

ZGODOVINA MATEMATIKE

Zapiski predavanj 2012/13 - prvi del

Milan Hladnik

Uvod: O zgodovini matematike in o istoimenskem predmetu

Za redke navdušence ima matematika vrednost sama zase, njenega smisla in pomena jim ni treba posebej dokazovati. Za ostale, ki matematiko samo uporabljajo ali pa nanjo gledajo kot del širše kulture, pa je pomembno tudi mesto matematike v družbi in spreminjanje njene vloge skozi različna obdobja. Zavedati se moramo, da je tudi današnja mogočna matematična teoretična zgradba postopoma nastala iz reševanja čisto konkretnih problemov, ki jih je od sposobnih pripadnikov določene skupnosti terjal čas, pritiski okolja in notranje razumevanje dotedanjega razvoja matematike, znanosti in tehnike ter celotne družbe. Spoznavanje preteklih tovrstnih človeških prizadevanj je lahko stimulacija tudi za študij moderne matematike in proučevanje starih mojstrov je lahko inspiracija tudi za današnje matematično raziskovanje. Zgodovina je v vsakem (tudi matematičnem) pogledu naša učiteljica, če smo le odprti do nje.

Pogovor s študenti

Predmet *Zgodovina matematike* je torej namenjen vsem, ki jim ni dovolj matematika kot abstraktna formalna teorija z večnimi in nespremenljivimi resnicami, ampak hočejo spoznati tudi izvor matematičnih pojmov in idej, ki jih danes uporabljamo. Ima dve uri predavanj, ki prinašajo splošni pregled obdobja, značilnosti tedanje matematike in opis prispevkov vodilnih matematikov, ter eno uro vaj, kjer se skozi reševanje tipičnih nalog in problemov seznanimo z bistvenimi matematičnimi pristopi določenega časa oziroma določenega matematika. Poudarek je na razvoju elementarne matematike od antike do konca 18. stoletja.

I. MATEMATIKA STAREGA IN SREDNJEGA VEKA

Med starimi kulturami, ki so imele do določene mere razvito matematiko, si bomo na kratko ogledali le egipčansko in babilonsko civilizacijo. Kitajsko, ki se po starosti lahko primerja z njima, bomo pustili ob strani; le sem in tja bomo opozorili na kakšen starejši ali novejši neodvisen prispevek starejših kitajskih matematikov. Bolj podrobno bomo obravnavali starogrško matematiko, njene začetke, klasične geometrijske probleme, Evklidovo sistemizacijo in velike dosežke helenističnega obdobja. Dolžno pozornost bomo posvetili indijski matematiki starega in srednjega veka ter dosežkom islamskega kulturnega sveta od 8. do 13. stoletja. Pregledali bomo matematično dogajanje v srednjem veku in zaključili prvi del zgodovine matematike z renesanso in 16. stoletjem.

1. Stari Egipt in Mezopotamija

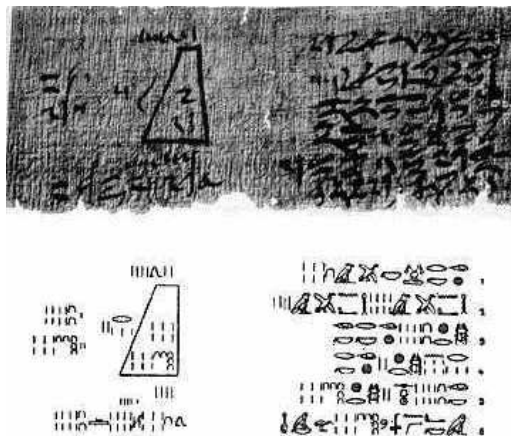
(A) Egiptovska matematika

Zgodovinski okvir

Ugodna lega in relativna izoliranost (zaradi puščave) sta omogočili dolgotrajni mirni razvoj. Okrog leta 3000 pnš. sta bila oba naroda ob Nilu združena v enotno kraljestvo, ki so mu vladali faraoni. Nil je s poplavamami omogočal ugoden razvoj poljedelstva, za kar so potrebovali razvito astronomijo (dober koledar zaradi napovedi poplav), ter geometrijo (merjenja parcel); kompleksna administracija (pobiranje davkov, delitev hrane) je zahtevala razvito aritmetiko. Že zgodaj, vsekakor še v starem kraljestvu (~ 2690 do ~ 2180), so že poznali hieroglifsko pisavo, iz katere se je kasneje v srednjem kraljestvu (~ 1990 do ~ 1800) razvila hieratska pisava (npr. na papirusih iz 12. dinastije). Novo kraljestvo je trajalo od ~ 1550 do ~ 1070 .

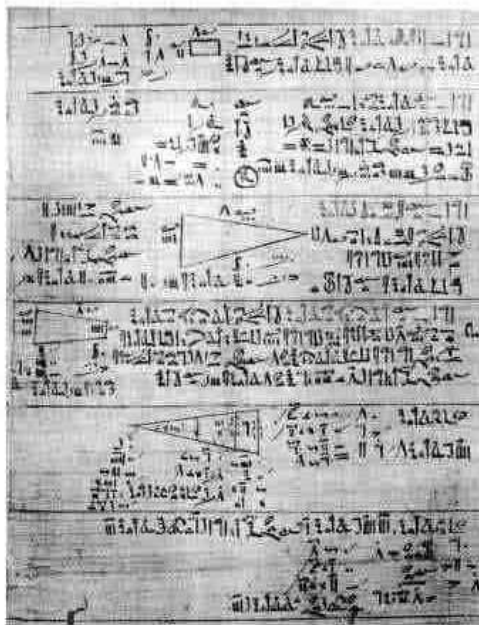
Zgodovinski viri:

- (1) Najstarejši hieroglifi s števili iz ~ 3100 pnš. so shranjeni v muzeju v Oxfordu.
- (2) *Velika (Kufujeva ali Keopsova) piramida* v Gizi je bila zgrajena okrog ~ 2590 - 2570 pnš. (nasploh so problemi s točnim datiranjem starodobnih egiptovskih ostankov). Sestavljena je iz 2,300,000 kamnitih blokov, v povprečju težkih 2,5 tone (nekateri so bili pripeljani od daleč), 20 let jo je gradilo okrog 100,000 delavcev. Nedvomno je zahtevala veliko matematike in inženirskega znanja. Da je razmerje med polovico stranice in višino (tj. kotangens kota 51 stopinj 50 minut nagiba stranske ploskve) približno $\pi/4$, kakor tudi, da je $1/\cos$ tega kota 1.61806 (približno zlati rez), pa je najbrž golo naključje.
- (3) *Moskovski papirus* iz ~ 1850 pnš. (slika 1), velikosti $5,4 \text{ m} \times 6 \text{ cm}$, je leta 1893 pridobil *Vladimir Semjonovič Goleniščev* (1856-1947), prvi ruski egiptolog, in ga prinesel v Rusijo. Vsebuje 25 besednih problemov (npr. o prostornini prisekane štiristrane piramide), shranjen pa je v Puškinovem državnem muzeju v Moskvi.



SLIKA 1. Moskovski papirus ~ 1850 pnš.

- (4) *Rhindov (Ahmesov) papirus* ~ 1650 pnš. (slika 2), je okrog 5,4 metrov dolg in $1/3$ metra širok zvitek iz papirusa. Leta 1858 ga je škotski pravnik in egiptolog *Alexander Henry Rhind* (1833-1863) pridobil v Luxorju, predstavlja pa učbenik za študente iz aritmetike in geometrije s 85 preprostimi problemi. Napisal ga je egiptovski pisar **Ahmes** in je v resnici prepis 200 let starejšega teksta. Vsebuje množenje in deljenje s podvojitvijo, egipčanske ulomke, ploščino kroga, znake za $+$, $-$, $=$ in neznanko, shranjen pa je v Britanskem Muzeju.



SLIKA 2. Rhindov papirus ~ 1650 pnš.

- (5) Najstarejši astronomski instrument ~ 1850 pnš. (kombinacija svinčnice in opazovalne palice) je shranjen v Berlinskem muzeju.
- (6) Največji obelisk, postavljen pred sončnim svetiščem v Tebah ~ 1500 pnš., je visok 105 čevljev (32 metrov) in ima kvadratno osnovno ploskev s stranico 10 čevljev (3 metre), tehta pa 430 ton.
- (7) Berlinski muzej hrani tudi najstarejšo znano egiptovsko sončno uro iz leta ~ 1500 pnš.
- (8) *Rollinov papirus* v Louvru je iz ~ 1350 pnš. in vsebuje primere uporabe velikih števil.
- (9) *Harrisov papirus* iz ~ 1167 pnš. pripoveduje o vojaških uspehih Ramzesa III.
- (10) Iz srednje dobe so še *Egiptovski matematični usnjeni svitek*, *matematični papirus iz Lahuna*, *Berlinski papirus*, *lesene tablice iz Ahmima*, *Reisnerjev papirus* iz Nag el-Deira, iz novejšje dobe pa so npr. papirus *Anastasi I*; precej matematičnih zapisov je tudi na keramiki (ostrakon), npr. iz oklice Deir el-Medine z računi prostornin (v zvezi z grobovi v Dolini kraljev).

Opomba. V zvezi z historiografijo egiptovske matematike so določeni problemi, predvsem zato, ker je o njej premalo pisanih virov. V nasprotju z bolj trajnimi glinastimi ploščicami iz Mezopotamije se egiptovski zapisi na papirusih zaradi vlage v centrih ob Nilu večinoma niso ohranili (razen tistih, ki so bili shranjeni v suhih puščavskih predelih). Na osnovi redkih najdb (predvsem Rhindovega in Moskovskega papirusa) so že v dvajsetih in tridesetih letih 20. stoletja eksperti za egiptovsko matematiko, kot npr. *Otto Neugebauer* (1899-1990), ki je leta 1927 doktoriral iz egipčanskih ulomkov, postavili osnovne ugotovitve o dosegu egiptovske matematike. Od takrat dalje se ta spoznanja niso spreminjala, ker enostavno ni bilo novih pomembnih odkritij.








Egiptovska astronomija

Pomembno vlogo pri napovedi vsakoletnih poplav je igrala najsvetlejša zvezda Sirius (grško Sothis), odtod sotični cikel 1461 egiptovskih let, ko se Sirius spet pojavi tik pred sončnim vzhodom. Začetek egiptovskega leta je bil 20. julija, leto je imelo 365 dni, razdeljeno na 12 mesecev, vsak po 30 dni in še pet dodatnih dni na koncu leta. Dober egiptovski koledar je bil osnova kasnejšemu julijanskemu koledarju.

Egiptovska matematika

V starem Egiptu so (poleg astronomije) gojili tako aritmetiko (s primitivno algebro) kot geometrijo. Nasploh so bili vsi matematični problemi numerični, namesto splošnih formul so bili podani le napotki (naredi to in to, dobiš to). Tudi ni sledu o kakršnih koli dokazih. Vsa matematika je bila na bolj primitivni stopnji (z današnjega stališča).

Egipčani so uporabljali desetiški številski sistem s posebnimi znaki za potence števila 10 (1 navpična črta, 10 volovski jarem (preseki), 100 zvitek, 1000 lotosov cvet itd.). Poleg tega je bil sistem aditiven, isti znak so zapisali večkrat, npr.: $276 = 2$ zvitka, 7 presekov in 6 navpičnih črt, $4622 = 4$ lotosovi cvetovi, 6 zvitkov, 2 preseka in 2 črti (iz Karnaka ~ 1500 pr. n. št.). Pomembno vlogo je imel zaradi podvajanja tudi dvojiški sistem, včasih tudi sedmiški.

						
1	10	100	1000	10000	100000	10^6
Egyptian numeral hieroglyphs						

SLIKA 3. Heroglifski znaki za številke

Osnovna dolžinska enota je bil kubit (~ 52,5 cm), ki je meril 7 palm (7,5 cm), vsaka palma pa je imela 4 prste (1,9 cm). V muzeju v Torinu je spravljeno okrog 50 cm dolgo egiptovsko ravnilo, razdeljeno na palme in prste, iz časa faraona Amhotepa I (~ 1550 pr. n. št.). Daljše razdalje so merili z vrvmi z vozli.

Aritmetika

(a) Množenje in deljenje s podvajanjem:

1. zgled: 26 krat 33; ker je $26 = 2 + 8 + 16$, je produkt enak $(33 +) 66 + (132 +) 264 + 528 = 858$.

2. zgled: deljenje 753 s 26; podvojimo 26 tolikokrat, da ravno še presežemo 753, torej 26, 52, 104, 208, 416 (naslednja podvojitev bi dala večji rezultat); ker je $753 = 416 + 337 = 416 + 208 + 129 = 416 + 208 + 104 + 25$, dobimo $(1 + 2 +) 4 + 8 + 16 = 28$, torej rezultat 28 in ostanek 25.

(b) Izražanje števila z vsoto egipčanskih ulomkov:

Vsak ulomek razen $2/3$ so zapisali kot vsoto *različnih* ulomkov s števcem 1, npr. $2/9 = 1/6 + 1/18$ ali $2/9 = 1/5 + 1/45$, $5/13 = 1/4 + 1/26 + 1/52 + 1/13$ (to je dokazal Fibonacci leta 1202 v svoji znameniti knjigi *Liber Abbaci*, glej tudi vajo 4). Tako so lažje delili, npr. $(5/13)/12 = 1/48 + 1/312 + 1/624 + 1/156$. V *Rhindovem papirusu* so dane take reprezentacije za vse ulomke oblike $2/n$ za lihe n med 5 in 101.

Algebra

Nekateri problemi iz *Moskovskega* in *Rhindovega papirusa* zahtevajo reševanje preprostih enačb z eno neznanco (ki je označena z *Aha* - to so t.i. *Aha* - problemi), največkrat linearne enačbe, npr. $3/2 \times x + 4 = 10$ oziroma $3/2 \times x = 6$. Reševali so jih z metodo preskušanja oziroma metodo napačne predpostavke (kasneje so ji rekli metoda *regula falsi*), npr. za $x = 2$ dobimo v zadnjem zgledu $3/2 \times 2 = 3$, kar je dvakrat premalo, torej je rešitev $x = 2 \times 2 = 4$.

Več teoretičnega zanimanja so bili deležni problemi z aritmetičnim zaporedjem (glej vajo 7) ali geometričnim zaporedjem (naloga o sedmih hišah s sedmimi mačkami, ki prežijo na sedem miši itd.)

Včasih so prišle na vrsto tudi kvadratne enačbe. Na *papirusu iz Lahuna* je npr. taka naloga: "Površina 100 enot je sestavljena iz dveh kvadratov, katerih razmerje je 3:4". Torej $x^2 + y^2 = 100$, $x = 3y/4$; po metodi napačne predpostavke $x = 3$, $y = 4$, dobimo $3^2 + 4^2 = 25$, štirikrat premajhen kvadrat, tako da je prava rešitev dvakrat večja: $x = 6$, $y = 8$.

Geometrija

Šestindvajset problemov iz *Moskovskega* in *Rhindovega papirusa* obravnava geometrijo (računanje plosčin in prostornin). Vedeli so, da je ploščina trikotnika osnovnica krat polovica višine nanjo. Pitagorovega izreka niso poznali (le vrv z vozli $3+4+5 = 12$, ki omogoča pravi kot). Ploščino kroga so izračunali približno kot $(8/9)^2 \times (2r)^2$ oziroma $(4/3)^4 \times r^2$, kar za π da vrednost $256/81 = 3.1605$. Za ploščino splošnega štirikotnika s stranicami a, b, c, d so dali (napačno) formulo: $P = (a + c)(b + d)/4$ (ki da preveliko vrednost).

V treh dimenzijah so znali izračunati prostornino kocke, paralelepipeda in krožnega valja (posode za žito). *Moskovski papirus* vsebuje celo zanimiv napotek za izračun prostornine presekanе štiristrane piramide, iz katerega izhaja, da so poznali točno formulo za prostornino: $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$ (glej vajo 10).

Posebna literatura:

- Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- R. Knott's *Egyptian Mathematics Site*, internet.

(B) Babilonska matematika

Zgodovinski okvir

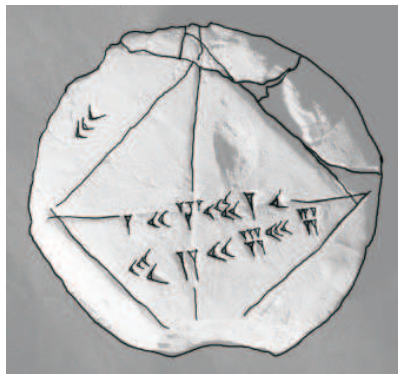
Mezopotamija, dežela med Evfratom in Tigrisom, je imela podobno ugodne razmere kot Egipt za razvoj poljedeljstva in posledično civilizacije z razvito administracijo in zato tudi znanostjo (astronomijo, matematiko). Dežela (kot križišče številnih trgovskih poti) ni bila toliko izolirana, zato je bila potrebna še večja vojaška in administrativna spretnost pri upravljanju dežele. Tudi reka Tigris je bila bolj divja kot Nil.

Zgodovinski viri

Do polovice 19. stoletja so odkopali okrog pol milijona glinastih ploščic s klinopisnimi znaki, 50.000 samo v bližini Nippurja. Med njimi jih okrog 300 vsebuje matematične tabele in zbirke matematičnih problemov. Klinopise je leta 1847 razvozlal angleški častnik in orientalist *Henry Cheswicke Rawlinson* (1810-1895), ko je izpopolnil *Grotefendovo metodo* in jo uporabil na *Behistunskem zapisu* v treh jezikih (perzijskem, aramejskem in elamitskem), babilonski verziji kamna iz Rosette, ki je omogočil moderno razumevanje stare egiptovske literature in civilizacije (*Thomas Young* 1814, *Jean François Champollion* 1822). Danes poznamo okrog 400 matematičnih ploščic.

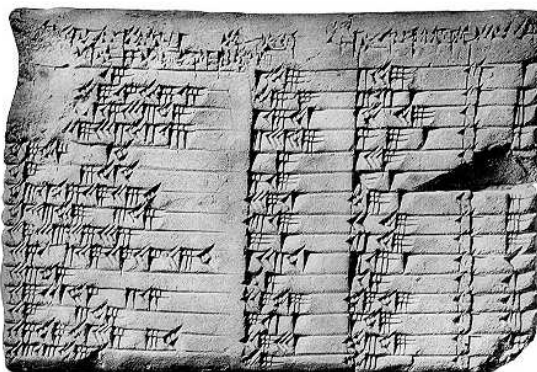
Najstarejši matematični zapisi so iz drugega sumerskega obdobja (od ~ 2100 do ~ 2000 pnš.), naslednja skupina klinopisnih tekstov izvira iz časa prve babilonske dinastije (Hamurabi 1792-1750 pnš. in kasneje). Iz zadnje skupine sta matematično najpomembnejša dokumenta:

(1) *Tablica YBC 7289* (Babilonska zbirka na Univerzi Yale), ki predstavlja kvadrat z obema diagonalama in vpisano vrednostjo korena iz 2 v šestdesetiškem sistemu (na skoraj 5 decimalk natančno): $1; 24, 51, 10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1.41421296$.



SLIKA 4. Tablica YBC.7289

(2) *Tablica Plimpton 322* (iz Plimptonove zbirke na Univerzi Columbia), ki prinaša 15 vrstic števil v šestdesetiškem sistemu v 4 stolpcih. Publicist in zbiralec *George Arthur Plimpton* (1855-1936) je tablico velikosti 13 krat 9 krat 2 cm pridobil leta 1922. Uveljavljena interpretacija tablico predstavlja kot seznam pitagorejskih trojic, generiranih na moderen način kot $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, $c = u^2 + v^2$ ($u > v$ tuji si celi števili, različne parnosti), skupaj z $(c/a)^2$ (in nekaj lahko razložljivimi napakami). To bi pomenilo, da je babilonska matematika vsaj 1500 let pred Evklidom poznala tovrstno teorijo števil. Problem je, ker so trojice na tablici zelo velike, neurejene in ni jasno, kako so bile generirane. Pred dvajsetimi leti je ponovno oživela šestdeset let stara razlaga, da so trojice urejene po padajočih (oziroma naraščajočih) recipročnih vrednosti (glej [33], [35]).



SLIKA 5. Tablica Plimpton 322

Tretja skupina klinopisnih dokumentov pa je iz časa novega babilonskega kraljestva in perzijske nadvlade (~ 600 do ~ 300 pnš.) ter iz časa Selevkidov (3. in 2. stoletje pnš.).

Babilonska astronomija

Babilonci so bili odlični astronomi, razvili so prvi *empirični* pristop z opazovanjem naravnih pojavov na nebu in tudi prvo filozofijo vesolja, kar je imelo velik vpliv na helenistično astronomijo. Njihov lunarno-solarni koledar z 12 meseci s po 29 in 30 dnevi je temeljil na starejšem sumerskem koledarju. Opazovali in beležili so tako lunine mene kot lunine mrke, sestavili so kataloge zvezd (našli so klinopisne tablice z efemeridami), poznali so zametke heliocentričnega planetarnega modela, kot ga je kasneje razvil Aristarh. Kaldejske podatke (Grki so babilonskim astronomom rekli Kaldejci) je uporabil in dopolnil Hiparh v 2. stoletju pnš., na njih je gradil Ptolemaj. Nasploh velja babilonska astronomija danes za temelj vse zahodne astronomije.

Babilonska matematika

Pod tem izrazom razumemo matematiko Sumercev, Akadijcev, Elamitov, Amoritov, Kasitov, Hetitov, Asircev, Aramejcev, Medijcev in drugih narodov, ki so v starem veku naseljevali Mezopotamijo in so svoja odkritja zapisovali v glavnem na glinaste ploščice (klinopis). Mišljena je stara babilonska matematika (iz časa Hamurabija), matematika iz novega kraljestva je precej drugačna [20]. Ta matematika (zlasti algebra) je bila na višji ravni kot egiptovska, naše vedenje o njej pa se je močno poglobilo v dvajsetih in tridesetih letih 20. stoletja z raziskavami arheologa *Françoisa Thureau-Dangina* (1872-1944) ter matematika in zgodovinarja znanosti *Otta Neugebauerja* (1899-1990). Neugebauer in Sachs sta npr. prva opisala *Plimpton 322* leta 1945 (glej sliko 6).

TABLE 1
The Extant Contents of Plimpton 322, with Errors Corrected and the Third Element of the Triple Added

I. (damaged), d^2/l^2 or b^2/l^2	II. Square-side of the width, b	III. Square-side of the diagonal, d	IV. Its name	(Square-side of the length, l)
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 20
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	8	16
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 54
(1) 33 45	45	1 15	11	1
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12	40
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	13	4
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14	45
(1) 23 13 46 40	28	53	15	45

SLIKA 6. Vsebina tablice Plimpton 322 v šestdesetiškem sistemu

Aritmetika

Nasploh so že Sumerci imeli dobro razvito trgovsko knjigovodstvo in računstvo, vključno s pogodbami, obračuni, recepti, celo z obrestmi in garancijami [13]. Poleg klinopisne pisave so izumili abacus, imeli so tudi dobro razvit sistem uteži in mer. Posledično so Babilonci še v zgodnji dobi (~ 2100 pnš.) imeli dobro razvito poštevanko, temelječo na šestdesetiškem sistemu z mestnim zapisom (npr. $11 = 1 \cdot 60 + 1 = 61$, $563 = 5 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 3 = 18.363$). To je imelo jasne prednosti pri računanju pred egiptovskim sistemom, a je imelo tudi nekatere pomanjkljivosti: premik za faktor 60 (npr. $563 = 5 \cdot 60 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 60^{-1} = 306 + 1/20$) ali vmesno ničlo (npr. $11 = 1 \cdot 60^2 + 1 = 361$). Poseben znak za ničlo se je pojavil šele mnogo kasneje, okrog leta 300 pnš. Šestdesetiški mestni sistem z ničlo poznamo še danes pri merjenju časa in kotov.

Razlago šestdesetiškega sistema je dal Neugebauer: babilonska milja je tudi časovna enota (čas hoje), cel dan je 12 časovnih milj (en zasuk neba), torej razdeljen na 12 enakih delov, zaradi praktičnih potreb še naprej razdeljenih na 30 delov, skupaj na 30 krat 12, torej 360 delov.

Praktično računanje. Dve tretjini vseh izkopanih matematičnih glinenih ploščic predstavljajo različne tabele za praktično računanje in utrjevanje računske spretnosti (tablice množenja, recipročnih vrednosti, kvadratov in kubov). Pri množenju so si pomagali s tabelami kvadratov in formulama $ab = [(a+b)^2 - a^2 - b^2]/2$ ter $ab = [(a+b)^2 - (a-b)^2]/4$, pri deljenju pa s tabelami recipročnih vrednosti in identiteto $a/b = a \cdot (1/b)$. Že okrog leta 1600 pnš. so, kot se vidi iz tablice YBC 7289, poznali zelo dober približek za $\sqrt{2}$, namreč

1; 24, 51, 10 = $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.414213$. Korene so računali z iteracijo, kot kasneje Heron (glej vajo 14). Domnevajo, da so uporabljali tudi aproksimativno formulo $(a^2 + h)^{1/2} \approx a + h/2a$ [13]. Poznali so formulo za vsoto kvadratov prvih n naravnih števil [3]. Število π so ocenili na 3 oziroma bolj natančno na $3 + 1/8 = 3,125$. Vmesne vrednosti, ki niso bile v tabeli, so določali z linearno interpolacijo.

Algebra

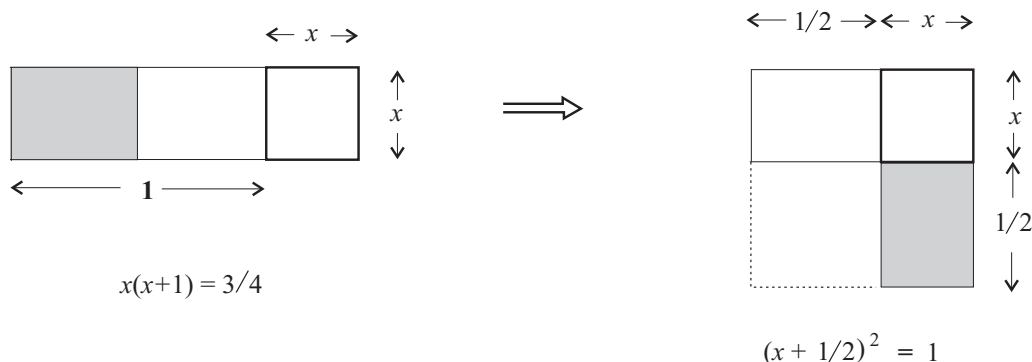
Kot nadgradnjo aritmetike so razvili t.i. *verbalno algebro*, metodo za reševanje z besedami zastavljenih problemov (npr. "reči dodaj 1, da dobiš 3"). Poleg preprostih linearnih, so znali reševati tudi različne bolj zahtevne tipe enačb, npr. *kvadratne enačbe* z dopolnitvijo do kvadrata; imeli so splošno metodo reševanja (v bistvu formulo), a prepoznali so le eno rešitev in še ta je morala biti pozitivna (negativnih števil niso poznali), ločili pa nekaj tipov enačb (v modernih oznakah): $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$.

Opozorilo. Ker so bili problemi zastavljeni z besedami, je ta interpretacija morda pretirana posodobitev (glej [20]);

Zgled: Reševanje kvadratne enačbe $x^2 + x = 3/4$.

Prevod originalnega besedila:

- (i) (iskana) ploščina in stranica je 45' (minut, tj. 3/4), podaljšek za 1,
- (ii) razdeli na polovico 1, dobiš 30' in 30',
- (iii) dodaj 15' k (ploščini) 45', skupaj (ploščina kvadrata) 1, torej (stranica 1),
- (iv) odzemi 30' (polovico) stranice podaljška, rezultat je 30'.



SLIKA 7. Reševanje kvadratne enačbe

Geometrijska interpretacija: kvadratu s stranico x prilepimo pravokotnik s stranico 1; pol tega dodanega pravokotnika z zasukom za 90 stopinj dodamo pravokotni stranici prvotnega kvadrata, z manjkajočim kvadratom velikosti $(1/2)^2 = 1/4$ tvori velik kvadrat s stranico 1 (glej sliko 7); če zmanjšamo njegovo stranico za $1/2$ (kar smo dodali), ostane $1 - 1/2 = 1/2$; to je rešitev enačbe.

Reševali so tudi *nekatero kubične enačbe*, *nekatero enačbe višje stopnje*, ki se prevedejo na reševanje kvadratne enačbe, ter *sisteme dveh enačb* z dvema neznankama (glej vaje 16-20).

Geometrija

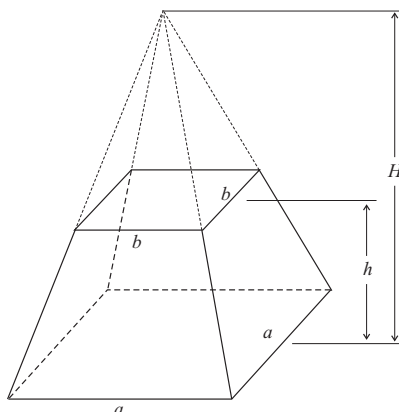
Stari Babilonci so znali meriti dolžine (babilonska milja je merila okrog 7 današnjih milj, tj. okrog 11 km), ploščine in prostornine. Poznali so celo ploščino splošnega trikotnika, trapezoida z dvema pravima kotoma, prostornino kvadra. Vedeli so, da ima v polkrog včrtan trikotnik pravi kot. Obseg kroga so ocenili na 3 premere, ploščino pa na $1/12$ kvadrata obsega (torej $\pi = 3$). Prostornina valja je bila osnovnica krat višina, prostornina stožca oziroma kvadratne piramide pa (napačno) osnovna ploskev krat *polovica* višine. Poznali so Pitagorov izrek, kar je razvidno iz mnogih najdenih ploščic oziroma zapisov na njih (glej *tablico YBC 7289* in standardno razlago *Plimptona 322*).

Posebna literatura:

- Eleanor Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- Eleanor Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, *Historia Mathematica* 28 (2)(2001), 167-206.
- Eleanor Robson, *Words and pictures: new light on plimpton 322*, *American Mathematical Monthly* 109 (2)(2002), 105-120.
- Jens Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010.

Vaje:

- (1) Izvedi nekaj primerov egiptovskega množenja in deljenja, npr. $235 \cdot 71$, $235/71$.
- (2) Egipčani so za recipročno vrednost naravnega števila n imeli posebno oznako, ki jo je Neugebauer približno ponazoril s črtico nad n , torej $\overline{n} = 1/n$ [21]. Izjema je bilo število $2/3$, ki so ga zapisali z dvema črticama nad 3, torej $\overline{3} = 2/3$.
 - (a) Ugotovi, kateri ulomek se skriva v egipčanskem zapisu števil: $1 \overline{3}$, $\overline{2} \overline{4}$, $\overline{3} \overline{4} \overline{5}$.
 - (b) Zapiši naslednje ulomke v obliki vsote različnih egipčanskih ulomkov: $3/4$, $2/7$, $6/7$.
- (3) Napiši tabelo razčlenitev na različne egipčanske ulomke za vse prave ulomke z imenovalcem manj kot 8 z
 - (a) najmanj členi,
 - (b) z najmanjšimi imenovalci.
 Poskusi tudi ugotoviti, na koliko načinov se da zapisati vsak ulomek (glej npr. [24]).
- (4) **James Joseph Sylvester** (1814-1897) je leta 1880 dokazal, da lahko vsak pravi ulomek a/b , $0 < a < b$, zapišemo v obliki vsote različnih egipčanskih ulomkov. Dokaz poteka z indukcijo: za $a = 1$ je trditev očitno res; pri predpostavki, da velja za vse ulomke s števcem manj kot a , poišči največje naravno število $q \geq 2$, tako da bo $1/q < a/b < 1/(q-1)$ in se prepričaj, da je potem $0 < aq - b < a$, $(aq - b)/bq \neq 1/q$ in $a/b = 1/q + (aq - b)/bq$ (glej [2]).
- (5) Prepričaj se, da lahko vsak ulomek oblike $2/n$ z lihimi n zapišemo v obliki vsote dveh različnih egipčanskih ulomkov z imenovalcema $(n+1)/2$ in $n(n+1)/2$ (glej [3]).
Paul Erdős (1913-1996) pa je postavil naslednji problem, ki je še vedno nerešen [3]:
 Dokaži, da je za vsako liho število $n > 4$ ulomek $4/n$ vsota treh različnih egipčanskih ulomkov.
- (6) Brez uporabe Pitagorovega izreka, ki ga Egipčani niso poznali, ali njegovega obrata dokaži, da je trikotnik s stranicami 3,4,5 pravokotni [13].
- (7) Reši nalogo z aritmetičnim zaporedjem: 100 razdeliti na 5 delov v aritmetičnem zaporedju, vsota treh največjih naj bo 7 krat večja od vsote dveh najmanjših [38].
- (8) Pokaži, da za ploščino P poljubnega štirikotnika s stranicami a, b, c, d velja
 - (a) $P \leq (ad + bc)/2$ z enakostjo natanko takrat, ko sta dva nasprotna kota prava,
 - (b) $P \leq (a + c)(b + d)/4$ z enakostjo natanko takrat, ko je lik pravokotnik [13].
- (9) Definirajmo naslednje sredine dveh pozitivnih realnih števil x, y (glej [13]):
 aritmetično $A = (x + y)/2$,
 heronsko $R = (x + \sqrt{xy} + y)/3$,
 gemetrijsko $G = \sqrt{xy}$,
 harmonično $H = 2/(1/x + 1/y)$.
 Pokaži, da velja $H \leq G \leq R \leq A$ z enakostjo natanko takrat, ko je $x = y$.
- (10) Egipčani formule $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$ za prostornino priskekane kvadratne piramide niso zares izpeljali. Dokaži njeno veljavnost z modernimi metodami, tako da upoštevaš sorazmerje: $H/a = (H - h)/b = h/(a - b)$ (glej sliko 8).



SLIKA 8. Prisekana kvadratna piramida

- (11) Katero desetiško številko predstavlja šestdesetiški zapis: (a) 123, (b) 42;25,35, (c) 0;02,31?
- (12) Zapiši v šestdesetiškem sistemu naslednja desetiška števila: (a) 15, (b) $1/2$, (c) $3/4$, (d) $2/3$, (e) $1/7$.
- (13) Naravno število n je regularno, če ima njegova recipročna vrednost končen šestdesetiški razvoj.
- Pokaži, da je to natanko takrat, ko je število n deljivo le z 2, 3 in 5.
 - Poišči (v šestdesetiškem zapisu) recipročne vrednosti naravnih števil 20 in 30.
 - Aproksimiraj recipročni vrednosti neregularnih števil 7 in 13 s končnim šestdesetiškim zapisom (upoštevaj npr. $1/7 = 7/49 \approx 7/50$ in $1/13 = 7/91 \approx 1/90$).
- (14) Kvadratni koren iz a so Babilonci računali rekurzivno: pri poljubnem $x_0 > 0$ naj bo $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ za vsak $n \geq 1$.
- Pokaži, da zaporedje konvergira proti \sqrt{a} .
 - Prepričaj se, da za $y_n = (x_n - \sqrt{a})/2\sqrt{a}$ velja za vsak $n \geq 0$ ocena $0 < y_{n+1} < y_n^2$ oziroma $y_{n+1} < y_0^{2^{n+1}}$.
- (15) Recipročna vrednost števila x je pomenila ne samo $1/x$, lahko tudi $60/x$ ali $3600/x$... Poišči pozitivno celo rešitev naslednjega babilonskega problema: količina x presega njeno recipročno vrednost za 7; koliko je x ?
- (16) Reši naslednji sistem enačb, ki se je pojavil na stari tablici iz Suse:
 $x^3 \sqrt{x^2 + y^2} = 3,200,000$; $xy = 1200$ [3].
- (17) Poišči rešitev naslednjega problema na tablici iz ~ 1800 pnš., shranjeni v Strasbourgu: Površina dveh kvadratov je 1000. Stranica enega kvadrata je za 10 enot manjša od $2/3$ stranice drugega kvadrata. Koliko merita kvadrata?
- (18) Na tablici iz ~ 300 pnš., shranjeni v Louvru, je podan pravokotnik s ploščino 1 in obsegom $2a$. Poišči njegove dimenzije
- z eliminiranjem ene neznanke,
 - s formulo, ki so jo poznali Babilonci: $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$.
- (19) Sestavi tabelo za količino $n^3 + n^2$ za $n = 1, 2, \dots, 10$. Z uporabo te tabele reši naslednji problem z babilonske tablice iz ~ 1800 (izražen v današnji obliki s sistemom treh enačb s tremi neznankami): $xyz + xy = 7/6$, $y = 2x/3$, $z = 12x$.
- (20) Reši naslednje sisteme enačb:
- $x \pm y = a$, $xy = b$,
 - $x \pm y = a$, $x^2 + y^2 = b$,
 - $xy = a$, $bx^2/y + cy^2/x + d = 0$ (iz neke tablice ~ 1600 pnš. [13]).

LITERATURA

- [1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
- [2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
- [3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
- [4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
- [5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
- [6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
- [7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
- [8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
- [9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
- [10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
- [11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
- [12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
- [13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- [15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
- [16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
- [17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
- [18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
- [19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
- [20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
- [21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- [22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
- [23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
- [24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
- [25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
- [26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [28] E. Maor, *The Story of e*, Princeton University press, 1994.
- [29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
- [30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [31] A.S. Posamentier, *The Pythagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
- [32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
- [33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- [34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- [35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- [36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
- [37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
- [38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
- [39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
- [40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
- [41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
- [42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.