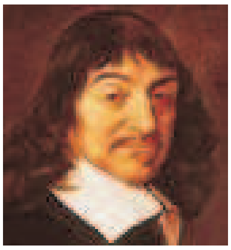
9. Analitična geometrija in teorija števil

Descartes in Fermat sta z uvedbo koordinat geometrijo postavila na povsem nove osnove. S korespondenco med geometrijskimi objekti - krivuljami - in algebraičnimi enačbami $f(x, y) = 0$ sta geometrijo takorekoč reducirala na algebro in analizo.

René Descartes (1596-1650)

Veliki filozof in matematik se je rodil blizu Toursa in z osmimi leti začel obiskovati jezuitsko šolo v La Flèchu. Leta 1912 se je preselil v Pariz, kjer je z **Mersennom** in **Mydorgem** začel študirati matematiko. Od 1617 dalje je nekaj let služboval kot vojak v armadi princa Mauricea Oranškega po Nemčiji, Danski, Nizozemski, Švici in Italiji, nato pa nadaljeval študije. Nakar je 20 let preživel na Nizozemskem, leta 1949 pa se je na povabilo kraljice Kristine preselil na Švedsko, kjer je kmalu zbolel in umrl v Stockholmu za pljučnico.



Slika 1. René Descartes

Največ razprav je napisal na Nizozemskem. Fizikalno sliko sveta je leta 1633 opisal v *Le mondu*, vendar dela ni objavil, ker je izvedel za Galilejeve težave z inkvizicijo (izšlo je posthumno šele leta 1664).

Najpomembnejše njegovo matematično delo pa je iz leta 1637, in sicer *Discourse de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* s tremi dodatki *La dioptrique, Les météores* in *La géométrie*. *Dioptrika* se ukvarja z naravo svetlobe (vključuje tudi lomni zakon), *Meteorika* pa je prvi poskus znanstvene razlage vremena (v njej najdemo npr. tudi opis, zakaj nastane mavrica). Poleg tega je izdal filozofski deli v latinščini, *Meditationes* leta 1641 in *Principia philosopiae* leta 1644. Z njima je še utrdil principe racionalizma. Descartes je uvedel metodični dvom: ničesar ni, o čemer ne bi mogli dvomiti, razen dvoma samega; to pa že predpostavlja, da obstaja nekdo, ki dvomi. Odtod njegov citat: *Cogito, ergo sum* (*mislim, torej sem*). Dvom pa ni dovolj. Treba je najti trdno oporo in ta opora je po njegovem lahko le matematika, prva izmed znanosti.

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que je nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Slika 2. Descartesova *La géométrie*

La géométrie je 100 strani dolga razprava in prinaša v prvem delu osnove analitične geometrije. V nasprotju z Grki, ki jim je količina x^2 pomenila ploščino kvadrata, je Renéju Descartesu pomenila dolžino, ki jo je pri danem x znal konstruitrati s sorazmerjem $1 : x = x : x^2$. V drugem delu se ukvarja s konstrukcijo tangent na krivulje, podane z enačbo $f(x, y) = 0$, npr. na stožnice in druge sorodne krivulje (npr. *Descartesov list*, *Descartesove ovale*, kot geometrijska mesta točk, katerih razdalji r_1, r_2 do dveh izbranih točk zadoščata relaciji $r_1 + mr_2 = a$ itd.). Tretji del obravnava reševanje enačb stopnje več kot 2. V njem najdemo slavno Descartesovo pravilo predznakov za določitev števila pozitivnih rešitev. Prav tako je v njem standardizirana notacija (uporaba začetnih črk za koeficiente, zadnjih za neznanke, potence a^2, a^3 itd.), prva uporaba metode nedoločenih koeficientov itd. *La géométrie* sicer ni napisana zelo jasno in jo je težko brati.

Nadaljni razvoj analitične geometrije

Šele kasnejše latinske izdaje (npr. **Fransa van Schootena** mlajšega iz leta 1649) so analitično geometrijo bolj popularizirale, današnjo podobo pa je dobila šele sto in več let kasneje. Izraze, kot so npr. *koordinate*, *abscisa*, *ordinata*, je vpeljal Leibniz leta 1692. Poleg karteričnih koordinat so vpeljali tudi polarne koordinate (Jakob Bernoulli 1691) in tudi druge koordinate (za posebne potrebe). Zanimiv razvoj je leta 1829 začel **Julius Plücker** (1801-1868), ko je ugotovil, da osnovni element ni nujno točka, pač pa lahko tudi premica ali krog. Vpeljal je ti. *linearne kordinate* za določanje položaja premice v ravnini (glej vajo 6). Na osnovi tega je tudi izpeljal princip dualnosti v projektivni geometriji, definiral krivuljo ne kot geometrijsko mesto točk, ampak kot ovojnico premic (tangent) itd.

Drugi (**Frans van Schooten**, **La Hire** in **Johann Bernoulli**) so predlagali prostorsko analitično geometrijo, ki jo je prvi sistematično razvil **Antoine Parent** (1666-1716) okrog leta 1700. **Alexis Claude Clairaut** (1713-1765) pa je leta 1731 prvi zapisal analitično primer prostorske krivulje; teorijo takih krivulj je sistematično obdelal **Leonhard Euler**. Večrazsežne prostore so vpeljali šele matematiki 19. stoletja **Arthur Cayley** (1821-1895), **Hermann Grassmann** (1809-1877) in **Bernhard Riemann** (1826-1866).

Pierre de Fermat

Osnove moderne analitične geometrije je (kot zatrjuje v pismu **Robervalu** septembra 1636) neodvisno od Descartesa in celo pred njim razvil drugi veliki francoski matematik tega časa, **Pierre de Fermat** (1601-1665). Poleg enačb premice, krožnice, parabole, hiperbole in elipse je analitično (z enačbami) vpeljal mnoge nove krivulje, npr. krivuljo, kasneje imenovano *verziera* ali *Agnesin koder* (v čast vsestranski ženski **Mariji Gaetani Agnesi** (1718-1799) iz Milana, lingvistki, filozofinji in prvi pomembni matematičarki po Hipatiji).

Slika 3. Pierre de Fermat

Fermat je bil rojen blizu Toulousa, sin trgovca, s 30 leti postal kancler lokalnega parlamenta in se odlikoval po skromnosti in natančnosti. Poleg pravnih zadev je vztrajno raziskoval matematiko. Čeprav je za časa življenja objavil zelo malo, se je veliko njegovih idej ohranilo v pismih mnogim vodilnim matematikom tedanjega časa. Upravičeno ga štejejo za enega največjih francoskih matematikov 17. stoletja.

Začetek moderne teorije števil

Gotovo je njegov najpomembnejši prispevek osnovanje in razvoj *moderne teorije števil*, kjer je izkazal izjemno intuicijo in sposobnost.

Najbrž je bila prav Diofantova *Aritmetika*, ki jo je leta 1621 izdal **Bachet de Méziriac** (1581-1638), njegova prva vzpodbuda na tem področju, saj najdemo mnoge njegove rezultate kot robne opombe k tej knjigi. Mnoge **Fermatove** ugotovitve so se kasneje izkazale kot pravilne. Naštejmo nekaj primerov:

(1) *Mali Fermatov izrek*: *Če je p praštevilo, ki ne deli a, je* $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Ta rezultat je sporočil Fermat v pismu *Fréniclu de Bessyju* oktobra 1640, prvi objavljeni dokaz pa je Eulerjev iz leta 1736.

(2) *Vsako liho praštevilo je razlika dveh kvadratov, in to na en sam način.* Preprost (Fermatov) dokaz: $p = [(p+1)/2]^2 - [(p-1)/2]^2$. Če pa je $p = x^2 - y^2$, je $p = (x+y)(x-y)$ in zato $x + y = p$, $x - y = 1$ oziroma $x = (p+1)/2$, $y = (p-1)/2$.

(3) *Praštevilo oblike $4m+1$ je vsota dveh kvadratov.* To je rezultat iz Fermatovega pisma Mersennu decembra 1640, prvi objavljeni dokaz je iz leta 1754, ko je Euler pokazal tudi enoličnost takega zapisa (glej vajo 13).

(4) *Praštevilo oblike $4m+1$ je (na en sam način) hipotenuza celoštevilskega pravokotnega trikotnika; njegov kvadrat je hipotenuza dvakrat, kub trikrat itd.*. Npr. $5 = 4 \cdot 1 + 1$, $5^2 = 3^2 + 4^2$, $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$, $125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2$. Za dokaz glej vajo 14.

(5) *Vsako nenegativno število je vsota štirih ali manj kvadratov.* Netrivialni rezultat je dokazal Lagrange leta 1770.

(6) *Ploščina celoštevilskega pravokotnega trikotnika ni kvadrat* (tudi dokazal Lagrange).

(7) *Enačba $x^4 + y^4 = z^4$ nima celoštevilske rešitve.* To sledi iz točke (6) (glej vajo 15).

(8) *Obstaja le ena celoštevilska rešitev enačbe $x^2 + 2 = y^3$* $(x = 5, y = 3)$ *in le dve rešitvi enačbe $x^2 + 4 = y^3$* $(x = 2, y = 2$ in $x = 11, y = 5)$.

(9) *Veliki Fermatov izrek*: *Ne obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^n + y^n = z^n$, če je $n > 2$.*

(10) Ena redkih Fermatovih napačnih trditev je v zvezi s števili oblike $f(n) = 2^{2^n} + 1$ (Fermatova števila). Fermat je mislil, da so vsa taka števila praštevila, kar je s protiprimerom ovrgel Euler, ko je pokazal, da je $f(5)$ sestavljeno število.

Opomba. Točka (9) je bila zapisana kot opomba ob robu v Fermatovi kopiji Bachetovega prevoda Diofantove *Aritmetike* ob 8. problemu v II. knjigi. Fermat je še zapisal, da je našel čudovit dokaz, za katerega je na robu premalo prostora.

Mnogi znani matematiki so se kasneje trudili to trditev dokazati, a jim tudi z bolj sofisticiranimi metodami, kot jih je imel na razpolago Fermat, to dolgo ni uspelo.

Fermat je znal dokazati primer $n = 4$, **Euler** $n = 3$, leta 1825 sta neodvisna dokaza za $n = 5$ prispevala **Legendre** in **Dirichlet**, leta 1837 **Lamé** za $n = 7$. Legendre je v svojem dokazu uporabil nekatere rezultate francoske matematičarke in filozofinje **Sophie Germain** (1776-1831). Veliko se je s problemom ukvarjal **Ernst Kummer** (1810-1893) (in ob tem razvil teorijo idealov), problema pa ni rešil. Kasneje so nerešljivost enačbe potrdili za zelo velika števila n, splošne rešitve pa dolgo ni bilo.

Šele leta 1995 je angleški matematik **Andrew Wiles** (rojen leta 1953) dokazal domnevo Shimura-Taniyama in s tem po več kot 350 letih potrdil resničnost Fermatove trditve.

Leta 1897 so med Huygensovimi rokopisi v Leidnu našli besedilo, ki pojasnjuje Fermatovo splošno *metodo neskončnega spusta*, s katero je menda ugnal marsikateri problem (glej vajo 16). Nazadnje je dopisovanje med Fermatom in Pascalom glede vprašanj v zvezi z igrami rodilo osnovna spoznanja iz *verjetnostnega računa* (glej vajo 17).

Slika 4. Andrew Wiles leta 2005

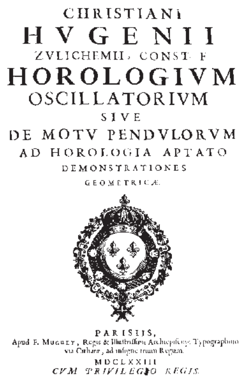
Christiaan Huygens (1629-1695)

Genialni in izredno produktivni nizozemski matematik in fizik je bil rojen v Haagu, študiral v Leidnu pri **Fransu van Schootenu mlajšemu**. Dvaindvajsetleten je odkril napako pri Saint-Vincentovi kvadraturi kroga in o tem objavil članek. Sam je potem objavil razprave o kvadraturi stožnic ter o Snellovi trigonometrični izboljšavi klasične metode za računanje števila π. Leta 1654 je z bratom izboljšal leče za astronomska opazovanja in zastavil vrsto pomembnih astronomskih vprašanj. Čez nekaj let je izumil uro na nihalo. Leta 1657 je napisal prvo razpravo o verjetnosti, *De ratiociniis in ludo aleae*, najboljše delo vse do razprave **Jakoba Bernoullija** *Ars conjectandi* iz leta 1713. V njej je uvedel pojem matematičnega upanja in rešil vrsto težkih, a zanimivih problemov.

Slika 5. Vaillantov portret Christiaana Huygensa

Leta 1665 je na povabilo Ludvika XIV. odpotoval v Pariz, postal član novonastale akademije 1666 in sodeloval z Angleško kraljevsko družbo pri problemih dinamike trkov. Leta 1673 je v Parizu izšla njegova velika razprava *Horologium oscillatorium* v petih delih. V prvem opisuje uro, ki jo je izumil leta 1656, v drugem razpravlja o dinamiki padajočih teles v vakuumu vzdolž različnih krivulj. Dokazana je izohronost cikloide. V tretjem delu obravnava evolute in evolvente krivulj, npr. parabole in cikloide, v četrtem sestavljena nihala, v zadnjem, petem delu, pa opisuje cikloidno nihalo in na njem temelječo uro. Konča pa se z izreki o centripetalni sili pri krožnem gibanju. Leta 1675 so pod njegovim vodstvom izdelali prvo uro na nihalno vzmet in jo podarili Ludviku XIV.

Leta 1681 se je po bolezni vrnil na Nizozemsko in se ukvarjal s teleskopi, leta 1689 pa je obiskal Anglijo in se srečal z **Newtonom**. Zagovarjal je valovno naravo svetlobe, medtem ko se je Newton ogreval za korpuskularno teorijo. Med drugimi manjšimi Huygensovimi prispevki omenimo rektifikacijo *Dioklove cisoide*, geometrijske raziskave *verižnice*, *logaritmične spirale* in drugih krivulj. Ukvarjal se je tudi s Fermatovimimi pravili o maksimumih in minimumih in podal številne primere uporabe matematike v fiziki. Njegovi dokazi so skrbno izdelani in rigorozni, poznal je nove metode analitične geometrije in infinitezimalnega računa. Umrl je v Haagu.



Slika 6. Huygensova razprava *Horologium oscillatorium*

Drugi matematiki 17. stoletja

V Italiji:

Evangelista Torricelli (1607-1647), najbolj znan v fiziki po raziskovanju tlaka in dinamiki gibanja v tekočinah (izum barometra, enota za tlak), ima veliko matematičnih prispevkov. Bil je prvi, ki je pravilno izračunal ploščino pod cikloidnim lokom. Rešil je problem, ki mu ga je bil zastavil **Fermat**, o legi točke v trikotniku z minimalno vsoto razdalj do njegovih oglišč (rešitev je leta 1659 objavil njegov učenec **Viviani**). To je bila od Starih Grkov naprej prva pomembna nova točka trikotnika; imenujejo jo *Fermat-Steinerjeva točka*, ker je o njej elegantno in preprosto analizo kasneje napravil **Jakob Steiner**. Leta 1640 je Torricelli izračunal tudi dolžino enega zavoja *logaritmične spirale* (že prej tudi Descartes), kar je bila prva krivulja razen krožnice, katero so uspeli rektificirati.

Slika 7. Portret Evangelista Torricellija na naslovnici neke njegove knjige

Vincenzo Viviani (1622-1703) je bil Torricellijev učenec in Galilejev asistent (uredil je prvo izdajo Galilejevih zbranih del). Konstruiral je tangento na cikloido, uspešno izvedel trisekcijo kota z enakoosno hiperbolo in presenetil svet s problemom, kako v polkrogelno kupolo napraviti štiri enaka okna, tako da se bo ostanek kupole dal kvadrirati. V matematiki je znan po ugotovitvi, da je v enakostraničnem trikotniku vsota razdalj poljubne točke do vseh treh stranic konstantna (neodvisna od lokacije točke) in po krivulji, presečnici sfere in valja s pol manjšim polmerom osnovne ploskve skozi središče sfere (glej vajo 9). Ukvarjal se je tudi s fiziko. Skupaj z *Borellijem* je meril hitrost zvoka in jo ocenil na 350m/s, kar je veliko boljši rezultat, kot ga je pred njim dobil *Pierre Gassendi* (478 m/s).

Omenimo še člane družine **Cassini**, ki so precej prispevali k astronomiji in matematiki. **Giovanni Domenico Cassini** (1625-1712) se je leta 1680 prvi ukvarjal z družino krivulj, določenih tako, da je produkt razdalj točke do dveh izbranih točk konstanten (*Cassinijevi ovali*, vaja 10). Te krivulje nastanejo s preseki torusa z ravninami, vzporednimi njegovi osi. Med njimi najdemo kot poseben primer tudi znamenito *Bernoullijevo lemniskato* (glej vaji 5, 11).

V Franciji:

Bachet de Méziriac (1581-1638) je leta 1612 napisal in 1624 ponovno izdal znamenito zbirko aritmetičnih ugank in trikov za rekreacijo *Problèmes plaisants et délectables*, leta 1621 pa latinski prevod Diofantove *Aritmetike*, ki je bil že večkrat omenjen.

Drugi znani števislki teoretik je bil **Marin Mersenne** (1588-1648), ki si je veliko dopisoval z vodilnimi matematiki. Uredil je mnoga dela grške matematike. Najbolj znan je v zvezi s praštevili oblike $2^p - 1$ (*Mersennova praštevila*), ki so v bijekciji s popolnimi števili.

Claude Mydorge (1585-1647) je bil Descartesov prijatelj, geometer (stožnice) in fizik (optika). Poenostavil je mnoge Apolonijeve izreke. Tudi on je zapustil več kot tisoč geometrijskih problemov za rekreacijo.

Drug tak geometer in fizik je bil **Gilles Personne de Roberval** (1602-1675). Znal je konstrurati tangente na mnoge znane krivulje z dinamično metodo sestavljenih gibanj. Trdil je, da je iznašel *Cavalierijev princip* (glej konec tega razdelka). Vsekakor je s podobno metodo znal poiskati ploščine, prostornine in težišča številnim likom in telesom.

Še bolj vsestranski je bil **Phillipe de la Hire** (1640-1718), ki je bil slikar, arhitekt, astronom in matematik. Poleg stožnic je študiral tudi višje krivulje, magične kvadrate in različne projekcije krogle na ravnino.

V Angliji:

William Brouncker (1620-1684), osnovatelj in prvi predsednik Londonske kraljeve družbe, si je stalno dopisoval z Wallisom, Fermatom in drugimi matematiki. Pisal je o rektifikaciji parabole in cikloide, ukvarjal se je z neskončnimi vrstami in z njimi izrazil npr. ploščino pod hiperbolo $xy = 1$ od $x = 1$ do $x = 2$ v obliki $p = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Bil je tudi prvi angleški matematik, ki je raziskoval verižne ulomke.

James Gregory (1638-1675) je bil Škot, profesor matematike v St. Andrewsu in Edinburghu. Zanimal se je tudi za fiziko (optika, zrcalni teleskop). V matematiki je leta 1667 poiskal vrste za arkus tangens, tangens in arkus sekans. Vrsta za arkus tangens $\operatorname{arc\,tg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ se imenuje po njem in po Leibnizu (kot vemo, jo je poznal že **Madhava iz Sangamagrama**, ustanovitelj astronomske in matematične šole v Kerali v Indiji). Gregory je ločil med konvergentno in divergentno vrsto.

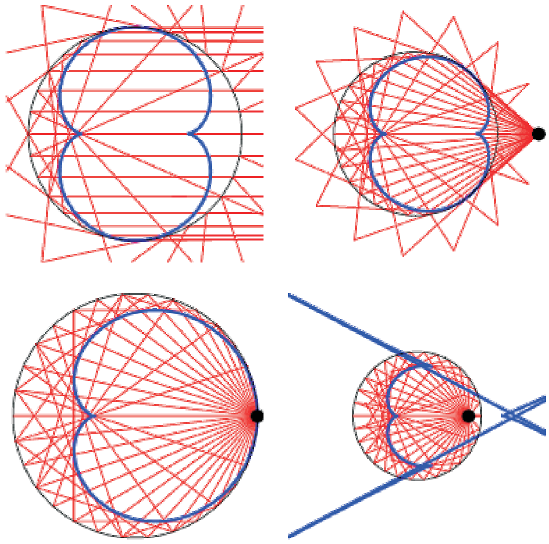
Njegov nečak **David Gregory** (1661-1708) je bil tudi profesor matematike v Edinburghu in po letu 1691 Savilian profesor za astronomijo v Oxfordu. Prav tako se je zanimal za optiko, pisal pa tudi o geometriji in Newtonovi teoriji.

Sir Christopher Wren (1632-1723) bi gotovo postal znan kot matematik, če ne bi bilo londonskega požara leta 1666, po katerem je kot glavni arhitekt obnovil katedralo Sv. Pavla in okrog 50 drugih cerkva in javnih zgradb ter s tem centru obnovljenega Londona vtisnil svoj pečat. Kot Savilian profesor astronomije na Oxfordu v letih 1661 do 1673 in nekaj časa predsednik Kraljeve družbe, se je ukvarjal tudi z dinamiko trkov, optiko, nebesno mehaniko; prvi je leta 1658 izračunal dolžino loka cikloide.

V Nemčiji:

Treba je vsekakor omeniti **Ehrenfrieda Waltherja von Tschirnhausa** (1651-1708), ki je študiral krivulje (kubične, katakavstika) in enačbe višjega reda. Znana je njegova transformacija, ki odpravi drugi in tretji člen v polinomski enačbi.

Katakavstika dane krivulje je ovojnica odbitih žarkov, ki izhajajo iz ene (lahko neskončno oddaljene) točke. *Primeri*: Katakavstika kroga za vzporedne žarke je epicikloida koncentričnega kroga s pol manjšim polmerom z dvema ostema (*nefroida*). Katakavstika kroga za žarke z izvorom na obodu je epicikloida koncentričnega kroga s trikrat manjšim polmerom z eno ostjo (*kardioida*). **Jakob Bernoulli** je leta 1692 pokazal, da je katakavstika kardioide, ko je izvor žarkov v njeni osti, nefroida.



SLIKA 8. Različni primeri katakavstike kroga glede na izvor žarkov

Na Nizozemskem:

Willebrord Snell (1580-1626) je bil čudežni otrok, ki je zgodaj obvladal standarde tedanje matematike, izumil je *loksodromo* in eden prvih raziskoval sferično trigonometrijo.

Z njo se je ukvarjal tudi **Albert Girard** (1595-1632), znan po uvedbi sedanjih okrajšav za funkcije sinus, tangens itd., podal je formulo za ploščino sferičnega trikotnika z ekscesom, bil je tudi algebraik in je uredil delo Simona Stevina.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) se je ukvarjal s kvadraturo kroga.

Frans van Schooten mlajši (1615-1660) je kot profesor matematike uredil latinske izdaje Descartesove *Geometrije* in učil Huygensa, Huddeja in Sluzeja. Tudi oče **Frans van Schooten starejši** in polbrat **Peter van Schooten** sta bila matematika.

Johann Hudde (1633-1704) je postal celo župan Amsterdama, kot matematik pa se je ukvarjal z iskanjem ekstremov ter reševanjem enačb. Pokazal je, kako lahko večkratne ničle polinomov poiščemo kot ničle največjega skupnega faktorja polinoma in njegovega odvoda.

Še dva matematika sta bila: **René Francois Walter de Sluze** (1622-1685), ki se je ukvarjal z enačbami in krivuljami, ter **Nicolaus Mercator** (1620-1687), ki je uredil Evklida, pisal o trigonometriji in astronomiji ter računal logaritme. Logaritemsko vrsto $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ (imenovano tudi *Mercatorjeva vrsta*) je odkril skupaj z Saint-Vincentom. Ne smemo ga zamenjati z **Gerhardom Mercatorjem** (1512-1594) iz 16. stoletja, ki je znamenit po svoji *Mercatorjevei projekciji*.

Akademije, društva in revije

Povečana matematična aktivnost se je v 16. stoletju odrazila tudi v večjem številu diskusijskih skupin, iz katerih so sčasoma nastale različne stalne **družbe** in **akademije**. Prva akademija je bila ustanovljena v Neaplju že leta 1560, naslednja je bila *Accademia dei Lincei* v Rimu 1603. Nemška *Leopoldina* je bila ustanovljena v Halleju leta 1652, *Accademia del Cimento* v Firencah leta 1657; *Angleška kraljeva družba* je nastala v Londonu leta 1662, *Francoska akademija* pa v Parizu leta 1666. Brouncker je bil npr. (skupaj z Wrenom in Wallisom) ustanovni član angleške akademije, Huygens pa francoske. Omenimo še *Prusko akademijo* iz Berlina (ustanovljena leta 1700) in *Rusko akademijo* iz Sankt Peterburga (ustanovljena leta 1725).

Opomba. Naš polihistor, znameniti **Janez Vajkard Valvasor** (1641-1693), je zaradi svojih obsežnih hidroloških razprav o Krasu in kraških pojavih na pobudo *Edmonda Halleya*, astronoma in geofizika, leta 1687 postal zunanji član Angleške kraljeve družbe. Jezuit **Augustin Hallerstein** (1703-1774), matematik in astronom, pa si je med bivanjem na Kitajskem začel dopisovati leta 1746 z londonsko in leta 1748 s pariško akademijo. Leta 1765 je bil izvoljen za dopisnega člana Ruske akademije v Sankt Peterburgu.

Polagoma je tudi naraščala potreba po **periodičnih publikacijah**, v katerih bi aktivni matematiki lahko objavljali svoje rezultate. Pred letom 1700 je bilo npr. zabeleženih samo 17 revij, ki so (občasno) prinašale tudi matematične članke. Prva sta začela izhajati leta 1665 angleški časopis *Philosophical Transactions* in francoski *Journal des Sçavans*, za njima pa je leta 1682 v Leipzigu *Acto Eruditorum* ustanovil **Leibniz** skupaj z **Menckejem**. V 18. stoletju se je pojavilo že 210 časopisov, v 19. stoletju 950.

Mnoge od teh so bile seveda na elementarnem in bolj rekreacijskem nivoju ali le z nekaj malega uporabe matematike. Tipični zgled je npr. *The Ladies' Diary*, ki je izhajal v Londonu od 1704 do 1841 in je (poleg zgodb, kuharskih receptov in nasvetov) prinašal tudi uganke, rebuse in matematična vprašanja, na katera so lahko odgovarjali bralci.

Zahtevnejše članke iz čiste matematike so objavljale le redke revije. Prva taka resnejša revija je bil francoski *Journal de l'École Polytechnique* z začetkom leta 1794. Prvo čisto matematično revijo, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, je ustanovil francoski matematik **Gergonne** in jo urejal v letih 1810-1831, nakar je prenehala izhajati.

Najstarejša neprekinjeno do danes izhajajoča časopisa, posvečena samo matematiki, sta nemški *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki ga je leta 1826 ustanovil matematik **August Leopold Crelle** (1780-1855), in francoski *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ki se je kot nadaljevanje Gergonnovih *Analov* pojavil leta 1836 pod ustanoviteljstvom in uredništvom matematika **Josepha Liouvillea** (1809-1882). V Angliji je bil leta 1839 ustanovljen *Cambridge Mathematical Journal*, ki pa se je kasneje večkrat preimenoval. Prvi ameriški matematični časopis *The American Journal of Mathematics* je leta 1878 ustnovil **Joseph J. Sylvester** (1814-1897).

V 19. stoletju so nastala tudi prva **matematična društva** (in začela izdajati svoja glasila, *proceedingse* ali *bulletine*), npr. *London Mathematical Society* 1865, *Société mathématique de France* 1872 in *Circolo matematico di Palermo* 1884. Iz društva *New York Mathematical Society*, ustanovljenega 1888, je leta 1894 nastal AMS, *The American Mathematical Society*, nemško društvo DMV, *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, pa je začelo z delom leta 1890.

Slovensko DMF, *Društvo matematikov in fizikov*, kasneje preimenovano v DMFA, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov* Slovenije, je bilo ustanovljeno leta 1949.

Vaje:

(1) **Descartesova** *La géometrie* prinaša različne geometrijske probleme:

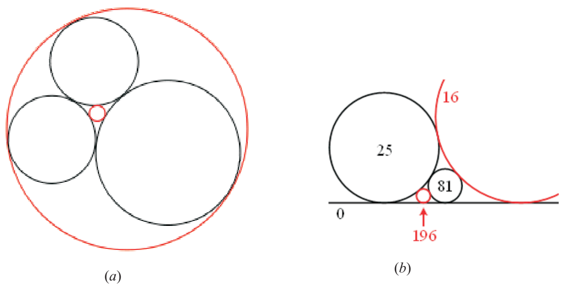
(a) Tangento na krivuljo v dani točki (x_1, y_1) je Descartes našel tako, da je najprej poiskal krog s središčem na abscisni osi, ki se dotika krivulje v točki (x_1, y_1), in s tem normalo na krivuljo v dani točki. Pokaži (i) geometrijsko ali (ii) analitično, da se za parabolo $y^2 = 2px$ to reducira na dejstvo, da je subnormalni odsek v vsaki točki enak p.

(b) Dane so štiri ekvidistantne vzporednice L_1, L_4, L_2, L_3 (v tem vrstnem redu) v medsebojni razdalji a in pravokotnica L_5. Razdalja točke P do premice L_i naj bo p_i. Izberimo L_5 za os x in L_4 za os y. Pošči v kartezičnih koordinatah geometrijsko mesto točk P, za katere velja $p_1p_2p_3 = ap_4p_5$. Dobljena krivulja se imenuje *Descartesov trizob*.

(c) Če so v ravnini dane poljubne štiri premice L_1, L_2, L_3, L_4 in je p_i razdalja točke P do premice L_i. Pokaži, da je za poljubno konstanto $k > 0$ geometrijsko mesto točk P z lastnostjo $p_1p_2 = kp_3p_4$ neka stožnica. (Navodilo: zapiši enačbe štirih premic v normalni obliki in pokaži, da je zadnji pogoj kvadratna funkcija spremenljivk x in y.)

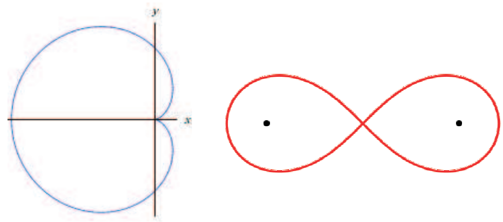
(2) *Descartesovo pravilo predznakov* pravi, da je število pozitivnih korenov polinomske enačbe $f(x) = 0$ z realnimi koeficienti c_i, pripadajočimi padajočim potencam, bodisi enako številu sprememb predznakov v zaporedju koeficientov, bodisi od njega manjše za sodi večkratnik. Število negativnih korenov ugotovimo na enak način iz enačbe $f(-x) = 0$. Z uporabo Descartesovega pravila ugotovi naravo korenov naslednjih enačb:
(a) $x^9 + 3x^8 - 5x^3 + 4x + 6 = 0$.
(b) $2x^7 - 3x^4 - x^3 - 5 = 0$.
(c) Pokaži, da ima enačba $x^5 + x^2 + 1 = 0$ samo en realen koren.
(d) Pokaži, da ima pri realnih $p > 0$ in $q \neq 0$ enačba $x^3 + px + q = 0$ samo en realen koren.

(3) **Descartes** je leta 1643 v pismu princesi Elizabeti Češki obravnaval problem kroga, ki se od zunaj ali od znotraj dotika treh dotikajočih se krogov (glej sliko 9a). Za njihove ukrivljenosti $k_i = 1/r_i$, $i = 1, 2, 3$, in $k = \pm 1/r$ (+ za dotik od zunaj in - za dotik od znotraj) je našel naslednjo relacijo $(k_1 + k_2 + k_3 + k)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2)$, kar je kvadratna enačba za k z dvema rešitvama, od katerih je vsaj ena pozitivna. Dokaz je zahtevnejši. Prepričaj se, da velja Descartesov izrek tudi v primeru, če vzamemo premico namesto enega od dotikajočih se krogov (glej sliko 9b), ali če dva dotikajoča se kroga nadomestimo s parom vzporednih premic.



SLIKA 9. Ilustracija Descartesovega krožnega izreka

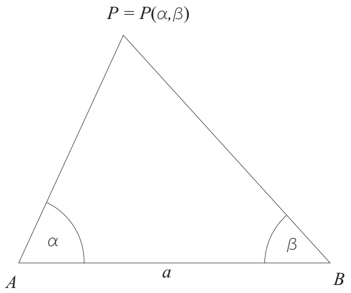
(4) *Descartesov list* je krivulja, ki je v kartezičnih koordinatah podana z enačbo tretje stopnje $x^3 + y^3 = 3axy$.
(a) Nariši krivuljo in pokaži, da je premica $x + y + a = 0$ njena asimptota.
(b) Zapiši krivuljo v polarnih koordinatah.
(c) Vstavi $y = tx$ in napiši enačbo Descartesovega lista v parametrični obliki.
(d) Poišči enačbo Descartesovega lista v zasukanih koordinatah, kjer je os x premica $y = x$.



SLIKA 10. Kardioida in Bernoullijeva lemniskata

(5) Določi enačbo v kartezičnih koordinatah za naslednje krivulje, dane v polarni obliki:
(a) Bernoullijeva lemniskata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$,
(b) Kardioida: $r = a(1 - \cos\theta)$,
(c) Arhimedova spirala: $r = a\theta$,
(d) Logaritmična spirala: $r = e^{a\theta}$,

(e) Hiperbolična spirala: $r\theta = a$,
(f) Štirilistna roža: $r = a \sin 2\theta$.

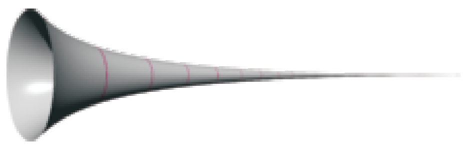


SLIKA 11. Položaj točke P, določen z bipolarnima koordinatama α in β

(6) *Bipolarni koordinatni sistem* je podan z daljico AB dolžine a in dvema kotoma α in β ob krajiščih, merjenih v nasprotni smeri (slika 11).
(a) Poišči bipolarno enačbo
(i) simetrale daljice AB,
(ii) poljubega krožnega loka, ki ima AB za tetivo.
(b) Določi zvezo med bipolarnimi in kartezičnimi koordinatami, če za os x izberemo premico AB in za koordinatno izhodišče sredino daljice AB.
(c) Katere krivulje imajo bipolarno enačbo oblike (k je konstanta):
(i) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = k$,
(ii) $\operatorname{ctg}\alpha / \operatorname{ctg}\beta = k$,
(iii) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = k$.

(7) Premica v koordinatnem sistemu je lahko določena na različne načine.
(a) Pokaži, da je to možno doseči z (i) naklonom in odrezkom na ordinatni osi, (ii) razdaljo izhodišča do premice in polarnim kotom, (iii) negativnima recipročnima vrednostima odsekov na oseh x in y (*Plückerjevi koordinati*). Določi položaj premice s kartezično enačbo $5x + 3y - 6 = 0$ na vsakega od opisanih načinov. Katera premica ima Plückerjevi koordinati $(1, 3)$?
(b) Pokaži, da Plückerjevi koordinati u, v katerekoli premice skozi točko (2,3) zadoščata linearni enačbi $2u + 3v + 1 = 0$. To enačbo lahko torej vzamemo za Plückerjevo enačbo točke $(2, 3)$. Napiši Plückerjevo enačbo za točko s kartezičnimi koordinatami (1,3). Kateri kartezični koordinati ima točka s Plückerjevo enačbo (i) $5u + 3v - 6 = 0$, (ii) $au + bv + 1 = 0$?

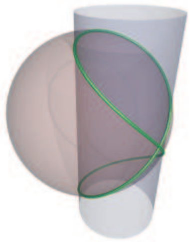
(8) Leta 1641 je **Torricelli** odkril, da je prostornina neskončno dolgega telesa, ki nastane z vrtenjem pravokotne hiperbole $y = 1/x$ okrog asimptote (npr. na poltraku $[1, \infty)$), končna. Ker ni imel na voljo integrala, je njegov dosežek še bolj pomemben. Tudi sicer se je odkritje, ki se je z Mersennovimi pismi hitro razširilo po Evropi, zdelo sodobnikom presenetljivo in so se z njim veliko ukvarjali, zlasti, ko so ugotovili, da je površina tega rotacijskega telesa (kasneje imenovanega *Torricellijeva trobenta* ali *Gabrielov rog*, glej sliko 12) neskončna. **Sluze** je npr. postavil vprašanje glede konstrukcije lahkega neskončnega "kozarca, ki bi ga še tako dober pivec ne mogel izprazniti" (ker bi imel neskončno prostornino).



SLIKA 12. *Torricellijeva trobenta* oziroma *Gabrijelov rog*

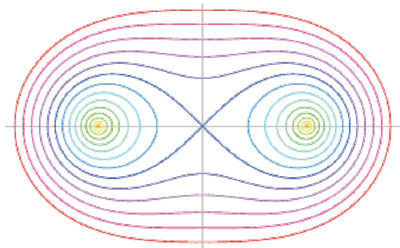
(a) Pokaži z uporabo modernega integralskega računa, da je prostornina Torricellijeve trobente končna (izračunaj njeno vrednost), površina pa neskončna;
(b) Razreši paradoks, da lahko trobento (od znotraj) pobarvamo kljub neskončni površini.

(9) *Vivianijeva krivulja* nastane, če presekamo sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ v središčni legi s polmerom $2a$ s pokončnim valjem $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ s središčem v točki $(a, 0, 0)$ in polmerom a (slika 13). Pokaži, da so njene parametrične enačbe enake $x = a(1 + \cos t)$, $y = a \sin t$, $z = 2a \sin(t/2)$. Stereografska projekcija Vivianijeve krivulje na ekvatorialno ravnino pa nosi ime *strofoida*.



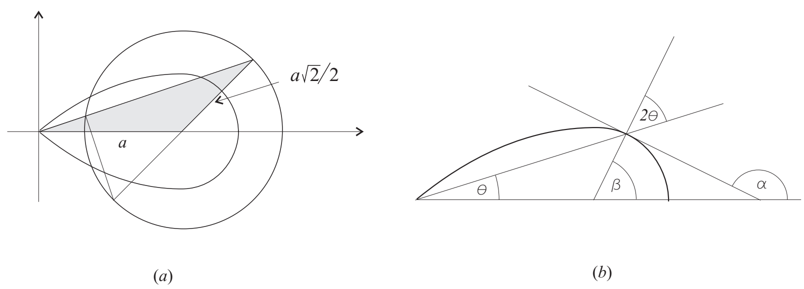
Slika 13. Vivianijeva krivulja

(10) Cassinijev oval naj ima gorišči v točkah $(-a, 0)$ in $(a, 0)$, konstantni produkt razdalj do obeh gorišč pa naj bo k^2.
(a) Napiši kartezično enačbo te krivulje.
(b) Pokaži, da je polarna enačba enaka $r^4 - 2r^2a^2 \cos 2\theta + a^4 = k^4$.
(c) Prepričaj se, da je v primeru $k = a$ krivulja enaka *Bernoullijevi lemniskati* z enačbo $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.



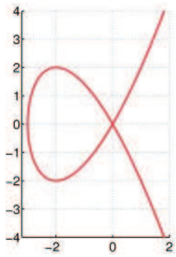
Slika 14. Cassinijevi ovali

(11) **Bernoullijeva lemniskata** ima polarno enačbo $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Pokaži:
(a) Lemniskata je posebna cisoida glede na dva loka kroga s polmerom $a\sqrt{2}/2$ in pol O, ki je za a oddaljen od središča kroga (slika 15a).
(b) Pokaži (s sredstvi infinitezimalnega računa), da tvori normala na lemniskato v poljubni točki s polarnim kotom θ z radijem vektorjem do te točke kot 2θ. Odtod pokaži, kako bi v tej točki konstruirali tangento na lemniskato (slika 15b).



Slika 15. Bernoullijeva lemniskata kot posebna cisoida in njena normala

(12) **Sinusoidna spirala** imenujemo vsako krivuljo, katere enačba v polarnem zapisu ima obliko $r^n = c \cos n\theta$, kjer je $a > 0$ in $n \neq 0$ racionalno število. Prepričaj se, da se v tej družini krivulj skrivajo naslednje znanke: *pravokotna hiperbola* ($n = -2$), *navpična premica* ($n = -1$), *parabola* ($n = -1/2$), *Tschirnhausova kubika* ($n = -1/3$), *kardioida* ($n = 1/2$), *krožnica* ($n = 1$), *Bernoullijeva lemniskata* ($n = 2$).



Slika 16. Tschirnhausova kubika

(13) Dokaži, da mora biti liho praštevilo p, ki je samo ali pa njegov kvadrat vsota dveh pozitivnih kvadratov, oblike $4m + 1$. Pokaži (kot je to storil **Euler**), da se to lahko zgodi samo na en način. (Navodilo za enoličnost: Iz $p = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, kjer predpostavimo npr. $x > z > t$, sklepamo, da sta si x, y tuji števili, enako z, t in nobeno od teh števil ni deljivo s p. Dobimo $p^2 = (x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz+yt)^2+(xt-yz)^2 = (xz-yt)^2+(xt+yz)^2$ in $(xz+yt)(xt+yz) = x^2zt + xyz^2 + xyt^2 + y^2zt = (x^2+y^2)zt + xy(z^2+t^2) = p(xy+zt)$; torej $p|(xz+yt)$ ali $p|(xt+yz)$. Denimo, da velja prvo. Potem iz prve enakosti vidimo, da velja tudi $p|(xt-yz)$. Torej je (spet po prvi enakosti) p^2 vsota kvadratov dveh nenegativnih večkratnikov števila p^2. Ker je $xz + yt > 0$, mora biti $xt - yz = 0$. Ker sta si x in y tuja, iz $xt = yz$ sledi, da $x|z$, kar pa zaradi neenakosti $x > z$ ni mogoče. Torej p ne deli $xz + yt$. Podobno vidimo, da p ne deli $xt + yz$. Iz $p^2 = x^2 + y^2$ (primitivna pitagorejska trojica) pa najdemo $p = m^2 + n^2$ (po prejšnjem enolično), torej je tudi $p^2 = (m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2$ enoličen zapis.)

(14) Izpelji **Fermatovo** trditev, da je liho praštevilo oblike $p = 4m+1$ hipotenuza celoštevilskega pravokotnega trikotnika in to na en sam način, njegov kvadrat p^2 na dva načina in tretja potenca p^3 na tri načine. (Navodilo: za p upoštevaj rešitev prejšnje vaje, za p^2 in p^3 pa večkrat zapored uporabi pravilo $(a+b)^2 = (a-b)^2 + (2ab)^2$ in/ali množenje s p^2, npr. $p^4 = p^2 \cdot p^2 = ((m^2-n^2)p)^2 + (2mnp)^2$.)

(15) Ob predpostavki, da velja **Fermatova** trditev (ki jo je dokazal **Lagrange**), da ploščina celoštevilskega pravokotnega trikotnika ni kvadrat naravnega števila, dokaži, da naslednji enačbi (od katerih je druga poseben primer *Fermatovega velikega izreka*) nimata rešitve v celih številih:
(a) $x^4 - y^4 = z^2$,
(b) $x^4 + y^4 = z^4$.
(Navodilo: (a) Če bi bila trojica celih števil x, y, z rešitev prve enačbe, poišči celoštevilski pravokotni trikotnik s ploščino $(xyz)^2 = xy^2(x^4-y^4)$, (b) Piši $z^4 - y^4 = (x^2)^2$ in upoštevaj točko (a).)

(16) **Fermat** je pri dokazovanju uporabljal *metodo neskončnega spusta*: za dokaz, da neka relacija med naravnimi števili ni možna, predpostavimo nasprotno in potem to relacijo reduciramo na enako relacijo med manjšimi naravnimi števili. Dokaži s to metodo, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. (Navodilo: iz $\sqrt{2} = a/b$ izpelji $\sqrt{2} = 1/(\sqrt{2}-1) - 1 = 1/(a/b-1) - 1 = (2b-1)/(a-b) = a_1/b_1$ in pokaži, da je $0 < a_1 < a$.)

(17) (**Problem razdelitve točk**): Denimo, da je igra med enakovrednima igralcema prekinjena, ko prvemu igralcu do zmage manjkata dve točki, drugemu pa tri točke. Igra se torej zagotovo konča v naslednjih štirih dvobojih. Napiši vse možnosti (kombinacije s ponavljanjem), kako se igra lahko konča, in izračunaj verjetnost, da bo končni zmagovalec prvi oziroma drugi igralec.

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.