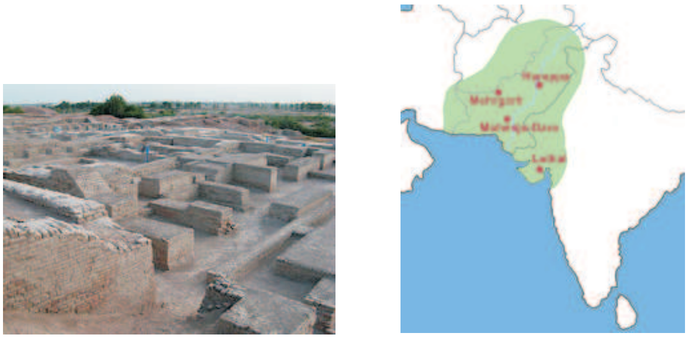
6. Indija in islamski svet

(A) Indijska matematika

Zgodovinski in splošni matematični okvir

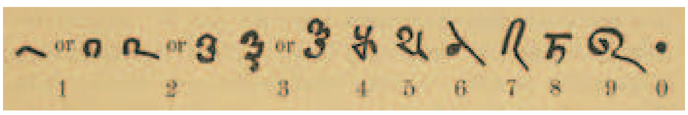
Malo je znanega o starejši indijski matematiki. Gotovo je bila na dosti visokem nivoju, kar pričajo več kot 4000 let stari ostanki mest Mohenjo Daro in Harappa v dolini Inda, z ravnimi ulicami, opečnato gradnjo, hišami s kopalnicami, javnim plavalnim bazenom, pokrito kanalizacijo, namakalnim sistemom. Poznali so pisavo, sistem štetja, tehtanje in merjenje količin.



Slika 1. Ostanki mesta Mohenjo Daro v dolini Inda

Pred kakimi 4000 leti so čez Himalajo prispeli Arijci in v naslednjih pet sto letih prevladali v Indiji. Uvedli so kastni sistem ter izpopolnili pisni in govorjeni jezik - sanskrt, v katerem sta npr. napisana klasična epa *Mahabharata* in *Ramajana*. V sanskrtu so napisane tudi *Vede*, veliki indijski verski tekst. Matematika in astronomija sta se v njih pojavili razmeroma zgodaj, krog 1500 pnš. Kasnejša oblika vedskega teksta *Sulvasutra* (ali *Sulbasutra, Shulba Sutra*) prinaša med drugim geometrijska pravila za konstrukcijo oltarjev. Matematika v *Sulvasutri* je delo več avtorjev v različnih obdobjih: **Baudhayana** ($\sim$ 800 pnš.), **Manava** ($\sim$ 750 pnš.), **Apastamba** ($\sim$ 600 pnš.) in (precej kasneje) **Katyayana** ($\sim$ 200 pnš.). Iz besedil sklepamo, da so poznali Pitagorov izrek in pitagorejske trojice, npr. (3,4,5), (5,12,13,), (8,15,17), (12,35,379). Znali so tudi izračunati $\sqrt{2}$ na pet decimalk natančno (vaja 2).

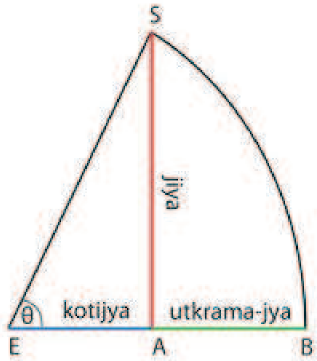
Perzijski osvajalci Indije so pod Darejem v 6. stoletju pnš. le za kratko preplavili Indijo. Iz tega časa sta znana učitelja *Mahavira* (599-527 pnš.), reformator hinduizma in začetnik jainizma, in *Gautama Buda* ($\sim$ 563-483 pnš.), začetnik budizma. Jezikoslovec **Panini** ($\sim$ 520-460) se je ukvarjal tudi s formalno logiko in geometrijo. Po kratki nadvladi Aleksandra Velikega leta 326 pnš. je bil vzpostavljen Maurijski imperij z najslavnejšim kraljem Asokom (272-232 pnš.). Iz tega časa so ohranjeni številni stebri z vklesanimi simboli za števila. V Indiji je tedaj prevladoval *jainizem* kot religija in filozofija. Za matematiko je pomemben, ker jo je osvobodil od verske in obredne vloge. Prvi dokument o tem je ti. *rokopis iz Bakšalija* (70 strani zapisanih na brezovem lubju), najden leta 1881 blizu Pešavarja v današnjem Pakistanu; nastal je najbrž v 7. stoletju, a je prepis starejših tekstov iz obdobja jainizma. Tedaj so matematiki obravnavali števila, tudi zelo velika, in prišli do pojma neskončnost (ločili so celo več vrst neskončnosti).



Slika 2. Simboli za števke iz Bakšalijskega rokopisa

Zanimivo, da se je z matematiko ukvarjal tudi glasbeni teoretik **Pingala** (3. stol. pnš.), ki je odkril binomske koeficiente in Pascalov trikotnik (imenovan *Meru Prastara*) skupaj z dejstvom, da je vsota v n-ti vrstici enaka 2^n, ter osnovno idejo o Fibonaccijevih številih. Politično pa je bilo obdobje precej nestabilno (nadvlada Selevkidov, kušanski imperij, dominacija Perzijcev). Serija invazij se je potem končala z vladavino dinastije *Gupta* (320-550).

Obdobje Gupta štejejo za zlato dobo sanskrtske renesanse, ko je Indija postala center učenja, umetnosti in medicine. Pod vplivom helenistične znanosti so bile ustanovljene prve univerze, napisano prvo pomembno astronomsko delo *Surya Siddhanta* (*Veda o Soncu*) neznanega avtorja. Vsebuje prve zametke moderne trigonometrije (npr. sinus *jya*, kosinus *kojya*).



SLIKA 3. Definicija sinusa in kosinusa

Matematika je bila izrazito podrejena astronomiji. Priznan astronom je bil **Varahamihira** (6. stol.) z delom *Pancha Siddhantika*, ki vsebuje dobre primere zgodnje trigonometrije (med drugim današnje formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, $(1 - \cos 2x)/2 = \sin^2 x$), povzete po Ptolemajevih tabelah tetiv (računali so polovico tetive, torej sinus polovičnega kota).

Od leta 400 do 1400 preživi Indija spet vrsto tujih invazij (Huni, Arabci, Perzijci, Turki). Kljub temu lahko imamo ta čas za klasično dobo indijske matematike. Najpomembnejši indijski astronomi in matematiki so bili **Aryabhata I** v 6. stoletju v Patni ob Gangesu (delo *Arybhatiya*), **Brahmagupta** v 7. stoletju v Ujjainu v Centralni Indiji (o matematiki govori 12. poglavje njegovega astronomskega dela *Brahmasphutasiddhanta* ali *Popravljeni sistem Brahme*), **Mahavira** v 9. stoletju v Južni Indiji (ki je v najstarejšem indijskem čisto matematičnem delu delu *Ganita Sara Samgraha* pisal o elementarni matematiki) in **Bhaskara II** v 12. stoletju z astronomskim delom *Siddhanta Siromani* (tudi *Shiromani*) in matematičnima deloma *Vijaganita* (tudi *Bijaganita*) in *Lilavati*.

Aryabhata (476-550) je avtor več del iz astronomije in matematike. Pri njem je mestni decimalni zapis prvič eksplicitno poudarjen, ničla pa je nastopala zgolj implicitno. Izračunal je vsote kvadratov in tretjih potenc prvih n naravnih števil. Sestavil je tabele sinusov in kosinusov od 0 do 90 stopinj z intervalom 3.75 stopinj na štiri decimalke natančno. Preko arabskega prevoda indijskega *jya* (*lok*) kot *jaib* (*žep*) je nastal latinski *sinus*. Odkril je razne trigonometrične formule, reševal kvadratne enačbe in diofantske enačbe, število π je ocenil na štiri decimalke natančno: 3.1416.

Brahmagupta (598-668) se je poleg astronomije ukvarjal z geometrijo (tetivni štirikotniki, trikotniki z racionalnimi stranicami in ploščino) in algebro (linearne diofantske enačbe, reševanje Pellove enačbe). Prvi je računal z nič kot s številom in v ta namen sestavil pravila.

Slika 4. Aryabhata in Brahmagupta

Bhaskara (1114-1185) je živel več stoletij kasneje. Kanoniziral je dotedanje matematično znanje: aritmetiko (koreni, zaporedja, obresti), algebro (kvadratne in kubične enačbe, tudi z več neznankami), geometrijo (dokaz Pitagorovega izreka) in trigonometrijo (adicijski izrek), analizo (pravila odvajanja, celo Rolleov izrek). Bhaskarova *Lilavati* je bila na vzhodu več stoletji standardno delo iz aritmetike in merjenja.

Omeniti moramo še eno cvetoče obdobje indijske matematike, **matematično šolo v Kerali**. Od 14. do konca 16. stoletja je v Kerali na jugu indijske podceline delovala matematična šola, ki naj bi jo ustanovil **Madhava iz Sangamagrama** ($\sim$ 1350-1425), njeni znani predstavniki pa so bili še **Narayana Pandit** ($\sim$ 1340-1400), **Parameshvara** ($\sim$ 1370-1460) in **Nilakantha Somayaji** (1444-1544). Slednji je 1501 v verzih napisal odmevno astronomsko delo *Tantrasangraha*, v katerem so opisani dosežki te šole na področju astronomije (najbolj natančni izračuni položaja planetov pred Keplerjem), trigonometrije (aproksimacija sinusa, kosinusa in arkus tangensa) in s tem v zvezi - presenetljivo - analize (seštevanje vrst, razvoj funkcij v vrsto, tudi odvajanje), s čimer je vsaj za dve sto let prehitela uradni začetek evropskega infinitezimalnega računa.

Slika 5. Madhava iz Sangamagrama

V Angliji so Brahmaguptovo delo prevedli leta 1817, Mahavirovo 1912. Na matematično šolo v Kerali pa je leta 1830 na zahodu prvi opozoril Anglež *Charles Whish*. Leta 1907 je bilo ustanovljeno moderno Indijsko matematično društvo.

Številski sistem in računanje

Najbolj znan dosežek indijske matematike je naš sedanji *decimalni sistem* mestnih vrednosti in zapis števk (indijsko-arabske številke). Poznali so tudi ničlo, prevzeto najbrž od Babiloncev. Brahmagupta in Mahavira sta jo že obravnavala kot druga števila, tudi računanje z njo, razen deljenja, jima je šlo od rok. Tudi Bhaskara je sprva še imel težave povedati, kaj pomeni $n/0$, v *Vijaganiti* pa je temu ulomku že pripisal neskončno vrednost (spomnimo se, da so indijski matematiki dopuščali aktualno neskončnost, medtem ko je v Evropi to storil šele **Georg Cantor** konec 19. stoletja). Sistem se je v Indiji uporabljal nedvomno že dolgo, prvi zapisi so se pojavili na plošči iz leta 595.

Slika 6. Razvoj simbolov za desetiške števke

Za vsakdanje potrebe so Indijci zapisovali račune na majhne lesene plošče in jih, zaradi varčevanja s prostorom, sproti brisali. Števila so nadpisovali, sicer računali podobno kot mi, npr. 345 + 488 = (3+4 = 7), (4+8 = 2, 1 naprej, dobimo 82, (8+5 =3, 1 naprej), torej je skupen rezulta 833. V *Lilavati* je omenejena še ena metoda (štetje enot, desetic, stotic itd.). Podobno so množili, zlasti z enomestnimi števili, sicer pa kombinirali. Poznali so podobno tablico množenj s poševnim seštevanjem, npr.

$$\begin{array}{cccccc|c} & & 1 & 3 & & 5 & \\ \hline & & 1 & 3 & & 5 & 1 \\ & & 2 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 6 & 2 & 0 & & & \end{array}$$

V Evropo se je ta sistem računanja prenesel v 15. stoletju s posredovanjem Arabcev.

Aritmetika in algebra

Pri reševanju aritmetičnih nalog so poleg metode napačne predpostavke poznali tudi metodo inverzije (računanje inverznih operacij v obratnem vrstnem redu): linearno enačbo $(3x+2)/5 = 4$ so npr. rešili z $x = (4 \cdot 5 - 2)/3 = 6$. Poznali so aritmetična in geometrična zaporedja, komercialne probleme, obrestni račun, probleme mešanja itd. Izumili so razne okrajšave, tudi kvadratne korene: število π so npr. aproksimirali z vrednostjo $\sqrt{10}$, Aryabhata pa je našel za π celo približek 3.1416 (vendar ni znano, kako). Uporabljali so formulo

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2},$$

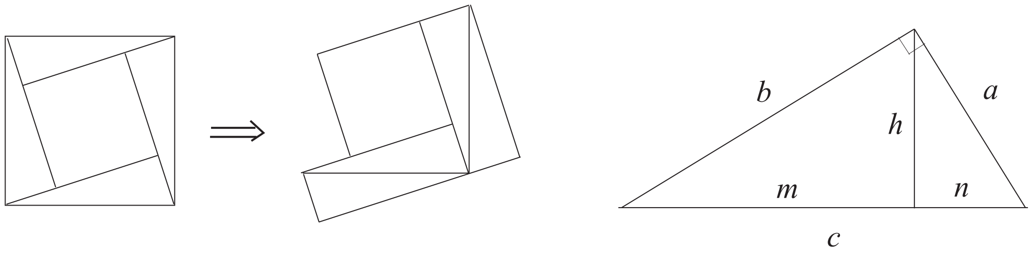
ki jo ima tudi Evklid v X. knjigi *Elementov*. Reševali so nedoločene diofantske enačbe, rešitev enačbe prvega reda $ax + by = c$ najdemo npr. pri Brahmagupti, drugega reda pri Bhaskari. Medtem ko je Diofant dopuščal rešitev z ulomki, so Indijci priznali le cela števila. So pa bili zadovoljni tudi z negativnimi rešitvami. Reševali so tudi Pellovo enačbo oblike $x^2 = ay^2 + 1$, kjer a ni popolni kvadrat (glej vajo 6). Brahmagupta je npr. dal primer $x^2 = 92y^2 + 1$ in povedal: "Kdor reši to enačbo prej kot v enem letu, je matematik". Sam je poznal eno rešitev: $x = 1151$, $y = 120$.

Pellove enačbe se imenujejo po angleškem matematiku **Johnu Pellu** (1611-1685). Kompletno teorijo takih enačb je izpopolnil šele **Joseph Lagrange** v letih 1766-1796.

Geometrija in trigonometrija

Že *Sulvasutra* prinaša uporabno geometrijo s poznavanjem Pitagorovega izreka. Brahmagupta in Mahavira sta predstavila ne samo Heronovo formulo, ampak tudi posplošitev $p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, kjer je $s = (a+b+c+d)/2$ za tetivne štirikotnike (glej vajo 8). Znana je tudi Brahmaguptova posplošitev Ptolemajevega izreka na tetivne štirikotnike (glej vajo 8). Podal je druge trditve o tetivnem štirikotniku (glej vaji 9 in 10).

Bhaskara pa je npr. podal dva dokaza Pitagorovega izreka, enega z razdelitvijo (slika 7a) in drugega s podobnimi pravokotnimi trikotniki, dobljenimi z višino na hipotenuzo (slika 7b).



(a) (b)

Slika 7. Bhaskarova dokaza Pitagorovega izreka

V trigonometriji so indijski matematiki uporabljali stopinje, minute in sekunde (slednja pomeni drugo delitev). Poznali so tabelo sinusov (polovičnih tetiv). Njihova trigonometrija je bila bolj aritmetična kot geometrijska.

Nasploh so se Indijci imeli bolj za astronome kot matematike, bili so dobri računarji in povprečni geometri. V nasprotju z Grki so matematiko gojili le duhovniki, probleme so oblačili v mistični jezik, niso ločevali med kvalitetnimi in bolj elementarnimi deli, naslanjali so se na empirično evidenco in niso čutili potrebe po dokazih.

Začetki diferencialnega računa

Prve nedvoumne moderne formule diferencialnega računa najdemo pri Bhaskari. Ni sicer poznal pojma odvoda, je pa znal aproksimirati razliko dveh sinusov:

$$\sin y - \sin x \approx (y - x) \cos x,$$

če je $x \approx y$. Prav tako je uporabljal zgodnjo obliko Rolleovega izreka: $f'(x) = 0$ za $a < x < b$, če je $f(a) = f(b) = 0$.

Nadaljnje uspehe na tem področju je kasneje dosegel **Madhava** (1350-1425), ustanovitelj matematične šole v Kerali. V začetku 15. stoletja so odkrili vrsto za arkus tangens:

$$r\text{arctg}(y/x) = ry/x - ry^3/3x^3 + ry^5/x^5 - ..., \quad y < x,$$

(za $r = 1$, $x = y$ je to znamenita Leibniz-Gregoryjeva vrsta) ter vrsti za sinus in kosinus:

$$r \sin(x/r) = x - x \cdot x^2/(2^2 + 2)r^2 + x \cdot x^2/(2^2 + 2)r^2 \cdot x^2/(4^2 + 4)r^2 - ...$$

in

$$r(1 - \cos(x/r)) = r \cdot x^2/(2^2 - 2)r^2 - r \cdot x^2/(2^2 - 2)r^2 \cdot x^2/(4^2 - 2)r^2 + ...$$

Madhavi pripisujejo tudi naslednji aproksimativni formuli ([29]):

$$\sin(x + h/r) \approx \sin x + (h/r) \cos x - (h^2/2r^2) \sin x + (h^3/6r^3) \cos x,$$

$$\cos(x + h/r) \approx \cos x - (h/r) \sin x + (h^2/2r^2) \cos x.$$

Pomen indijske matematike

Nekoč je bil indijski prispevek k razvoju matematike bolj ali manj spregledan (razen decimalnega mestnega sistema), danes pa čedalje bolj ugotavljajo njegovo prvenstvo in pomen na različnih področjih, npr. trigonometrija (*Surya Siddhanta* in Aryabhata) in teorija vrst (šola v Kerali).

Posebna literatura:

- K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)

(B) Islamska matematika

Zgodovinski okvir

Vzpon in zaton arabskega imperija vključno z njegovo kulturo je ena najbolj spektakularnih epizod v zgodovini človeštva. V desetletju po Mohamedovem odhodu iz Meke v Medino leta 622 so se razkropljena arabska plemena pod vplivom enotne verske ideje združila v uspešen narod. V naslednjem stoletju so Arabci razširili svoj vpliv in uveljavili svoj zakon od Indije, preko Perzije, Mezopotamije in Severne Afrike vse do Španije.

Razdelitev na vzhodni (Bagdad) in zahodni (Cordoba) kalifat se je zgodila leta 755. Vzhod je približno do leta 1000 obdržal duhovno prvenstvo; ko so vzhodne dežele zasedli seldžuški Turki, pa se je center arabske kulture premaknil v Španijo. Križarske vojne med leti 1100 in 1300 niso ogrozile arabske vladavine.

Leta 1258 so Bagdad zasedli Mongoli, v 15. stoletju se je z uspešno rekonkvisto končala tudi mavrska vladavina v Španiji.

Predstavniki arabske matematike

Arabski znanstveniki so nadaljevali indijsko in grško (helenistično) tradicijo. Prevedli so mnoge matematične knjige in jih na ta način ohranili za prihodnost. V 8. in 9. stoletju so bagdadski kalifi podpirali astronomijo in matematiko. Kalif *al Mansur*, ki je vladal v letih 754-775, je npr. dal v arabščino prevesti indijske astronomske razprave, *Harun al Rašid* (vladar 786-809) in njegov sin *al Mamun* (vladar 813-833) sta to nadaljevala in dala prevesti tudi grško matematiko. Poleg tega je al Mamun v Bagdadu zgradil *Hišo modrosti* s knjižnico in observatorijem, kjer se je tudi sam ukvarjal z astronomijo.

Omenjene prevode so opravili krščanski učenjaki iz Sirije. **Mohamed ibn Ibrahim al Fazari** je (skupaj z **Jakubom ibn Tarikom**) konec 8. stoletja prevedel v arabščino Brahmaguptovo astronomsko delo *Brahmasphutasiddhanta*, ki je postalo znano kot *Sindhind*. **Al Hajjaj ibn Jusuf ibn Matar** pa je prevedel Ptolemajev *Almagest* in Evklidove *Elemente*, slednje celo dvakrat, prvič za Haruna al Rašida in drugič za al Mamuna.

Slika 8. Abu Jafar Mohamad ibn Musa al Hvarizmi

Mohamad ibn Musa al Hvarizmi (780-850), po rodu iz perzijske Horezmije, eden prvih uveljavljenih arabskih matematikov, je skupaj z al Fazarijem in al Hajjajem delal v bagdadski *Hiši modrosti* in sestavil natančne astronomske tablice Zij. Najbolj slaven pa je zaradi razprave o algebri *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* (*Veda o dopolnjevanju in izravnavanju*) in knjige o indijskem desetiškem številskem sitemu, ki je imela s prevodom v latinščino v 12. stol. velik vpliv na evropsko matematiko. Sploh je skušal združiti indijsko in grško znanost; imenovali so ga *arabski Evklid*. Njegovo delo sta v 9. in 10. stoletju nadaljevala **Abu Kamil** (850-930), ki je tudi napisal knjigo o algebri, in **al Karaji** (953-1029), ki je osvobodil algebro geometrije.

Slika 9. Stran iz Hvarizmijeve knjige *Hisab al-jabr wal-muqabala*

V 9. stoletju je deloval tudi **Tabit ibn Qurra** (tudi **Qorra**) (836-901), zdravnik, filozof, lingvist, astronom in matematik. Uredil je novo izdajo Evklidovih *Elementov* v prevodu **Ishaka ibn Hunajna**, prevajal Apolonija (tri njegove zadnje knjige so nam znane le preko Tabitovih prevodov) in Arhimeda (npr. razpravo *O krogli in valju* ali izgubljeno razpravo o konstrukciji pravilnega sedemkotnika). V astronomiji je sledil Ptolemaju in bil prvi reformator njegovega sistema. V mehaniki velja za začetnika statike. Malce kasneje je živel **al Batani** (latinsko **Albategnius** (858-929), eden največjih arabskih astronomov in mojster trigonometrije (napisal *Zij as Sabi*, *Sabejske tablice*, revidiral *Almagest*). Oba s Tabitom sta bila Sabejca, prvi iz Harana (sloh ni hotel sprejeti islamske vere), drugi iz Rake, delovala pa sta v Bagdadu, v krogu matematikov bratov **Banu Musa**.

Slika 10. Tabit ibn Qurra (levo) ter Abul Wafa (desno)

Največji islamski matematik in astronom v 10. stoletju je bil **Abul Wafa al Buzjani** (tudi **Wefa**) (940-998), rojen v perzijskem Horasanu, od 1960 živel v Bagdadu in postal ljubljenec kalifov in vezirjev. Je avtor astronomskega dela *Kitab az-Zij*, ukvarjal se je s sferno trigonometrijo. Kot matematik je znan po prevodih Diofanta, uvedbi tangensa v trigonometrijo in trigonometričnih tabelah sinusov in tangensov. Njegov mlajši rojak iz Horezmije, **al Biruni** (973-1048), latinsko **Alberonius**, se je odlikoval v fiziki, matematiki, astronomiji, zgodovini, geografiji ("oče geodezije") in lingvistiki. Znal je klasične jezike (grško, hebrejsko, sirijsko, arabsko, perzijsko). Med potjo v Indijo se je naučil tudi sanskrt in sploh bil eden največjih posrednikov indijske matematike v arabskem svetu.

V Egiptu je okrog leta 1000 živel največji arabski fizik **Hasan ibn al Haitham** (latinsko **Alhazen**) (965-1038), rojen v Basri, znan po delu *Kitab al-Manazir* (*Knjiga o optiki*). Prvi je pravilno razložil, zakaj vidimo. V naravoslovje je uvedel eksperimentalni pristop. Na matematičnem področju je pisal komentarje o grških matematikih (Evklidu, Ptolemaju), trudil se je z dokazovanjem Evklidovega postulata o vzporednicah, njegov problem o krožnem biljardu so kasneje reševali znani matematiki.

Slika 11. Hasan ibn al Haitham

Najglobljí in najbolj originalen prispevek k algebri pa je dal **Omar Hajam** (1038-1123), doma iz Nišapura v perzijskem Horasanu, matematik, astronom, reformator starega perzijskega koledarja (napaka enega dneva v 5000 letih), filozof in pesnik (znan po zbirki pesmi *Rubaijata*). Podal je kompletno klasifikacijo kubičnih enačb, katerih rešitev je znal poiskati s preseki stožnic (glej vajo 17).

Slika 12. Omar Hajam (slika Edwarda FitzGeralda)

Naslednji pomembni matematik je bil **Šaraf al Din al Tusi** (1150-1215), ki je tudi reševal kubične enačbe. Kasneje, že pod mongolsko vladavino, pa je bil glavni matematik **Nasir al Din** (tudi *Eddin*) **al Tusi** (1201-1274), iz mesta Tus v perzijskem Horasanu, kjer je umrl Harun al Rašid, kjer je živel in je tam pokopan pesnik Firduzi. Nasir je bil izmaelit, eden največjih perzijskih znanstvenikov srednjega veka, ki je ločil trigonometrijo od astronomije in cenil grško znanost (tudi on je hotel dokazati postulat o vzporednicah in je vplival na kasnejše Saccherijevo delo).

SLIKA 13. Nasir al Din al Tusi

Zadnji veliki islamski astronom in matematik je bil **Gijat al Din Jamšid Masud al Kaši** (1380-1429), tudi Perzijec iz Kašana, deloval pa je na observatoriju v Samarkandu pod pokroviteljstvom mongolskega sultana **Ulugbega**, ki je bil tudi sam matematik in astronom. S sodelavci je al Kaši sestavil tabele sinusov in tangensov (*Zij al Sultani*). Bil je dober numerik, prvi je npr. izračunal zelo natančno sinus ene stopinje, na 16 decimalnih mest natančno je izračunal tudi število π. Kosinusni izrek nekateri imenujejo tudi al Kašijev izrek. Njegovo najboljše delo je moderno in pregledno napisana razprava *Ključ aritmetike* (*Miftah al-hisab*), ki ga je učenec **al Kušči** prinesel po Ulugbegovi smrti v Istanbul.

Aritmetika in algebra

Prvotno so števila in aritmetične račune zapisovali z besedami, kasneje je prevladala indijska notacija (zanimivo, da sta Abul Wafa in al Karaji spet začela uporabljati besede pod vplivom grške tradicije). Od Indijcev so privzeli razna računska pravila, npr. *pravilo treh*, današnji sklepni račun (sorazmerja). Prva, al Hvarizmijeva, aritmetika je izkazovala malo originalnosti. Razložene so bile štiri računske operacije, rešena linearna in kvadratna enačba (aritmetično in geometrično). Prvi originalni prispevek je bilo ibn Qurrovo pravilo za iskanje prijateljskih števil (glej vajo 14) in al Karajijeva izpeljava vsote kvadratov in kubov prvih naravnih števil. Največji arabski prispevek pa je bil najbrž storjen na področju geometrijske algebre (npr. Omar Hajamova rešitev kubične enačbe ali Abul Wafova rešitev nekaterih kvartičnih enačb).

Geometrija in trigonometrija

Na tem področju so Arabci bolj kot po originalnih delih pomembni zaradi ohranjanja grške tradicije. Abul Wafa je konstruiral pravilne poliedre z uporabo šestila s fiksno odprtino (primerjaj vajo 18), Omar Hajam z geometrijo rešil kubično enačbo (vaja 17) in Nasir al Din dokazoval postulat o vzporednicah. Prav tako je podal dokaz Pitagorovega izreka, identičen tistemu za Paposovo posplošitev. Iz geometrije je znan tudi al Haithamov problem krožnega biljarda (vaja 19). Kot Indijci so se tudi Arabci prvenstveno imeli za astronome, zato so se tudi zanimali za trigonometrijo. Izdelovali so natančne trigonometrične tabele, izpeljevali enačbe sferne trigonometrije, npr. *kosinusni zakon* za sferični trikotnik (**al Batani** $\sim$ 920) $\cos a = \cos b \cos c + \sin cb \sin c \cos A$ in *Gebrov izrek* (**Jabir ibn Aflah** iz Seville $\sim$ 1130) $\cos B = \cos b \sin A$ za pravokotni sferični trikotnik.

Mnogi dnanšnji matematični izrazi izhajajo iz arabščine: npr. mnoga imena zvezd in ozvezdij (*Aldebaran*, *Vega*, *Rigel*, *Algol*, *Alcor*, *Mizar*), beseda *algebra* (*al jabr*), *algoritem* (iz latinizirane oblike imena al Hvarizmi), *sinus* (Arijabhata *jya*), Arabci *jiba*, kasneje *jaib*, naročje, **Gerardo iz Cremone** $\sim$ 1150 *sinus*). Arabski matematiki so napravili določen napredek v času, ko drugje matematika ni napredovala. Vsekakor pa je njihov ogromni pomen v ohranjanju svetovne matematične (in znanstvene) dediščine.

Vaje:

(1) Dve izmed nalog iz *Bakšalijskega rokopisa* se glasita:
 (a) Trgovec plača za neko blago na prvem mestu dajatev v višini 1/3 vrednosti blaga, na drugem mestu 1/4 od razlike in na tretjem še 1/5 od ostanka. Vseh plačanih dajatev skupaj je za 24 denarjev. Kolikšna je bila originalna vrednost blaga?
 (b) V skupini 20 ljudi so možje, žene in otroci. Mednje razdelimo 20 kovancev, vsak moški dobi 3 kovance, vsaka ženska 1,5 in vsak otrok 0,5 kovanca. Koliko je mož, koliko žena in koliko otrok v skupini?

(2) Za računanje kvadratnega korena iz 2 se že v *Sulvasutri* pojavi približek: $\sqrt{2} \approx 1 + 1/3 + 1/3 \cdot 4 - 1/3 \cdot 4 \cdot 34 = 577/408 \approx 1.414216$. Prepričaj se, da je lahko ta približek dobljen iz formule $\sqrt{a^2 + r} = a + r/2a - (r/2a)^2/(2a + r/a)$ pri $a = 4/3$ in $r = 2/9$. Aryabhata je kasneje natančno popisal proceduro, podobno današnji, za računanje kvadratnih in kubičnih korenov (glej [30]).

(3) Indijci so spretno računali s kvadratnimi koreni. Reši naslednje naloge:
 (a) Pokaži, da ne more veljati enakost $\sqrt{a} = r + s\sqrt{b}$, če so $a, b, r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ in $\sqrt{a}, \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
 (b) Pokaži, da iz $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ in $\sqrt{b}, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ sledi $a = c$ in $b = d$.
 (c) Zapiši $\sqrt{17 + \sqrt{240}}$ v obliki vsote dveh korenov.

(4) Linearno diofantsko enačbo z dvema neznankama $ax + by = c$ je treba rešiti v celih številih. Naj bosta a, b tuji si števili, tako da je enačba rešljiva za vsak c. Pokaži:
 (a) Če je par celih števil x_1, y_1 rešitev enačbe, je vsaka rešitev oblike $x = x_1 + mb$, $y = y_1 - ma$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$.
 (b) Poišči vse rešitve enačb $7x + 16y = 209$ in $23x + 37y = 3000$.

(5) Že pri **Brahmagupti** $\sim$ 630 najdemo v besedilo zavite algebraične naloge, npr.:
 (a) Dva asketa živita na vrhu strme pečine, visoke h metrov, podnožje pa je d metrov oddaljeno od sosednje vasi. Eden od asketov se spusti po pečini in odkoraka v vas. Drugi, čarovnik, se dvigne x metrov in potem poleti naravnost proti vasi. Oba prepotujeta enako pot. Kako visoko je moral poleteti drugi asket?
 (b) 18 metrov visoki bambusni trs se prelomi tako, da en njegov konec pade na zemljo 6 metrov od korenine. Kje se je prelomil? (Starejša verzija take naloge se nahaja v kitajski knjigi *Aritmetika v devetih poglavjih* iz leta 176 pnš.)

(6) Z uporabo Brahmaguptove formule (glej [37])

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - ay_2^2) = (x_1x_2 + ay_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2,$$

ki je posplošitev Diofantove identitete $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = (x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2$, pokaži, da je tudi par (x, y), kjer je $x = x_1x_2 + ay_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$, rešitev Pellove enačbe $x^2 = ay^2 + 1$, če sta rešitvi para (x_1, y_1) in (x_2, y_2).

(7) **Brahmaguptov štirikotnik** je v krog s polmerom r včrtan (tetivni) štirikotnik z zaporednimi stranicami a, b, c, d, diagonalama e, f in semiperimetrom $s = (a + b + c + d)/2$. Pokaži:
 (a) da je njegova ploščina enaka $p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (uporabi sinusni in kosinusni izrek za dva trikotnika, ki sestavljata štirikotnik),
 (b) da je Heronova formula poseben primer Brahmaguptove formule,
 (c) da je $p = \sqrt{abcd}$, če je štirikotnik hkrati tangentni.

(8) **Brahmaguptova posplošitev Ptolemajevega izreka** za tetivni štirikotnik s stranicami a, b, c, d in diagonalama e, f, o kateri poroča tudi Mahavira, je v tem, da je znal eksplicitno izraziti diagonali s stranicami. Z uporabo kosinusnega izreka izpelji naslednji **Brahmaguptovi formuli**:

$$e^2 = (ac + bd)(ab + cd)/(ad + bc), \; f^2 = (ac + bd)(ad + bc)/(ab + cd).$$

(9) Dokaži, da v poljubnem trikotniku s stranicami a, b, c, višino h na stranico c in polmerom r očrtanega kroga velja $ab = 2rh$. S pomočjo tega dokaži še naslednje trditve o Brahmaguptovem štirikotniku:
(a) Če je θ kot med katerokoli diagonalo in pravokotnico na drugo diagonalo, velja

$$ad + bc = 2re\cos\theta,\ ab + cd = 2rf\cos\theta.$$

(b) Z uporabo točke (a) in Ptolemajevega izreka ponovno izračunaj dolžini obeh štirikotnikovih diagonal.

(10) Naj se v Brahmaguptovem štirikotniku diagonali sekata pravokotno (npr. v točki M). Dokaži:
(a) da to velja natanko takrat, ko je $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$,
(b) da potem normala iz M na poljubno stranico razpolavlja nasprotno stranico,
(b) da za polmer r očrtanega kroga tedaj velja $4r^2 = (ab + cd)(ad + bc)/(ac + bd)$.

(11) **Bramaguptov trapez** je tetivni štirikotnik z zaporednimi stranicami aC, cB, bC in cA, pri čemer velja $a^2 + b^2 = c^2$ in $A^2 + B^2 = C^2$.
(a) Pokaži, da ima Brahmaguptov trapez z racionalnimi a, b, c, A, B, C tudi racionalno ploščino in racionalni diagonali, ter da se diagonali sekata pravokotno,
(b) Poišči stranice, diagonali, polmer očrtanega kroga in ploščino Brahmaguptovega trapeza, ki ga določata pitagorejski trojici (3,4,5) in (5,12,13).

(12) **Mahavira** je $\sim$ 850 objavil več podobnih nalog:
(a) Na dvor so pripeljali večjo količino sadežev manga. Kralj si vzame šestino od vsega sadja, kraljica petino od ostanka, vsak od treh kraljevičev četrtino, tretjino in polovico od zaporednih ostankov, najmanši otrok pa dobi tri sadeže. Koliko je bilo vsega sadja pripeljanega na dvor?
(b) Vrednost 9 citron in 7 granatnih jabolk znaša 107, vrednost 7 citron in 9 granatnih jabolk pa 101. Kolikšna je cena samo citron in samo granatnih jabolk?
(c) Četrtino črede kamel so opazili v gozdu, dvakratni kvadratni koren iz celotnega števila kamel se je umaknil na pobočje gore, trikrat po pet kamel pa je ostalo ob reki. Koliko je bilo vseh kamel skupaj?

(13) **Bhaskara** $\sim$ 1150 je rad zastavljal probleme v verzih. Reši naslednje naloge v prevodu Franceta Križaniča (glej [25]):

(a) Čebelice v roju hitijo k napoju, cvetovi vsi polni so meda,
h kadambi petina k silindhi tretjina čebelic na cvetje se useda.
Trikratna razlika obojih pa vtika srkala v cvetove kutaje,
le ena se sama od cveta pandama k jasminu preleta igraje,
s pijačo medeno naklonjenost njeno obadva bi rada dobila.
Ti - dražestna moja - povej, si že roja število čebel uganila?

(b) Osel in mula navkreber tovorita težki bremeni.
Peza osleta tišči, da stoka in milo vzdihuje.
Mula opazi le-to in reče skrbečemu drugu:
Starček, povej, kaj se jočeš in tožiš kot šibko dekletce?
Dvakrat več nosim kot ti, če eno odstopiš mi vrečo.
Če pa jaz eno ti dam, enaka sta tvoj in moj tovor.
Dej, odgovori mi, vedec, kaj nosil je osel, kaj mula!

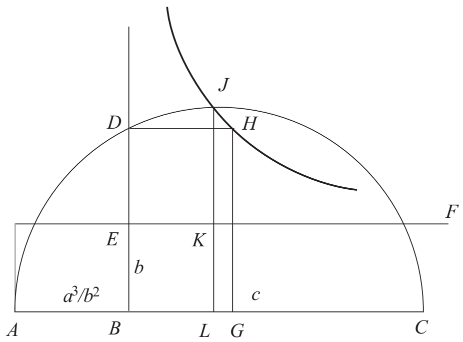
(c) Opic trop je skrit v votlini. Tri odvzemi vseh petini in kvadriraj, kar ostane.
To vseh skritih je število. Eni le se ni ljubilo med tovarišice zbrane
pa se urno vzpne med veje, prekopica se in smeje razposajenost igriva.
Jasnooka Lilavati! Daj, poskusi razvozlati, koliko se opic skriva?

(14) **Tabit ibn Qurra** (826-901) je iznašel naslednjo metodo za iskanje prijateljskih števil: če so $p = 3\cdot 2^n - 1$, $q = 3\cdot 2^{n-1} - 1$ in $r = 9\cdot 2^{2n-1} - 1$ tri liha praštevila, je $2^n pq$ in $2^n r$ par prijateljskih števil. Preveri to pravilo za $n = 1, 2, 3, 4$.

(15) **Al Karaji** je ~ 1020 napisal algebrajsko delo *Fahri*. Eden od problemov je bil poiskati par racionalnih števil z lastnostjo, da je vsota njunih kubov kvadrat racionalnega števila: $x^3 + y^3 = z^2$. Pokaži, da je rešitev $x = n^2/(1 + m^3)$, $y = mx$, $z = nx$, ki jo je našel al Karaji, prava in jo preveri za $m = 1, 2$, $n = 1, 2, 3$.

(16) Islamski matematiki so poznali pravilo, da je ostanek števila pri deljenju z 9 enak ostanku vsote njegovih števk pri deljenju z 9. Dokaži:
(a) ostanek (pri deljenju z 9) vsote dveh števil je enak ostanku vsote ostankov,
(b) ostanek (pri deljenju z 9) produkta dveh števil je enak ostanku produkta ostankov.
Seštej in zmnoži števili 478 in 993 ter preveri zgornji pravili.

(17) **Omar Hajam** je znal geometrijsko rešiti vsak tip kubične enačbe, ki je imela pozitivno rešitev, npr. enačbo oblike $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$, $a, b, c > 0$, ki jo je opisal z besedami: "kub, nekaj stranic in nekaj števil je enako nekaj kvadratov". Preveri in izpopolni naslednji postopek:
(a) Iz danih dolžin a, b konstruiraj z ravnilom in šestilom a^3 in a^3/b^2.
(b) Naj bodo A, B, C kolinearne točke z lastnostjo $AB = a^3/b^2$ in $BC = c$. Pravokotnica na AC v B naj seka polkrožnico s premerom AC v točki D. Na BD označimo $BE = b$ in skozi E potegnemo vzporednico EF k AC. Naj bo G taka točka na BC, da je $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ in eno oglišče pravokotnika $DBGH$. Skozi H načrtajmo pravokotno hiperbolo z asimptotama EF in ED. Hiperbola naj seka polkrožnico v točki J, vzporednica k DE skozi J pa premico EF v točki K in premico BC v točki L (glej sliko 14).



SLIKA 14. Hajamova rešitev kubične enačbe

Pokaži zapored naslednje relacije:
(i) $(EK)(KJ) = (BG)(ED) = (BE)(AB)$,
(ii) $(BL)(LJ) = (BE)(AL)$,
(iii) $(LJ)^2 = (AL)(LC)$,
(iv) $(BE)^2/(BL)^2 = (LJ)^2/(AL)^2 = LC/AL$,
(v) $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$,
(vi) $b^2(BL + a^3/b^2) = (BL)^2(c - BL)$,
(vii) $(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$.
Torej je BL (pozitivni) koren dane kubične enačbe.

(18) Islamski matematiki so se zanimali za konstrukcije na sferi. Za dano materialno (železno, leseno) kroglo z evklidskim orodjem in ustrezno ravninsko konstrukcijo
(a) poišči premer krogle,
(b) točke na sferi, ki so oglišča včrtane kocke.

(19) **Ibn Haitham** (**Alhazen**) je v svoji *Optiki* zastavil naslednjo nalogo:
Imamo krog in v njem dve točki A in B. Na krožnici poišči točko, v kateri se odbije žarek iz A tako, da poteka skozi B.
Naloga je težja in se prevede na iskanje presečišča med hiperbolo in krožnico (glej [8]).

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.