

MATEMATIKA 1

Shema predavanj 2009/10

Milan Hladnik

1. teden (SREDA 7.10.2009, ČETRTEK 8.10.2009)

Uvod, številske množice in operacije med njimi, funkcije ali preslikave

Množice in elementi: $x \in A$, številske množice $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 $-2 \notin \mathbb{N}, -2 \in \mathbb{Z}, 1/2 \notin \mathbb{Z}, 1/2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Zapis: Npr. $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 3\}$, karakteristična lastnost

Inkluzija: \subset , podmnožice, npr. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ ali $\{3\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$,
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Operacije: presek $A \cap B$, unija $A \cup B$, razlika $A \setminus B$, diagrami,
zgled $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$.

kartezični produkt $A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$, npr. koordinatna ravnina
 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, pravokotni koordinatni sistem.

Funkcije ali preslikave: Predpis, $f: A \rightarrow B, x \mapsto y, x = f(x)$

A domena, B kodomena

x neodvisna spremenljivka, argument, original

$y = f(x)$ odvisna spremenljivka, vrednost funkcije f pri argumentu x , slika elementa x s funkcijo f

Graf funkcije: $G_f = \{(x, f(x)); x \in A\} \subset A \times B$, zgleđa

Zaloga vrednosti: $Z_f = \{f(x); x \in A\} \subset B$

Surjektivna funkcija, surjektivna: $Z_f = B$, zgleđi

Injektivna funkcija, injektivna: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, zgleđi

Bijektivna funkcija, bijektivna: surjektivna + injektivna, zgleđi

Kompozitum funkcij: $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C \implies h = g \circ f: A \rightarrow C$, definirana z
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, v splošnem $f \circ g \neq g \circ f$ tudi če oba obstajata,
zgleđi $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$ ali diskretni

2. teden (SREDA 14.10.2009, ČETRTEK 15.10.2009)

Funkcije ali preslikave, kombinatorika

Inverzna funkcija: bijektivna (ponovitev), definicija inverzne preslikave, zgleđi

Enaka moč dveh množic: $A \sim B$, če obstaja bijektivna iz A na B

Končna množica: $\emptyset \neq A$ je končna, če obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, sicer neskončna.

Pregled osnovnih kombinatoričnih operacij

Variacije s ponavljanjem n elementov na m mestih: n^m (število vseh preslikav),

zglede $n = 2, m = 3$ ($aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb$)

Variacije brez ponavljanja n elementov na m mestih ($m \leq n$): $n(n-1)\dots(n-m+1)$ (število vseh injektivnih preslikav), zglede $n = 3, m = 2$ (ab, ac, ba, bc, ca, cb)

Permutacije brez ponavljanja n elementov na n mestih ($m = n$): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (število vseh bijektivnih preslikav), zglede $n = 3$ ($abc, acb, bac, bca, cab, cba$)

Kombinacije brez ponavljanja n elementov na m mestih ($m \leq n$): $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (število vseh strogo naraščajočih preslikav ali število vseh podmnožic z m elementi v množici z n elementi),

zglede $n = 3, m = 2$ (ab, ac, bc)

Binomski simbol $\binom{n}{m}$, lastnosti: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$, Pascalov trikotnik

Binomski obrazec: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

Neskončna množica naravnih števil: Presenetljive lastnosti

Zgledi: $\mathbb{N} \sim \mathbb{S}, \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}, \mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, (za vaje) neskončni hotel (izpustil)

3. teden (SREDA 21.10.2009, ČETRTEK 22.10.2009)

Matematična indukcija, realna števila

Matematična indukcija: \mathbb{N} je najmanjša neskončna množica, induktivna množica (iz $1 \in A$ in $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ sledi $A = \mathbb{N}$, princip matematične indukcije ($L(n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$))

Zgledi: vsota prvih n števil, deljivost s 3 izraza $n^3 + 2n$, vsota prvih lihih števil

Realna števila kot algebraični sistem: vsota in produkt, osnovne lastnosti reševanje enačb.

Urejenost realnih števil: $a < b, a = b$, ali $a > b, a \leq b, a \geq b$

Absolutna vrednost realnega števila: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$, geometrijski pomen

$|x - y|$ razdalja med x in y .

Zglede: $|x - 2| < 1, 2|x| < |x + 1| + 1$

Definicija intervalov in poltrakov

Navzgor omejena množica: Obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $x \leq M$ za vsak $x \in A$ (M zgornja meja)

Navzdol omejena množica: Obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $x \geq m$ za vsak $x \in A$ (m spodnja meja)

Najmanjša zgornja in največja spodnja meja: $\sup A, \inf A$, vedno obstajata v \mathbb{R} , če je množica A neprazna in navzgor (navzdol) omejena (Dedekindov aksiom).

Arhimedova lastnost: Za vsak $a > 0$ in $b \in \mathbb{R}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $na > b$.

Zglede: Poiščite $\sup A$ in $\inf A$ za množico $A = \{n/(n+1); n \in \mathbb{N}\}$.

4. teden (SREDA 28.10.2009, ČETRTEK 29.10.2009)

Kompleksna števila

Definicija kompleksnih števil: $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ kanonični zapis, $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ realni in imaginarni del, i imaginarna enota ($i^2 = -1$), upodabljanje v koordinatni ravnini

Konjugiranje in absolutna vrednost: $\bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, na sliki geometrijsko, lastnosti

Vsota kompleksnih števil: definicija $z = x + iy$, $w = u + iv$, $z + w = (x + u) + i(y + v)$, lastnosti, geometrijska interpretacija (paralelogramsko pravilo), trikotniška neenakost, razlika

Produkt kompleksnih števil: definicija $z = x + iy$, $w = u + iv$, $zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$, zglede, lastnosti, zveza z absolutno vrednostjo, konjugiranjem in vsoto, deljenje $w/z = w\bar{z}/|z|^2$, zglede

Polarni zapis kompleksnega števila: $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, povezave s kartezičnimi koordinatami, formule, geometrijska interpretacija produkta:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

De Moivreova formula: $z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$, velja za vsak $n \in \mathbb{Z}$, zglede: $(-1 + i\sqrt{3})^{10}$, $(-1 + i\sqrt{3})^{-5}$

Reševanje binomske enačbe: $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, $w = R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$, rešitev iščemo v obliki $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, dobimo $r = R^{1/n}$, $\phi_k = (\Phi + 2k\pi)/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
Zgledi: $z^2 + 1 = 0$, $z^3 = 1$, $z^4 = 1$, $z^5 = 1$, $(z^3 - 1)^2 + 1 = 0$ (dve enačbi: $z^3 = 1 + i$, $z^3 = 1 - i$)

5. teden (SREDA 4.11.2009, ČETRTEK 5.11.2009)

Matrike, determinante

Matrike: Definicija (shema števil, preslikava), red, enakost red $A = \text{red } B$ in $a_{ij} = b_{ij}$

Vsota: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, kadar red $A = \text{red } B$, zgledi.

Produkt: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, kadar $n = p$, rezultat $m \times q$, zgledi.

Kvadratne matrike ($m = n$), Običajne lastnosti (asociativnost, distributivnost) čudne lastnosti produkta: $AB \neq BA$, $A^2 = 0$, čeprav $A \neq 0$, $AB = 0$, čeprav $A, B \neq 0$.
Diagonalna in skalarna matrika, identična matrika

Množenje s skalarjem: λA , npr. $\lambda I =$ skalarna matrika z λ po diagonali

Transponirana matrika: A^T

lastnosti $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

Inverzna matrika: A^{-1} , definicija $A^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\text{zglede } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Obrnljive matrike so tiste, ki imajo inverz, nima ga vsaka matrika, npr. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Lastnosti inverza: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Determinante: $A(i|j)$ podmatrika brez i -te vrstice in j -tega stolpca

Induktivna definicija: $n = 1$, $\det A = a_{11}$, $n > 1$: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$

Kofaktorji: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$

Zgledi za računanje determinant, pravilo za 2×2 matrike, Sarrusovo pravilo za 3×3

6. teden (SREDA 11.11.2009, ČETRTEK 12.11.2009)

Adjungiranka, inverz in Cramerjev sistem

Lastnosti determinant: (1) po drugi vrstici: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

(2) cela vrstica enaka 0, sledi \det enaka 0

(3) $B = A$, ena vrstica pomnožena s k , sledi $\det B = k \det A$

(4) zamenjava dveh vrstic, sledi $\det B = -\det A$

(5) dve vrstici enaki, sledi \det je enaka 0

(6) razvoj s kofaktorji k elementom vzporedne vrstice $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$

(7) vrstica pomnožena s k in prišteta vzporedni vrstici, sledi $\det B = \det A$

(8) $\det(A^T) = \det A$

(9) Det zgornje (ali spodnje) trikotne matrike je produkt diagonalnih elementov

(10) $\det(AB) = \det A \det B$

Zgledi računanja determinant po različnih metodah

Adjungirana matrika: $A = (a_{ij})$, $\text{adj } A = (A_{ij})^T = (A_{ji})$

Trditev: $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$

Izrek: Matrika A je obrnljiva natanko takrat, ko je $\det A \neq 0$;

v tem primeru je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$,

dokaz

$$\text{Zgled } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cramerjevo pravilo: $x = A^{-1}b$ oziroma $x = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)b$, od tod dobimo pri matriki A_i , ki ima i -ti stolpec zamenjan z desno stranjo $x_i = \det A_i / \det A$, $i = 1, 2, \dots, n$

Zgled

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 2 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

7. teden (SREDA 18.11.2009, ČETRTEK 19.11.2009)

Splošni sistemi linearnih enačb

Sistem enačb: $Ax = b$, Gaussov postopek, uporaben tudi za računanje inverza, različni zgledi z Gaussovo metodo

Zgledi

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 2z &= 3 && \text{ena rešitev} \\ -x + 4y - 6z &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x &\quad -z = 2 && \text{ni rešitve} \\ -x + y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x &\quad -z = 2 && \text{neskončno rešitev} \\ -x + y + 3z &= -3 \end{aligned}$$

Splošni sistemi linearnih enačb: osnovna A in razširjena \tilde{A} matrika sistema, rang matrike $r(A)$

Osnovni izrek o eksistenci rešitev: rešljiv, če $r(\tilde{A}) = r(A)$, v tem primeru: ena rešitev, če $r = n$, neskončno, če $r < n$ ($n - r$ parametrov)

Zgled (obravnavati v odvisnosti od parametra a):

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay - z &= 1 \\ ax + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Homogeni sistemi: posebnosti (vedno rešljiv, netrivialno le, če $r < n$)

Zgledi

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0, (x, y, z)^T = z(-1, 1, 1)^T \text{ (en parameter)} \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - y + 2z &= 0 \\
-2x + 2y - 4z &= 0, (x, y, z)^\top = y(1, 1, 0)^\top + z(-2, 0, 1)^\top \text{ (dva parametra)} \\
-x + y - 2z &= 0 \\
x - y + 2z &= 0 \\
x + 2y - z &= 0, (x, y, z)^\top = (0, 0, 0)^\top \text{ (ena sama - trivialna - rešitev)} \\
x + y + z &= 0
\end{aligned}$$

Linearna neodvisnost stolpcev in obrnljivost matrike

8. teden (SREDA 25.11.2009, ČETRTEK 26.11.2009)

Prvi delni izpit, vaje iz sistemov linearnih enačb

Prvi delni izpit: 8-10 praktični del, 10-11 teoretični del, 11-12 poprava teoretičnega dela

9. teden (SREDA 2.12.2008, ČETRTEK 3.12.2009)

Vektorji v trirazsežnem prostoru

Grafični prikaz: vektor \vec{a} kot usmerjena daljica, dolžina $\|\vec{a}\|$

Vsota in produkt s skalarjem: trikotniško in paralelogramsko pravilo, nasprotni vektor, grafična upodobitev

lastnosti vsote: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + 0 = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$,
trikotniška neenakost $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

lastnosti množenja s skalarjem:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}, (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}), 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Linearna odvisnost in neodvisnost: nekolinearnost v ravnini, nekomplanarnost v prostoru, uporaba (težišče trikotnika)

Koordinatni sistem v prostoru: točke, razdalja, krajevni vektorji $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$

baza prostora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

Če je kvadratna matrika A obrnljiva, so njeni stolpci linearno neodvisni in obratno.

Skalarni produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, npr. $\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\vec{a}\|^2$;

lastnosti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ in } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

Zgledi: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-3, 1, 0)$,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$

Formula: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi$, geometrijsko, paralelogramska enakost:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

Pravokotnost: $\vec{a} \perp \vec{b}$, če $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, Pitagorov izrek: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$
za $\vec{a} \perp \vec{b}$

Pravokotna projekcija $pr_a(\vec{b}) = ((\vec{a} \cdot \vec{b}) / \|\vec{a}\|^2) \vec{a}$

Naloga: izračunati $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + \vec{b})$, če je $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ in $\phi = \pi/3$.

10. teden (SREDA 9.12.2009, ČETRTEK 10.12.2009)

Vektorski in mešani produkt, premica in ravnina v prostoru

Vektorski produkt: $\vec{a} \times \vec{b}$, geometrijska definicija

Lastnosti: 1. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi$, 2. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$, 3. pozitivno orientirana trojica $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$, druge lastnosti:

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
 $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ in \vec{b} kolinearna, npr. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

Izražava s komponentami: bazični vektorji $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$,
 $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

vektorski produkt kot determinanta $\vec{a} \times \vec{b} = \det[(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1), (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})]$

Zgledi: 1. Izračunati $\vec{a} \times \vec{b}$, če je $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$

2. Izračunati $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 5\vec{b})$, če je $\vec{a} = (-1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 3, -1)$

3. Izračunati ploščino trikotnika z oglišči $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(4, -1, 0)$

Mešani produkt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, prostornina (ali negativna prostornina) pralelepipeda,

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$

Naloga: Izračunati prostornino pralelepipeda, napetega na $\vec{a} = (-2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$,
 $\vec{c} = (-3, 0, 1)$

Premica: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}$, $\frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1}$

Naloga: Enačba premice skozi točki $A_0(0, 1, -2)$, $A_1(3, -2, 1)$

Ravnina: $\vec{r} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, normala $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{r} \cdot \vec{n} = r_0 \cdot \vec{n} = d$, $ax + by + cz = d$

Naloga: Enačba ravnine skozi $A_0(3, 1, -2)$, $A_1(3, -2, 1)$ in $A_2(-1, 0, 1)$, $x + 2y + 2z = 1$

Poiskati presečišče (a) dveh ravnin ($x - 2y - 4z = -3$, $2x + y - 3z = -1$), (b) treh ravnin (še $x - y + z = -3$)

11. teden (SREDA 16.12.2009, ČETRTEK 17.12.2009)

Zaporedja

Zaporedje kot preslikava: $n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, lastnosti: omejenost in monotonost

zglede: $x_n = 1$, $x_n = (-1)^n$, $x_n = n$, $x_n = 1/n$, $x_n = n/(n+1)$, $x_n = 2^n$

Podanost zaporedja: eksplicitno (npr. $x_n = 2^n$), rekurzivno (npr. $x_{n+1} = 2x_n$, $x_0 = 1$)

Zgled: aritmetično zaporedje $x_{n+1} = x_n + d$, geometrijsko zaporedje $x_{n+1} = kx_n$, $k \in \mathbb{R}$

Lastnosti: eksplicitna oblika splošnega člena, vsota prvih n členov

Absolutna vrednost realnega števila, lastnosti, definicija epsilonske okolice $V_\epsilon(a)$

Zgled: Koliko členov zaporedja $x_n = n/(n+1)$ je v $V_\epsilon(0)$, $V_\epsilon(1)$?

Stekališče in limita: definiciji, zveza, lastnosti, konvergenca in divergenca zaporedja

12. teden (SREDA 23.12.2009, ČETRTEK 24.12.2009)

Zaporedja, diskretni dinamični sistemi

Računanje limit: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, formalna definicija: za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0 , da iz $n \geq n_0$ sledi $|x_n - a| < \epsilon$.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0$$

$$a_n, b_n > 0 \text{ za vsak } n, c > 0 \implies (a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \implies a_n + b_n \rightarrow 0, ca_n \rightarrow 0)$$

Primerjanje zaporedij: (a) $x_n \leq y_n$ za vsak $n \implies \lim_n x_n \leq \lim_n y_n$

(b) $x_n \leq z_n \leq y_n$ za vsak n , $\lim_n x_n = \lim_n y_n \implies \lim_n z_n = \lim_n x_n = \lim_n y_n$

Limita vsote, razlike, produkta in kvocienta, potence: Limita ulomkov, limita izrazov s koreni.

Zgledi: $\lim_n 1/(1 + nb) = 1$, če $b = 0$, in 0 , če $b \neq 0$, $\lim_n \sqrt{1 + 1/n} = 1$, $\lim_n a^n = 0$, če $|a| < 1$, 1 , če $a = 1$, ne obstaja če $a = -1$ ali $|a| > 1$, $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$, $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

V četrtek odpadlo oziroma preložili na 6. januar po novem letu (dodatna ura)

13. teden (SREDA 6.1.2010, ČETRTEK 7.1.2010)

Zaporedja, diskretni dinamični sistemi, vrste

Definicija supremuma in infimuma

Izrek o monotoni zaporedjih: Vsako navzgor omejeno naraščajoče zaporedje realnih števil x_n je konvergentno, njegova limita je enaka $a = \sup x_n$, zgled: $x_n = n/(n+1)$

Število e : v $(1-a)^n \geq 1-na$, $0 < a < 1$, vstavimo $a = 1/n^2$, dobimo $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \geq (1 - \frac{1}{n})^{1-n} = (\frac{n}{n-1})^{n-1} = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} = x_{n-1}$, v $(1-a)^{-n} \geq 1+na$ vstavimo $a = 1/n^2$, dobimo $y_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n} \geq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n}{n+1})^{-(n+1)} = (1 - \frac{1}{n+1})^{-(n+1)} = y_{n+1}$. Poleg tega je $y_{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = x_n(1 + \frac{1}{n}) > x_n$. Torej x_n narašča, y_n pada, $x_n < x_{n+m} < y_{n+m+1} < y_n$, obe imata isto limito, enako $e = 2.718\dots$

Rekurzijsko podana zaporedja: Zgledi, npr. $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$, $x_0 = 1$ (tudi eksplicitno)
Jemanje zdravil: $x_{n+1} = x_n - ax_n + b$, $0 < a < 1$, $b > 0$

$$\lim_n \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = \text{oz. } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_0 = 0$$

Mrežni diagram, zgled: $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + 1$, $x_0 = 1$, zveza s Fibonaccijevimi števili

Definicija konvergence: Delne vsote, $s_n \rightarrow s$, zgledi: $1 + 1 + 1 + \dots$, $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots$, geometrijska vrsta s kvocientom < 1

Potreben pogoj: $a_n \rightarrow 0$, ni potreben (harmonična vrsta)

15. teden (SREDA 13.1.2010, ČETRTEK 14.1.2010)

Številске vrste

Vrste s pozitivnimi členi: konvergenca natanko takrat, ko so delne vsote omejene (saj naraščajo). **Primerjava dveh vrst:** majoranta konvergira \implies vrsta konvergira, minoranta divergira \implies vrsta divergira

$$\text{Zgledi: } 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots, 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \dots$$

Kvocientni kriterij: Če $a_{n+1}/a_n \leq k < 1$ za $n \geq n_0$, vrsta konvergira. Če $a_{n+1}/a_n \geq 1$ za $n \geq n_0$, vrsta divergira.

$$\text{Zgled: } 1 + 2x + 3x^2 + \dots \text{ konvergira za } 0 < x < 1$$

Pogojno konvergentne vrste: konvergira, a ne absolutno (ne konvergira $|a_1| + |a_2| + \dots$). Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Alternirajoče vrste: $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, $a_i > 0$, konvergirajo, če $a_n \searrow 0$ (monotono pada

proti 0). Dokaz: sode delne vsote naraščajo in so omejene z a_1 , torej imajo limito s , lihe delne vsote tudi konvergirajo k s , potem celo zaporedje delnih vsot konvergira proti s .

Zgled: harmonična vrsta $1 - 1/2 + 1/3 + \dots$

Zgledi z geometrijsko vrsto: Ahil in želva, serija kvadratov, dolžina in ploščina Kochove snežinke, s kartami premostiti prepad (harmonična vrsta)

14. teden (SREDA 14.1.2009, ČETRTEK 15.1.2009)

Funkcije realne spremenljivke in njihove limite

Funkcije realne spremenljivke: $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$ domena, definicijsko območje
Naravno definicijsko območje: kjer se vrednosti funkcije da izračunati

$y = f(x)$, x neodvisna, y odvisna spremenljivka

Graf funkcije $G_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$, zgledi: $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x - [x]$ itd.

Limita funkcije: Kaj se zgodi z $f(x)$, ko se x bliža točki a iz (roba) definicijskega območja?

$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, če za vsako zaporedje $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$ in $x_n \rightarrow a$ velja $f(x_n) \rightarrow b$ ali

Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz $0 < |x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - b| < \epsilon$

Zgledi: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ ali $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x}$, včasih le z ene strani: $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ (leva limita) ali $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ (desna limita), zgled: $f(x) = x - [x]$.

Pomembne limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ (ne obstaja), $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg(1/x)$ (leva limita $-\pi/2$, desna $\pi/2$)

Neskončna limita, limita v neskončnosti

Računanje limit: Limita vsote, razlike, produkta, kvocienta (pravila kot pri zapor.)

Zgledi: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = 1/4$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{(x-2)^2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

15. teden (SREDA 21.1.2009)

Zvezne funkcije

Definicija zveznosti: $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f$

Funkcija f je zvezna v točki $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (limita obstaja in je enaka funkcijski vrednosti) ali: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Funkcija f je zvezna na intervalu I , če je zvezna v vsaki točki $a \in I$ (nepretrgan graf).

Zgledi: Funkcija $\cos x$ je zvezna v 0, $\sin x/x$ ni definirana v 0, lahko pa tam postavimo tako vrednost, da bo zvezna, funkcije $\arctg(1/x)$ ali $\sin(1/x)$ ne morem v 0 dopolniti tako, da bi bila zvezna.

16. teden (SREDA 18.2.2009, ČETRTEK 19.2.2009)

Odvedljive funkcije

Lastnosti zveznih funkcij:

Vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij so zvezne funkcije, kjer so definirane
Inverzna funkcija k zvezni funkciji je zvezna (graf je zrcalna slika preko glavne diagonale)

Kompozitum zveznih funkcij je zvezen $x_n \rightarrow a$, $f(x_n) \rightarrow f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$

Zgledi: Elementarne funkcije so zvezne, npr. x^2 zvezna $\Rightarrow \sqrt{x}$ zvezna, e^x zvezna $\Rightarrow \ln x$

zvezna itd.

Zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$:

1. omejena (obstajata $m, M \in \mathbb{R}$, da je $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$)
2. Vsaj v eni točki doseže svojo največjo in svojo najmanjšo vredost
3. Vsaj v eni točki doseže vsako vmesno vrednost

Brez pogoja zveznosti funkcije ali brez pogoja zaprtosti intervala to ne velja, preprosti zgledi

Pregled elementarnih funkcij: konstanta, identična funkcija, pozitivne in negativne potence, polinomi, ulomljene racionalne funkcije, korenske funkcije, algebrske funkcije, transcendentne funkcije, eksponentna funkcija, logaritemska funkcija, trigonometrične funkcije (sinus, kosinus, tangens, kotangens), ciklotrične funkcije (arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens).

17. teden (SREDA 25.2.2009, ČETRTEK 26.2.2009) Odvod funkcije

Odvod realne funkcije: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ če obstaja, je f odvedljiva

Grafični prikaz, sekanta in tangenta, enačba tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, enačba normale $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Zgledi: Odvod linearne funkcije $f(x) = kx + n$, odvod kvadratne funkcije $f(x) = x^2$, odvod funkcije $f(x) = |x|$ ne obstaja (zakaj?)

Iz odvedljivosti sledi zveznost, obratno pa ne, protiprimer

Pravila za odvajanje: Odvod konstante je 0, odvod vsote ali razlike $(u \pm v)' = u' \pm v'$, odvod produkta $(uv)' = u'v + uv'$, odvod kvocienta $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$, odvod posredne funkcije (verižno pravilo) $y = f(u), u = u(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot u'$, odvod inverzne funkcije $y = f^{-1}(x) \Rightarrow y' = 1/f'(f^{-1}(x))$, zgledi

Odvodi elementarnih funkcij: potence, eksponentna funkcija, logaritemska funkcija, trigonometrične funkcije, ciklotrične funkcije, zgledi

18. teden (SREDA 4.3.2009, ČETRTEK 5.3.2009) Uporaba odvoda pri proučevanju funkcij

Naraščanje funkcije v točki ($f \nearrow$): $h > 0, f(x_0 + h) > f(x_0), f(x_0 - h) < f(x_0)$

Padanje funkcije v točki ($f \searrow$): $h > 0, f(x_0 + h) < f(x_0), f(x_0 - h) > f(x_0)$

Trditev: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ v x_0

Lokalni ekstrem funkcije v točki: $h > 0$, maksimum $f(x_0 \pm h) < f(x_0)$, minimum $f(x_0 \pm h) > f(x_0)$

Trditev: Če ima odvedljiva funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka).

Vsaka stacionarna točka še ni ekstrem, zgled: x^3

Izreki o odvedljivih funkcijah:

Rolle: $f(a) = f(b)$, odvedljiva na $(a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$ za $a < c < b$

Lagrange: f odvedljiva na $(a, b) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ za $a < c < b$
geometrijska interpretacija: sekanti vzporedna tangenta

L'Hospital: $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g odvedljivi v okolici $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$

Dokaz: Z uporabo Rolleovega izreka, $F(t) = g(x)f(t) - f(x)g(t)$, $t \in [x_0, x]$; ker $F(x_0) = 0$ in $F(x) = 0$, po Rolleu obstaja $c \in (x_0, x)$, da je $F'(c) = 0$; torej je $g(x)f'(c) - f(x)g'(c) = 0$ oziroma $f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$, od koder dobimo rezultat v limiti $x \rightarrow x_0$.

Zgledi: Izračunati limite $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctg x)/x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x)/x^3$

19. teden (SREDA 11.3.2009, ČETRTEK 12.3.2009)

Iskanje ekstremov

Iskanje lokalnih ekstremov: Potreben pogoj $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka)

Trditev: $f' \nearrow$ v stacionarni točki \Rightarrow minimum (po Lagrangeu:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_1)h > f'(x_0)h = 0$ in podobno $f(x_0) - f(x_0 - h) < 0$ za $h > 0$)

Trditev: $f' \searrow$ v stacionarni točki \Rightarrow maksimum (podobno)

Posledica: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimum, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ maksimum

Kaj se zgodi, če $f''(x_0) = 0$? Ne vemo (ekstrem ali prevoj). Pogledamo prvi od 0 različen odvod, če je sode stopnje, je ekstrem, če je lihe, je prevoj.

Zgledi: $x^3 - 3x^5$, $2x/(x^2 + 1)$, praktični zgledi (včrtati v krog pravokotnik z največjo ploščino, lomni zakon)

20. teden (SREDA 18.3.2009, ČETRTEK 19.3.2009)

Konveksnost in konkavnost, diferencial

Konveksnost, konkavnost v točki: $f(x_0 + h) - f(x_0) > f'(x_0)h$ za $h \neq 0$ (konveksnost, graf nad tangento)

$f(x_0 + h) - f(x_0) < f'(x_0)h$ za $h \neq 0$ (konkavnost, graf pod tangento)

Če ima f' v točki x_0 lokalni ekstrem (minimum ali maksimum), ima funkcija v točki x_0 prevoj

Trditev: $f' \nearrow$ v $x_0 \Rightarrow f$ konveksna v x_0 (po Lagrangeu kot prej pri minimumu)

Trditev: $f' \searrow$ v $x_0 \Rightarrow f$ konkavna v x_0 (po Lagrangeu kot prej pri maksimumu)

Posledica: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ konveksna v x_0 , $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ konkavna v x_0

Kaj se zgodi, če $f''(x_0) = 0$? Ne vemo, lahko je prevoj, ne pa nujno. Zgledi:

$f(x) = x^2$, x^3 , $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = 2x/(x^2 + 3)$, $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2x + 1)$

Diferencial odvedljive funkcije: $y = f(x)$, $dy = df(x) = f'(x)dx$, $dx = h$ poljubna sprememba

$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h \Rightarrow f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx$, geometrijska razlaga

Zgledi: $\sqrt{x + dx} \approx \sqrt{x} + (1/2\sqrt{x})dx \Rightarrow \sqrt{1.02} \approx \sqrt{1} + (1/2\sqrt{1})0.02 = 1.01$

$\sin(x + dx) \approx \sin x + \cos x dx \Rightarrow \sin(1^\circ) \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \pi/180 \approx 0.018$

21. teden (SREDA 25.3.2009, ČETRTEK 26.3.2009)

Integriranje funkcij

Nedoločeni integral kot inverz odvajanja: $\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
aditivna konstanta (med poljubnima nedoločenima integraloma)

tabela osnovnih integralov

Metode integriranja:

dekompozicija, zgledi $\int (2x - 1)^2 dx$, $\int (x^2 + 4)dx/(x^2 + 1)$, $\int dx/(x^2 - 1)$

substitucija $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$, zgledi $\int dx/(2x + 1)$, $\int \operatorname{tg} x dx$

per partes $\int u dv = uv - \int v du$, zgledi $\int x \ln x dx$, $\int x^2 \cos x dx$

Določeni integral: Definicija $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$
geometrijska interpretacija, zgledi

22. teden (SREDA 1.4.2009, ČETRTEK 2.4.2009)

Osnovna formula integralnega računa, metode

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

med min in max: $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

f zvezna na $[a, b] \implies$ obstaja $\xi \in [a, b]$, da je $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Zveza z nedoločenim integralom: osnovna formula $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

F poljuben nedoločen integral za f

Izpeljava $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(\xi) \rightarrow f(x)$, če f zvezna,

torej $G' = f(x)$, zato $G(x) = F(x) + C$, $C = -F(a)$ in $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, zgledi.

Računanje integralov:

z osnovno formulo, zgledi: $\int_0^\pi \sin x dx$

substitucija (zamenjava mej), zgledi: $\int_0^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$

per partes, zgledi: $\int_0^\pi x \sin x dx$

23. teden (SREDA 8.4.2009, ČETRTEK 9.4.2009)

Posplošeni integrali, uporaba integrala

Posplošeni integral: Neomejen interval $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, zgled $\int_0^\infty e^{-x} dx$

Neomejena funkcija $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$, zgleda $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} dx = \infty$,

$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x}} dx = 2$

Uporaba integrala:

Ploščina $p = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, če $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$, zgled: ploščina kroga $p = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = a^2 \pi$

Dolžina loka $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$, zgled: obseg krožnice $o = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \int_0^{\pi/2} dt = 2a\pi$

Prostornina vrtenine $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, zgled: prostornina krogle $V = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 4a^3 \pi / 3$

Površina vrtenine $P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$, zgled: površina krogle $P = 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2$

24. teden (SREDA 15.4.2009, ČETRTEK 16.4.2009)

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

Taylorjeva formula: Izpeljava z večkratno integracijo per partes iz osnovne formule

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Taylorjeva formula: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, Taylorjev polinom in Taylorjev ostanek (reda n)

Taylorjeva vrsta: $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$

Konvergenca Taylorjeve vrste: $R_n(x) \rightarrow 0 \implies P_n(x) \rightarrow f(x)$ (delne vsote), razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto okrog točke a , poseben primer: $a = 0$ (McLaurinov razvoj)

McLaurinovi razvoji:

Ekspontna vrsta: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$, konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$

Sinusna vrsta: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$

Kosinusna vrsta: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$

Logaritemska vrsta: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, konvergira za $-1 < x \leq 1$

Binomska vrsta: $(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots$, konvergira za $-1 < x < 1$

Definicija splošnega binomskega simbola $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$

Posebni primeri $m = n$ (končna vrsta), $m = -1$ (geometrijska vrsta s kvocientom x), $m = 1/2, -1/2$

Uporaba Taylorjeve formule in vrste:

Risanje funkcij, približki v bližini točke, Eulerjeva formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

25. teden (SREDA 22.4.2009, ČETRTEK 23.4.2009)

Funkcije dveh realnih spremenljivk

Funkcije dveh spremenljivk:

Definicijsko območje $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$

Graf $G_f = \{(x, y, f(x, y)); x, y \in D_f\} \subset \mathbb{R}^3$, ploskev v prostoru

Zgledi: ravnina, rotacijski paraboloid, polkrogla, stožec, zveznost

Parcialni odvodi in totalni diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Zgledi: $z = 3x^2y$, $z = x + \sin(x/y)$

Višji parcialni odvodi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Če sta mešana odvoda zvezna, sta enaka.

Totalni diferencial: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, geometrijski pomen

Zgled: $z = 3x^2y$, $z = xy$, $z = x/y$, relativna napaka

Odvajanje posrednih funkcij: $z = z(u, v)$; $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$

Verižno pravilo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Zgledi: $z = u^v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

Polarni zapis $z = f(x, y)$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$

26. teden (SREDA 6.5.2009, ČETRTEK 7.5.2009)

Ekstremi funkcije dveh realnih spremenljivk

Lokalni ekstremi:**Potreben pogoj:** $df = 0$ oziroma $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (stacionarna točka)Zgledi, pogoj $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ni zadosten (hiperbolični paraboloid)**Zadostni pogoji:** $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, D = AC - B^2$ **Izrek:** Če je v stacionarni točki (a, b) : $D > 0$, ima f v (a, b) lokalni ekstrem (max, če $A < 0$, in min, če $A > 0$) $D < 0$, ima f v (a, b) sedlo (ni lokalnega ekstrema) $D = 0$, ne vemoZgledi: 1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$ (min v $(3, 2)$)2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (min v $(1, 1)$, sedlo v $(0, 0)$)3. $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ (min v $(0, 0)$, sedlo v $(2, 2)$)4. $f(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 + 4y^3 - 3y$ (min v $(-1, 1)$, max v $(1, -1)$, sedli v $(1, 0)$ in $(-1, 0)$)(izpustil) **Metoda najmanjših kvadratov:** $y = f(x, a, b) = a + bx$ linearna premica, diagram razpršenosti

Gauss: iščemo minimum vsote kvadratov odstopanj od premice, torej minimum funkcije

 $F(a, b) = \sum_{k=1}^n (a + bx_k - y_k)^2$, izpeljava normalnih enačb,sistem $an + b \sum x_k = \sum y_k, a \sum x_k + b \sum x_k^2 = \sum x_k y_k$ rešitev $(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_k, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_k)$

$$b = \frac{n \sum x_k y_k - \sum x_k \sum y_k}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{\sum (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum (x_k - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - b\bar{x}$$

Ker je $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2n > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2 \sum x_k^2 > 0$ in $\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = 2 \sum x_k$, je $D = 4n \sum (x_k - \bar{x})^2 > 0$, zato je res minimum**Vezani ekstremi:** Enačba vezi $g(x, y) = 0$, iščemo lokalni ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 0$ **Lagrangev postopek:** $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, običajni ekstrem funkcije treh spremenljivk $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ ($g = 0$), najdemo stacionarno točko**Zgledi:** 1. $f(x, y) = 2x - 4y$ pri pogoju $x^2 + y^2 = 1$ 2. Poiskati najkrajšo oddaljenost točke $(3, 0)$ od parabole $y = x^2$ 3. Poiskati vse ekstreme funkcije $f(x, y) = xy^2$ na polkrogu $x^2 + y^2 = 3, y \leq x$ 4. $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$ enačba elipse, poiskati njene polosli in nagnjenost (iščemo vezane ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $3x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$)**27. teden (SREDA 13.5.2009, ČETRTEK 14.5.2009)****Diferencialne enačbe, uvod****Uvod:** Galileo: matematika je jezik narave

diferencialne enačbe so orodje za opisovanje naravnih pojavov

Splošni pojem diferencialne enačbe: navadne in parcialne enačbe**Diferencialna enačba prvega reda:** $F(x, y, y') = 0$ implicitna, $y' = f(x, y)$ eksplicitnaKaj je rešitev, koliko jih je? Kaj je začetni problem? (začetni pogoj $y(0) = y_0$)

Geometrijski pomen eksplicitne enačbe prvega reda: polje smeri, rešitvene krivulje

Zgledi:

 $y' = ay, a > 0$, družina krivulj $y = Ce^{ax}$ $y' = 2y/x$, družina krivulj $y = Cx^2$

Ortogonalne trajektorije dane enoparametrične družine krivulj, prejšnji zgledi

Enačbe z ločljivimi spremenljivkami: $y' = f(x)g(y)$, $G(y) = F(x) + C$

Dosedanji zgledi in način reševanja

Enačbe, ki se prevedejo na enačbe z ločljivimi spremenljivkami: zgled: $y' = \frac{x^2+2y^2}{2xy}$

28. teden SREDA 20.5.2009, ČETRTEK 21.5.2009)

Diferencialne enačbe prvega reda, uporaba

Linearna diferencialna enačba prvega reda: $y' + f(x)y = g(x)$

Homogena enačba: $y' + f(x)y = 0$, enačba z ločljivimi spremenljivkami

Nehomogena enačba: $y' + f(x)y = g(x)$, reševanje:

(a) ugibanje partikularne rešitve, $y = y_+ C y_0$, y_0 netrivialna rešitev homogene enačbe

(b) variacija konstante, $y = C(x)y_0$

Zgledi: $xy' - 2y = x$, $y' - y = e^{2x}$, $xy' + y = \sin x$

Bernoullijeva enačba: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, $n \neq 0, 1$

Zgled: $xy' + y = y^2$, $z = 1/y$

Epidemiološka enačba: $y' = k(N - y)y$ oziroma $y' - kNy = -ky^2$

29. teden SREDA 27.5.2009, ČETRTEK 28.5.2009)

Diferencialne enačbe drugega reda, uporaba

Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti:

Homogena enačba: $ay'' + by' + cy = 0$ (nehomogena, če $= h(t)$)

Nastavek: $y = Ce^{\lambda t}$

Karakteristična enačba: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \implies y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$

Kompleksna korena: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ Eulerjeva formula

$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$

$C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha t}(C'_1 \cos \beta t + C'_2 \sin \beta t) = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$, $A = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}$ amplituda, $C_1' = A \sin \delta$, $C_2' = A \cos \delta$, δ fazni premik

Zgled. $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y'' + y = 0$

Zgled: Harmonični oscilator $\phi'' + 2\alpha\phi' + \omega_0^2\phi = 0$. Enačba $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$ opisuje lastno dušeno nihanje matematičnega nihala (pri majhnih odklonih iz mirovne lege). Tu je $\alpha > 0$ koeficient dušenja in ω_0 krožna frekvenca nihala.

Korena karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ sta $\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ in $\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Lahko ločimo tri primere:

(i) $\alpha^2 > \omega_0^2$ (močno dušenje). Rešitev: $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, števili λ_1 , λ_2 realni in negativni.

(ii) $\alpha^2 = \omega_0^2$ (mejni primer). Rešitev: $y = (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$.

(iii) $\alpha^2 < \omega_0^2$ (šibko dušenje). Rešitev: $y = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \delta)$, $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Samo v zadnjem primeru gre za pravo (dušeno) nihanje. Če pa bi bil $\alpha = 0$, dušenja ne bi bilo in bi imeli harmonično nihanje.

Nehomogena enačba: Nastavek $y = y_1 + y_0$, kjer je $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ splošna rešitev homogene enačbe

Metode za iskanje posebne rešitve nehomogene enačbe:

(a) **Variacija konstant:** Konstanti v splošni rešitvi homogene enačbe imamo za funkciji, odvajamo, zahtevamo, da je del z odvodi teh funkcij enak 0, ostanek odvajamo še enkrat in vstavimo v prvotno enačbo, da dobimo še drugi pogoj. Izračunamo odvode C'_1, C'_2 in nato z integriranjem še C_1, C_2 . Vstavimo v splošno rešitev homogene enačbe in dobimo splošno rešitev nehomogene enačbe (z novimi konstantami).

(b) **Nastavek:** Posebno rešitev iščemo v obliki $y_1 = t^k Q_m(t) e^{\lambda t}$, če je desna stran oblike $f(t) = P_m(t) e^{\lambda t}$ (ali $f(t) = P_m(t) \cos \lambda t$ ali $f(t) = P_m(t) \sin \lambda t$), kjer je $P_m(t)$ polinom stopnje m in λ koren karakteristične enačbe mnogokratnosti k (če λ ni koren karakteristične enačbe, vzamemo $k = 0$).

Zgled. $y'' + y = \sin t$, $y'' + 4y = \sin t$, $y'' - y = 2e^t - t^2$

30. teden SREDA 3.6.2009, ČETRTEK 4.6.2009)

Sistemi diferencialnih enačb, uporaba

Sistem dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \quad \text{ozioroma} \quad z' = Az, \quad z = [x, y]^t, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

prevedba na enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti $x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = 0$,

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \quad \text{ozioroma} \quad \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \text{lastni vrednosti } \lambda_1, \lambda_2$$

Zgled: $x' = -y$, $y' = x$, rešitev $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = C_1 \sin t - C_2 \cos t$

Sistem $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ uporabljamo npr. v ekosistemih, ko se dve vrsti, x in y borita za iste vire (hrana, prostor). Koeficienta $a > 0$, $d > 0$ pomenita stopnjo naravnega prirastka vrst x oziroma y , če bi se vrsti neovirano razmnoževali, koeficienta $b < 0$ in $c < 0$ pa pomenita negativen (zaviralni) vpliv ene vrste na drugo (zaradi prisotnosti druge, se rast prve zmanjša in obratno).

Pogovor o izpitih