

# Pravilni mrežni večkotniki

Milan Hladnik

Moderni izzivi poučevanja matematike  
24. september 2010



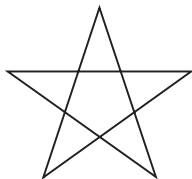
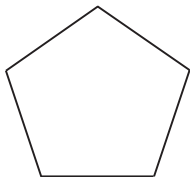
# Namen seminarja

Opozoriti na košček matematike, ki

- povezuje elementarno geometrijo in elementarno teorijo števil in
- je dostopen tudi učencem in dijakom ter zato primeren za delo v šoli

# Pravilni večkotnik

Ali je pravilni večkotnik enakokotni in enakostranični večkotnik?

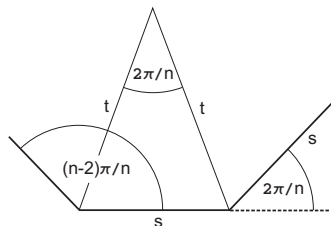


**Slika:** Enostavni in neenostavni enakostranični in enakokotni petkotnik

# Notranji in zunanji koti

$$\operatorname{tg} \alpha = (n-2)\pi/n$$

$$\operatorname{tg} \beta = 2\pi/n, \alpha = \pi - \beta$$

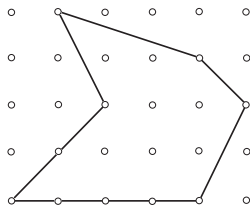


**Slika:** Notranji in zunanji koti v pravilnem  $n$ -kotniku

# Mrežni večkotnik

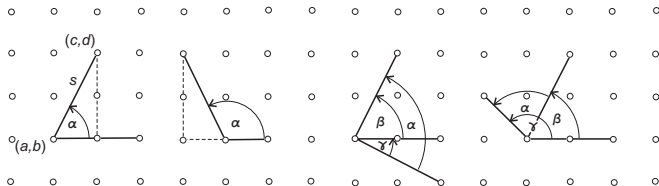
Kvadratna mreža:  $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{Z}\}$

Oglišča večkotnika so zdaj mrežne točke:



Slika: Enostavni mrežni večkotnik

# Mrežne daljice in mrežni koti



**Slika:** Dolžina in naklon mrežne daljice, tangens mrežnega kota

Osnovna dejstva:

- 1 Kvadrat dolžine mrežne daljice je celo število.

$$s^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$$

- 2 Naklon mrežne daljice je racionalen.

$$\operatorname{tg} \alpha = (d - b) / (c - a)$$

- 3 Tangens mrežnega kota je racionalen.

$$\operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{tg} \gamma \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta)$$

# Enakostranični trikotnik

## Trditev (1)

*Noben enakostranični trikotnik ni mrežni.*

Prvi dokaz (s kotom):  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ , ni racionalen

Drugi dokaz (s ploščino):  $A = s^2 \sqrt{3}/4$ , ni racionalna,

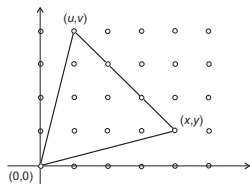
kot bi morala biti po formuli  $A = \pm \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$

ali po Pickovem izreku  $A = I + B/2 - 1$ ,

kjer je  $I$  število notranjih in  $B$  število robnih mrežnih točk.

# Dokaz s koordinatami

Naj bodo  $(0,0)$ ,  $(x,y)$ ,  $(u,v)$  oglišča najmanjšega mrežnega enakostraničnega trikotnika.



**Slika:** Najmanjši enakostranični mrežni trikotnik

## Številsko-teoretični dokaz

Pogoj enakostraničnosti:  $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$   
oziroma  $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 2(xu + yv)$ .

Odtod

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4(xu + yv).$$

Števila  $x, y, u, v$  niso vsa soda, vsota njihovih kvadratov je deljiva s 4, zato morajo biti vsa liha.

V tem primeru diofantska enačba  $x^2 + y^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$  nima rešitev, saj je na levi strani število, ki je deljivo z 2, ne pa s 4, na desni strani pa število, ki je deljivo s 4.

# Pravilni $mk$ -kotnik

## Trditev (2)

*Če ni pravilnega mrežnega  $m$ -kotnika, tudi ni pravilnega mrežnega  $mk$ -kotnika ( $k \in \mathbb{N}$ ).*

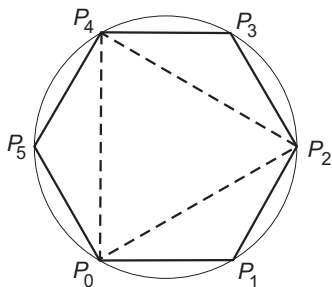
**Dokaz.** V vsakem  $mk$ -kotniku najdemo vpeti  $m$ -kotnik.

## Posledica (1)

*Noben pravilni šestkotnik ni mrežni.*

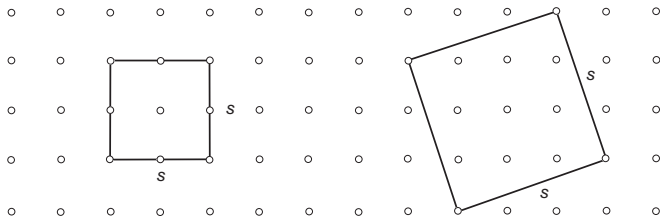


# Pravilni šestkotnik



Slika: Pravilni šestkotnik z vpetim enakostraničnim trikotnikom

# Mrežni kvadrat



Slika: Dva mrežna kvadrata

Poljubni mrežni točki sta lahko krajišči ene od stranic kvadrata.  
Zakaj?

# Stranica mrežnega kvadrata

- Če  $s^2 \notin \mathbb{N}$ , kvadrat ne more biti mrežni.
- Če je  $s^2 \in \mathbb{N}$ , je kvadrat lahko mrežni, in sicer v dveh primerih
  - $s \in \mathbb{N}$ ;  
tedaj je ploščina kvadrata popoln kvadrat, mrežni kvadrat ima vodoravne in navpične stranice.
  - $s \notin \mathbb{N}$ .  
Tedaj je  $s = \sqrt{n}$ ,  $n = a^2 + b^2$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ . Kvadrat ima zdaj poševne stranice.

# Vsota dveh kvadratov

Kdaj je naravno število  $n$  vsota kvadratov dveh celih števil?  
Kakšno je pravilo?

Zgledi:

$$1 = 1^2 + 0^2$$

$$2 = 1^2 + 1^2$$

3 NI vsota dveh kvadratov

$$4 = 2^2 + 0^2$$

$$5 = 2^2 + 1^2$$

6 NI vsota dveh kvadratov

...

7 NI vsota dveh kvadratov

$$8 = 2^2 + 2^2$$

$$9 = 3^2 + 0^2$$

$$10 = 3^2 + 1^2$$

11 NI vsota dveh kvadratov

12 NI vsota dveh kvadratov

# Izrek o vsoti dveh kvadratov

## Izrek

*Naravno število  $n$  je vsota dveh kvadratov natanko takrat, ko vsak prafaktor oblike  $p = 4m + 3$  nastopa v praštevilskem razcepu števila  $n$  le na sodo potenco.*

**Dokaz.** Zadostnost sledi iz naslednjih dejstev:

- (1)  $2 = 1^2 + 1^2$ , praštevilo oblike  $p = 4m + 1$  je vsota dveh kvadratov.
- (2) Če je  $m = x^2 + y^2$  in  $n = u^2 + v^2$ , je
$$mn = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (yu - xv)^2.$$
- (3) Če je  $n = x^2 + y^2$ , je  $nz^2 = (xz)^2 + (yz)^2$ .

## Nadaljevanje dokaza

Potrebnost sledi iz naslednjega premisleka:

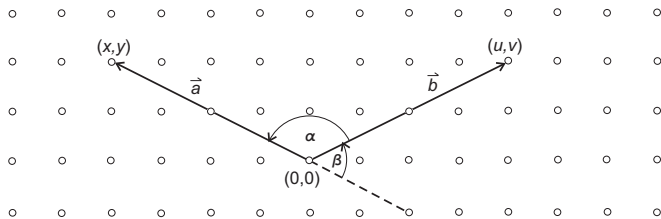
Če liho praštevilo  $p$  deli  $n = x^2 + y^2$  in ne deli  $x$  obstajata celi števili  $a$  in  $b$ , da je  $ap + bx = 1$ , in zato

$$b^2n = (bx)^2 + (by)^2 = (1 - ap)^2 + (by)^2,$$

tako da je  $-1$  kvadrat po praštevilskem modulu  $p$ , kar je mogoče le v primeru, ko je  $p$  oblike  $p = 4m + 1$ .

Če je torej  $n = x^2 + y^2$  in  $p = 4m + 3$  praštevilo, ki deli  $n$ , potem  $p$  deli  $x$  in  $p$  deli  $y$ , tako da  $p^2$  deli  $n$  in je  $n/p^2 = u^2 + v^2$  (vsota dveh kvadratov). Tako praštevilo  $p$  lahko nastopa le na sodo potenco.

# Kosinus mrežnega kota



Slika: Kot med enako dolgima mrežnima vektorjema

# Kosinus mrežnega kota je racionalen

## Trditev (3)

*V poljubnem mrežnem  $n$ -kotniku je kosinus vsakega notranjega in vsakega zunanjega kota z enako dolgima priležnima stranicama racionalen.*

**Dokaz.** Če je notranji kot  $\alpha$ , je zunanji  $\beta = \pi - \alpha$  in zato  $\cos \beta = -\cos \alpha$ , kosinus kota med enako dolgima vektorjema  $\vec{a} = (x, y)$  in  $\vec{b} = (u, v)$  s celimi koordinatami pa je

$$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{a}| |\vec{b}| = (xu + yv) / (x^2 + y^2),$$

torej racionalen.

# Pravilni osemkotnik

## Posledica (2)

*Noben pravilni osemkotnik ni mrežni.*

**Dokaz.** Zunanji kot pri pravilnem osemkotniku je  $2\pi/8 = \pi/4$ , zato njegov kosinus  $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$  ni racionalen.

## Posledica (3)

*Če je  $n = 2^k m$ ,  $k \geq 3$ ,  $m$  liho število, potem ni pravilnega mrežnega  $n$ -kotnika.*

**Dokaz.** Sledi iz prejšnje posledice in trditve 2.



# Tangens večkratnega kota

## Lema (1)

Naj bo  $X = \operatorname{tg} \theta$  in  $n$  **liho** celo število. Potem obstajajo cela števila  $c_n^i$  in  $d_n^i$ , tako da velja

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{c_n^1 X - c_n^3 X^3 + \dots + (-1)^{(n-1)/2} X^n}{1 - d_n^2 X^2 + \dots + (-1)^{(n-1)/2} d_n^{n-1} X^{n-1}}.$$

**Dokaz.** V de Moivreovi formuli

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

uporabimo binomski obrazec, izenačimo realna in imaginarna dela na levi in desni strani enakosti, izračunamo  $\sin n\theta$  in  $\cos n\theta$  kot polinoma v  $\cos \theta$  in  $\sin \theta$  ter  $\operatorname{tg} n\theta$  kot racionalno funkcijo v  $X = \operatorname{tg} \theta$ .

Koeficienti  $c_n^i = \binom{n}{i}$  so lihi,  $d_n^i = \binom{n}{i}$  pa sodi binomski koeficienti.



# Pravilni petkotnik in pravilni sedemkotnik

## Posledica (4)

*Pravilni petkotnik in pravilni sedemkotnik nista mrežna večkotnika.*

**Dokaz.** Če je  $\theta = 2\pi/5$ , je  $\operatorname{tg} 5\theta = 0$ ; po formuli iz leme 1 velja  $X^5 - 10X^3 + 5X = 0$ . Iz bikvadratne enačbe  $X^4 - 10X^2 + 5 = 0$  dobimo  $X^2 = 5 \pm 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ . Potem tudi  $X \notin \mathbb{Q}$ , torej  $\operatorname{tg} \theta \notin \mathbb{Q}$ .

Če pa je  $\theta = 2\pi/7$ , imamo po formuli iz leme 1 podobno kot prej  $X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 7X = 0$  oziroma  $X^6 - 21X^4 + 35X^2 - 7 = 0$  ali  $Y^3 - 21Y^2 + 35Y - 7 = 0$ , odkoder spet takoj vidimo, da  $Y = X^2$  in torej tudi  $X = \operatorname{tg} \theta$  ni racionalno število.



# Glavni izrek

## Izrek (1)

*Pravilen  $n$ -kotnik je lahko mrežni večkotnik, če in samo če je  $n = 4$ .*

**Dokaz.** Naj bo  $n$  liho število. Kako je v primeru  $n = 3, 5$  in  $7$ , že vemo. Denimo torej, da je  $n \geq 9$  in  $X = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(2\pi/n)$ . Po formuli iz leme 1 imamo za  $X$  enačbo

$$0 = \operatorname{tg} n\theta = X(c_n^1 - c_n^3 X^2 + \dots + (-1)^{(n-1)/2} X^{n-1}).$$

Pozitivne racionalne rešitve te enačbe morajo torej biti cele in deliti koeficient  $c_n^1$ , ki je celo število. Toda zaradi  $n \geq 9$  je zdaj  $0 < \operatorname{tg}(2\pi/n) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$  in racionalnih rešitev ni.



## Nadaljevanje dokaza

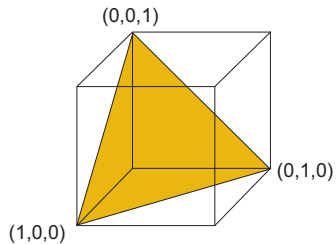
Naj bo zdaj  $n$  sodo število, npr.  $n = 2^r m$ , kjer je  $m$  liho število.

Če je  $m > 1$ , obstaja v pravilnem mrežnem  $n$ -kotniku  $S$  lihi pravilni mrežni  $m$ -kotnik, kar po prvem delu dokaza ni mogoče.

Če pa je  $m = 1$  in  $n = 2^r$ , mora biti  $r < 3$ , sicer bi lahko našli v  $S$  pravi mrežni osemkotnik, kar tudi vemo, da ni mogoče (posledica 2). Edina možnost, ki ostane, je  $r = 2$  ozroma  $n = 4$ .

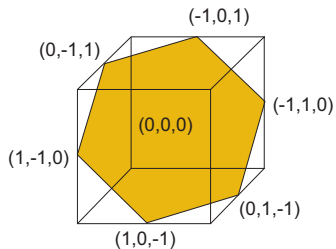
**Opomba.** Na prostorski mreži so poleg kvadratov od pravih večkotnikov lahko samo še enakostranični trikotniki in pravilni šestkotniki. Dokaz je čisto podoben zgornjemu.

# Enakostranični trikotnik na prostorski mreži



Slika: Enakostranični trikotnik na prostorski mreži

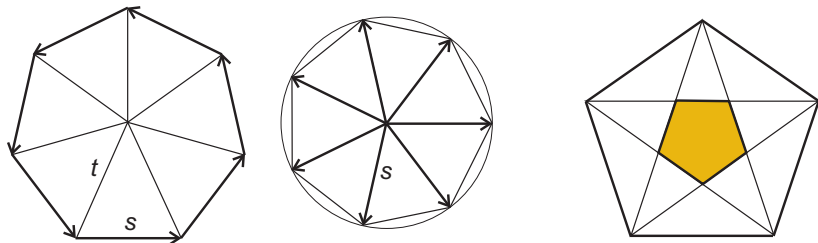
# Pravilni šestkotnik na prostorski mreži



Slika: Pravilni šestkotnik na prostorski mreži

## Preprost geometrijski dokaz glavnega izreka

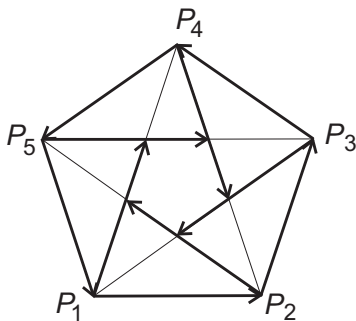
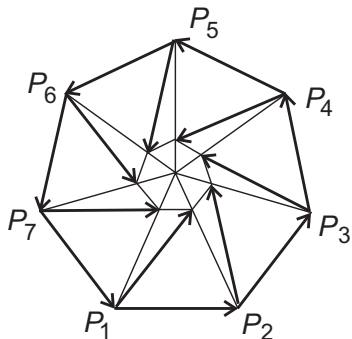
Predpostavimo, da obstajajo pravilni mrežni  $n$ -kotniki v primeru  $n \geq 5$  in  $n \neq 6$ . Med njimi izberemo minimalnega. Če je  $n \geq 7$ , je na sliki  $t > s$ , zato zamenjajmo  $t$  z  $s$ , tj. s premikom nanesimo zaporedne stranice pravilnega  $n$ -kotnika iz izhodišča, pa dobimo manjši pravilni mrežni večkotnik. Za  $n = 5$  pa vrišemo diagonale, ki tvorijo manjši pravilni mrežni večkotnik.



**Slika:** Geometrijski dokaz, da mrežni  $n$ -kotnik za  $n \geq 5$  in  $n \neq 6$  ni možen

## Alternativni geometrijski dokaz glavnega izreka

Za vsak  $n \geq 5$ , razen za  $n = 6$ , premaknemo vsako oglišče  $P_i$  za vektor  $P_{i+1}P_{i+2}$  in ponovno najdemo manjši pravilni  $n$ -kotnik). To deluje za vse  $n \geq 5$ , razen za  $n = 6$ , ko vsa premaknjena oglišča sovpadajo.



**Slika:** Drugi dokaz, da mrežni  $n$ -kotnik za  $n \geq 5$  in  $n \neq 6$  ni možen

# Enakostranični mrežni večkotniki

## Trditev (4)

*Če je  $n$  liho število, ne obstaja enakostranični mrežni  $n$ -kotnik.*

**Dokaz.** Denimo, da taki  $n$ -kotniki obstajajo. Med njimi izberimo minimalnega.

Na zaporednih straneh konstruirajmo vektorje  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ , ...,  $\vec{v}_n = (x_n, y_n)$ , tako da je  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0}$  in torej tudi  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  ter  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$ .

Ker so vse stranice enake, npr.  $s$ , je

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2 = s^2 \in \mathbb{N}.$$



## Nadaljevanje dokaza

Potem imamo

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 = \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + \dots + (x_n^2 + y_n^2) + \\ &2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_{n-1}y_n) = \\ &ns^2 + 2t, \end{aligned}$$

kjer je  $t = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_{n-1}y_n$  očitno sodo število.

Torej je  $ns^2 = -2t$ .

Ker je  $n$  liho število, je  $s^2$  sodo število, deljivo s 4; torej sta zaradi enakosti  $x_i^2 + y_i^2 = s^2$  za vsak  $i$  koordinati  $x_i$  in  $y_i$  obe sodi. To pa je v nasprotju z minimalnostjo  $n$ -kotnika.

# Številsko-teoretični dokaz glavnega izreka

## Posledica (5)

*Če ima  $n$  lihi delitelji, ni pravega mrežnega  $n$ -kotnika.*

## Posledica (6)

*Pravilni mrežni  $n$ -kotnik obstaja samo v primeru  $n = 4$ .*

**Dokaz.** Pravilni mrežni  $n$ -kotnik je enakostranični mrežni  $n$ -kotnik, kar je po zgornji posledici možno samo v primeru  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Toda za  $k \geq 3$  to preprečuje posledica 3, zato preostane samo še primer  $n = 4$ , ko pa res obstaja veliko mrežnih kvadratov.

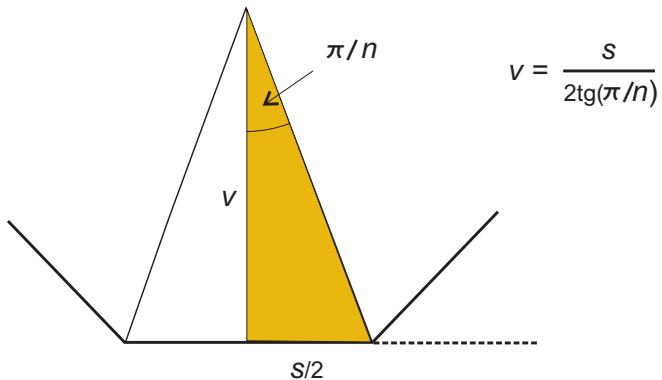
## Ideja še enega dokaza glavnega izreka

Ker se da vsak mrežni večkotnik triangulirati z mrežnimi trikotniki, ima racionalno ploščino.

Za pravilni  $n$ -kotnik s stranico  $s$  je ploščina enaka




$$A = \frac{ns^2}{4\operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Če pokažemo, da je  $\operatorname{tg}(\pi/n)$  racionalno število samo v primeru  $n = 4$ , je dokaz končan. (To pa je nekoliko težje, spet moramo uporabiti teorijo števil.)



Slika: Ploščina pravilnega  $n$ -kotnika

## Nadaljnje branje

-  J.D. Sally, P.J. Sally, *Roots to Research, A Vertical Development of Mathematical Problems*, Amer. Math. Soc. 2007.
-  M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 1998.
-  M. Hladnik, *Pravilni mrežni večkotniki*, prosojnice na spletu <http://www.fmf.uni-lj.si/hladnik/SSUM/SSUM10.htm>

# ROOTS TO RESEARCH



A Vertical  
Development  
of  
Mathematical  
Problems

Judith D. Sally  
Paul J. Sally, Jr.



Martin Aigner · Günter M. Ziegler

# Proofs from THE BOOK

Hvala!

Če boste želeli, lahko še nadaljujemo v tej smeri.

