s stranico $1015 = 593 + 422$ popolno kvadriramo z uporabo samo 28 kvadratov različnih velikosti.



a) б)

Рис. 22.

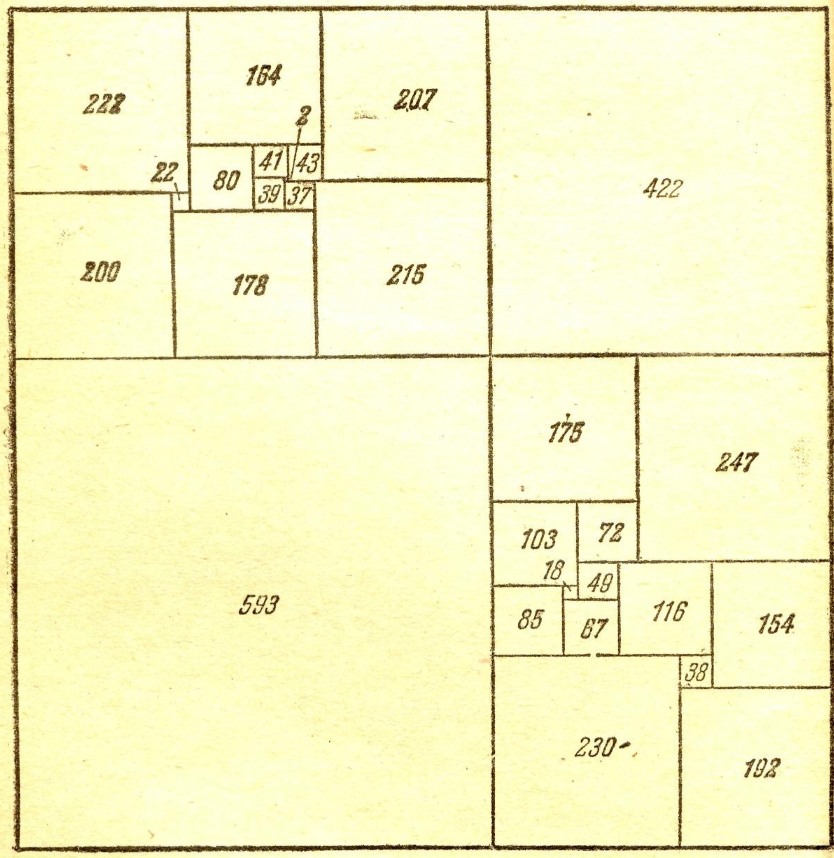
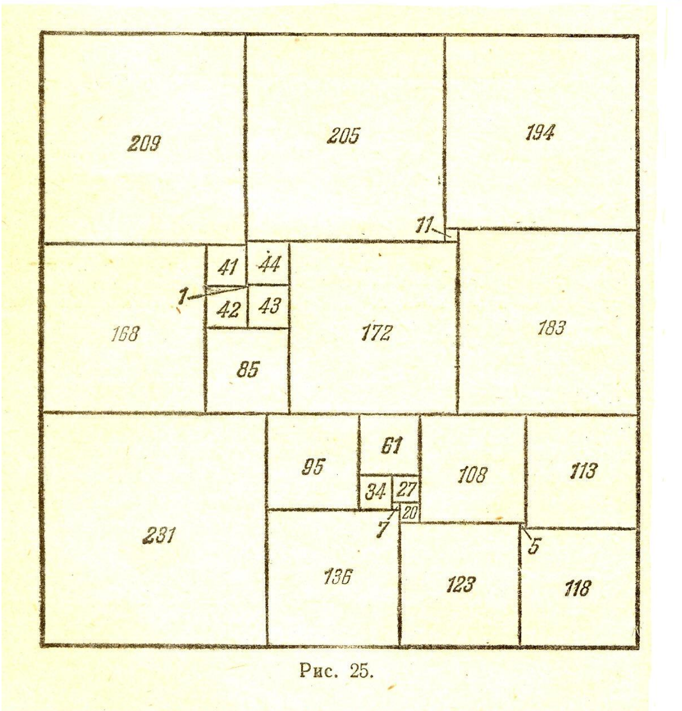


Рис. 23.

Slika 6: Popolni pravokotnik velikosti 593 x 422, reda 13, in njegovi dve različici kvadriranja, ter sestavljen popolni kvadrat

Opomba. Kvadrat s stranico 1015 sicer ni bil prvi popolni kvadrat. Leta 1939 sta Smith in Stone skupaj našla popolni kvadrat reda 69; istočasno in neodvisno od njiju je tak popolni kvadrat našel tudi Brooks. Nadaljnje Brooksove raziskave so pripeljale do popolnega kvadrata reda 39. Prvi popolni kvadrat pa je istega leta našel in 1940 objavil Roland Sprague iz Berlina. Vsi ti kvadrati so bili sestavljeni.

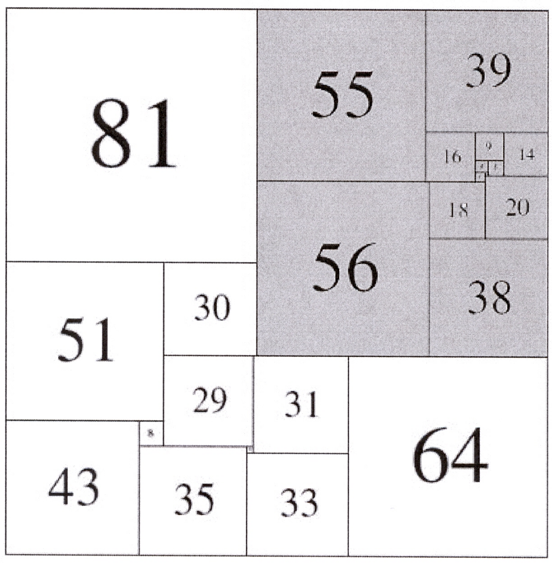
Vsi štirje prijatelji, Brooks, Smith, Stone in Tutte so leta 1940 našli še en sestavljeni popolni kvadrat velikosti 608, reda 26 (slika 7). Nekaj let je le-ta veljal za na najmanjši popolni kvadrat. Poleg tega so pokazali, da obstaja *enostaven* popolni kvadrat reda 55. Glede kvadriranih pravokotnikov pa so ugotovili, da ne obstaja noben popolni pravokotnik reda manj kot 9, pri redu 9 pa sta natanko dva: Moronov (slika 1) in tisti na sliki 3.



Slika 7: Popolni kvadrat s stranico 608 reda 26

Iskanje popolnih kvadratov najnižjega reda

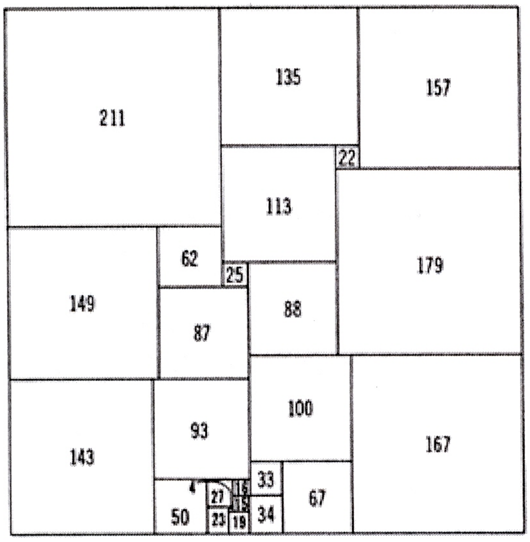
Leta 1948 je T.H.A. Willcocks, bančni uradnik iz Bristola, objavil sestavljen popolni kvadrat s stranico 175 reda 24. (Mnogo kasneje, šele leta 1982 so A.J.W. Duijvestijn in drugi dokazali, da je to sestvaljeni popolni kvadrat najnižjega reda.) Willcocks je istočasno odkril tudi enostaven popolni kvadrat reda 37 in z njim dolgo časa, vse do šestdesetih let prejšnjega stoletja, držal rekord med enostavnimi popolnimi kvadrati.



Slika 8: Willcocksov sestavljeni popolni kvadrat s stranico 175 reda 24

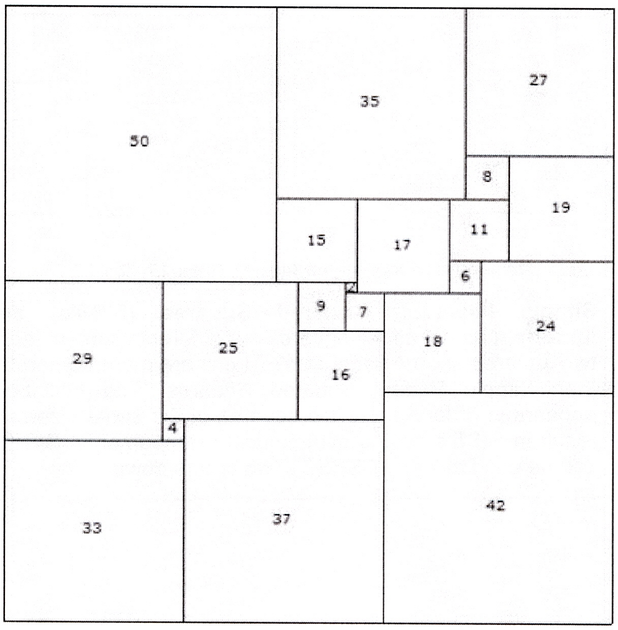
Po letu 1960 so začeli pri problemu kvadriranja kvadratov uporabljati računalnike. C.J. Bouwkamp, ki je že takoj po drugi svetovni vojni "peš"poiskal kvadrirane pravokotnike nizkih redov, je leta 1960 skupaj z Duijvestijnom in P. Medemo objavil katalog vseh enostavnih popolnih pravokotnikov reda manj kot 16. Leta 1964 je John Wilson z univerze v

Waterlooju (in Tuttejev študent) z uporabo računalnika podrl Willcocksov rekord. Našel je enostaven popolni kvadrat s stranico 503 reda 25.



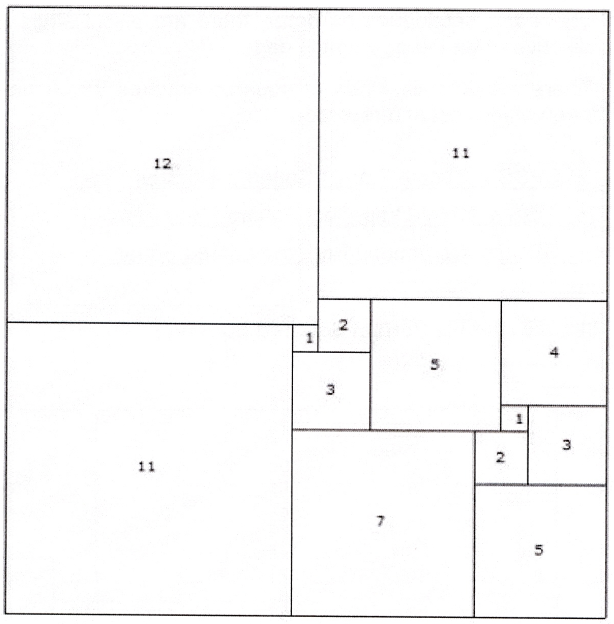
Slika 9: Wilsonov enostavni popolni kvadrat s stranico 503 reda 25

Nazadnje je leta 1978 Duijvestijn prav tako z računalnikom odkril kvadrat velikosti 112, ki pa je sestavljen le iz 21 manjših različnih kvadratov, teorj reda 21. Dokazali so, da je to minimalen enostaven in sploh minimalen popolni kvadrat, tj. popolni kvadrat najnižjega reda in z najmanjš0 stranico. Hkrati je edini reda 21.



Slika 10: Duijvestijnov enostavni popolni kvadrat s stranico 112 reda 21

To je doslej najboljši rezultat, kar se tiče enostavnih popolnih kvadratov. Seveda pa drugače zastavljena vprašanja dajo drugačne rezultate. Tako je npr. na naslednji sliki prikazan najmanjši *enostavni nepopolni* kvadrat reda 13 s stranico 23. Med pravokotniki je še več nejasnega. Tako npr. še niso našli enostavnega popolnega pravokotnika z najmanjšim redom *pri predpisanem* (*majhnem*) *razmerju njegovih stranic*. Je pa to npr. uspelo Duijvestijnu v kategoriji pravokotnikov oblike 2:1 in J. Skinnerju v kategoriji 3:1.



Slika 11: Duijvestijnov enostavni nepopolni kvadrat s stranico 23 reda 13

Kvadriranje pravokotnikov

Vrnimo se spet k pravokotnikom. Že Dehn je leta 1903 dokazal, da se da kvadrirati pravokotnik natanko takrat, ko ima stranici X in Y v racionalnem razmerju. Za splošno (ne nujno popolno kvadriranje) je to očitno; zanimivo pa je, da velja to tudi za popolna kvadriranja s samimi različno velikimi kvadrati. Torej lahko pravokotnik kvadriramo popolno, kakor hitro ga sploh lahko kvadriramo. Zaradi tega izreka so torej ves čas vedeli, da se kvadrat, ki ima stranici v razmerju 1:1, da popolno kvadrirati, le našli niso nobenega (niti niso do Morona leta 1925 našli nobenega popolnega pravokotnika).

Izrek 1. *Pravokotnik s stranicama X in Y je popoln natanko takrat, ko je $Y/X \in \mathbb{Q}$.*

Skica dokaza [1]. Denimo, da se pravokotnik da kvadrirati s samimi različno velikimi kvadrati. Potem je algebraični sistem kompatibilnostnih enačb rešljiv s pozitivnimi vrednostmi. To je homogeni sistem linearnih enačb, ki ima netrivialne rešitve. Z zveznostnimi argumenti (če eno stranico čisto malo povečamo, glej [1]) lahko izločimo primer, da bi imeli več kot enoparametrično družino. Preostane torej možnost, da je rešitev odvisna samo od enega parametra t. Ker sta v sistemu tudi neznanki X in Y (dolžini stranic), velja tudi $X = at$ in $Y = bt$. Toda v kompatibilnostnih enačbah so koeficienti cela števila, pri reševanju izvajamo racionalne operacije (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje), zato tudi v rešitvah nastopajo samo racionalna oziroma (z ustrezno zamenjavo parametra) cela števila. Tudi a in b sta celi števili in razmerje $Y/X = b/a$ je racionalno.

Dokaz v drugo smer je bolj zapleten. Najprej je jasno, da lahko vsak pravokotnik z racionalnim razmerjem stranic kvadriramo s samimi enakimi kvadrati. Potem pa moramo upoštevati, da lahko kvadrat popolno kvadriramo. Še več, v [1] je dokazano, da obstaja poljubno veliko različnih kvadriranj istega kvadrata z manjšimi kvadrati, tako da nobena dva manša kvadrata, ne glede v katerem kvadriranju nastopata, nista med seboj enaka. To storimo z enakimi kvadrati, na katere smo razdelili prvotni pravokotnik z racionalnim razmerjem stranic; za vsakega uporabimo drugo kvadriranje. Jasno je, da je na ta način popolno kvadriran tudi celoten pravokotnik.

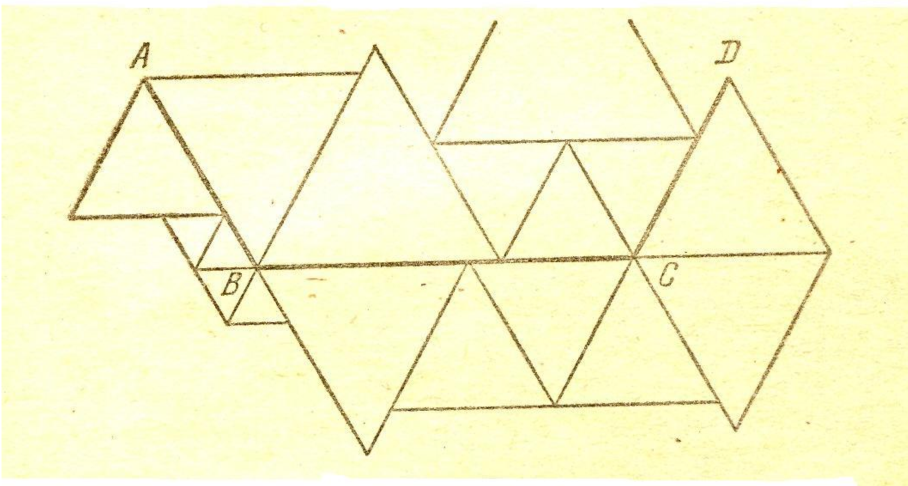
Trikotiranje trikotnika

Soroden problem dobimo, če namesto kvadratov, kot osnovnih likov, na katere želimo razbiti celoten lik, uporabimo enakostranične trikotnike. Denimo, da bi radi enakostranični trikotnik razdelili na enakostranične trikotnike različnih velikosti (ne glede, kako s o obrnjeni), se pravi, radi bi izvedli *popolno trikotiranje*. (Brez zahteve po različni velikosti je problem preveč preprost). Tu se takoj pojavijo različna zanimiva dejstva, npr.: Najmanjši od trikotnikov, ki se dotika ene od stranic velikega trikotnika, se jo lahko dotika samo v eni točki. To vidimo brez težav, podobno kot se vidi, da mora pri kvadriranju najmanjši izmed vseh kvadratov ležati znotraj pravokotnika ali kvadrata.

V nasprotju s problemom popolnega kvadriranja kvadrata, pa je problem popolnega trikotiranja enakostraničnega trikotnika negativno rešljiv: popolnega trikotiranja ni. Velja namreč še več.

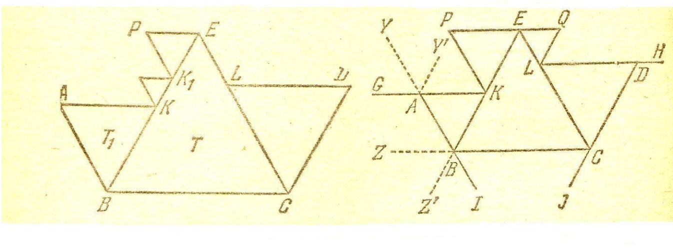
Izrek 2: *Konveksnega večkotnika ne moremo tlakovati z enakostraničnimi trikotniki različnih velikosti.*

Skica dokaza. Denimo, da nam je to uspelo. Iz treh daljic, med katerimi je kot 120^0, sestavljeno poligonsko črto imenujmo *žleb*, srednjo daljico pa *dno* žleba. V trokotiranem večkotniku poiščemo žleb z najkrajšim dnom.



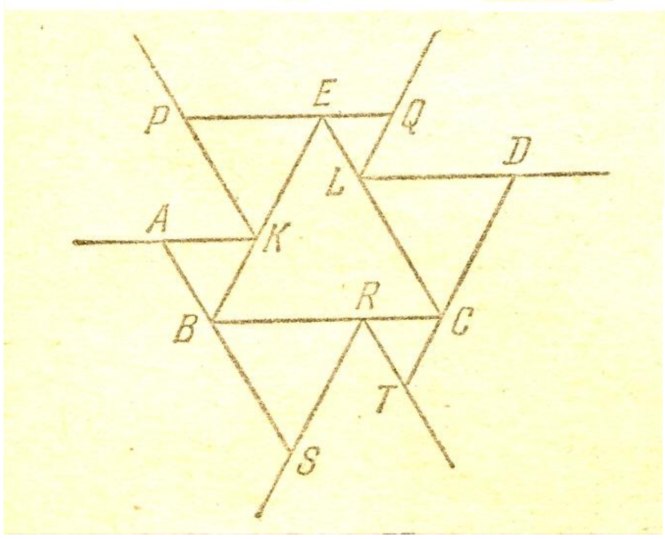
Slika 12: Žleb

Na dnu žleba lahko stoji samo en trikotnik (zakaj?), recimo mu *osnovni*, trikotnika ob njem, *levi* in *desni*, morata biti oba manjša (zakaj?). Ker so koti ob vrhu osnovnega trikotnika lahko le mnogokratniki 60^0, mora čez vrh potekati daljica, vzporedna z dnom žleba. Nadalje, na levem kraku osnovnega trikotnika, je med vrhom in manjšim *levim* trikotnikom lahko samo še en trikotnik (zakaj?), recimo mu *dopolnilni*. Enako velja na desni strani.



Slika 13: Skica k dokazu izreka 2

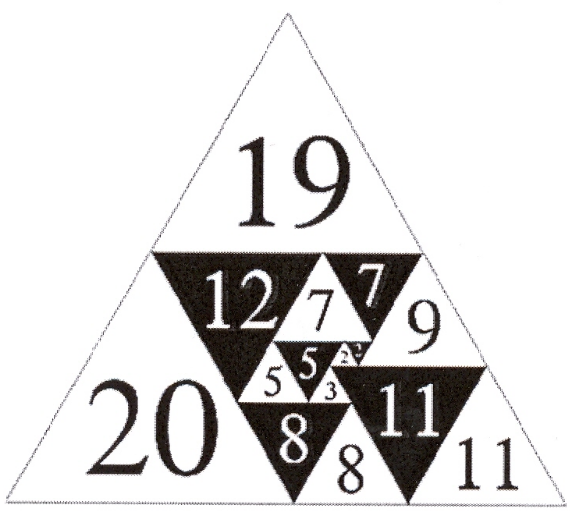
Z vrha *levega* trikotnika se mora vodoravnica nujno nadaljevati, ker smer navgor desno ali navzgor levo ni možna (zakaj?); enako se mora nadaljevati vodoravnica z vrha *desnega* trokotnika. Spodnji oglišči *osnovnega* trikotnika, tj. vogala žleba, ne moreta biti hkrati oglišči celotnega večkotnika, ker je le-ta konveksen. Iz njiju mora potekati še kakšna daljica ker pa podaljški stranic *osnovnega* trikotnika niso možni (zakaj?), poteka ta daljica lahko le v smeri stranice *levega* ali *desnega* trikotnika. To pa pomeni, da sta tudi ostali dve stranici *osnovnega* trikotnika dna dveh drugih minimalnih žlebov. Potem pa ista situacija velja okrog in okrog *osnovnega* trikotnika.



Slika 14: Skica k dokazu izreka 2

Če zdaj označimo dolžino stranice *osnovnega* trikotnika z a in seštejemo dolžine daljic, ki so ob vrhovih tega trikotnika vzporedne nasprotni stranici, vidimo, da je vsota enaka $3a$. Ker pa je vsaka od teh daljic hkrati dno nekega žleba, je njena dolžina vsaj a. Torej mora biti enaka natanko a. Odtod brez težav spoznamo, da sta npr. *levi* trikotnik in *dopolnilni desni* trikotnik enako velika. To pa je v nasprotju s predpostavko, da so velikosti vseh trikotnikov med seboj različne.

Zanimivo pa je, da enakostranični trikotnik lahko trikotiramo, če predpostavimo, da sta različno orientirana enako velika trikotnika različna. Primer prikazuje slika 12.



Slika 15: Trikotiranje enakostraničnega trikotnika s popustom

Kubiranje kvadra

V nasprotju s kvadriranjem pravokotnika s končno mnogo različno velikimi kvadrati trirazsežna analogija ni možna. Kubiranje kvadra s končno mnogo kockami različne velikosti ne obstaja. Torej tudi popolne kocke ni. To se zelo hitro vidi.

Denimo, da bi lahko nek kvader razrezali na same različno velike kocke. Ena od kock, ki ležijo na dnu kvadra, mora biti najmanjša. Na vrhu te kocke, mora ležati več kock manjše velikosti. Na vrhu najmanjše izmed njih so spet manjše kocke itd., brez konca. Končno kubiranje ne obstaja.

Podobno ne moremo kubirati polravnine, pač pa za cel trirazsežni prostor situacija ni jasna. V primerjavi s temje ravnino možno kvadrirati (glej [3]).

Literatura

[1] I.M. Jaglom, *Kak razrezat' kvadrat?*, Nauka, Moskva 1969.

[2] I.Vidav, *Kako razrežemo kvadrat na ostrokotne trikotnike*, v knjigi *Teorija števil in elementarna geometrija*, Knjižnica Sigma 62, DMFA, Ljubljana 1996.

[3] M. Hladnik, *Tlakovanje ravnine s kvadrati*, http://www.fmf.uni-lj.si/ hladnik/Sem/Sem2.html

[4] R. Honsberger, *Squaring the square*, http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/articles/honsberger2/index.html

[5] N. D. Kazarinoff, R. Weitzenkamp, *Squaring rectangles and squares*, The American Mathematical Monthly 80 (1973), 877-888.

[6] M. Komar, *Kvadriranje pravokotnikov in kvadratov*, seminarska naloga, FMF, april 1999.