VAJE IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE

25. maj 2005

1 Množice in relacije

1. Katere od naslednjih trditev veljajo?

   (a) $x \in \{\{x\}, \emptyset\}$

   (b) $\{x\} \in \{\{x\}, \emptyset\}$

   (c) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \emptyset\}$

   (d) $\{\{x\}, \emptyset\} = \{\{x\}\}$

   (e) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, x\}$

2. V množici $S = \{n \in \mathbb{N}; n \leq 100\}$ sta dani podmnožici $A = \{n \in S; 2 \text{ deli } n\}$ in $B = \{n \in S; 11 \text{ deli } n\}$.

   (a) Določite množico $A \cap B$. Koliko ima elementov?

   (b) Koliko elementov pa ima množica $A \cup B$?

3. Krvne skupine so določene glede na to, ali v krvi obstajata antigena a in b. Če antigenov ni, dobimo krvno skupino 0; če je antigen a, b pa ne, dobimo skupino A; obratno, če je b in ne a je skupina B, če pa nastopata oba antigena, pa imamo krvno skupino AB.

   (a) Naj bo $U = \{x;\ x \text{ ima v krvi antigen } a\}$ in $V = \{x;\ x \text{ ima v krvi antigen } b\}$. Izrazite krvne skupine 0, A, B in AB z množicama U in V.

   (b) Človek lahko da kri drugemu človeku, če ima prejemnik v krvi vse tiste antigene, kot jih ima darovalec. V množico $K = \{0, A, B, AB\}$ uvedemo relacijo $\rightarrow$ s predpisom $x \rightarrow y$, če lahko oseba x da svojo kri osebi y. Ugotovite, katere lastnosti (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost) ima ta relacija.

4. V množici $\mathbb{R}$ vseh realnih števil sta relaciji R in S definirani s predpisoma: xRy, če $x + y > 5$, in xSy, če $x + 2 > 2y$. Narišite v koordinatni ravnini grafa obeh relacij, G_R in G_S, ter si predočite množice $G_R \cup G_S$, $G_R \cap G_S$ in $G_R \setminus G_S$.

5. Na množici naravnih števil od 1 do 20 imamo podano relacijo $\mathcal{R}$ s predpisom:

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m \text{ deli } n.$$

Pokažite, da je relacija $\mathcal{R}$ refleksivna, tranzitivna in antisimetrična.

6. V množici parov naravnih števil $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirajmo relacijo

   (a) $(a, b) \sim (b, c)$, če $\{a, b\} \cap \{c, d\} \neq \emptyset$,
   (b) $(a, b) \sim (b, c)$, če $a + b = c + d$.

   Ali je katera od teh dveh relacij ekvivalenčna? Kateri pari (x, y) so v relaciji $\sim$ s parom $(3, 2)$?

7. Na množici vseh podmnožic množice naravnih števil $\mathbb{N}$ je dana relacija $\mathcal{R}$ s predpisom:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B \subseteq S,$$

   kjer je $S = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ sodo}\}$ množica vseh sodih števil. Ali je relacija $\mathcal{R}$

   (a) refleksivna,
   (b) simetrična,
   (c) antisimetrična,
   (d) tranzitivna?

8. Na množici parov celih števil $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definirana relacija

$$(a, b)\, R\, (c, d) \Leftrightarrow a^2 - d^2 = c^2 - b^2.$$

   (a) Ali velja $(0, 5)\, R\, (3, -4)$?
   (b) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.
   (c) Določi ekvivalenčni razred, v katerem leži par $(-3, 6)$.

2 Funkcije

1. Naj bo

$$f : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,1\,2\,5\,4 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad g : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,4\,3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Izračunajte kompozitum $f \circ g$ in pokažite, da so funkcije f, g in $f \circ g$ bijektivne.

(b) Poiščite inverzne preslikave f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$ in $g^{-1} \circ f^{-1}$. Kaj opazite?

2. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$f(n) = 2n + 1.$$

Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f. Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna? Izračunajte f^{-1}. Če je f^{-1} funkcija, določite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.

3. Dani sta preslikavi iz intervala $[0, 1]$ v interval $[0, 1]$:

$$f(x) = 1 - x \text{ in } g(x) = \frac{1}{1 + x}$$

Določite oba kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$. Za vsako od funkcij f, g, $f \circ g$ in $g \circ f$ poiščite zalogo vrednosti in ugotovite, ali je funkcija surjektivna oziroma injektivna ter načrtajte njen graf. Če je funkcija bijektivna, poiščite tudi njeno inverzno preslikavo.

4. Funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma $f(x) = 1 - 2x$ in

$$g(n) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

(a) Narišite grafa funkcij f in g in izračunajte njuni zalogi vrednosti.

(b) Ali je katera od funkcij surjektivna? Injektivna? Bijektivna?

(c) Poiščite oba kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$.

5. Preslikavi $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma

$$f(x, y) = (1 - x, 2y) \text{ in } g(x, y) = (y, x)$$

za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$. Pokažite, da sta f in g bijekciji iz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, določite inverzni preslikavi f^{-1} in g^{-1} ter kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$.

6. Dane so preslikave $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x, 0), \\ g(x, y) &= (y, x), \\ h(x, y) &= x. \end{aligned}$$

Izračunajte kompozitume $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$ in $h \circ g$. Za vsakega od njih ugotovite, ali je surjektivna oziroma injektivna preslikava.

7. Imejmo neprazno množico A in preslikavi $f : A \to A \times A$ in $g : A \times A \to A$, podani s predpisoma

$$f(x) = (x, x) \text{ in } g(x, y) = x$$

za poljubna $x, y \in A$. Pokažite, da je preslikava f injektivna, g surjektivna ter izračunajte njuna kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$. Kakšne lastnosti imata preslikavi $f \circ g$ in $g \circ f$?

3 Matematična indukcija

1. Z matematično indukcijo dokažite, da za vsako naravno število n velja
   (a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
   (b) $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
2. Z matematično indukcijo dokažite naslednje trditve:
   (a) Za vsako naravno število n je število $n^3 - n$ deljivo s 3.
   (b) Za vsako naravno število n velja
   $$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$
   (c) Za vsako naravno število n in za vsak $x \geq -1$ velja
   $$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$
3. Z matematično indukcijo dokažite veljavnost binomskega obrazca:
   $$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$$
4. Z matematično indukcijo dokažite, da je v vsakem konveksnem n-kotniku
   (a) število diagonal enako $n(n - 3)/2$,
   (b) vsota vseh notranjih kotov enaka $(n - 2)\pi$

4 Kombinatorika

1. Družine s štirimi otroki razdelimo v tri skupine glede na razporeditev otrok po spolu: (A) vsi otroci so istega spola, (B) trije otroci istega spola, eden drugačnega, (C) po dva otroka sta istega spola. Za vsako od skupin posebej ugotovite, na koliko načinov lahko sestavimo družino, če vrstni red rojevanja fantkov in deklic

   (a) upoštevamo,

   (b) ne upoštevamo.

2. Ob robu vrta bi radi posadili štiri okrasne grme v ravni črti. Na razpolago imamo tri vrste grmovnic. Na koliko načinov lahko to storimo, če je

   (a) pomebno, kje raste kateri grm;

   (b) vrstni red grmov ni pomemben?

3. Na otoku je 8 vrst redkih ptic. Dva znanstvenika dobita dovoljenje, da lahko vsak od njiju ulovi 3 ptice, ne glede na to kateri vrsti pripadajo.

   (a) Na koliko načinov lahko to storita, če ne vesta drug za drugega (delujeta neodvisno)?

   (b) Koliko je takih primerov, da ulovita oba skupaj 6 različnih vrst ptic?

4. Koliko različnih trimestnih števil lahko napišemo z lihimi števkami 1,3,5,7 in 9,

   (a) če se števke lahko ponavljajo, nastopati pa morajo v naravnem (naraščajočem) vrstenm redu;

   (b) če se vsaka števka lahko ponovi kvečjemu še enkrat in je pomemben vrstni red?

5. Na koliko načinov lahko izmed 12 darovalcev krvi, od katerih imajo trije krvno skupino AB, štirje krvno skupino A, dva krvno skupino B in trije krvno skupino 0, izberemo

   (a) po dva darovalca iz vsake skupine;

   (b) tri darovalce, ki lahko dajo kri ponesrečencu s krvno skupino A;

   (c) tri darovalce z različnimi krvnimi skupinami?

6. Na razpis so se javili štirje kandidati. Trije ocenjevalci sestavijo vsak svoj prednostni vrstni red. Kandidat je izbran, če ga vsaj dva ocenjevalca postavita na prvo mesto na svojem seznamu.

   (a) Koliko je vseh možnih poročil, sestavljenih iz vseh treh seznamov?

(b) Koliko je takih poročil, na osnovi katerih je nekdo izmed kandidatov izbran?

(c) Kolikšna je verjetnost, da razpis uspe? Ali je manjša ali večja od 50%?

5 Verjetnost

1. Iz množice $\{1, 2, 3, ..., 21\}$ prvih 21 naravnih števil na slepo izberemo eno število.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je deljivo s 3?

   (b) Kolikšna je verjetnost, da je vsota njegovih desetiških števk manjša od 5?

   (c) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je vsota njegovih desetiških števk manjša od 5, če je deljivo s 3?

   (d) Kolikšna je pogojna verjetnost, da je izbrano število sodo, še je deljivo s 3?

2. V posodi so 3 bele in 2 črni kroglici. Iz posode potegnemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da bo sta različne barve, če

   (a) kroglice vračamo,

   (b) kroglic ne vračamo.

3. Zakonca načrtujeta 4 otroke. Kaj je verjetneje

   (a) da bosta oba spola enakovredno zastopana, ali

   (b) da bo razmerje 3:1 v korist enega spola?

4. Vsako družino z dvema otrokoma lahko uvrstimo glede na spolno strukturo otrok v enega od naslednjih štirih tipov: FF, FD, DF, DD

   (a) Na slepo izberemo enega od teh tipov družin in ugotovimo, da je v družini vsaj en fant. Kolikšna je verjetnost, da je drugi otrok deklica?

   (b) Določimo po eno družino vsakega tipa in izmed njihovih 8 otrok na slepo izberemo enega in ugotovimo, da je fant. Kolikšna je verjetnost, da ima ta fant sestro?

   (c) Naj bo A dogodek, da je prvorojenec fant, B dogodek, da sta oba otroka v družini različnega spola, in C dogodek, da je vsaj eden od obeh otrok fant. Ugotovite, kako je z medsebojno neodvisnostjo dogodkov A,B,C.

5. Imamo dva žetona, prvi je na eni strani bel, na drugi črn, drugi žeton pa je na obeh straneh črn. Na slepo izberemo enega od obeh žetonov in ga vržemo na mizo.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je zgornja stran žetona črna?

   (b) Kolikšna je verjetnost, da je tudi spodnja stran žetona črna?

6. V prvi posodi sta 2 beli in tri črne kroglice, v drugi pa 1 bela in 2 črni kroglici. Najprej preložimo eno kroglico iz prve posode v drugo, ne da bi videli njeno barvo, nato pa iz druge posode na slepo izberemo eno kroglico.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je izbrana kroglica bela?

   (b) Denimo, da je izbrana kroglica res bele barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi tudi kroglica, ki smo jo preložili, bela?

7. V žari imamo 2 beli, 3 črne in 4 rdeče kroglice.

   (a) Kroglice vlečemo in jih ne vračamo. Koliko je verjetnost, da izvlečemo eno belo, 1 črno in 2 rdeči kroglici? Koliko je verjetnost, da zaporedoma izvlečemo dve rdeči kroglici, če kroglic ne vračamo?

   (b) Koliko pa je verjetnost, da zaporedoma izvlečemo 2 rdeči kroglici, če kroglice sproti vračamo v žaro?

8. Trikrat zapored vržemo kovanec. Kakšna je verjetnost, da vsaj enkrat pade cifra?

9. Med obtoženimi je 64% krivih in in 36% nedolžnih. Po ocenah je med krivimi obsojenih 88%, med nedolžnimi pa je obsojenih 5% obtožencev. Kakšna je verjetnost, da je naključno izbrani obsojenec kriv?

10. Iz posode, v kateri so 3 bele in 3 črne kroglice izberemo dve kroglici. Če sta iste barve, ju vrnemo v posodo; če sta različne, vrnemo samo belo. Nato iz posode izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je bele barve?

11. Kolikšna je verjetnost, da v n metih dveh kovancev vsaj enkrat padeta oba grba. Kolikokrat moramo vreči kovanca, da bo verjetnost tega dogodka več kot 1/2?

6 Algebrske strukture

1. Pokažite, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

2. Izračunajte kompleksno število $(2 + 3i) : (3 - 4i)$.

3. Pokažite, da je množica $\{a+bi; a,b \in \mathbb{Z}\}$ kolobar z enoto in poiščite vse obrnljive elemente.

4. Določite množico vseh tistih kompleksnih števil z, za katera imajo z, $1-z$ in $\frac{1}{z}$ enako absolutno vrednost.

5. Delite polinom $p(x)$ s polinomom $q(x)$, tj. določite celi del $s(x)$ in ostanek $r(x)$ tako, da bo veljalo $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$:

   (a) $p(x) = x^3 + x^2 - 1$, $q(x) = x^2 - 1$,

   (b) $p(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x + 2$, $q(x) = x^2 + x + 2$.

6. Razstavite polinome v realnem na linearne in kvadratne faktorje

   (a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$,

   (b) $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2$.

7. Polinom $p(x) = x^4 + 4$ zapišite kot produkt nerazcepnih kvadratnih polinomov z realnimi koeficienti.

8. Pokažite, da je $x = -4$ ničla polinoma $p(x) = x^4 + 11x^3 + 22x^2 - 66x - 168$ in razcepi $p(x)$ na produkt nerazcepnih faktorjev.

7 Matrike

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte $A + B$, AB in BA.

2. Na konretnem primeru matrik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   preverite veljavnost asociativnega zakona za produkt in distributivnega zakona:

   (a) $(AB)C = A(BC)$

   (b) $(A+B)C = AC + BC$, $\;C(A+B) = CA + CB$

Ali velja $AB = BA$, $AC = CA$ oziroma $BC = CB$?

3. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Izračunajte A^2, A^3 in A^4. Koliko je A^n za $n > 4$?

4. Za matriko $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ določite x, y, u, v tako, da bo matrika $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ inverz matrike A.

5. Matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$
poiščite inverzno matriko, če obstaja.

6. Za matriki $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ poiščite A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ in $(BA)^{-1}$.

7. Poiščite inverz matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščite tako matriko X, da velja $AXB = (A+B)^T$. Napravite preizkus, ali je dobljena rešitev pravilna.

8 Determinante

1. Na različne načine izračunajte determinanto naslednje matrike in ugotovite, ali je matrika obrnljiva
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunajte determinanto naslednjih matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Preverite pravilo $\det AB = \det A \det B$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in izračunajte A^{-1} in B^{-1}.

4. Izračunajte inverzno matriko k matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napravite preizkus.

5. Reši enačbo $A^{-1}X^{-1}B = I$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Napravite preizkus.

6. Določite matriko X, ki zadošča enačbi $X(X-I)^{-1} = A$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Za vrednosti $a = 2$ in $b = 1$ določi A^{-1}.

(b) Pri kakšnih vrednostih a in b je matrika A obrnljiva?

(c) Za katere vrednosti parametrov a in b je rang matrike A enak 3? Za katere je enak 2 in za katere je enak 1?

9 Sistemi linearnih enačb

1. Rešite sistem
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & u & + & v & = & 1 \\ & & y & + & u & - & v & = & 2 \\ x & & & + & u & + & v & = & 3 \end{array}$$

2. Poiščite splošno rešitev sistema linearnih enačb
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 2u & + & v & = & -1 \\ -x & + & y & - & 2z & + & 3u & + & v & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & & & + & 2v & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 3u & + & v & = & 2 \end{array}$$

3. Z Gaussovim postopkom poiščite inverz matrike
$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Določite konstanto a tako, da bo sistem rešljiv in ga tedaj tudi rešite
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2u & + & v & = & -2 \\ & & y & + & u & + & v & = & 2 \\ x & & & + & 3u & + & v & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 7u & + & 5v & = & a \end{array}$$

5. Rešite sistem linearnih enačb
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & - & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$
Pri katerih vrednostih za a je sistem rešljiv? Pri katerih vrednostih za a ima več kot eno rešitev?

6. Rešite homogeni sistem
$$\text{(a)} \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \quad \text{(b)} \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

7. Koliko rešitev ima homogeni sistem
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

10 Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Ugotovite, ali so stolpci $(1,1,2)^\top$, $(2,-1,0)^\top$, $(1,1,1)^\top$ med seboj linearno neodvisni?

2. Določite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Določite tudi diagonalno matriko D in obrnljivo matriko S, tako da bo veljalo $A = SDS^{-1}$.

4. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Poiščite tudi obrnljivo matriko S in diagonalno matriko D, tako da bo veljalo $A = SDS^{-1}$.

5. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$
Poiščite tudi obrnljivo matriko S in diagonalno matriko D, tako da bo veljalo $A = SDS^{-1}$.

6. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Določite tudi tako obrnljivo matriko S in diagonalno matriko D, da bo $A = SDS^{-1}$.

11 Zaporedja realnih števil

1. Pokaži, da je množica A omejena ter izračunaj $\sup A$ in $\inf A$
   (a) $A = \{2/x;\ x \geq 1\}$,
   (b) $A = \{n/(n+1);\ n \in \mathbb{N}\}$.
2. Kolikšna je zaloga vrednosti naslednjih zaporedij ($n \geq 1$)
   (a) $x_n = 1 - (-1)^n$,
   (b) $x_n = n^{(-1)^n}$,
   (c) $x_n = (-1)^n/n$,
   (d) $x_n = \sin n\pi/2$?
3. Določite omejenost in monotonost naslednjih zaporedij ($n \geq 0$)
   (a) $x_n = 2n/(n+1)$,
   (b) $x_n = \dfrac{1}{2^{-n} + 3^{-n}}$.
4. Kateri členi danega zaporedja ležijo v epsilonski okolici $V_\epsilon(1)$
   (a) $x_n = n/(n+1)$, $n \geq 0$,
   (b) $x_n = \dfrac{n+1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{2}$, $n \geq 0$?
5. Poišči vsa stekališča in vse limite zaporedij
   (a) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,
   (b) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$.

12 Limite

1. Izračunajte limite
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2n - n^2}{1 + 2n^2}$,
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - n}{3n^3 - 2n^2 + 8}$,
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1}$,

(d) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(e) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$,

(f) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

2. Izračunajte limite

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,

   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^{n+2}}{2\cdot 2^{2n}+2^{n+1}}$,

   (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2^n}{2n^2+2^{n-1}}$,

3. Pokažite, da velja

   (a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1,\ c>0$,

   (b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\},\ a>0,\ b>0$,

4. Dano je naravno število k. Definirajmo zaporedje

$$a_n=\sqrt[n]{1^n+2^n+...+(k-1)^n+k^n}.$$

   Pokažite, da je $\lim_{n\to\infty}a_n=k$.

5. Izračunajte limito: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \ln\frac{k+1}{k}$.

6. V enakokrakem pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v točki A naj bo A_1 pravokotna projekcija vrha A na hipotenuzo, A_2 pravokotna projekcija točke A_1 na kateto AB, A_3 pravokotna projekcija točke A_2 na hipotenuzo, A_4 pravokotna projekcija le-te na kateto itd. Če je kateta trikotnika ABC dolga a, izračunajte (a) skupno dolžino lomljene črte $AA_1A_2A_3$... in (b) ploščino, ki leži v trikotniku ABC pod lomljeno črto.

13 Rekurzivna zaporedja

1. Pokažite, da so naslednja rekurzivno podana zaporedja navzgor omejena, naraščajoča in izra"unajte njihovo limito

   (a) $x_{n+1}=x_n/3+2,\quad x_0=0$;

(b) $x_{n+1} = (x_n + 4)/3, \quad x_0 = 0;$

(c) $x_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + x_n}, \quad x_0 = 0;$

2. Pokažite, da je zaporedje

$$x_{n+1} = \frac{4x_n - 2}{x_n^2 + 1}$$

padajoče, navzdol omejeno in izračunajte njegovo limito.

3. Rekurzivno je podano zaporedje $x_{n+1} = 1/x_n + 1, \quad x_0 = 1$. Prepričajte se, da zaporedje sodih členov narašča, zaporedje lihih členov pada, da sta obe zaporedji omejeni in da imata skupno limito, ki je limita prvotnega zaporedja. Izračunajte to limito. Narišite tudi mrežni diagram.

4. Za rekurzivno dano zaporedje

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{1 + 3x_n}$$

z mrežnim diagramom in izračunom nekaj začetnih vrednosti ugotovite, kaj se zgodi, če je

(a) $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 1/2$, $x_0 = 1/3$;

(b) x_0 poljubno realno število v [0,1].

14 Vrste

1. Izračunajte vsoto vrste

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^{2n}};$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 1/2 + ... + 1/2^{n-1}}{2^n}.$

2. Izračunajte vsoto vrste

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}.$

3. Katere od naslednjih vrst konvergirajo

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n}$.

4. Pri katerih pozitivnih realnih številih $x > 0$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$? Določite n-to delno vsoto vrste tako, da najprej izračunate $(1-x)S_n$ in nato poiščite vsoto vrste.

5. Ugotovite, pri katerih pozitivnih številih x konvergirata vrsti

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n2^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

6. Ugotovite, pri katerih realnih številih x konvergirata vrsti, in kjer je mogoče, izračunajte vsoto

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$.

7. Ugotovite, kako je z absolutno in s pogojno konvergenco vrste $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

15 Limite funkcij in zveznost

1. Določite definicijsko območje naslednjih funkcij in narišite njihove grafe:

   (a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x}, \quad g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1},$

   (b) $f(x) = 2\ln x, \quad g(x) = \ln x^2,$

   (c) $f(x) = \sqrt{2-x}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$

2. Izračunajte limite

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1},$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3+x^2-4x-4},$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x-1},$

   (d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-\sqrt{2+x}}{\sqrt{3+x}-2},$

   (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{\sqrt{ax}-a}, \quad a>0,$

   (f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}.$

3. Izračunajte limite

   (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a},$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2},$

   (c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \operatorname{tg}^2 x(1-\sin x),$

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{1}{x},$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x},$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\sin x},$

   (g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}}{\sin \pi x}.$

4. Izračunajte levo in desno limito naslednje funkcije v točki 0 in narišite njen graf

   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$,

   (b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$

5. Določite vrednost funkcije f v točki 0, tako da bo zvezna na vsem svojem definicijskem območju, če je

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ za $x \neq 0$,

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ za $x \neq 0$

6. Določite konstanto a tako, da bo funkcija f zvezna na vsej realni osi in narišite njen graf

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & , \quad x \geq 1/2 \\ a & , \quad x < 1/2 \end{cases}$,

   (b) $f(x) = \begin{cases} \cos 2x & , \quad x \leq \pi \\ x + a & , \quad x > \pi \end{cases}$

16 Odvajanje funkcij

1. Odvajajte racionalne funkcije

   (a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$,

   (b) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$,

   (c) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$,

   (d) $y = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$.

2. Poiščite odvode naslednjih sestavljenih funkcij

   (a) $y = (x^2+x)^2$,

   (b) $y = \sin(2x)$,

   (c) $y = \mathrm{arctg}(1/x)$,

   (d) $y = \sqrt{1+x^2}$

   (e) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$,

(f) $y = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$,

(g) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$,

(h) $y = \mathrm{e}^{\sin^2 x}$,

(i) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

3. K dani funkciji poiščite odvod inverzne funkcije

   (a) $y = x^2 + x \ , \quad x > 0$,

   (b) $y = x + \mathrm{e}^x$,

   (c) $y = \mathrm{e}^{-x^2} \ , \quad x > 0$,

   (d) $y = \mathrm{tg}^2 x \ , \quad 0 < x < \pi/2$.

4. Ugotovite, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1/2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

   odvedljiva v točki 0. Koliko je $f'(0)$? Koliko pa je $f'(x)$ za $x \neq 0$?

5. Prepričajte se, da je odvod funkcije

   (a) $f(x) = \mathrm{arctg}(1/x)$ za $x \neq 0$ enak kot odvod funkcije $g(x) = \mathrm{arcctg}\, x$,

   (b) $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ enak kot odvod funkcije $g(x) = \mathrm{arctg}\, x$,

   (c) $f(x) = \mathrm{arctg} \frac{2-x}{1+2x}$ za $x \neq 1/2$ enak kot odvod funkcije $g(x) = \mathrm{arcctg}\, x$.

6. Izračunajte odvod funkcij:

   (a) $f(x) = x^x$.

   (b) $f(x) = (\sin x)^x$,

   Nasvet: funkciji najprej logaritmirajte.

7. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{1}{x}$ in $g(x) = x^2$. Narišite obe krivulji, poiščite presečišča in ugotovite, pod kakšnim kotom se sekata.

8. Majhna kroglica se giblje po hiperboli $f(x) = \frac{10}{x}$. Pri tem x-koordinata raste enakomerno s časom in sicer s hitrostjo $1m/s$. S kakšno hitrostjo se spreminja y-koordinata, v trenutku, ko gre kroglica skozi točko $(5, 2)$ v koordinatnem sistemu?

17 Lokalni ekstremi in grafi funkcij

1. Z uporabo odvoda načrtajte graf funkcije

   (a) $y = 3x - x^3$,

   (b) $y = (x-1)^3 - 3x + 5$,

   (c) $y = x - \dfrac{1}{x}$,

   (d) $y = x + \dfrac{1}{x}$,

   (e) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$,

   (f) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$,

   (g) $y = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$,

   (h) $y = x\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2$,

2. Določite lokalne ekstreme dane funkcije in narišite njen graf

   (a) $y = 2 - \cos^2 x$,

   (b) $y = 2\sin x - \sin 2x$,

   (c) $y = x\mathrm{e}^{-x}$,

   (d) $y = x^2\mathrm{e}^{-2x}$,

   (e) $y = \dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-x}$,

   (f) $y = \dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{e}^{-x}$,

   (g) $y = x\ln x$,

   (h) $y = 4\ln^2 x - 1$,

   (i) $y = \sqrt{x}(1-x^2)$,

   (j) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

3. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunajte naslednje limite

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-\sqrt{x}}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{\sin x - x}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$,

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$,

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x^2 - 2\cos x}{x^4}$,

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \sin x}$,

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2x+1}$,

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(1+x)}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$,

(j) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$.

18 Uporaba odvoda

1. Katera točka na paraboli $y = x^2$ je najbližja točki
   (a) (3,0),
   (b) (0,3)?

2. V parabolični odsek $\{(x, y);\ x \geq 0,\ y^2 \leq 1 - x\}$ včrtajte pravokotnik z največjo ploščino.

3. V enakokrak trikotnik z osnovno stranico dolžine $a = 6$ in krakoma dolžine $b = 4$ včrtaj pravokotnik z največjo ploščino.

4. V kroglo polmera R včrtajte pokončni valj z največjo prostornino.

5. Med valji s površion $S = 1\ m^2$ določi tistega, ki ima največjo prostornino.

6. Iz katere točke $(x, 0)$ na abscisni si vidimo interval $[1, 4]$ na ordinatni osi pod največjim zornim kotom?

7. Kako dolgo lestev še lahko nesemo okrog vogala hodnika širine $a > 0$, ki se pravkotno nadaljuje v hodnik širine $b > 0$?

8. Abscisna os naj bo meja med kopnim $y < 0$ in vodo $y > 0$. Po kopnem tečemo dvakrat hitreje kot plavamo po vodi. Po kakteri poti lahko najhitreje pridemo iz točke A (v koordinatnem izhodišču) do čolna, ki je zasidran v točki $B = B(a, b)$, $a, b > 0$?

9. Iz pravokotnega kartona dimenzije 2×1 m bi radi izdelali škatlo tako, da bi na vsakem vogalu odrezali enako velik kvadrat (in karton zapognili). Kako moramo ravnati, da bo prostornina dobljene škatle najve"ja?

19 Drugo v zvezi z odvodom

1. Poiščite točke, v katerih je tangenta na krivuljo vzporedna z abscisno osjo
$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20.$$

2. Poiščite enačbi tangente in normale na krivuljo $y = \sqrt[3]{x-1}$
   (a) pri $x = 0$,
   (b) pri $x = 1$.

3. Ugotovite, ali so naslednje funkcije konveksne ali konkavne:
   (a) $f(x) = x^2$,
   (b) $f(x) = 1/x$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$,
   (c) $f(x) = \ln x$,
   (d) $f(x) = \sin x$,
   (e) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

4. Poiščite prevoje ter intervale konveksnosti in konkavnosti naslednjih funkcij:
   (a) $f(x) = 3x - x^3$,
   (b) $f(x) = x/(1 + x^2)$,
   (c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$,
   (d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,
   (e) $f(x) = x^2 \ln x$,
   (f) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$.

5. Z uporabo diferenciala izračunajte približno vrednost funkcije
   (a) $f(x) = \sin x$ v točki $x = 31^0$,
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v točki $x = 0.97$,
   (c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ v točki $x = 1000$,
   (d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ v točki $x = 1.7$,
   (e) $f(x) = x^x$ v točki $x = 1.1$,
   (f) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ v točki $x = 0.9$.

6. Narišite naslednje krivulje v parametri"ni obliki
   (a) $x = t + 1,\ y = 1 - t^2$,
   (b) $x = t/(t^2 + 1),\ y = 1/(t^2 + 1)$,
   (c) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$.

7. Narišite naslednje krivulje v polarni obliki
   (a) $r = 1 + \phi/2$,
   (b) $r = a \sin \phi$, $a > 0$,
   (c) $r = a/(\cos \phi + \sin \phi)$.

20 Integriranje elementarnih funkcij

1. Izračunajte nedoločene integrale:
   (a) $\int ((x^2 - 1)^2 + \sqrt[3]{x} - 1)dx$
   (b) $\int \cos^2 x \, dx$
   (c) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$
   (d) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$
   (e) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$
   (f) $\int \mathrm{tg} x \, dx$
   (g) $\int \frac{\sin x \, dx}{2 + \cos^2 x}$
   (h) $\int \frac{\sqrt{\ln x} - 1}{x} dx$
   (i) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$
   (j) $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1}$
   (k) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$
   (l) $\int 2x\mathrm{e}^{-x^2} dx$
   (m) $\int \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} dx$
   (n) $\int \ln x \, dx$
   (o) $\int x \sin x \, dx$

2. Izračunajte določene integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2dx}{x^2+1}$

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3dx}{(x^2+4)^2}$

   (c) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

   (f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

   (h) $\displaystyle\int_0^\pi (\pi-x)^2\cos x\,dx$

3. Izračunajte posplošene integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2xdx}{1+x^4}$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}dx}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

   (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

21 Uporaba integrala

1. Izračunajte ploščino

   (a) pod krivuljo $y = x\sqrt{4-x^2}$ na intervalu $[0,2]$

   (b) med krivuljama $y = 3x-2x^2$ in $y = \dfrac{2x}{x+1}$

   (c) med krivuljama $y = \sqrt{x}$ in $y = x$

(d) med krivuljama $y = \dfrac{2x}{x+1}$ in $y = x$

(e) med krivuljo $y = x^3 - 5x^2 + 10x$ in njeno tangento v točki $x = 1$

2. Krivulja je podana parametrično z enačbama $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$. Narišite krivuljo in izračunajte ploščino lika, ki ga oklepa.

3. Izračunajte ploščino pod enim lokom cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Izračunajte še dolžino te krivulje.

4. Izračunajte obseg in ploščino srčnice $r = a(1 + \cos\phi)$, $a > 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

5. Izračunajte prostornino in površino telesa, ki nastane, če se lik omejen z abscisno osjo in dano krivuljo na danem intervalu zavrti okrog abscisne osi:

   (a) $y = bx/a$, $[0, a]$, $a, b > 0$

   (b) $y = R - (R - r)x/h$, $[0, h]$, $R > r > 0$, $h > 0$.

   (c) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$

   (d) $y = \mathrm{e}^{-x}$, $[0, \infty]$

6. Izračunajte prostornino rotacijskega elipsoida, ki ga dobimo z vrtenjem okrog abscisne osi zgornje polovice elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

22 Taylorjeva vrsta

1. Funkcijo $f(x) = \frac{1}{x-2}$ razvijte v Taylorjevo vrsto:

   (a) okrog točke $a = 0$,

   (b) okrog točke $a = -1$.

   V obeh primerih tudi ugotovite, kje vrsta konvergira.

2. Funkcijo $f(x) = \ln(1-x)$ razvijte okrog točke $a = 0$. Izračunajte $f^{(2005)}(0)$. Z uporabo tega razvoja seštejte vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

3. Funkcijo $\sin x$ razvijte okrog točke $a = \frac{\pi}{4}$. Zapišite prvih pet členov razvoja.

4. Poiščite prve tri člene v razvoju funkcije $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ okrog točke $a = 0$.

5. Funkcijo $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ razvijete po potencah spremenljivke x. Nato z integriranjem vrste po členih poiščite tudi razvoj funkcije $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

6. Razvijte v Taylorjevo vrsto okrog dane točke še vsako od naslednjih funkcij. V vsakem primeru določite, kje dobljena vrsta konvergira.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x},\ a = 1$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ a = 1$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1},\ a = -1$

   (d) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 2$

   (e) $f(x) = x\mathrm{e}^x,\ a = 1$

   (f) $f(x) = \ln(1 + 1/x),\ a = 2$

23 Funkcije dveh spremenljivk

1. Za naslednji funkciji poiščite oba parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   (a) $z = \frac{x-y}{x+y}$.

   (b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

2. Pokažite, da funckija $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ zadošča enačbi

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

3. Za funkcijo $z = x^2 + xy + y^2$ poiščite totalni diferencial.

4. Dan je stožec z višino 30 cm in polmerom osnovne ploskve 10 cm. Izračunajte prostornino stožca in s pomočjo diferenciala ocenite, za koliko se prostornina spremeni, če povečamo višino za 3 mm in zmanjšamo polmer za 1 mm. Nato še izračunajte dejansko spremenjeno prostornino in primerjajte oba rezultata.

5. Dana je funkcija $z = f(u, v)$, kjer je $u = x^2 - y^2$ in $v = e^{xy}$. Izračunajte parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. Dana je funkcija $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, kjer je $u = x \sin y$ in $v = x \cos y$. Izračunajte parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Kaj opazi"te?

7. Poiščite totalni diferencial funkcije in z njegovo pomočjo izračunajte približno vrednost funkcije v dani točki:

(a) $\sqrt{x^2+3xy^2}$; $f(1.04, 0.98)$,

(b) $2\sqrt{\dfrac{x}{y+2}}$; $f(1.2, 2.4)$.

8. Izračunajte $(u+v)\dfrac{\partial z}{\partial u}+(u-v)\dfrac{\partial z}{\partial v}$, če je $f(x,y)=2y+2xy-x^2+y^2$ in $x=u+v$, $y=u-v$.

9. Določite lokalne ekstreme naslednjih funkcij dveh spremenljivk:

   (a) $f(x,y)=xy^2-y(x-y)-2x+y$

   (b) $f(x,y)=y^2+(x^2-2x-3)y+1$

   (c) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2y^2+1$

   (d) $f(x,y)=2y^3+3x^2(y^2-1)$

   (e) $f(x,y)=x^2(x+y)+y^2$

   (f) $f(x,y)=x^2y+2xy^2-2xy$

   (g) $f(x,y)=\dfrac{xy-y^2}{x+1}$

10. Poiščite vezane ekstreme dane funkcije pri danem pogoju.

   (a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x-2y+1$; $y=x-1$

   (b) $f(x,y)=xy^2-2x^2y-x$; $y=-x$

   (c) $f(x,y)=x(y+3)^2-2x^2y$; $y+3=x$

   (d) $f(x,y)=(x+y)\ln x$; $y=x$

   (e) $f(x,y)=x^2y^2-16x+2y+1$; $xy+8=0$

   (f) $f(x,y)=xy$; $x^2+y^2=1$.

24 Diferencialne enačbe

1. Poišči splošno rešitev enačbe $x+2yy'=0$.

2. Poišči tisto rešitev enačbe $(1+e^x)yy'=e^x$, ki zadošča pogoju $y(0)=1$.

3. Zakon ohlajanja je podan z diferencialno enačbo

$$dT=k(T-T_0)dt,$$

   kjer je T_0 temperatura okolice. Kroglico bakra s temperaturo 100 stopinj damo v vodo s temperaturo 30 stopinj. Po 3 sekundah ima kroglica temperaturo 70 stopinj. Kdaj bo imela temperaturo 31 stopinj?

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe prvega reda z ločljivimi spremenljivkami. Napišite tudi ustrezno diferencialno enačbo za ortogonalne trajektorije in jo rešite.

(a) $y' = y/x$,

(b) $y' = 2xy^2$,

(c) $y' = cos^2 y$.

5. Poiščite splošno rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe prvega reda

   (a) $xy' + y = 1$,

   (b) $xy' - 2y = x$,

   (c) $y' + y \cos x = \sin 2x$

   (d) $x + 2y + y\prime = 1$.

6. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $xy' - y = x^2 y^2$, ki zadošča pogoju $y(1) = 1$. Nasvet: vpeljite novo spremenljivko $z = \frac{1}{y}$.

7. Poiščite tisto rešitev enačbe $y' - 2y = 2t - 1$, ki zadošča pogoju $y(0) = 0$.

8. Poiščite tisto rešitev linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti $y'' - 3y' + 2y = 0$, za katero velja $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

9. Poiščite splošno rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 4t$,

   (b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^t$.

10. Rešite naslednje linearne diferencialne enačbe s konstanimi koeficienti

    (a) $y'' + y = 1$,

    (b) $y'' + 2y' + 2y = 0$,

    (c) $y'' + 3y' + 2y = 1$.

11. Poiščite splošno rešitev homogenega linearnega sistema diferencialnih enačb

    (a) $x' = y$, $y' = 2x - y$,

    (b) $x' = x - y$, $y' = x + y$.

12. Poiščite tisto rešitev nehomogenega linearnega sistema diferencialnih enačb $x' = 3x - 2y + 1$, $y' = x$, za katero velja $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

25 Rešitve

1. Množice in relacije

1. (a) ne, (b) da, (c) ne, (d) ne, (e) da;
2. (a) $\{22, 44, 66, 88\}$, 4 elementi, (b) 55;
3. (a) $0 = (U \cup V)^c$, $A = U \setminus V$, $B = V \setminus U$, $AB = U \cap V$, (b) refleksivna, antisimetrična, tranzitivna;
6. (a) refleksivna, simetrična, ne pa tranzitivna (npr. $(1,1) \sim (1,2), (1,2) \sim (2,2)$, vendar $(1,1) \not\sim (2,2)$), (b) refleksivna, simetrična in tranzitivna, torej ekvivalenčna; $(x,y) \sim (3,2)$, če $x + y = 5$;
7. (a) ne, (b) da, (c) ne, (d) ne;
8. (a) da, (c) $[(-3,6)] = \{(a,b),\ a^2 + b^2 = 45\}$.

2. Funkcije

1. (a) $f \circ g : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,3\,4\,5\,2 \end{pmatrix}$, (b) $f^{-1} : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,1\,5\,4 \end{pmatrix}$, $g^{-1} : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,4\,3 \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $g^{-1} \circ f^{-1} : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, opazimo $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$;
2. $D_f = \mathbb{N}$, $Z_f = \{3, 5, 7, ...\}$ (množica vseh lihih naravnih števil razen 1); funkcija f je injektivna, ne pa surjektivna; $f^{-1}(n) = (n-1)/2$, če je $n \geq 3$ liho število; $D_{f^{-1}} = Z_f$, $Z_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{N}$;
3. $(f \circ g)(x) = x/(1+x)$, $(g \circ f)(x) = 1/(2-x)$; $Z_f = [0,1]$, $Z_g = [1/2, 1]$, $Z_{f \circ g} = [0, 1/2]$, $Z_{g \circ f} = [1/2, 1]$; surjektivna je samo funkcija f, injektivne so vse; f je bijekcija, $f^{-1}(x) = 1 - x$;
4. (a) $Z_f = \mathbb{R}$, $Z_g = \{x;\ x \geq 0\}$, (b) f je bijektivna, g niti injektivna niti surjektivna, (c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 - 2x; & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 - 2x; & x \leq 1/2 \\ 1 & x > 1/2 \end{cases}$;
5. $f^{-1}(x,y) = (1 - x, y/2)$, $g^{-1}(x,y) = (y,x)$, $(f \circ g)(x,y) = (1 - y, 2x)$, $(g \circ f)(x,y) = (2y, 1 - x)$;
6. $(f \circ f)(x,y) = (x, 0)$, niti surjektivna nini injektivna, $(g \circ g)(x,y) = (x,y)$, bijektivna, $(f \circ g)(x,y) = (y, 0)$, niti surjektivna niti injektivna, $(g \circ f)(x,y) = (0, x)$, niti surjektivna niti injektivna, $(h \circ f)(x,y) = x$, surjektivna, $(h \circ g)(x,y) = y$, surjektivna;
7. $(f \circ g)(x,y) = (x,x)$, niti surjektivna niti injektivna, $(g \circ f)(x) = x$, bijektivna.

4. Kombinatorika

1. (a) (A) 2, (B) 2, (C) 1, (b) (A) 2, (B) 8, (C) 6;
2. (a) 81, (b) 15;
3. (a) 14400, (b) 560;
4. (a) 35, (b) 120;
5. (a) 54, (b) 35, (c) 102;
6. (a) $4^3 \cdot 3!^3 = 13824$, (b) $4 \cdot 10 \cdot 3!^3 = 8640$, (c) 5/8, kar je več kot 50%.

5. Verjetnost

1. (a) 1/3, (b) 10/21, (c) 3/7, (d) 3/7;
2. (a) 12/25, (b) 3/5;
3. (a) 3/8, (b) 1/2;
4. (a) 2/3, (b) 1/2, (c) A, B neodvisna, A, C nista neodvisna, B, C nista neodvisna;
5. (a) 3/4, (c) 2/3;
6. (a) 7/20, (b) 4/7;
7. (a) $\frac{6}{21}$, $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{16}{81}$;
8. $\frac{7}{8}$;
9. 97%;
10.14/25;
11. vsaj 3 krat.

6. Algebrske strukture

2. $\frac{-6}{25} + i\frac{17}{25}$;
3. Operaciji sta notranji, vse ostale lastnosti komutativnega kolobarja z enoto veljajo, ker veljajo v $\mathbb{C}$; obrnljivi elementi so: $1, -1, i, -i$;
4. $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. (a) $s(x) = x + 1$, $r(x) = x$, (b) $s(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $r(x) = 9x + 6$;
6. (a) $p(x) = (x + 1)(x + 4)(x - 2)$, (b) $p(x) = (x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 2)$;
7. $p(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$;
6. Hornerjev algoritem, $p(x) = (x + 4)(x + 7)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$.

7. Matrike

1. 1. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
2. Noben par matrik ne komutira;
3. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^T,\ A^4 = I$ in
$A^{4k+1} = A,\ A^{4k+2} = A^2,\ A^{4k+3} = A^T$ in $A^{4k} = I$ za $k \in \mathcal{N}$;
4. $x = 1,\ y = -1,\ u = -1,\ v = 2$;
5. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$;
6. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,
$(BA)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$;

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
8. $X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Determinante

1. $\det A = 1$;
2. $\det A = 6$, $\det B = -64$;
3. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det AB = 10 = 5 \cdot 2 = \det A \det B$;
4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
5. $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;
6. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;
7. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $b \neq 0$ in $a \neq b$; (c) rang(A)=3, če $b \neq 0$ in $a \neq b$; rang(A)=2, če $b = 0$ in $a \neq 0$; rang(A)=1, če $a = b = 0$.

9. Sistemi linearnih enačb

1. $[x, y, u, v]^\top = [-1, -2, 4, 0]^\top + v[-2, 0, 1, 1]^\top$;
2. $[x, y, z, u, v]^\top = (1/2)[3, 3, -3, 0, -2]^\top + (u/2)[-1, 3, 3, 2, -4]^\top$;
3. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
4. $[x, y, u, v]^\top = [-2, 1, 0, 1]^\top + u[-3, -1, 1, 0]^\top$;
5. Za $a = 0$ ali $a = -1$ sistem ni rešljiv, za $a = 1$ ima neskončno (enoparametrično družino) rešitev, za $a \neq 0, -1, 1$ pa je enolično rešljiv;
6. (a) $[x, y, z]^\top = z[-1, 1, 1]^\top$, (b) $[x, y, z]^\top = [0, 0, 0]^\top$;
7. $[x, y, z]^\top = [0, 0, 0]^\top$.

10. Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Stolpci so neodvisni, ker je determinanta matrike sestavljena iz njih, enaka 3, torej je matrika obrnljiva;
2. Lastne vrednosti so 0,-2,5, lastni vektorji večkratniki stolpcev $(-2, 0, 1)^\top$, $(1, -1, 2)^\top$, $(2, 5, 4)^\top$;

3. Lastne vrednosti so 1,-1,2, lastni vektorji večkratniki stolpcev $(1,-1,1)^\top$, $(1,1,1)^\top$, $(1,1,-2)^\top$;

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

4. Lastne vrednosti so 0,1,4, lastni vektorji večkratniki stolpcev $(-1,1,0)^\top$, $(0,-1,1)^\top$, $(3,5,4)^\top$;

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

5. Lastne vrednosti so 0,1,3, lastni vektorji večkratniki stolpcev $(0,0,1)^\top$, $(1,1,1)^\top$, $(-3,3,5)^\top$;

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

6. Lastne vrednosti so 0,-1,2, lastni vektorji večkratniki stolpcev $(1,-1,0)^\top$, $(0,-2,1)^\top$, $(3,-1,2)^\top$;

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Zaporedja realnih števil

1. (a) $A \subset [0,2]$, $\sup A = 2$ (dosežen), $\inf A = 0$, (b) $A \subset [0,1]$, $\sup A = 1$, $\inf A = 1/2$ (dosežen);
2. (a) $\{0,2\}$, (b) $\mathbb{N} \cup \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$, (c) $\{-1/n;\ n \text{ liho}\} \cup \{1/n;\ n \text{ sodo}\}$, (d) $\{-1,0,1\}$;
3. Omejeno ($0 \le x_n \le 2$), strogo naraščajoče, (b) navzdol omejeno ($x_n \ge 1/2$), navzgor neomejeno, strogo naraščajoče;
4. (a) V okolici $V_\epsilon(1)$ ležijo vsi členi x_n z indeksom $n > (1-\epsilon)/\epsilon$. (b) Če je $\epsilon \ge 1$, ležijo v okolici $V_\epsilon(1)$ vsi členi x_n; če je $\epsilon < 1$, pa členi z lihim indeksom $n < 1/(1-\epsilon)$ in členi s sodim indeksom $n > 1/(2\epsilon)$;
5. (a) Limita je 1, (b) stekališči sta $-1/2$ in $1/2$.

12. Limite

1. (a) -1/2, (b) 1/3, (c) $(\sqrt{3}+1)/2$, (d) 0, (e) 1/2, (f) 1, (g) 1/2;
2. (a) 3, (b) 1/2, (c) 2;
3. (a) Naj bo $c > 1$. Označimo $x_n = \sqrt[n]{c} - 1$; potem je $c = (1+x_n)^n \ge 1 + nx_n$, torej $0 \le x_n \le (c-1)/n$. Leva in desna stran konvergirata proti 0, zato

$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Za $c < 1$ je $\sqrt[n]{c} = 1/\sqrt[n]{1/c} \to 1$, za $c = 1$ je $\sqrt[n]{c} = 1$ za vsak n. (b) Naj bo $a \geq b$; potem je $0 \leq x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} = a\sqrt[n]{1 + (b/a)^n} \leq a\sqrt[n]{2} \to a$ po točki (a). Če je $a \leq b$, zamenjamo vlogo števil a in b.
4. Nasvet: pokažite, da za vsak n velja $k \leq a_n \leq k\sqrt[n]{k}$;
5. "Limita"je $+\infty$; pokažite $\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$ in se prepričajte, da je to zaporedje neomejeno;
6. $l = (a/\sqrt{2})(1+1/2+(1/2)^2+...)+(a/2)(1+1/2+(1/2)^2+...) = a(\sqrt{2}+1)$, $p = (a^2/8)(1+1/4+(1/4)^2+...) = a^2/6$.

13. Rekurzivna zaporedja

1. (a) 3, (b) 2, (c) 3;
2. 1;
3. $(1+\sqrt{5})/2$;
4. (a) Zaporedje ima samo dve vrednosti 0 in 1 v prvih dveh primerih , 1/2 in 1/5 v tretjem primeru ter eno samo vrednost 1/3 v četrtem primeru. (b) Razen za $x_0 = 1/3$ ima zaporedje samo dve vrednosti: x_0 in $(1-x_0)/(1+3x_0)$.

14. Vrste

1. (a) 27, (b) 4/3;
2. (a) 3/4, najprej se prepričajte, da je n-ta delna vsota $S_n = (1+1/2-1/(n+1)-1/(n+2))/2$, (b) 1;
3. (a) Konvergira (kvocientni kriterij), (b) divergira (minoranta je harmonična vrsta $\sum_n 1/n$), (c) divergira (členi ne konvergirajo proti 0), (d) konvergira (majoranta je geometrijska vrsta $\sum_n (2/3)^n$;
4. Vrsta konvergira za $x < 1$ (npr. po kvocientnem kriteriju), $(1-x)S_n = x(1-x^n)/(1-x) - nx^{n+1}$, torej je vsota vrste enaka $S = x/(1-x)$.
5. (a) Vrsta konvergira za $x < 1/2$ (kvocientni kriterij). (b) Vrsta konvergira za $x < 1$ (primerjava z majoranto $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$).
6. (a) Vrsta konvergira za $x < 1/2$, vsota je $(1-2x)/(1-x)$. (b) Vrsta konvergira absolutno za $|x| < 1$ in divergira za $|x| \geq 1$.
7. Za $|x| < 1$ konvergira vrsta absolutno, za $|x| > 1$ divergira, pri $x = 1$ divergira (harmonična vrsta), pri $x = -1$ pa konvergira (alternirajoča vrsta).

15. Limite funkcij in zveznost

1. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (b) $D_f = \{x; x > 0\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (c) $D_f = \{x; x \leq 2\}$, $D_g = [-1, 1]$;
2. (a) -3, (b) 0, (c) 1/2, (d) 2, (e) $\sqrt{2/a}$, (f) 2;
3. (a) $\cos a$, (b) 1/2, (c) 1/2, (d) 1, (e) 1, (f) 1, (g) - e/π;
4. (a) leva limita ∞, desna limita 0, $(b) levalimita 0, desnalimita 1$;
5.(a)f(0) = 1/2, (b)f(0) = 1;
6.(a)a = f(1/2) = -1/2, (b) $a = 1 - \pi$.

16. Odvajanje funkcij

1. (a) $2/(x+1)^2$, (b) $(x^2+1)/x^2$, (c) $(1-x^2)(x^2+1)^2$, (d) $2x/(1-x)^2$;
2. (a) $2(x^2+x)(2x+1)$, (b) $2\cos(2x)$, (c) $-1/(1+x^2)$, (d) $x/\sqrt{1+x^2}$, (e) $-1/\sqrt{1-x^2}$ za $x>0$ in $1/\sqrt{1-x^2}$ za $x<0$, (f) $\mathrm{e}^{2x}/\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$, (g) $\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{2x})/(1+\mathrm{e}^{2x})^2$, (h) $\mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin(2x)$, (i) $1/\sqrt{1+x^2}$;
3. (a) $1/\sqrt{1+4x}$, (b) $1/(1+x-y)$, $y+\mathrm{e}^y=x$, (c) $-1/(2x\sqrt{\ln(1/x)})$, (d) $1/(2(1+x)\sqrt{x})$;
4. Prepričajte se, da obstaja $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+h}-2-h}{2h^2}$; $f'(0)=-1/8$, $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2\sqrt{1+x}}$ za $x\neq 0$.
5. Pri (a) in (c) dobimo odvod $-1/(1+x^2)$, pri (b) pa $1/(1+x^2)$;
6. (a) $f'(x)=x^x(\ln x+1)$, (b) $f'(x)=(\sin x)^x(\ln\sin x-x\mathrm{ctg}\,x)$:
7. $(1,1)$, $\mathrm{tg}\,\phi=3$;
8. $-0,4m/s$.

17. Lokalni ekstremi in grafi funkcij

1. (a) Ničle: 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, max: (1,2), min: $(-1,-2)$,
(b) Ničle: -1, 2, max: (0,4), min: (1,2),
(c) Ničle: 1, -1, pol: 0, poševna asimptota: $y=x$, ni lokalnih ekstremov,
(d) Ničel ni, pol: 0, poševna asimptota: $y=x$, max: $(-1,-2)$, min: (1,2),
(e) Ničla: 0, polov ni, vodoravna asimptota: $y=0$, max: (1,1/2), min: $(-1,-1/2)$,
(f) Ničla: 0, pol: -1 (2.st.), vodoravna asimptota: $y=0$, max: (1,1/4), (g) Ničla: -2 (2.st.), pol: -1 (2.st.), vodoravna asimptota: $y=1$, min: $(-2,0)$,
(h) Ničle: 0, -2 (2.st.), pol: -3 (2.st.), poševna asismptota: $y=x-2$, max: $(-2,0)$, $(-6,-32/3)$, min: $(-1,-1/4)$;
2. Perioda π, zaloga vrednosti $[1,2]$, max: $((2k+1)\pi/2,2)$, $k\in\mathbb{Z}$, min: $(k\pi,1)$, $k\in\mathbb{Z}$,
(b) Ničle: $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, max: $(2\pi/3+2k\pi,3\sqrt{3}/2)$, min: $(-2\pi/3+2k\pi,-3\sqrt{3}/2)$, $k\in\mathbb{Z}$,
(c) Ničla: 0, vodoravna asimptota ($x\to+\infty$): $y=0$, max: $(1,e^{-1})$,
(d) Ničla: 0 (2.st.), vodoravna asimptota ($x\to+\infty$): $y=0$, max: $(1,e^{-2})$, min: $(0,0)$,
(e) Ničla: 0, pol: -1, vodoravna asimptota ($x\to+\infty$): $y=0$, max: $((\sqrt{5}-1)/2,3-\sqrt{5})/2)$, min: $(-(\sqrt{5}+1)/2,3+\sqrt{5})/2)$,
(f) Ničla: 0 (2.st.), pol: -1, vodoravna asimptota ($x\to+\infty$): $y=0$, max: $(-2,-4e^2)$, $(2,4e^{-2}/3)$, min: $(0,0)$,
(g) Ničla: 1, $\lim_{x\to 0,x>0}y=0$, min: $(e^{-1},-e^{-1})$,
(h) Ničli: $\sqrt{e}$, $1/\sqrt{e}$, min: $(1,-1)$,
(i) Ničli: $0,1$, max: $(1/\sqrt{5},4/(5^{5/4})$,
(j) Ničli: $0,1$, definicijsko območje: $-1<x\leq 1$, max: $((\sqrt{5}-1)/2,(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2/2})$;

3. (a) $1/2$, (b) 8, (c) 2, (d) $-1/3$, (e) $-1/12$, (f) 1, (g) $1/3$, (h) $1/2$, (i) 1, (j) $1/2$.

18. Uporaba odvoda

1. (a) (1,1), (b) $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.
2. Pravokotnik z največjo ploščino ima stranici $2/3$ in $1/\sqrt{3}$.
3. Stranici pravokotnika sta $x = 3$ in $y = 2$.
4. Največjo prostornino $V = 4\pi R^3/(3\sqrt{(3)})$ ima valj s polmerom $r = R\sqrt{2/3}$ in višino $v = 2R/\sqrt{3}$.
5. Polmer osnovne ploskve: $r = \frac{\sqrt{6\pi}}{6\pi}$, višina $v = \frac{\sqrt{6\pi}}{3\pi}$.
6. $(-2, 0)$ in $(2, 0)$.
7. Maksimalna dolžina lestve $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\sqrt{1/\sqrt[3]{a^2} + 1/\sqrt[3]{b^2}}$.
8. Po direktni poti (s plavanjem), če je $b \geq a\sqrt{3}$, in po lomljeni daljici AC, CB, kjer je $C = (a - b/\sqrt{3}, 0)$, če je $b < a\sqrt{3}$; minimalni čas je $2(2 + \sqrt{3}) \approx 7.46s$.
9. Stranica odrezanih kvadratov je $(3 - \sqrt{3})/6$, maksimalna prostornina pa $\sqrt{3}/9 \approx 0.19m^3$.

19. Drugo v zvezi z odvodom

1. $T_1(0, 20), T_2(1, 15), T_3(-2, -12)$.
2. (a) Enačba tangente: $y = x/3 - 1$, enačba normale: $y = -3x - 1$; (b) enačba tangente: $x = 1$, enačba normale: $y = 0$. 3. (a) Povsod konveksna, (b) konveksna za $x > 0$, konkavna za $x < 0$, (c) povsod konveksna, (d) povsod konkavna, (e) konveksna na intervalih $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ in konkavna na intervalih $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, za $k \in (Z)$, (f) konveksna za $x < 0$, konkavna za $x > 0$.
4. (a) Prevoj 0, konveksna za $x < 0$, konkavna za $x > 0$, (b) prevoji: 0, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, konveksna za $-\sqrt{3} < x < 0$ in $x > \sqrt{3}$, konkavna za za $x < -\sqrt{3}$, in $0 < x < \sqrt{3}$, (c) prevoj 2, konveksna za $x > 2$, konkavna za $x < 2$, (d) prevoja: $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, konveksna za $|x| > 1/\sqrt{2}$, konkavna za $|x| < 1/\sqrt{2}$, (e) prevoj $\mathrm{e}^{-3/2}$, konveksna za $x > \mathrm{e}^{-3/2}$, konkavna za $0 < x < \mathrm{e}^{-3/2}$, (f) prevoja: $-1/\sqrt[4]{3}$, $1/\sqrt[4]{3}$, konveksna za $|x| < 1/\sqrt[4]{3}$, konkavna za $|x| > 1/\sqrt[4]{3}$.
5. (a) 0.515, (b) 0.99, (c) 0.735, (d) 1.97, (e) 1.1, (f) 0.995.
6. (a) Parabola $y = 2x - x^2$, (b) zgornja polovica elipse $x^2 + (2y - 1)^2 = 1$, (c) astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
7. (a) Spirala skozi točko $(1, 0)$ za $\phi \geq -2$, (b) krožnica $x^2 + y^2 = x$, (c) premica $x + y = a$.

20. Integriranje elementarnih funkcij

1. (a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x^3/5 - 2x^3/3 + C$, (b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, (c) $\ln(x+1) + 1/(x+1) + C$, (d) $\sqrt{x^2 + 1}$, (e) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 - 1} + C$, (f) $-\ln(\cos x) + C$, (g) $-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\cos x}{2-\cos x} + C$, (h) $\frac{2}{3}(\sqrt{\ln x})^3 - \ln x + C$, (i) $\frac{2}{3}(\sqrt{\arcsin x})^3 + C$, (j) $\mathrm{arctg}(2x + 1) + C$, (k) $\arcsin\frac{x+1}{2} + C$, (l) $-\mathrm{e}^{-x^2} + C$, (m) $(2x - 4\sqrt{x} + 4)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$, (n) $x\ln x - x$, (o) $-x\cos + \sin x + C$.

2. (a) $2-\pi/2$, (b) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$, (c) $a^3/3$, (d) $\ln 3$, (e) $\pi/(2\sqrt{2})$, (f) 2, (g) 1/4, (h) 2π.
3. (a) (b) 1, (c) $\pi/4$, (d) 1, (e)$\pi/2$.

21. Uporaba integrala

1. (a) 8/3, (b) $2\ln 2-7/6$, (c) 1/6, (d) $3/2-2\ln 2$, (e) 4/3.
2. Elipsa z veliko polosjo $a=4$ in malo polosjo $b=3$; $p=12\pi$.
3. $p=3\pi a^2$, $s=8a$.
4. $p=3a^2\pi/2$, $s=8a$.
5. (a) $V=\pi ab^2/3$, $P=\pi b\sqrt{a^2+b^2}$, (b) $V=\pi h(R^2+Rr+r^2)/3$, $P=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$, (c) $V=\pi/2$, $P=\pi(5\sqrt{5}-1)/6$, (d) $V=\pi/(2e^2)$, $P=\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.
6. $4\pi ab^2/3$.

22. Taylorjeva vrsta

1. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{2^{n+1}}$, konvergira na intervalu $(-2,2)$.
b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^n}{3^{n+1}}$, konvergira na intervalu $(-4,2)$.
2. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}$, $f^{(2005)}(0)=-2004!$, vsota dane vrste je $-\ln 2$.
3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^3-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})^4+....$
4. $1+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{8}x^3+....$
5. $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...$, $\operatorname{arctg} x=x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+....$
6. (a) $f(x)=\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^n}(x-1)^n$, konvergira za $0<x<2$,
(b) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$, konvergira za $0<x<2$,
(c) $f(x)=1-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+1)^n$, konvergira za $-3<x<1$,
(d) $f(x)=\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\binom{1/2}{n}(x-2)^n$, konvergira za $1<x<3$,
(e) $f(x)=\mathrm{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}(x-1)^n$, konvergira za vsak $x\in\mathbb{R}$,
(f) $f(x)=\ln(7/2)+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})(x-2)^n$, konvergira za $0<x\leq 4$.

23. Funkcije dveh spremenljivk

1. (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$. (b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3. $dz = (2x+y)dx + (x-2y)dy$.
4. $V_1 = 1000\pi \mathrm{cm}^3$, $dV \doteq -10\pi$, dejanska sprememba prostornina pa je $\Delta V = -10.1\pi$.
5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 2x + \frac{\partial f}{\partial v} y e^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-2y) + \frac{\partial f}{\partial v} x e^{xy}$.
6. $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Opazimo: $z = y$.
7. (a) $df = \dfrac{(2x+3y^2)dx + 6xydy}{2\sqrt{x^2+3xy^2}}$, $f(1.04, 0.98) \approx 2.02$,
(b) $df = \dfrac{(y+2)dx - xdy}{\sqrt{x(y+2)^2}}$, $f(1.2, 2.4) \approx 1.05$
8. Uporabite verižno pravilo.
9. $4u$.
10. (a) $(-5/3, 2)$ sedlo, $(-1/3, -1)$ sedlo, (b) $(3, 0)$ sedlo, $(-1, 0)$ sedlo, $(1, 2)$ minimum, (c) $(0, 0)$ ne vemo, $(1/2, -1/2)$ sedlo, (d) $(0, 0)$ ne vemo, $(1, -1)$ sedlo, $(-1, -1)$ sedlo, (e) $(0, 0)$ ne vemo, $(3, -9/2)$ sedlo, (f) $(0, 0)$ ne vemo, $(2, 0)$ sedlo, $(0, 1)$ sedlo, $(2/3, 1/3)$ minimum, (g) $(0, 0)$ sedlo, $(-2, -1)$ sedlo.
11. (a) $(1, 0)$, (b) $(1/3, -1/3)$, $(-1/3, 1/3)$, (c) $(0, -3)$, $(4, 1)$, (d) (e^{-1}, e^{-1}), (e) $(1, -8)$, $(-1, 8)$, (f) $(1\sqrt{2}, 1\sqrt{2})$, $(1\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$, $(-1\sqrt{2}, 1\sqrt{2})$, $(-1\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$.

24. Diferencialne enačbe

1. $y = \pm\sqrt{C - \frac{x^2}{2}}$.
2. $y = \sqrt{2\ln(e^x+1) + 1 - \ln 2}$.
3. Približno po 22,4 sekundah (najprej izračunaš konstanto $k = 0,19$).
4. (a) $y = Cx$, $x^2 + y^2 = 2C$; (b) $y = -1/(x^2 + C)$, $y^3 = (3/2)\ln(C/x)$;
(c) $y = \mathrm{arctg}(x + C)$, $2y + \sin sy = 2(C - x)$.
5. (a) $y = 1 + C/x$, (b) $u = -x + Cx^2$, (c) $y = 2(\sin x - 1) + C\mathrm{e}^{-\sin x}$,
(d) $y = C\mathrm{e}^{-2x} - x/2 + 3/4$.
6. $y = 3x/(4 - x^2)$.
7. $y = -t$.
8. $y = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t}$.
9. (a) $y = 3 + 2t + c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t}$, (b) $y = (c_1 - t)\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t}$ (nastavek za posebno rešitev: $y = At\mathrm{e}^t$).
10. (a) $y = 1 + c_1\cos t + c_2\sin t$, (b) $y = \mathrm{e}^{-t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$,
(c) $y = 1/2 + c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t}$.
11. (a) $y = c_1\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}c_2\mathrm{e}^{-2t}$, (b) $x = \mathrm{e}^t(c_1\cos t + c_2\sin t)$, $y = \mathrm{e}^t(c_1\sin t - c_2\cos t)$.
12. $x = \mathrm{e}^{2t}$, $y = (1 + \mathrm{e}^{2t})/2$.