

# Seminarske teme (s kratkimi vsebinami) za predmet Seminar 1

Štud. leto 2010/11

## Analiza

1. tema: **Konvergenca iteriranih eksponentov**

Literatura: The American Mathematical Monthly **111** (October 2004), 668-679.

Kaj pomeni  $a^{a^i}$ ? Pri katerem  $a$  konvergira? Kaj so Bernoullijevi in kaj Eulerjevi pari? Odvajanje inverznih funkcij, grafi. Analiza 1.

2. tema: **Alternirajoče in druge vrste**

Literatura: The American Mathematical Monthly **109** (February 2002), 187-188, 196-200.

Različni elementarni dokazi konvergence znanih vrst za  $\ln 2$  in  $\pi/4$  ter  $\pi^2/6$ .

3. tema: **Univerzalni izrek o tetivah**

Literatura: The American Mathematical Monthly **79** (May 1972), 468-475, R.P. Boas, Jr., *A Primer of Real Functions*, Carus Mathematical monograph 13, Wiley, New York 1960.

Ali ima lahko graf zvezne funkcije na realni osi vodoravne tetive poljubnih dolžin? Kaj pravi univerzalni izrek o tetvah? Bolj teoretična razprava.

4. tema: **Stirlingova formula in Stirlingova vrsta**

Literatura: The American Mathematical Monthly **116** (2009), 839-843,  
The American Mathematical Monthly **109** (2002), 388-390,  
The American Mathematical Monthly **115** (November 2008), 844-845.

Dva dokaza znane Stirlingove formule in izpeljava asimptotske Stirlingove vrste.

5. tema: **Darbouxove funkcije in funkcije Baireovega razreda ena**

Literatura: The American Mathematical Monthly **116** (2009), 451-455,  
The American Mathematical Monthly **117** (2010), 174-175.  
The American Mathematical Monthly **114** (2007), 242-246.

Kaj so Darbouxove funkcije? Karakterizacija odvodov med njimi.  
Kaj so Baireovi razredi funkcij? Analiza 1.

6. tema: **Različni dokazi osnovnega izreka algebre**

The American Mathematical Monthly **116** (January 2009), 67-68,  
The American Mathematical Monthly **116** (November 2009), 828-830.  
The American Mathematical Monthly **110** (August-September 2003), 620-623.

Poleg dveh kratkih dokazov z uporabo analize (realne in kompleksne), tudi dokaz z Lagrangevimi multiplikatorji in dokaz z uporabo linearne algebre.

7. tema: **Iracionalnost števila  $\pi$  in nekaterih trigonometričnih vrednosti**  
 Literatura: The American Mathematical Monthly **117** (April 2010), 360-362.  
 The American Mathematical Monthly **117** (June-July 2010), 553-557.

Kratek Nivenov dokaz iracionalnosti števil  $\pi$  in  $\pi^2$  z motivacijo. Integrali, ocene.

8. tema: **Kvazi Cauchyjeva zaporedja**  
 Literatura: The American Mathematical Monthly **117** (April 2010), 328-333.

Lastnosti realnih zaporedij, katerih difference konvergirajo k nič, zveza z enakomerno zveznimi funkcijami, posplošitev v splošnem metričnem prostoru.

9. tema: **Neenakost  $e < (1 + 1/n)^{n+0.5}$**   
 Literatura: The American Mathematical Monthly **117** (March 2010), 273-277.

Trije dokazi neenakosti (s Taylorjevo vrsto, z neenakostjo za konveksne funkcije, z drugo neenakostjo. Analiza 1.

10. tema: **Raabejev in drugi konvergenčni testi**  
 Literatura: The American Mathematical Monthly **115** (March 2008), 249-252,  
 The American Mathematical Monthly **115** (June-July 2008), 514-524.

Izboljšanje Raabejevega testa, Kummerjev in Gaussov test, višji kvocientni testi za vrste s pozitivnimi členi.

11. tema: **Trikotniki in vrsta  $\sum 1/n^2$**   
 Literatura: The American Mathematical Monthly **115** (October 2008), 745-752,  
 The American Mathematical Monthly **117** (April 2010), 352-353.

Uporaba geometrije (sinusnega izreka) in transformacij, ki ohranjajo ploščino, pri dokazu konvergence in izračunu vsote dane vrste.

12. tema: **Protiprimeri k integraciji po delih**  
 Literatura: Mathematics Magazine **83** (June 2010), 222-225.  
 Mathematics Magazine **81** (February 2008), 51-55.

Kratek prikaz, kako ne smemo vedno uporabiti formule za integracijo po delih.

13. tema: **Rešitev Eulerjevega baselskega problema z L'Hospitalom**  
 Literatura: Mathematics Magazine **82** (February 2009), 16-25.

Analiza 1, malo zgodovinsko obarvano.

14. tema: **Polinomi četrte stopnje in zlati rez**  
 Literatura: Mathematics Magazine **82** (June 2009), 197-201.

Dokaj elementarna obravnava posebnih polinomov, analiza in algebra.

## Algebra in teorija števil

### 1. tema: **Pascalove matrike**

Literatura: The American Mathematical Monthly **111** (March 2004), 189-197.  
The American Mathematical Monthly **109** (April 2004), 371-377.

Matrike  $S$  (simetrična),  $L$  (spodnje trikotna) in  $U$  (zgornje trikotna) z binomskimi koeficienti kot elementi. Štirje dokazi identitete  $S = LU$ .

### 2. tema: **Praštevila in nerazcepni polinomi**

Literatura: The American Mathematical Monthly **109** (May 2002), 452-458.

Dokaz izreka za  $b > 2$ : če je  $p = a_n b^n + \dots + a_0$  zapis praštevila v bazi  $b$ , je polinom  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  nerazcepen nad  $\mathbb{Q}$ .

### 3. tema: **Kvadriranje lune**

Literatura: The American Mathematical Monthly **107** (August-September 2000), 645-651, Expositiones Mathematicae **21** (2003), 179-183.

Geometrijski problem (katerim lunam (likom, omejenim z dvema krožnima lokoma) lahko z ravnilom in šestilom konstruiramo ploščinsko enak kvadrat?) se prevede na algebraični problem reševanja posebnih enačb.

### 4. tema: **Lucasova števila, matrike in problem deljivosti**

Literatura: K. Ball, *Strange Curves, Counting Rabbits, and other Mathematical Explorations*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2003.

Če je  $p$  praštevilo, in  $L_p$   $p$ -to Lucasovo število, je  $L_p - 1$  deljivo s  $p$ . Dokaz tega problema z uporabo matrik.

### 5. tema: **Predstavitev naravnih števil v obliki vsote kvadratov**

Literatura: The American Mathematical Monthly **112** (February 2005), 168-171.

Klasično vprašanje, kdaj se da naravno število zapisati kot vsota dveh (treh, štirih) kvadratov je tu malce posplošeno. Elementarni dokazi.

### 6. tema: **Eulerjev problem faktorizacije**

Literatura: The American Mathematical Monthly **116** (December 2009), 928-931.

Če se da liho naravno število  $n$  zapisati kot vsoto kvadratov dveh celih števil na več kot en način, je  $n$  sestavljeno število. Elementaren dokaz tega in posplošitev.

### 7. tema: **Steinerjeva elipsa in Siebeckov izrek**

Literatura: The American Mathematical Monthly **117** (Maj 2010), 452-454,  
The American Mathematical Monthly **115** (October 2008), 679-689.

Kje ležita ničli odvoda  $p'(z)$  kompleksnega polinoma tretje stopnje  $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ ? Zveza z neko elipso včrtano v trikotnik z oglišči  $z_1, z_2, z_3$  in njenima goriščema.

8. tema: **Dokaz neenakosti Minkowskega**

Literatura: The American Mathematical Monthly **115** (Maj 2008), 445-447.

Literatura: Mathematics Magazine **82** (June 2009), 202-207.

Izpeljati neenakost Minkowskega in nekatere sorodne neenakosti (Hölder, Milne).

9. tema: **Kdaj je  $n^2$  vsota  $k$  kvadratov?**

Literatura: Mathematics Magazine **83** (June 2010), 210-213.

Elementarna teorija števil, nekateri znani rezultati brez dokazov.

10. tema: **Uporaba 2-adičnih števil**

Literatura: Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I, AMS 1999, 99-109.

Osnove teorije 2-adičnih števil in uporaba pri geometrijskem problemu, ali se da kvadrat razdeliti na liho mnogo trikotnikov z enako ploščino.

11. tema: **Razčlenitve naravnih števil in Eulerjeva identiteta**

Literatura: Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II, AMS 1999, str. 39-49 in 141-151.

Dokaz Eulerjeve identitete  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{(3n^2-n)/2} + x^{(3n^2+n)/2})$  in povezave s številom razčlenitev (particij) naravnega števila  $n$  v vsoto končno mnogo naravnih števil.

12. tema: **Polinomi Čebiševa**

Literatura: Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II, AMS 1999, str. 51-61 in 161-165.

Definicija in zanimive lastnosti polinomov Čebiševa.

13. tema: **Iracionalnost in nerazcepnost**

Literatura: Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II, AMS 1999, str. 87-94 in 95-103.

Kriterij za nerazcepnost polinoma s celimi koeficienti in zato, da ima racionalno ničlo, z uporabo Newtonovega poligona.

14. tema: **Pascalovi heksagrami in kubične krivulje**

Literatura: Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II, AMS 1999, str. 105-115 in str. 117-129.

Vpeljava grupne strukture na kubično (eliptično) krivuljo, povezava s Pappusovim in Pascalovim izrekom.