

4. Evklidovi Elementi

Zgodovinski okvir

Leta 338 pnš. je Filip Makedonski premagal Atence pri Kalroneji in Grčija je postala del Makedonskega kraljestva. Dve leti kasneje je nastopil ambiciozni Filipov sin Aleksander (njegov matematični učitelj je bil **Menajhem**) in razširil imperij do konca znanega sveta. Ustanavljal je nova mesta, npr. Aleksandrijo leta 332 pnš., ki jo je pozidal izvrstni arhitekt *Dinokrat*. Ko je Aleksander leta 323 pnš. umrl, se je imperij razdelil med naslednike, helenistični duh pa se je ohranil. Aleksandriji in Egiptu je vladal Ptolemaj I, ki si je mesto izbral za prestolnico.



SLIKA 1. Mapa antične Alexandrije

Vanjo je privabil učenjake z vseh koncev grškega sveta in zanje zgradil okrog leta 300 pnš. univerzo (imenovano Muzej) v zelo modernem smislu, s predavalnicami, laboratoriji, veliko knjižnico, vrtovi in celo prostori za spanje. Za vodenje knjižnice je iz Aten pridobil učenega *Demetra Falera*. Knjižnica se je ponašala z okrog 600.000 zvitki papirusa, odprli so jo ~ 300 pnš. in Aleksandrija je skoraj za 1000 let postala središče grške omike.



SLIKA 2. Rekonstrukcija knjižnice v Aleksandriji

Evklid

O njegovem življenju je nasploh malo znanega. Živel je v Aleksandriji v 4. in 3. stoletju pnš. Tja je najbrž prišel iz Aten, kjer se je verjetno izobraževal v Platonovi akademiji. Postal je prvi profesor matematike na aleksandrijski univerzi in ustanovitelj najpomembnejše matematične šole. Pet sto let kasneje ga **Papus** (~ 300 AD) opisuje kot skromnega človeka, ki je upošteval mnenja drugih.

Evklid (~ 300 pnš.) je najbolj slaven zaradi *Elementov*, čeprav je napisal še najmanj deset del, od katerih se jih je pet ohranilo v celoti. Druga njegova dela so: *Podatki* (za konstruiranje trikotnika), *Delitve* (ploščin v danem razmerju), *Psevdaria* (o geometrijskih napakah), *Porizmi*, *Stožnice* (kasneje dopolnil **Apolonij iz Perge**), *Mesta ploskev*, *Fenomena* (sferna geometrija in astronomija), *Optika* (problem perspektive) ter *Elementi glasbe*.



SLIKA 3. Evklid iz Aleksandrije

Prvi prevodi in natisi *Elementov*

Elementi so izjemna knjiga, študirana in občudovana od vsega začetka in poleg biblije na Zahodu najbolj citirana knjiga. Nobena druga ni imela takega znanstvenega vpliva, saj je celih dva tisoč let prevladovala pri pouku geometrije. Od leta 1482, ko je bila prvič natisnjena, je izšlo preko 1000 modernih izdaj, vendar temelječih na kasnejših predelavah. Nobenega originala Evklidovih *Elementov* namreč niso našli. Dolgo časa je za najstarejšo ohranjeno verzijo veljala *Teonova kopija* (po **Teonu iz Aleksandrije** s konca 4. stoletja našega štetja), napisna skoraj 700 let po mojstru Evklidu. V začetku 19. stoletja pa so v vatikanski knjižnici našli še starejši tekst, ki pa se skoraj ne razlikuje od Teonovega.

Prvi, ki so iz grščine prevajali Evklida so bili arabski matematiki v 8. stoletju. Njihova besedila so v 12. stoletju v Španiji prevajali v latinščino. Avtor prvega ohranjenega latinskega prevoda je bil leta 1120 angleški matematik **Adelard iz Batha** (~ 1080-1150).

SLIKA 4. Naslovna stran najstarejše ohranjene izdaje latinskega (Adelardovega) prevoda *Elementov* iz 1309-1316

Kasnejši prevod je priskrbel **Gerardo iz Cremona** (1114-1187), leta 1260 pa **Johannes Campanus** (1220-1296), katerega besedilo je bilo tudi podlaga prvemu natisu (tj. tiskani knjigi) Evklidovih *Elementov* leta 1482. Prvi direktni latinski prevod iz grščine je opravil **Federico Commandino** (1509-1575) leta 1572; to knjigo so potem veliko prevajali v angleščino in druge moderne jezike.

Opis vsebine

Evklidovi *Elementi* ne vsebujejo le geometrije, ampak tudi kar precej teorije števil in elementarno geometrijsko algebro. V glavnem gre za kompilacije in sistematične predstavitve dosežkov različnih starejših grških matematikov (pitagorejcev, Hipokrata, Evdoksa, Teajeta). Nekatero dokaze je iznašel in dodal sam Evklid, ki je spretno uredil snov v 13 knjig in 465 trditvev (oziroma propozicij):



SLIKA 5. Stran iz prve tiskane izdaje *Elementov*, Benetke 1482

I. *knjiga*: 23 definicij, 5 postulatov, 26 trditev o trikotniku, 7 o vzporednicah itd., skupaj 48 trditev oziroma propozicij; trditev I47 je znameniti Pitagorov izrek, trditev I48 njegov obrat.

II. *knjiga*: transformacije površin in geometrijska algebra, npr. distributivnostni zakon, kosinusov izrek kot posplošitev Pitagorovega izreka itd. .

III. *knjiga*: osnovne lastnosti krogov (po Hipokratu), trditve o tetivah, kotih, tangentah itd. ter njihovi rigorozni dokazi.

IV. *knjiga*: konstrukcije z ravnilom in šestilom (po Hipokratu), konstrukcija pravilnih večkotnikov (npr. petkotnika in 15-kotnika).

Opomba. Zanimivo, da novih konstrukcij pravilnih večkotnikov potem več kot 2000 let niso odkrili. Šele leta 1796 je devetnajstletni *Gauss* konstruiral pravilni 17-kotnik, za njim leta 1832 *Richelot* pravilni 257 kotnik. Nemški učitelj matematike *Oswald Hermes* (1826-1909) je porabil 10 let za konstrukcijo pravilnega 65537-kotnika. *Gauss* in *Wantzel* sta natanko ugotovila, kdaj se da (z ravnilom in šestilom) konstruirati pravilen večkotnik (glej vajo 2). Ni pa znano, ali je poleg naštetih možno konstruirati še kakšen pravilni p -kotnik s praštevilskim številom stranic.

V. *knjiga*: Eudoksova teorija sorazmernosti ($A : B = C : D$ natanko takrat, ko obstajata naravni števili m, n , da je $mC \geq nD \iff mA \geq nB$ ali $mC \leq nD \iff mA \leq nB$), "Arhimedov aksiom", osnovne aritmetične operacije (komutativnost množenja je npr. dokazana v trditvi V16).

VI. *knjiga*: izreki o podobnih trikotnikih, geometrijske rešitve kvadratnih enačb, Pitagorov izrek za podobne like, podobnost v zvezi s simetralo kota.

VII., VIII., IX. *knjiga*: 102 trditvi o elementarni teoriji števil, Evklidov algoritem (trditev VII2), dvojno geometrijsko razmerje $a/b = b/c = c/d$, osnovni izrek aritmetike o razcepu na praštevila (trditev IX14), dokaz, da je praštevil neskončno mnogo (trditev IX20) ter formulo za soda popolna števila (trditev IX36), ki smo jo spoznali v 2. rardelku.

X. *knjiga*: iracionalna števila (po Teajtetu), osnove metode izčrpavanja, najzahtevneša knjiga *Elementov*, upoštevajoč, da še ni obstajala algebrajska notacija; knjiga prinaša tudi primitivne pitagorejske trojice.

XI., XII., XIII. *knjiga*: osnove stereometrije; v XI. knjigi je govor o pravokotnosti in vzporednosti, izračunana je prostornina paralelepipeda; obravnavani so stožci in Menajhmovi preseki stožcev; XII. knjiga je povzetek Eudoksovih izračunov prostornine piramide, stožca in krogle; XIII. knjiga prinaša obravnavo regularnih poliedrov (Platonovih teles), skupaj z izpeljavo razmerja med stranico in polmerom očrtane krogle; Evklid v njej tudi dokaže, da poleg petih znanih ni drugih pravilnih poliedrov.

Šibke točke Elementov

Seveda so v delu tudi (velike) pomanjkljivosti. Vsebuje mnoge tihe predpostavke in privzetki, ki ne sledijo iz aksiomov (nerazlikovanje med neskončnostjo in neomejenostjo premice, potih privzet Paschev aksiom o vstopu in izstopu premice v trikotnik, obstoj presečišča krožnice in premice ali dveh krožnic, skozi točko zunaj premice poteka le ena vzporednica) in prinaša (nepotrebne) definicije točk, daljic in drugih primitivnih pojmov.

Šele konec devetnajstega stoletja so (po odkritju neevklidskih geometrij!) te pojme razčistili in postavili nove, preciznejše sisteme geometrijskih aksiomov, npr. *Hilbert* (21 aksiomov, primitivni pojmi točke, premice, ravnine, ležati na, ležati med, skladnost), *Veblen* (19 aksiomov, točke in urejenost), *Pieri* (20 aksiomov, točke in gibanja), *Huntington* (23 aksiomov, sfere, vsebovati).

Pomen Evklidovih Elementov

Bolj kot po vsebini so *Elementi* pomembni po formalnih vidikih, po načinu, kako je snov predstavljena (vzorec za vsa nadaljnja matematična dela, model moderne rigoroznosti). Prvič je uporabljena *aksiomatska metoda*, narejen je zgodovinsko prvi resen poskus, kako iz postulatov samo z logičnim sklepanjem izpeljati njihove posledice.

Evklid je ločil aksiome (splošna pravila):

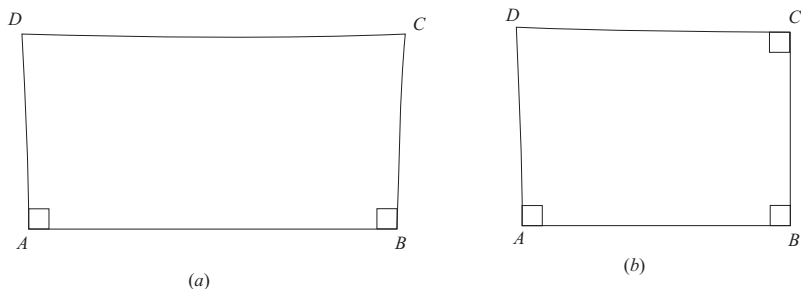
- A1. *Reči, enake neki reči, so enake med seboj.*
- A2. *Če enakim dodaš enako, sta celoti enaki.*
- A3. *Če enakim odšteješ enako, dobiš enako.*
- A4. *Identični reči sta enaki.*
- A5. *Celota je večja od dela.*

in postulate (posebna pravila v zvezi s snovjo):

- P1. *Mogoče je potegniti premico od ene točke do druge.*
- P2. *Daljico lahko nadaljujemo do neskončne premice.*
- P3. *Mogoče je konstruirati krog s središčem v dani točki in polmerom enakim dani daljici.*
- P4. *Pravi koti so med seboj enaki.*
- P5. *Če premica seka dve premici tako, da merita notranja kota na isti strani manj kot dva prava kota, se premici sekata na tisti strani kot kota.*

Rojstvo neevklidske geometrije

Peti postulat (o vzporednicah) se tudi Evklidu ni zdel očiten. V moderni obliki ga je formuliral šele škotski fizik in matematik **John Playfair** (1748-1817): skozi dano točko lahko potegnemo natanko eno vzporednico dani premici (podobno je sicer predlagal že *Proclus* v 5. stol.). Že prej so predlagali različne alternative, npr. italijanski jezuit **Girolamo Saccheri** (1667-1733), profesor na univerzi v Padovi: štirikotnik $ABCD$ s pravima kotoma pri A in B ter $AD = BC$ (slika 6a), ali **Johan Heinrich Lambert** (1728-1777): štirikotnik $ABCD$ s tremi pravimi koti pri A , B in C ter $AD = BC$ (slika 6b). Ta štirikotnik je obravnaval tudi že **Ibn al-Hajtam** (965-1040).



SLIKA 6. Saccherijev in Lambertov štirikotnik

V poskusu, da bi prišli do protislovja so, pri poredpostavki ostrega kota pri C (in D), izpeljali različne izreke in lastnosti neevklidske geometrije, vendar protislovja niso odkrili. Enako se je godilo *Adrienu-Marie Legendru* (1752-1833), ki je leta 1794 izdal geometrijsko knjigo (nadomestek za Evklida) z naslovom *Elements de géométrie*.

Danes vemo, da je 5. aksiom neodvisen od ostalih in da so neevklidske geometrije prav tako legitimne. To je menda odkril *Gauss*, a ni objavil ničesar, neodvisno pa dokazala madžarski matematik **Janos Bolyai** (1802-1860) leta 1832 v dodatku k matematičnemu delu svojega očeta Farkasa in ruski matematik **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1793-1856), katerega spis iz 1829-30 je ostal na Zahodu neopažen.



SLIKA 7. Portret Janosa Bolyaia

Neoporečen dokaz konsistentnosti hiperbolične geometrije (več vzporednic, ostri kot) so dali **Eugenio Beltrami** (1835-1899), **Arthur Cayley** (1821-1865), **Felix Klein** (1849-1925), **Henri Poincaré** (1854-1912) in drugi znani matematiki. Leta 1854 je **Bernhard Riemann** (1826-1866) ugotovil konsistentnost tudi druge neevklidske predpostavke (nobene vzporednice, topi kot). Klein je geometrijo Bolyaija in Lobačevskega imenoval *hiperbolična*, Evklidovo *parabolična* in Riemannovo *eliptična*.



SLIKA 8. Portret Nikolaja Ivanoviča Lobačevskega (Benson)

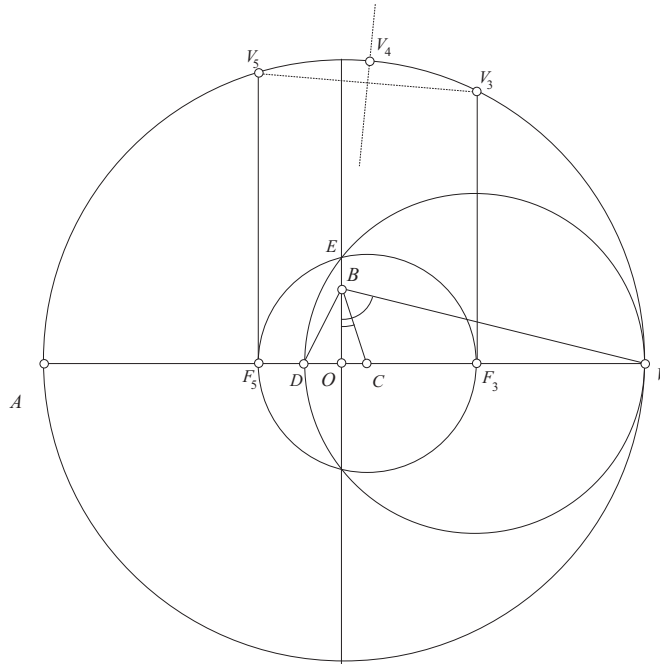
Vaje:

- (1) Znan je *Evklidov algoritem* za iskanje največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil a in b : večje število delimo (z ostankom) z manjšim, tj. $a = bc + r$, nato delitelja delimo z ostankom $b = dr + s$ itd. zadnji delitelj, ki da ostanek nič, je največji skupni delitelj števil a in b .
 - (a) Poišči največji skupni delitelj števil 5913 in 7592.
 - (b) Pokaži: Če je h največji skupni delitelj števil a in b , obstajata taki celi števili p in q , da je $ap + bq = h$; poišči p in q za števili iz točke (a).

(2) *Fermatova praštevila* so praštevila oblike $F_n = 2^{2^n} + 1$, npr. $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$ itd. *Fermat* je še mislil, da je vsako število take oblike praštevilo, a je *Euler* leta 1732 pokazal, da je že naslednje število $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ sestavljeno (sploh ni znano, še poleg prvih petih obstaja še kakšno Fermatovo praštevilo).

Opomba. Izrek Gaussa in Wantzela pravi, da lahko z evklidskim orodjem načrtamo pravilni n -kotnik natanko takrat, ko je $n > 2$ in je največji lihi faktor v n enak 1 ali produkt samih različnih Fermatovih praštevil. Slavni nemški matematik **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) je še kot devetnajstleten študent leta 1796 dokazal zadostni pogoj, veliko manj znani francoski matematik **Pierre Laurent Wantzel** (1814-1848) pa leta 1837 (v istem članku, v katerem je pokazal nezmožnost evklidske podvojitve kocke in trisekcije kota) potrební pogoj.

- (a) Pokaži naslednje: če lahko konstruiramo pravilen $n = rs$ kotnik in sta $r, s > 2$, lahko konstruiramo tudi pravilna r in s kotnika. Obratno tudi velja, če sta si r in s tuji števili. Pokaži, da se pravilni 7, 9 in 27 kotnik ne dajo konstruirati.
- (b) Konstruiraj z ravnilom in šestilom pravilne 3,4,5,6,8,10,12,15 in 16 kotnike.
- (c) *Richmondova konstrukcija* pravilnega 17-kotnika (1909) je naslednja [21]: Naj bo $O(V)$ krožnica s središčem v O in premerom AV , kot BOV pravi in $BO = OV/4$. Naj bo C na OV taka točka, da je kot OBC četrtnina kota OBV , točka D pa taka točka na OA , da meri kot CBD točno 45 stopinj. Krožnica s premerom DV naj seka premico OB v točki E , krožnica $C(E)$ pa naj seka premer AV v točkah F_3 in F_5 . Pravokotnici na premer v teh dveh točkah naj sekata krožnico $C(V)$ v točkah V_3 in V_5 . Razpolovimo lok V_3V_5 in najdemo točko V_4 . Potem je V_3V_4 stranica pravilnega 17-kotnika (slika 9).

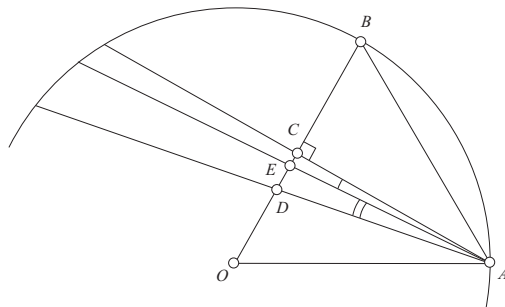


SLIKA 9. Richmondova konstrukcija pravilnega 17-kotnika

(3) **Josip Plemelj** (1873-1967) je leta 1892 predstavil (objavljena leta 1912) naslednjo konstrukcijo pravilnega 7-kotnika, temelječo na tretjinjenju kota: Z daljšim izračunom se da najprej pokazati (glej npr. [21]), da za $0 < t < 30^\circ$ velja za stranico 7-kotnika $s = \sqrt{3}/2 \cos t$, če je $\operatorname{tg} 3t = 1/3\sqrt{3}$. V krogu s središčem v O in polmerom $OA = 1$ naj bo trikotnik OAB enakostranični, točka C naj razpolavlja stranico OB , točka D pa naj od nje odreže eno tretjino v smeri od O proti B (glej sliko 10). Načrtajmo še točko E na daljici CD tako, da je kot CAE (označimo ga s t) ravno tretjina kota CAD (označimo ga s $3t$). Pokaži, da je potem stranica pravilnega 7-kotnika enaka $s = AE$, tako da

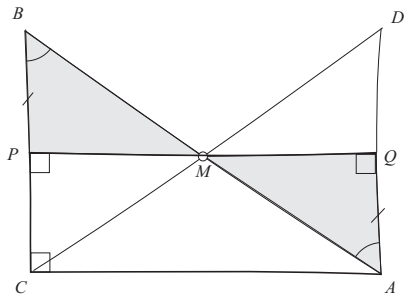
- (a) izračunaš $\operatorname{tg} 3t = CD/AC$ in (b) izraziš AE s kosinusom kota t .

Opomba. Če namesto, da s točko E tretjinimo kot CAD tretjinimo daljico CD (kar je zaradi majhnega kota skoraj isto), dobimo približno evklidsko konstrukcijo pravih 7-kotnika.



SLIKA 10. Plemljeva konstrukcija pravih 7-kotnika

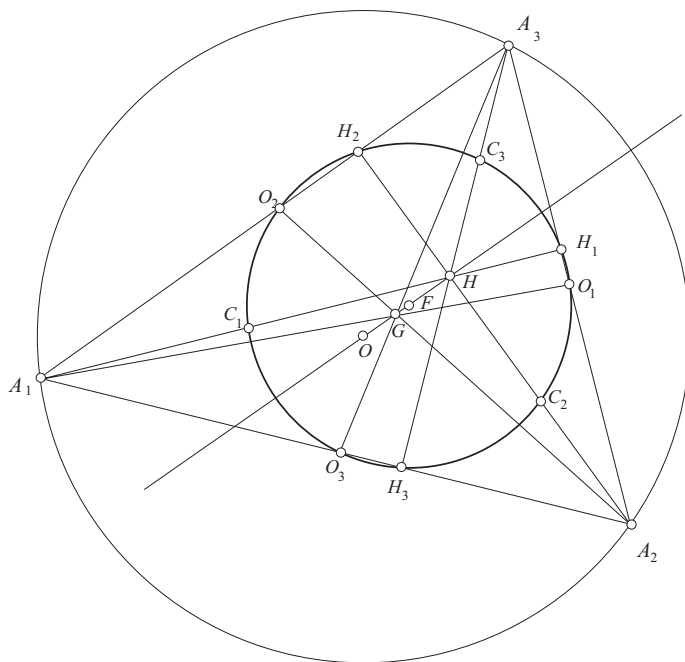
- (4) *Saccherijev štirikotnik* $ABCD$ ima kota pri A in B prava ter $AD = BC$, *Lambertov* ima pravi kot tudi pri C . Za Saccherijev štirikotnik dokaži naslednje:
- Kota pri C in D sta enaka.
 - Zveznica, ki povezuje sredini obeh osnovnic, je nanju pravokotna in zato razdeli Saccherijev štirikotnik na dva Lambertova štirikotnika.
 - Daljica, ki spaja sredini enakih krakov, je pravokotna na zveznico iz točke (b).
- (5) *Kleinov model hiperbolične geometrije*: točke hiperbolične ravnine naj bodo točke znotraj danega kroga v evklidski ravnini, premice pa deli premic znotraj kroga. Prepričaj se, da veljajo naslednje lastnosti:
- Dve točki določata natanko eno premico.
 - Dve različni premici se sekata največ v eni točki.
 - Skozi točko, ki ni na premici l , poteka neskončno mnogo premic, ki ne sekajo l .
 - Razdaljo merimo takole: če premica skozi P in Q seka krožnico v S in T , tako da imamo po vrsti S, P, Q, T , naj bo $d_H(P, Q) = \log[(QS)(PT)/(PS)(QT)]$. Potem npr. za tri točke na premici velja $d_H(P, Q) + d_H(Q, R) = d_H(P, R)$ in $\lim_{Q \rightarrow T} d_h(P, Q) = \infty$.
- (6) Hiperbolična geometrija izhaja iz predpostavke, da sta v vsakem Saccherijevem štirikotniku preostala dva kota ostra ali da je četrti kot v Lambertovem štirikotniku oster. Pokaži, da v tej geometriji velja naslednje [11]:
- Naj bo v pravokotnem trikotniku ABC točka M razpolovišče hipotenuze AB . V točki A konstruirajmo kot BAD , ki je enak kotu ABC in iz M potegnimo pravokotnico MP na CB , na AD pa označimo točko Q , tako da bo $AQ = PB$ in narišimo MQ (slika 11). Potem sta trikotnika AQM in BPM skladna, tako da je kot AQM pravi in točke Q, M, P kolinearne. Torej je $ACPQ$ Lambertov štirikotnik z ostrim kotom pri A . Posledica: v hiperbolični geometriji je vsota kotov v poljubnem pravokotnem trikotniku manjša od π (dveh pravih kotov).
 - V poljubnem trikotniku ABC iz oglišča, kjer je kot največji, spustimo višino in trikotnik razdelimo na dva pravokotna trikotnika. Z uprabo točke (a) potem hitro vidimo, da je vsota vseh kotov $\alpha + \beta + \gamma$ v trikotniku ABC manj od π . Količina $\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ se imenuje *defekt trikotnika*. Pri transverzalni delitvi trikotnika (s premico skozi eno oglišče) se defekti posameznih delov seštevajo.
 - Naj bosta ABC in $A'B'C'$ trikotnika s paroma enakimi koti. Ovrzimo trditve, da je $A'B' < AB$. Odmerimo $AD = A'B'$ na AB in $AE = A'C'$ na AC . Potem sta trikotnika ADE in $A'B'C'$. Točka E ne sme pasti v C , sicer bi bil kot BCA večji od kota DEA . Prav tak E ne more pasti na stranico AC , sicer bi daljica DE sekala stranico BC v točki F in vsota kotov v trikotniku FCE bi bila večja od π . Torej leži E zunaj daljice AC . Štirikotnik $BCDE$ je konveksen, vsota kotov enaka 2π , kar pa



SLIKA 11. V hiperbolični geometriji je vsota kotov v trikotniku manjša od dveh pravih kotov

v hiperbolični geometriji ni mogoče (točka (b)), zato tudi ne velja $A'B' < AB$. Torej mora veljati enakost. V hiperbolični geometriji sta torej dva trikotnika skladna že, če imata enake kote.

- (7) Danes je (tudi zaradi računalniških programov, ki omogočajo dinamično geometrijo) močno oživiljen interes za elementarno evklidsko geometrijo, tudi za geometrijo trikotnika. Eden takih sicer klasičnih pojmov je *Feuerbachov krog*: v poljubnem trikotniku $A_1A_2A_3$ naj bo O središče očrtanega kroga, H višinska točka (ortocenter), O_1, O_2, O_3 razpolovišča stranic, H_1, H_2, H_3 nožišča višin in C_1, C_2, C_3 razpolovišča daljic HA_1, HA_2, HA_3 (slika 12). Potem devet točk $O_1, O_2, O_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$ leži na *Feuerbachovi krožnici* (od tod tudi ime krog devetih točk). Nemški geometer **Karl Wilhelm Feuerbach** (1800-1834) je dokazal, da se tega kroga dotikajo tudi včrtani krog in trije pričrtani krogi. Dotikališča se imenujejo *Feuerbachove točke*. Središče Feuerbachovega kroga F je razpolovišče daljice OH , težišče trikotnika G pa na dveh tretjinah te daljice, tako da je $HG = 2(OG)$. Točke O, F, G, H so kolinerane in ležijo na t.i. *Eulerjevi premici*. Poleg tega seka premica H_1H_2 premico A_1A_2 itd. v točkah P_1, P_2, P_3 ki so tudi kolinerane in ležijo na ti. *polarni osi*, ki je pravokotna na Eulerjevo premico. Polarna os je tudi tetiva Feuerbachovega in očrtanega kroga, če se slednja sekata, in hkrati tudi ortocentroidnega kroga (ki ima premer HG).



SLIKA 12. Feuerbachov krog in Eulerjeva premica

LITERATURA

- [1] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
- [2] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
- [3] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhuser, 1990.
- [4] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
- [5] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
- [6] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
- [7] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real And Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C. 2006.
- [8] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
- [9] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
- [10] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
- [11] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [12] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- [13] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and history*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
- [14] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
- [15] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
- [16] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
- [17] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- [18] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
- [19] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
- [20] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
- [21] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [22] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [23] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
- [24] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [25] A.S. Posamentier, *The Pythagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
- [26] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
- [27] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- [28] E. Robson, *Words and pictures: new light on plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- [29] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- [30] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
- [31] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
- [32] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
- [33] F. Swetz et al, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
- [34] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
- [35] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
- [36] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.