

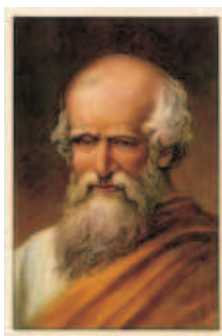
5. Grška matematika po Evklidu

Zgodovinski okvir

Aleksandrija je ostala znanstveno in matematično središče zaradi dovolj dolgega obdobja miru pod Ptolemajci in Rimljani. Leta 212 pnš. so Rimljani zasedli Sirakuze, 146 pnš. Kartagino in Korint, zadnje grško mesto, Mezopotamijo šele leta 65 pnš. in Egipt leta 30 pnš. Konstantin Veliki je leta 330 premaknil prestolnico v Bizanc (Konstantinopol), konec 4. stoletja je postalo krščanstvo državna religija. Leta 395 se je rimsko cesarstvo razdelilo na vzhodni in zahodni del. Ustvarjalnost je počasi zamirala, znanstveno delovanje se je reduciralo na prepisovanje in komentiranje. Leta 641 so Aleksandrijo osvojili Arabci.

Arhimed

Arhimed (287-212 pnš.) je eden največjih matematikov vseh časov, največji v antiki, Sirakužan, sin astronoma, ljubljenec kralja Hierona. Nekaj časa je študiral v Aleksandriji, kjer je tudi kasneje obdržal prijatelje *Kanona*, *Dositeja* in *Eratostena*, ki jim je pogosto pisal. O njem se je spletlo mnogo legend (o izumljanju vojaških naprav, o vzvodih, s katerimi bi lahko spraval svet s tečajev, o Hieronovi kroni, ki ni bila iz čistega zlata (glej vajo 4), o njegovi smrti pod mečem rimskega vojaka). Njegovi članki so mojstrski in spominjajo na moderne matematične razprave, v njih je veliko originalnosti, računske spretnosti in rigoroznosti pri dokazovanju. Njegov največji matematični prispevek so nemara začetki integralskega računa, sicer pa se je ukvarjal z različnimi matematičnimi področji.



SLIKA 1. Arhimed iz Sirakuz

Arhimedova dela

Ravninska geometrija. Znane razprave so *Merjenje kroga* (klasična metoda računanja števila π), *Kvadratura parabole* (24 trditev o računanju ploščine paraboličnega odseka, ki znaša $4/3$ ploščine vértanega trikotnika), *Spirale* (28 trditev o Arhimedovi spirali). Neki arabski pisec mu pripisuje tudi odkritje Heronove formule za ploščino trikotnika.

Prostorska geometrija. Znani sta dve ohranjeni razpravi, *O krogli in valju* (60 trditev v dveh knjigah, npr. o površinah in prostorninah v danem razmerju z reševanjem kubične enačbe in analizo, kdaj ima pozitivno rešitev), *O stožčastih in kroglastih ploskvah* (40 trditev, o prostornini vrtenin). *Papos* pripisuje Arhimedu odkritje trinajstih polregularnih (arhimedskih) teles (prisekana kocka, kuboektaeder itd.), original pa je izgubljen.

Aritmetika. Edina ohranjena razprava od dveh je *Peščeni računar* v dveh knjigah, namenjenih Golonu, Hieronovemu sinu, v katerem je dan aritmetični sistem za predstavitev velikih števil (npr. zrn peska na Zemlji). V tej razpravi najdemo informacijo, da je **Aristarh** (~ 310 do 230 pnš.) zagovarjal heliocentrični sistem in znameniti problem o govedu (*problema bovinum*), predstavljen v vaji 17.

Uporabna matematika. Ohranjeni sta dve razpravi, *O ravninskem ravnovesju* (25 trditev, računanje težišč likov, tudi paraboličnih odsekov) ter *O plavajočih telesih* (15 trditev z uporabo v hidrostatici). Razprava *O vzvodih*, o kateri poroča *Papos*, je izgubljena, Teon pa citira še eno (*O zrcalih*).

Metoda izčrpavanja

Arhimed pripisuje **Demokritu iz Abdere** (~ 410 pnš.) ugotovitev, da je prostornina piramide enaka eni tretjini ustrezne prizme z isto osnovno ploskvijo in isto višino. Demokrit je to dokazal bolj po domače. Sešteval je ploščine posameznih plasti, na katere je razrezal piramido, in sklepal: če sta dve piramidi razrezani na plasti v istem razmerju, so ustrezne plasti ekvivalentne, zato morata biti tudi prostornini enaki. To je nekakšna antična verzija kasnejšega *Cavalierijevega načela* (glej razdelek 10).

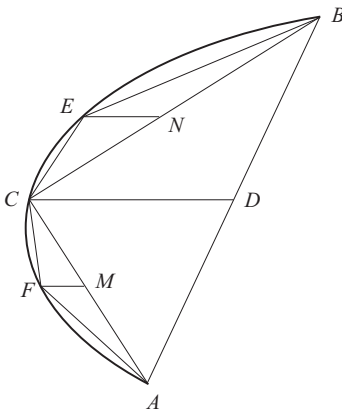
Opomba Prizmo lahko sestavimo iz trikotnih prizem, vsaka trikotna prizma pa je sestavljena iz treh piramid. Zato bi lahko Demokritovo formulo dokazali, če bi na drug način vedeli, da imata dve piramidi z isto višino in ekvivalentnima osnovnima ploskvama enako prostornino. 2300 let kasneje je **David Hilbert** (1862-1943) na drugem mednarodnem matematičnem kongresu v Parizu kot tretjega izmed svojih znamenitih 23 problemov zastavil vprašanje, ali sta dve piramidi s skladnima osnovnima ploskvama in isto višino enaki po razdelitvi. Oziroma bolj splošno, ali sta dva poliedra z isto prostornino enaka po razdelitvi. Problem je še isto leto razrešil **Max Dehn** (1878-1952), ko je pokazal, da za kocko in prostorninsko enak pravilni tetraeder to ne velja.

Kot je znano, je korekten dokaz formule podal **Evdoks** pol stoletja kasneje s svojo metodo izčrpavanja. To metodo je Arhimed izpopolnil in spretno uporabljal npr. za računanje paraboličnega odseka.

Zgled. Z razpolavljanjem tetiv vrčtjamo v parabolični odsek trikotnike (glej sliko 1a). Arhimed je iz geometrije parabole ugotovil, da je vsota ploščin trikotnikov CFA in CBE enaka četrtini ploščine trikotnika ABC . To je ponavljal in dobil

$$p(ABC) + \frac{1}{4}p(ABC) + \frac{1}{4^2}p(ABC) + \dots = p(ABC)\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{4}{3}p(ABC).$$

Rezultat je sicer dobil z metodo dvojnega protislovja in ne s seštevanjem vrste, kot bi storili danes. To so bili prvi začetki integralskega računa, ki se je torej (že v antiki!) razvil pred diferencialnim.

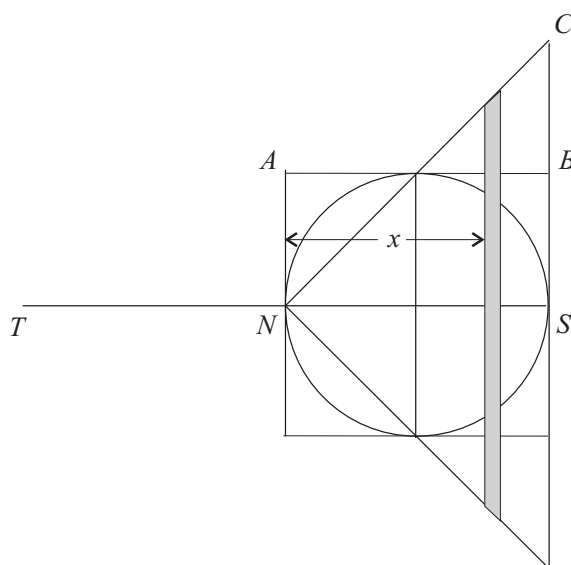


SLIKA 2. Ploščina paraboličnega odseka z metodo izčrpavanja

Arhimedova metoda ravnovesja

Za izračun ploščin in prostornin je Arhimed uporabljal še eno metodo, ki tudi temelji na seštevanju, to pot ne le delov ploščine ali prostornine, ampak tudi momentov. Ilustrirajmo jo na primeru izračuna prostornine krogle s polmerom r . Načrtajmo kroglo s polmerom r , očrtan ležeži valj in dodan stožec. Točka navora naj bo N in $SN = TN = 2r$. Označimo tanko plast v razdalji x od N (slika 3). Potem so prostornine plasti enake $\pi x(2r - x)\Delta x$ za kroglo, $\pi r^2\Delta x$ za valj in $\pi x^2\Delta x$ za stožec. Prenesimo plasti za kroglo in stožec v točko T . Njun skupni moment je: $2r\pi x(2r - x)\Delta x + 2r\pi x^2\Delta x = 4(\pi r^2 x\Delta x)$. To pa je ravno štirikratni moment plasti za valj, ki smo ga pustili na desni strani. Če torej

seštejemo vse momente na levi in desni, dobimo $2r(V_{krogle} + V_{stosca}) = 4rV_{valja}$ oziroma $2r(V_{krogle} + 8\pi r^3/3) = 8\pi r^4$, od koder dobimo prostornino krogle $V_{krogle} = 4\pi r^3/3$.



SLIKA 3. Prostornina krogle z Arhimedovo metodo ravnovesja

Ta postopek je opisan v Arhimedovi razpravi *Metoda*, v kateri v obliki pisma Eratostenu pojasnjuje, kako je prišel do svojih odkritij. Razprava je dosegla Evropo okrog leta 1450 (prek arabskih prevodov v Bagdadu v 9. stoletju). **Regiomontanus** (1436-1476) jo je revidiral in prevedel; natisnili so jo leta 1540. Čez nekaj let je nastal nov prevod, napredka v razvoju integralnega računa pa ni bilo do začetka 17. stoletja.

Zgodovinska zanimivost

Originalna Arhimedova razprava *Metoda* je bila dolgo časa izgubljena. Leta 1906 jo je danski filolog in zgodovinar matematike, profesor na kobenhavenski univerzi *Johan Ludvig Heiberg* (1854-1928) odkril v obliki palimpsesta v Carigradu (besedilo je bilo s pergamenta v začetku 13. stoletja spraskano in potem prekrito z nabožnim besedilom; knjiga se je uporabljala kot molitvenik). Toda najdba je spet poniknila, od leta 1920 je bila v lasti neke francoske družine. Dne 29. oktobra 1998 se je nenadoma pojavila na dražbi agencije Christie in bila prodana za dva milijona dolarjev. (Hkrati so istega dne prodali doktorsko disertacijo Marie Curie s posvetilom Rutherfordu, prvo izdajo Darwinovega *Porekla vrst*, Einsteinovo razpravo o specialni teoriji relativnosti iz leta 1905 ter prvo delo Lobačevskega o neevklidski geometriji iz leta 1829.)

Z moderno spektralno analizo so obnovili 80% prvotnega besedila in ugotovili, da se pod verskim besedilom skrivajo še druge Arhimedove razrave: *O plavajočih telesih*, *O merjenju kroga*, *O krogli in valju*, *O spiralah*, *O ravnovesju ploskev* ter *Stomahion*, oblika sestavljanke podobne tangramu, poleg tega pa tudi komentarji k Aristotelovim *Kategorijam* Aleksandra iz Afrodiziade (2.-3. stol.). *Stomahion* je plošča velikosti 12×12 kvadratov, razdeljena na 14 delov s ploščinami 3,3,6,6,6,6,9,12,12,12,12,21,24. *Persi Diaconis* z ženo *Suzan Holmes* iz Stanforda ter *Ronald Graham* z ženo *Fan Chung* iz San Diega so dokazali, da je 536 načinov za sestavo kvadrata iz teh delov, kar so potrdili z računalnikom.

Eratosten

Eratosten (~ 280-194 pnš.) je nekaj let mlajši od Arhimeda, po rodu iz Kirene v Severni Afriki. Dolgo časa je živel v Atenah, nato ga je Ptolemaj III. povabil v Aleksandrijo za tutorja sinu in za upravnika knjižnice. Okrog leta 194 pnš. je oslepel in kmalu naredil

samomor. Bil je nadarjen in razgledan v vseh znanostih, nikjer pa ni bil vrhunski (od tod vzdevek "beta"). V mladosti je bil atlet, nato pesnik, astronom, geograf, zgodovinar in matematik. Podal je mehansko rešitev za duplikacijo kocke, v teoriji števil je znan po situ (rešetu), s katerim presejemo praštevila, najslavnejša pa je njegova meritev Zemljinega obsega (glej vajo 1).

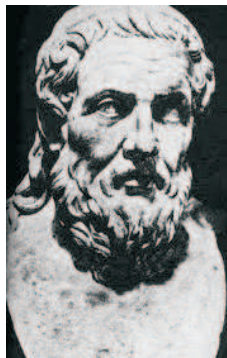


SLIKA 4. Eratosten

Opomba. Na osnovi Eratostenovega sita so skušali kasneje oceniti, koliko je praštevil do nekega števila. Testiranje praštevilskosti je na splošno težko. Skušali so tudi najti formulo, ki bo producirala čim več praštevil, **Euler** je npr. našel $f(n) = n^2 - n + 41$ (40 praštevil zapored), drugi $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ (80 praštevil zapored), iskali so praštevila med Fermatovimi praštevili, med števili oblike A^{3^n} (**W.H. Mills** 1947) itd. Posplošitev Evklidovega izreka o neskončno mnogo praštevilih je *Dirichletov izrek* iz leta 1837 o neskončno mnogo praštevilih v aritmetičnem zaporedju $a, a + d, a + 2d, \dots$, če sta si a in d tuji števili. Nadaljnji uspeh predstavlja *praštevilski izrek* (**Jacques Hadamard** in **Charles de la Valée-Poussin** 1896 analitični dokaz, **Paul Erdős** in **Atle Selberg** 1950 elementarni dokaz). Pogosto so v zgodovini sestavljali obsežne tabele za faktorizacijo naravnih števil (1654 *Rahn* do 24.000, 1668 *John Pell* do 100.000, 1776 *Felkel* do 408.000, v 19. stol. *Chernac*, *Burckhardt*, *Crelle*, *Gleisher* in *Dase* do 10,000.000, *J.P. Kulik*, 1773-1863, po 20-letnem delu do 100,000.000 itd.). V zvezi s praštevili so še vedno nerešeni številni problemi (Goldbachov problem, problem praštevilskih dvojčkov itd.).

Apolonij

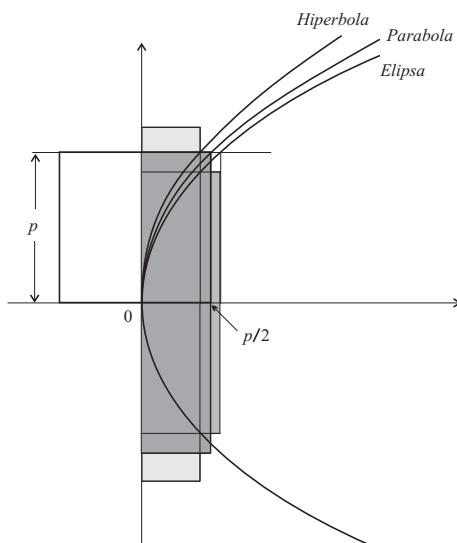
Apolonij (~ 260-200 pnš.) je tretji grški matematični genij za *Evklidom* in *Arhimedom*. Rojen je v Pergu na jugu Male Azije, o njem pa je malo znanega. Študiral je v Aleksandriji pod Evklidovimi nasledniki in tam tudi živel, vmes je le obiskal univerzo v Pergamu na zahodu Male Azije.



SLIKA 5. Apolonij iz Perge

Bil je izurjen astronom, slavo pa dosegel s svojimi *Preseki stožca* (8 knjig in približno 400 trditev), v katerih je podrobno raziskal krivulje, presegele *Menajhma* in *Evklida*. Prve štiri knjige so se ohranile v grščini, še tri v arabskem prevodu.

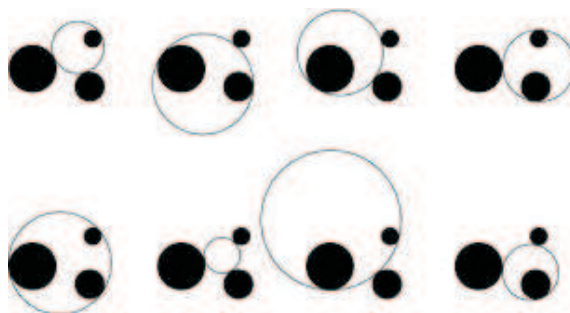
Apolonij si je tudi izmislil imena *elipsa*, *parabola*, *hiperbola*. Če namreč vse tri postavimo s temenom v koordinatno izhodišče in vpeljemo parameter p , imamo za parabolo $y^2 = 2px$, za elipso $y^2 = 2px - px^2/a$ in za hiperbolo $y^2 = 2px + px^2/a$, kjer je a vodoravna, b navpična polos in $p = b^2/a$ (v vseh treh primerih je $l = 2p$ ti. *latus rectum*, navpični odsek skozi gorišče). Torej je elipsa pomankljiva, hiperbola presežna in parabola ravno pravšnja glede na člen $2px$ (slika 6).



SLIKA 6. Stožnice z istim parametrom

Druga knjiga se ukvarja z asimptotami, tetivami in tangentami hiperbole, tretja z goriščnimi razdaljami, četrta s poli in polarami, peta (najbolj originalna) z ekstremi in normalami, šesta s konstrukcijskimi problemi, sedma s konjugiranimi premeri.

Apolonij je spisal še druga dela: o proporcionalnih rezih (181 trditev), o prostorskih pre-rezih (124 trditev), o določanju prerezov (83 trditev), o tangentah (124 trditev, med njimi Apolonijev problem kroga, ki se dotika treh danih krogov (glej vajo 7); eno prvih rešitev je podala Descartesova učenka Elizabeta Češka, najbolj elegantno pa francoski artilerijski častnik in profesor matematike **Joseph-Diez Gergonne** (1771-1859), o vstavljanju (125 trditev), o geometrijskem mestu (147 trditev, tudi o Apolonijevem krogu, kjer je razmerje do dveh danih točk konstantno).



SLIKA 7. Osem rešitev Apolonijevega problema o krogu, ki se dotika treh krogov

Grška trigonometrija

Trigonometrija in sferna geometrija sta se razvili zaradi astronomije. Babilonski (oziroma kaldejski) astronomi 5. in 4. stol. pnš. so svoje znanje predali Grkom.

Najpomembnejši antični astronom in utemeljitelj trigonometrije je **Hiparh** (~ 140 pnš.), ki je na Rodosu določil trajanje lunine mene na sekundo natančno, izračunal naklon ekliptike, lunarno paralakso, ipd., katalogiziral 850 zvezd stalnic ter uvedel v grško matematiko delitev kroga na 360 stopinj. Trigonometrijo in sferno geometrijo je razvil v 12 knjigah (ki jih poznamo po Teonovih komentarjih, originalna dela se niso ohranila). Konstruiral je (za astronomijo in sferno geometrijo pomembne) tabele krožnih tetiv, ki jih je izpopolnil *Klavdij Ptolemaj* (v resnici je izračunal sinuse kotov po 15' od 0 do 90 stopinj).



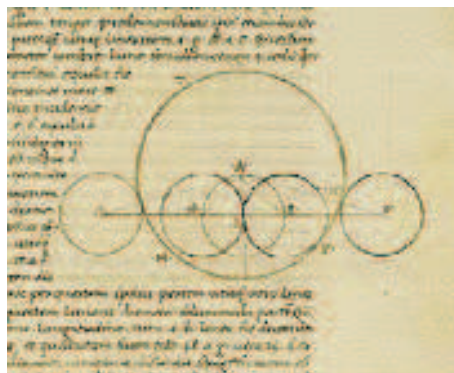
SLIKA 8. Hiparh

Drugi pomembni ustvarjalec na tem področju je **Menelaj iz Aleksandrije** (~ 70-140 nš.), avtor *Sferike*, znan po izreku za dvorazmerje $(AN/NB)(BL/LC)(CM/MA) = -1$ pri transverzalnih trikotnika.



SLIKA 9. Klavdij Ptolemaj

Še bolj znan astronom je od Hiparha tri stoletja mlajši **Klavdij Ptolemaj iz Aleksandrije** (~ 90-168 nš.), ki je ~ 150 nš. napisal vplivno delo *Sintaksis Matematika* (*Matematična Zbirka*), temelječe na Hiparhovem delu, zelo kompaktno in elegantno, vrhunsko delo imenovano *megiste* (*največje*), po arabsko *al magest* (*Almagest*). Sestavlja ga 13 knjig (o astronomiji, v prvi knjigi osnove, tabele tetiv, Ptolemajev izrek o tetivnem štirikotniku, glej vajo 9), v 3., 4., 5. knjigi razlaga geocentričnega sistema z epicikli, v 4. knjigi problem, kasneje imenovan *problem Snella* (1617) in *Pothenota* (1692), 6. knjiga govori o elipsah, ostale o planetih. *Almagest* je bila standardna astronomska knjiga vse do **Kopernika** in **Keplerja**. Pisal je tudi o projekcijah, optiki, glasbi, trudil se je z dokazovanjem postulata o vzporednicah.



SLIKA 10. Stran iz Ptolemajevoga Almagesta (latinski prevod iz 16. stol.)

Heron

Heron (~ 10-70 nš.) je bil zelo pomemben uporabni matematik, tehnik in izumitelj, profesor v Aleksandriji z enciklopedičnim znanjem, ki si ga je pridobil s študijem v Grčiji in Egiptu. Ustvaril je številna in raznovrstna dela v matematiki in fiziki (okrog 14 razprav o praktični uporabi matematike in inženirstvu), vključujoč različne izume (sifon, parni stroj, vetrne piščali, vodno črpalko, siringo itd.). Geometrična razprava *Metrika* v treh knjigah (odkrita 1896 v Carigradu) vsebuje merjenja likov, krožnih, eliptičnih, paraboličnih odsekov, površin valjev, stožcev in sfer, slavno formulo za ploščino trikotnika $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = (a+b+c)/2$ (glej vajo 9) in rekurzivno metodo za računanje kvadratnega korena $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$, $n \geq 0$, ki so jo poznali že Babilonci. *Pneumatika*, delo iz mehanike, vsebuje opis okrog sto mehanskih naprav in igrač, *Dioptra* (optične naprave, antična oblika teodolita), *Katoptrika* (lastnosti zrcal).



SLIKA 11. Heron

Grška algebra

Leta 1842 je G.H.F. Nesselman definiral tri faze v razvoju algebrske notacije: *retorična algebra* (besedni problemi), *sinkoptična algebra* (nekaj okrajšav za neznanke, operacije) in *simbolična algebra*. Pred *Diofantom* so poznali le retorično algebro, probleme so reševali geometrijsko. V Evropi je taka algebra vztrajala do 15. stoletja. Pomemben vir za grške algebrske probleme je *Palatin (Antologija)* iz leta ~ 500 nš., ki jo je sestavil jezikoslovec **Metrodor**. Obsega različne umske probleme, ki se prevedejo na enačbe z eno neznaniko ipd. Mnoge bi lahko rešili z geometrijsko algebro, a so bili najbrž namenjeni aritmetičnemu reševanju (z metodo napačne predpostavke).

Diofant

Diofant je bil rojen med 200 in 214, umrl med 284 in 298, točne letnice niso znane. Napisal je tri dela: *O poligonalnih številih*, *Porizmi* in *Aritmetika* (v 13 knjigah, od katerih se jih je ohranilo 6). Slednje delo je gotovo najpomembnejše, saj je imelo 1500 let in več izreden vpliv na razvoj matematike. Leta 1575 je grško besedilo *Aritmetike* objavil **Wilhelm Holzmann**, profesor na univerzi v Heidelbergu (z grškim imenom **Ksilander**).

To besedilo je uporabil **Bachet de Méziriac**, ki je leta 1621 izdal grški tekst skupaj z latinskim prevodom. V to knjigo je 1637 **Pierre de Fermat** zapisal svojo slavno opombo na robu o nezmožnosti rešitve enačbe $x^n + y^n = z^n$ v celih številih, če je $n > 2$. (Čeprav je Fermatova originalna kopija Diofantove *Aritmetike* izgubljena, vemo za opombo, ker jo je natisnil Fermatov sin, ko je uredil drugo izdajo leta 1670.)



SLIKA 12. Méziriacov prevod Diofantove *Aritmetike* iz leta 1621

Diofantova *Aritmetika* je zahtevno analitično delo o algebrski teoriji števil (nekateri bralci so Diofanta ob študiju preklinjali, drugi slavili kot "očeta algebre"). Prinaša okrog 130 različnih problemov o enačbah prve in druge stopnje, tudi eni kubični, in reševanje nedoločenih (danes imenovanih diofantskih) enačb. Objavljeni so izreki o predstavitvi števil v obliki dveh, treh ali štirih kvadratov. Nekaj zgledov nalog iz *Aritmetike*: najdi kvadrata x, y , da sta tudi $xy + x$ in $xy + y$ kvadrata (II.29), ali: najdi števila x, y, z , da so $x + y$, $x + z$, $y + z$ in $x + y + z$ kvadrati (III.7). Diofant je posebno zaslužen za uvedbo okrajšav za neznanke, potence, odštevanje, enakost in recipročnost, torej za rojstvo sinkoptične algebre.



SLIKA 13. Diofant iz Aleksandrije

Papos

Papos iz Aleksandrije (~ 290-350) je bil zadnji veliki grški matematik, več kot 500 let mlajši od Apolonija. Napisal je *Komentarje* k Evklidovim *Elementom* in *Podatkom* ter k Ptolemajevemu *Almagestu* in *Planisferiju*. Njegovo veliko delo je *Matematična zbirka*, mešanica komentarjev, originalnih prispevkov in izboljšav različnih starejših tekstov. Od osmih knjig je izgubljena prva in del druge. V drugi knjigi je opisana Apolonijeva metoda pisanja in računanja z velikimi števili, v tretji teorija sredin (npr. dvojna geometrijska sredina), neenakosti v trikotniku in vrtavanje pravilnih teles v kroglo, v četrti *posplošitev*

Pitagorovega izreka ter lastnosti *arbelosa*, *Arhimedove spirale*, *Nikomedove konhoide*, *Dej-nostratove kvadrature* z uporabo pri treh velikih geometrijskih problemih. Peta knjiga govori o izoperimetriji, o maksimumih in minimumih ter o čebeljih celicah v satovju. Šesta knjiga je astronomska (nekakšen uvod v *Almagest*), opisani so razni problemi, ki so mnogo kasneje privedli do uvedbe kartezičnih koordinat itd. Vsebuje tudi rezultate, podobne tistim, ki jih je kasneje dobil **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), ter gorišča in direktrise stožnic. V sedmi in osmi knjigi so *originalni Paposovi prispevki* (konstrukcija stožnice skozi pet danih točk, Paposov izrek o transverzalah in dvorazmerjih). Nasploh je ta *Zbirka* zgodovinsko zelo verodostojna knjiga, zadnje veliko delo, nekakšen rekvijem grške matematike. Nekaj nalog iz te zbirke je predstavljenih v vajah 14, 15 in 16.



SLIKA 14. Naslovna stran Commandinovega latinskega prevoda Paposove *Matematične zbirke*, izdanega leta 1589

Zaton grške matematike

V zadnjem obdobju so se uveljavili različni pisci, ki so prepisovali in komentirali prejšnje mojstre:

Teon iz Aleksandrije (~ 335-405) je živel konec 4. stoletja in v 11 knjigah napisal komentarje k Ptolemajevemu *Almagestu* ter revidiral Evklidove *Elemente*, kar je bila podlaga za vse nadaljnje izdaje *Elementov*.

Hipatija (~ 350-415), Teonova hči, se je odlikovala v matematiki, medicini in filozofiji, napisala je komentarje k Diofantovi *Aritmetiki* in Apolonijevim *Presekom stožca*. Prva znana ženska v matematiki je umrla leta 415 mučeniške smrti od rok krščanskih fanatikov.

Proklos (412-485) je bil neoplatonistični filozof in matematik, avtor *Komentarjev k Evklidu*, ki pomenijo enega glavnih virov za zgodnjo zgodovino grške geometrije. Poznal je Evdemovo *Zgodovino geometrije* in obsežno Geminovo *Teorijo matematičnih znanosti*, ki nam nista dostopni. Podal je tudi komentarje k Platonovi *Republiki*, v kateri so tudi za matematike zanimivi odstavki.

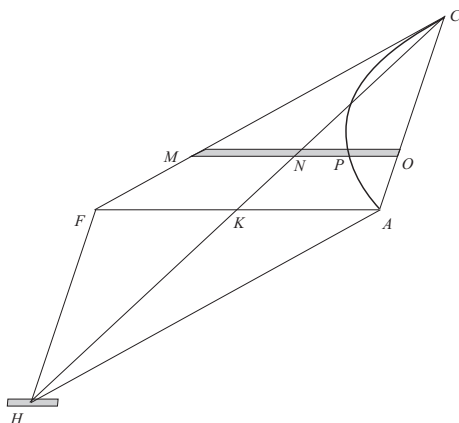
Simplikij iz Kilikije (~ 490-560) je bil v glavnem komentator Aristotela. Predstavil je tudi *Antifonov* poskus kvadrature kroga, *Hipokratove lune* in *Eudoksov model sončnega sistema* s koncentričnimi sferami. Napisal je tudi komentarje k Evklidovim *Elementom*.

Eutokij iz Askalona (~ 480-540) je bil Simplikijev sodobnik in je znan po komentarjih k Arhimedovemu delu.

Leta 529 je cesar Justinjan izdal dekret, s katerim so za vedno zaprli atensko Akademijo. Aleksandrijska univerza jo je odnesla nekoliko bolje, ostala je odprta, dokler niso leta 641 Aleksandrijo zasedli Arabci, ki so od Grkov prevzeli baklo napredka v matematiki in drugih znanostih.

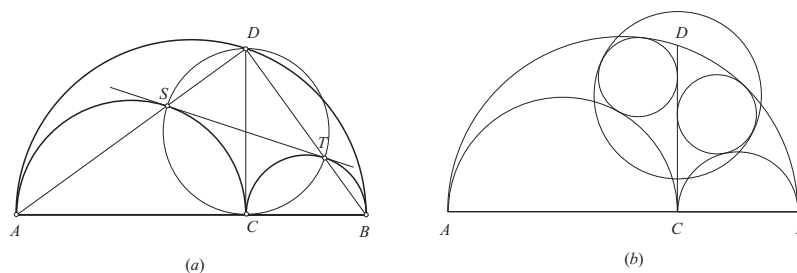
Vaje:

- (1) **Eratosten** je leta ~ 230 pnš. izračunal obseg Zemlje tako, da je ob poletnem solsticiju, ko v Sieni, današnjem Asuanu, 5000 stadijev južno od Aleksandrije točno opoldne navpična palica ni metala sence, izmeril v Aleksandriji naklon sončnih žarkov za $1/50$ polnega kroga (to je $7,2$ stopinji). Izračunaj odtod Eratostenov obseg Zemlje, če vemo, da je meril stadij približno 180 m.
- (2) **Arhimedovo** najljubše delo je bila razprava *O krogli in valju* (želel je, da bi na nagrobniku imel vklesano kroglo, včrtano v valj). Prepričaj se, da sta tako prostornina kot površina krogle enaka $2/3$ prostornine oziroma površine očrtanega valja.
- (3) Ploščina paraboličnega odseka je $1/3$ ploščine trikotnika, ki ga tvori tetiva, tangenta v enem krajišču in vzporednica osi parabole v drugem (slika 15). Dokaži to z **Arhimedovo metodo ravnovesja**, tako da najprej pokažeš
 - (a) da je parabola geometrijsko mesto točk v kotu FAC , ki od vzporednice z FA odreže enak delež kot njeno nožišče na AC od daljice AC , in potem
 - (b) dopolniš trikotnik FAC do paralelograma $ACFH$ s središčem K , preneseš v H delček ploščine paraboličnega odseka OP , ki je v ravnovesju glede na K z delčkom trikotnika, torej $OP \cdot HK = KN \cdot OM$, in z vsoto momentov ugotoviš, da je (ploščina paraboličnega odseka) $\cdot HK = (KC/3) \cdot$ (ploščina trikotnika).



SLIKA 15. Arhimedova metoda ravnovesja za ploščino

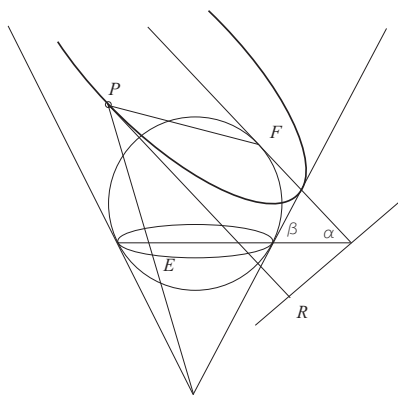
- (4) Rimski arhitekt *Vitruvij* je poročal o tem, kako je **Arhimed** rešil problem Hieronove krone, ko se je kopal v kadi (in vkliknil *Eureka!*). Naloga je objavljena v razpravi o plavajočih telesih: Krona, ki tehtta c kg, je sestavljena iz a kg zlata in b kilogramov srebra. Potopljena v vodo izgubi c_1 kg teže. Enako, torej c kg, težka masa čistega zlata, izgubi, potopljena v vodo a_1 kg teže, enako težka masa čistega srebra pa b_1 kg teže. Če veš, da je izguba teže enaka teži izpodrinjene vode, pokaži, da je v tem primeru razmerje med težo zlata in srebra v kroni enako: $a/b = (b_1 - c_1)/(c_1 - a_1)$.
- (5) *Arbelos* (čevljarski nož) je opisan v **Arhimedovi** razpravi *Liber assumptorum* (*Knjiga lem*), ki se je ohranila v arabskem prevodu, kot lik, ki ga omejujejo tri polkrožnice s premeri AB , AC in CB (kjer je $A < B < C$). Pravokotnica na AB v točki C naj preseka največjo polkrožnico v točki D , skupna tangenta na obe manjši polkrožnici pa naj se ju dotika v točkah S in T (glej sliko 16). Označimo dolžine $AC = 2r_1$, $CB = 2s_1$ in $AB = 2r$. Dokažite:
 - (a) Daljici CD in ST sta enako dolgi in se razpolavljata (slika 16a).
 - (b) Ploščina arbelosa je enaka ploščini kroga s premerom CD .
 - (c) Premici AD in BD potekata skozi S in T .
 - (d) Kroga, včrtana v krivočrtna trikotnika ACD in DCB (Arhimedova kroga) sta enako velika s polmerom $r_1 s_1 / r$ (slika 16b).
 - (e) Najmanjši krog, očrtan Arhimedovima krogoma, je enako velik kot krog iz točke (b).



SLIKA 16. Arbelos ali čevljarski nož

(6) Grki so stožnico definirali kot presek pokončnega stožca z naklonjeno ravnino p . V stožec včrtajmo kroglo, ki se dotakne ravnine p v točki F , stožca pa v krožnici v ravnini q . Z ravnino q naj tvori ravnina p kot α , poljubna tvorilka stožca pa kot β (glej sliko 17). Točko F imenujemo *gorišče*, presečnico d ravnin p in q pa *premico direktriso* dane stožnice. Za vsako točko na stožnici je razmerje med njeno razdaljo do gorišča F in razdaljo do direktrise konstantno, enako ekscentričnosti $e = \sin \alpha / \sin \beta$. Dokaži to tako, kot sta storila **Adolphe Quetelet** (1796-1874) in **Germinal Dandelin** (1794-1847). Pokaži:

- dolžini poljubnih dveh daljic iz dane točke na ravnino sta inverzno proporcionalni razmerju sinusov kotov, ki ju daljici oklepata z ravnino;
- za poljubno točko P na stožnici naj tvorilka stožca skozi P seka ravnino q v točki E , R pa naj bo pravokotna projekcija točke P na direktriso d (slika 17); potem je $PF/PR = PE/PR = \sin \alpha / \sin \beta = e$.



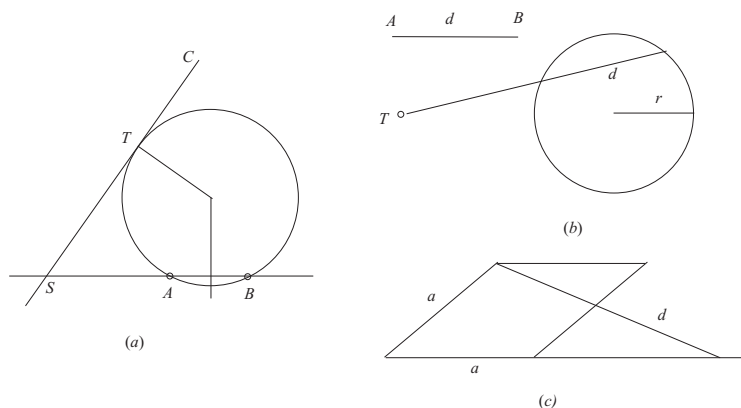
SLIKA 17. Gorišče in direktrisa stožnice

(7) V svojem (izgubljenem) delu *O tangentah* obravnava **Apolonij** problem, kako konstruirati krog, ki se dotika treh danih (disjunktnih) krogov A, B, C , od katerih je vsak lahko tudi izrojen v premico ali točko.

- Pokaži, da obstaja deset primerov tega problema glede na to, ali so A, B, C krogi, premice ali točke. Poišči število rešitev v vsakem posebnem primeru (v splošni legi).
- Reši problem, ko so $A; B; C$ dve točki in premica (Navodilo: če je S presečišče premice C in premice skozi A, B , poišči na C tako točko T , da bo $ST^2 = (SA)(SB)$, slika 18a.) Reduciraj problem, ko so $A; B; C$ dve premici in točka, s simetrijo preko simetrale, na prejšnji primer.

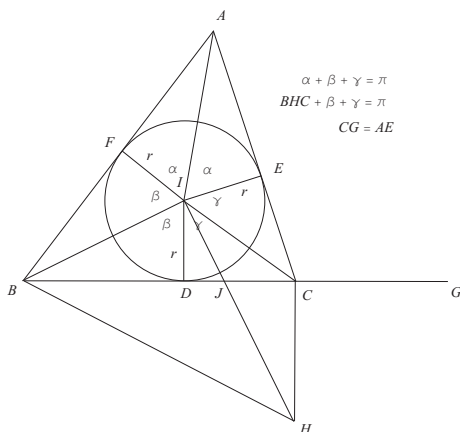
(8) Dve nalogi o vstavljanju:

- V dani krog vriši tetivo dane dolžine, ki kaže proti dani točki (slika 18b).
- V zunanji kot romba (v posebnem primeru kvadrata) vstavi daljico dane dolžine, ki kaže proti nasprotnemu oglišču (slika 18c). (Ta naloga je težja, glej npr. [17], str. 373).



SLIKA 18. Apolonijeva problema

- (9) Dokaži **Ptolemajev izrek**, da je v tetivnem štirikotniku produkt diagonal enak vsoti produktov po dveh nasprotnih stranic. Z uporabo tega izreka pokaži naslednje:
- Če sta a in b tetivi za dva zaporedna loka v krogu s polmerom 1, je tetiva, ki pripada njuni vsoti, enaka $s = (a/2)\sqrt{4 - b^2} + (b/2)\sqrt{4 - a^2}$, kar ustreza adicijskemu izreku za sinus vsote.
 - Če je a tetiva, ki pripada loku v krogu s polmerom 1, je $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ tetiva, ki pripada polovičnemu loku (kar ustreza formuli za sinus polovičnega kota).
 - Za poljubno točko P na loku AB očrtanega kroga velja:
 - pri enakostraničnem trikotniku ABC zveza $PC = PA + PB$,
 - pri kvadratu $ABCD$ zveza $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$,
 - pri pravilnem petkotniku $ABCDE$ zveza $PC + PE = PA + PB + PD$,
 - pri pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ zveza $PD + PE = PA + PB + PC + PF$.
 - V pravilnem petkotniku se diagonali sekata v razmerju zlatega reza.



SLIKA 19. Heronova izpeljava formule

- (10) Preveri **Heronovo** izpeljavo znamenite formule za ploščino p trikotnika ABC s stranicami a, b, c , središčem včrtanega kroga I in njegovim polmerom r , v naslednjih korakih:
- Včrtani krog s središčem I naj se dotika stranic v točkah D, E, F (slika 19), na podaljšku BC odmerimo G , tako da bo $CG = AE$ in potegnemo pravokotnico IH na BI , ki preseka BC v točki J in pravokotnico na BC iz C v točki H .
 - Če je $s = (a + b + c)/2$, je $p = rs = (BG)(ID)$.
 - B, I, C, H ležijo na isti krožnici (s premerom BH), torej se kota CHB in BIC dopolnjujeta (sta suplementarna), pri čemer je kot CHB enak kotu EIA .
 - Potem velja: $BC/CG = BC/AE = CH/IE = CH/ID = CJ/JD$.

- (v) Torej $BG/CG = CD/JD$.
 (vi) $(BG)^2/(CG)(BG) = (CD)(BD)/(JD)(BD) = (CD)(BD)/(ID)^2$.
 (vii) $p = (BG)(ID) = \sqrt{(BG)(CG)(BD)(CD)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Izpelji Heronovo formulo hitreje z višino h na c in projekcijo m stranice b na c :

- (i) $m = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$, (ii) $h = \sqrt{b^2 - m^2}$, (iii) $p = ch/2$.

(11) Problemi iz grške *Antologije*:

- (a) Koliko je jabolk, če jih ima prvi $1/3$, drugi $1/8$, tretji $1/4$, četrti $1/5$, peti 10, šesti 1?
 (b) *Denokar* je četrtno svojega dosedanjega življenja preživel kot deček, petino kot mladenič, tretjino kot mož, zadnjih trinajst let pa živi v domu za stare. Koliko je star?
 (c) Izdelovalec opek naredi 300 opek na dan, njegov sin 200 in zet 250. V kolikem času bi vsi trije skupaj naredili 300 opek?

(12) Še tri naloge o starosti:

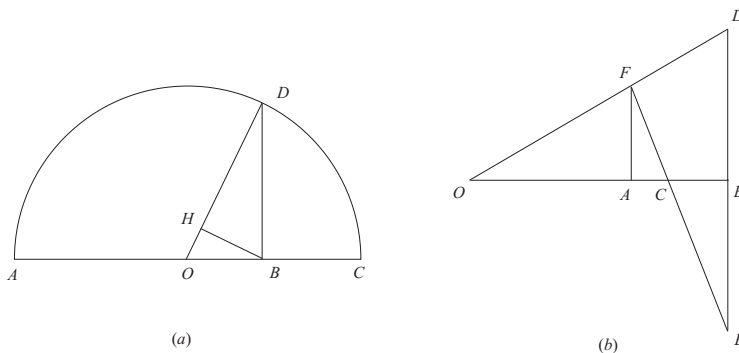
- (a) **Epitaf na Diofantovem grobu** se glasi: "Šestino življenja je preživel v otroštvu, dvanajstino kot mladenič, in sedmino kot samski mož. Pet let po poroki se mu je rodil sin, ki je umrl štiri leta pred njim, ko je bil star pol toliko kot oče ob koncu življenja." Koliko je bil star Diofant, ko je umrl?
 (b) **August de Morgan**, ki je živel v 19. stoletju (umrl je 1871), je nekoč zapisal: "Leta x^2 sem bil star x let." Kdaj se je rodil?
 (c) **Felix Klein** se je rad pošalil, da se je rodil $5^2 \cdot 2^2 \cdot 43^2$. Kdaj je bilo to?

(13) Identiteta $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$, ki jo je zapisal **Fibonacci** leta 1202 v svoji knjigi *Liber abbaci*, pomeni, da je produkt dveh vsot dveh kvadratov spet vsota dveh kvadratov. Z vprašanjem zapisa naravnega števila v obliki vsote dveh kvadratov naravnih števil, so se kasneje ukvarjali mnogi, med drugimi tudi *Gauss*.

Zapiši z uporabo zgornje identitete število $481 = 13 \cdot 37$ kot vsoto dveh kvadratov naravnih števil na dva različna načina in število $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ na štiri različne načine.

(14) V trinajsti knjigi *Matematične zbirke* je **Papos** podal naslednja preprosta dokaza o sredinah. Preveri ju.

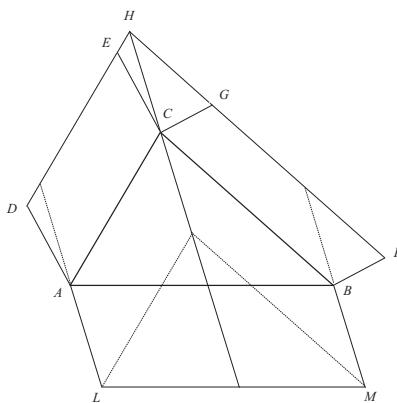
- (a) Naj bo O razpolovišče daljice AC in B poljubna druga točka na AC . Pravokotnica v B naj seka polkrožnico s premerom AC v točki D , H pa naj bo nožišče pravokotnice iz B na zveznico OD (slika 20a). Pokaži, da je potem OD aritmetična, BD geometrična in HD harmonična sredina odsekov AB in BC ter da je aritmetična sredina večja od geometične, le-ta pa od harmonične.
 (b) Naj bodo točke O, A, B kolinearne. Na pravokotnici na OB v točki B poljubno označimo D in E tako, da bo $BD = BE$. Pravokotnica na OB v točki A pa naj seka daljico OD v točki F , zveznica EF pa daljico OB v točki C (slika 20b). Pokaži, da je potem OC harmonična sredina odsekov OA in OB .



SLIKA 20. Paposova predstavitev sredin

(15) **Papos** je v četrti knjigi *Matematične zbirke* predstavil tudi naslednjo *posplošitev Pitagorovega izreka* (slika 21):

- (a) Naj bo ABC poljuben trikotnik ter $ABDE$ in $ACFG$ poljubna paralelograma nad stranicama AB in AC . Premici DE in FG naj se sekata v H . Načrtajmo daljici BL in CM enak dolgi in vzporedni daljici HA . Dokaži z uporabo Evklidove metode z gibanjem, da je potem ploščina paralelograma $BCML$ enaka vsoti ploščin paralelogramov $ABDE$ in $ACFG$.
- (b) Dokaži tudi naslednjo **Paposo** trditev (iz osme knjige *Matematične zbirke*): Če razdelimo stranice poljubnega trikotnika ABC v istem razmerju s točkami D, E, F , imata trikotnika ABC in DEF skupno težišče.



SLIKA 21. Paposova posplošitev Pitagorovega izreka

- (16) V sedmi knjigi *Matematične zbirke* je **Papos** že predvidel naslednji pravili, ki jih je **P. Guldin** (1577-1642) formuliral mnogo kasneje:
- (A) Če zavrtimo lok v ravnini okrog osi (v tej isti ravnini), ki ne preseka loka, je površina dobljene rotacijske ploskve enaka produktu dolžine loka in dolžine poti, ki jo opravi težišče loka.
- (B) Če zavrtimo ravninski lik okrog osi (v tej ravnini), ki ne preseka lika, je prostornina dobljenega rotacijskega telesa enaka produktu ploščine lika in dolžine poti, ki jo opravi težišče lika.
- Izračunaj na ta način:
- (a) prostornino in površino svitka (torusa), ki nastane z vrtenjem kroga s polmerom r okrog osi v ravnini v razdalji $R > r$ od središča kroga;
- (b) težišče polkrožnega loka in težišče polkroga.
- (17) **Arhimedov** problem o govedu (*problema bovinum*) se glasi (glej [8], str. 3): Sončni kralj je imel čredo, sestavljeno iz bikov in krav, ki so bili bele, črne ali rjave barve, nekatere živali pa so bile tudi lisaste. Belih bikov je bilo za polovico plus tretjino črnih več kot rjavih; vseh črnih bikov je bilo za četrtno plus petino črnih več kot rjavih; lisastih bikov je bilo za šestino in sedmino črnih več kot rjavih. Med vsemi kravami pa je bilo belih ravno tretjina plus četrtnina vseh črnih živali, črnih ravno četrtno plus petino vseh lisastih živali, lisastih ravno petina plus šestina vseh rjavih živali in rjavih ravno šestina plus sedmina vseh belih živali. Opiši podrobnejšo sestavo celotne črede, tako da označiš z X, Y, Z, T število belih, črnih, lisastih in rjavih bikov ter z x, y, z, t število belih, črnih, lisastih in rjavih krav. Napiši nedoločeni sistem sedmih enačb z osem neznanjkami. Najmanjša rešitev je $X = 10.366, 482$, $Y = 7.460, 514$, $Z = 7.358, 060$, $T = 4.149, 387$, $x = 7.206, 360$, $y = 4.893, 246$, $z = 3.515, 820$ in $t = 5.439, 213$ (glej [8], str. 4).

Opomba. *Gotthold Ephraim Lessing* je leta 1773 odkril v nekem grškem rokopisu bolj popolno formulacijo problema v obliki 22 parov verzov v heksametru, ki jih sicer ni pripisal Arhimedu, so pa to storili drugi, npr. *Johan Ludvig Heiberg* in *Paul Tannery* ([8], str. 6). Zanimivo je, da ta verzija zahteva v sedmem distihu, da je $X + Y = U^2$ (kvadrat) in $Z + T = V(V + 1)/2$ (trikotno število), zato se najmanjša rešitev poveča do astronomskih števil.

LITERATURA

- [1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
- [2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
- [3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
- [4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
- [5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
- [6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
- [7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
- [8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
- [9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
- [10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
- [11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
- [12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
- [13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- [15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
- [16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
- [17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
- [18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
- [19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
- [20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
- [21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- [22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
- [23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
- [24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
- [25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
- [26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [28] E. Maor, *The Story of e*, Princeton University press, 1994.
- [29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
- [30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [31] A.S. Posamentier, *The Pythagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
- [32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
- [33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- [34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- [35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- [36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
- [37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
- [38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
- [39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
- [40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
- [41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
- [42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.