10. Začetki infinitezimalnega računa

Pod infinitezimalnim računom razumemo tako integralski račun, katerega korenine segajo v antiko, kot diferencialni račun, ki je iznajdba 17. stoletja.

Začetki modernega integralskega računa

Videli smo, da so bili prvi začetki integralskega računa narejeni že v antiki z Arhimedovim računanjem ploščine paraboličnega odseka in prostornine krogle.

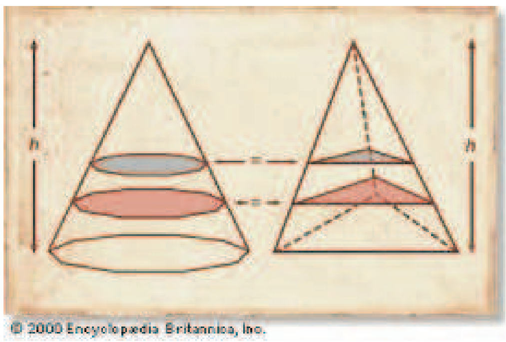
Zgodnja moderna avtorja, ki sta imela podoben pristop kot Arhimed, sta bila flamski inženir **Simon Stevin** (1548-1620) in italijanski matematik **Luca Valerio** (1552-1618), ki sta se hotela izogniti dvojni metodi redukcije ad absurdum in direktno uporabiti limito.

Za napredek integralskega računa je potem, kot vemo, najbolj zaslužen **Johannes Kepler** (1571-1630). Izračunal je prostornino 93 rotacijskim telesom, npr. torusu, vrtenini večjega in manjšega krožnega loka okrog tetive (jabolka in limone), sodom (razprava *Stereometria dolorium vinorum* 1615). Ni pa bil zelo potrpežljiv pri svojih računih: ploščina kroga je po njem kar vsota ploščin neskončno mnogo enakih enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču kroga, torej $p = obseg \cdot r/2 = \pi r^2$, podobno volumen krogle: $V = \text{površina} \cdot r/3 = 4\pi r^3/3$.

Nadaljnji pospešek teoriji in praksi računanja ploščin likov in prostornin teles je dal še en italijanski matematik.

Slika 1. Bonaventura Francesco Cavalieri

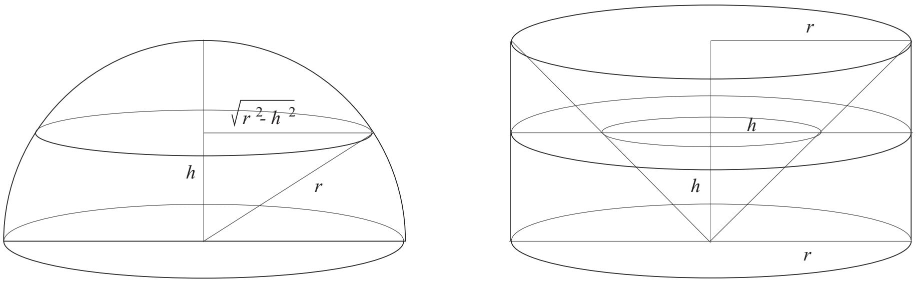
Bonaventura Cavalieri (1598-1647) je bil rojen v Milanu, študiral pri **Galileju** in postal profesor matematike na univerzi v Bologni 1629-1647. Bil je eden najvplivnejših matematikov svojega časa, tudi optik in astronom. V Italijo je pripeljal logaritme. Najbolj znan pa je po svojem načelu, prvič vpeljanem leta 1635 (*če imajo vzporedne plasti isto ploščino, imata telesi isto prostornino*, enako za ploščino likov).



Slika 2. Ilustracija Cavalierijevega principa

Isti princip so uporabljali **Roberval** (ki je trdil, da ga je sam odkril), **Torricelli**, **Fermat**, **Pascal**, **Saint-Vincent**, **Barrow** itd., Švicar **Guldin** pa ga je kritiziral.

Zgled: Polkrogla in valj enake višine in obsega z izrezanim stožcem, obakrat je ploščina plasti $\pi(r^2 - h^2)$, torej je prostornina polkrogle enaka prostornini valja minus prostornina stožca (slika 3).



Slika 3. Izračun prostornine krogle s Cavalierijevim načelom

Vodilno vlogo so v nadaljevanju prevzeli angleški matematiki (Wallis, Barrow, Newton), kasneje Leibniz in drugi.

John Wallis (1616-1703)

Bil je eden najbolj originalnih, vsestranskih in sposobnih matematikov svojega časa. Na pamet je bil zmožen računati z velikimi števili. Deloval je na mnogih področjih in mnogo pisal (poleg matematike tudi o glasbi, teologiji, logiki, angleški gramatiki in filozofiji). Med drugim mu npr. pripisujejo iznajdbo enega prvih sistemov za učenje gluhonemih. Od 1643 do 1689 je bil glavni kriptograf angleškega parlamenta. Leta 1649 je postal Savilian profesor geometrije na Oxfordu, kjer je ostal vse do smrti. Bil je eden od ustanoviteljev in prvih članov angleške Kraljeve družbe leta 1662.

Tudi v sami matematiki se je loteval zelo različnih problemov. Na stožnice je gledal kot na algebrajske krivulje drugega reda in pri določanju njihovih lastnosti med prvimi uporabljal analitično geometrijo. Ukvarjal se je tudi s trigonometrijo, z analizo neskončnih vrst, uvedel je pojem *verižnega ulomka*. V geometriji mu pripisujejo dokaz Pitagorovega izreka s podobnimi trikotniki. Poznal je dela islamskih matematikov. **Al Tusi** ga je inspiriral, da se je začel ukvarjati s problemom petega Evklidovega postulata in odkril eno izmed ekvivalentnih trditev (da ploščine trikotnikov niso navzgor omejene).

Slika 4. John Wallis

V analizi pa se je ukvarjal predvsem z integralskim računom in s svojimi dosežki pripravil pot **Isaacu Newtonu**. Leta 1656 je izdal knjigo *Artithmetica infinitorum*, ki je mnogo let ostala standard na tem področju, kljub nekaterim pomanjkljivostim. V njej je razložil in razvil Descartesovo in Cavalierijevo metodo in razdelal številne pomembne posebne primere. Bil je prvi, ki je razumel pomen ničle, negativnih in lomljenih eksponentov ter neskončnosti (uvedel je današnji simbol ∞).

Trudil se je izračunati ploščino kroga, kar bi bilo ekvivalentno izračunu današnjega integrala $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$. Pravo vrednost je dobil z interpolacijo splošnega zakona za $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, kjer je n naravno število ali nič. Od tod je z zapleteno metodo našel svojo slavno formulo, ki izrazi število $\pi/2$ z neskončnim produktom:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \ldots$$

Odkril je ekvivalent formule $s = \int_a^b (1 + (dy/dx)^2)^{1/2}\,dx$ za ločno dolžino in jo uporabil za rektifikacijo semikubične parabole $y^3 = ax^2$, ki jo je leta 1657 odkril njegov učenec **William Neil** (1637-1670). Lotil se je tudi reševanja nekaterih Pascalovih problemov v zvezi s cikloido (rektifikacijo cikloide je sicer prvi opravil **Chistopher Wren**).

Nekoliko se je ukvarjal tudi s fiziko: pisal je o statiki (računanje težišč) in dinamiki elastičnih trkov. Sredi petdesetih let 17. stoletja se je (skupaj z nekaterimi drugimi matematiki) zapletel v polemiko s filozofom **Thomasom Hobbsom** (1588-1679) glede matematičnih in logičnih osnov razumevanja sveta.

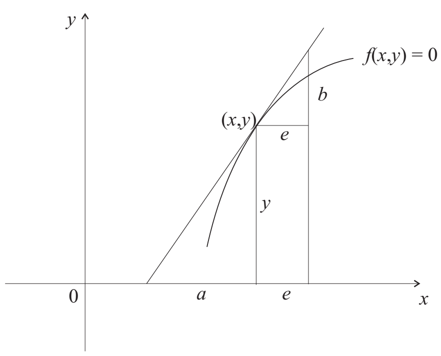
Wallis se je izkazal tudi kot zgodovinar matematike. Njegovo delo *De algebra tractatus; historicus et practicus* iz leta 1673 je bilo poleg tega v Angliji prvi resni poskus napisati zgodovino matematike. Uredil je dela nekaterih pomembnih grških matematikov.

Začetki diferencialnega računa

Drugi pol infinitezimalega računa predstavljajo problemi lokalnega vedenja krivulj in funkcij. Začelo se je s problemom načrtovanja tangent na krivulje in z iskanjem ekstremov, kar lahko v modernem smislu pripišemo Fermatu.

Fermatova metoda

V ekstremu je za majhen premik e vrednost $f(x-e) \approx f(x)$; izenačimo, da dobimo zvezo med e in x, nazadnje postavimo $e = 0$. Poglejmo, kako je to naredil **Fermat** pri vprašanju, kako razdeliti dano količino B na dva dela A in $B - A$ tako, da bo produkt delov največji (samoglasnike je po Viètovi maniri uporabil za neznanke, soglasnike za znanke): iz $(A-E)(B-A+E) = A(B-A)$, dobimo $2AE - BE - E^2 = 0$ oziroma $2A - B - E = 0$; postavimo $E = 0$, pa dobimo pogoj $2A = B$ (Fermat ni vedel, da je to samo potrebni pogoj, niti ni razlikoval med maksimumom in minimumom). Opazimo, da je logika ista kot pri modernem pristopu, ko zahtevamo, da je v limiti diferenčni kvocient enak nič.



Slika 5. Fermatova metoda iskanja tangente

Tangento na krivuljo v dani točki (x, y) je Fermat našel tako, da je poiskal subtangento a in primerjal trikotnik, ki ga določa, s podobnim trikotnikom ob dotikališču, dobljenim z majhnim premikom (slika 5): točka na tangenti blizu dotikališča je $(x+e, y+b) = (x+e, y+ye/a)$; predpostavimo, da je ta točka na krivulji $f(x, y) = 0$, izenačimo in po krajšanju postavimo $e = 0$, da dobimo zvezo med a, x, y v dotikališču (kar je ekvivalentno današnji metodi z odvodom $y' = y/a$, ki ga dobimo iz $\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0$).

Zgled: Descartesov list ima enačbo $x^3 + y^3 = 3bxy$. Najprej vstavimo vanjo $x + e$ namesto x in $y(1+e/a)$ namesto y, tako da dobimo $(x+e)^3+y^3(1+e/a)^3-3by(x+e)(1+e/a) = 0$; po krajšanju z e in postavitvi $e = 0$ najdemo $a = -(y^3 - bxy)/(x^2 - by)$.

Podobno metodo je uporabljal angleški matematik **Isaac Barrow**, ki je danes znan predvsem kot Newtonov predhodnik in učitelj.

Isaac Barrow (1630-1677)

Rojen v Londonu je kljub težavnemu začetku šolanja postal po študiju na Cambridgeu eden najbolj učenih in klasično izobraženih Angležev. Odlikoval se je v matematiki, fiziki, astronomiji in teologiji. Kot prvi je leta 1663 zasedel na novo ustanovljeno Lucasovo profesorsko mesto v Cambridgeu, vendar se je z njega leta 1669 umaknil v korist mladega Newtona, katerega sposobnost je spoznal kot njegov učitelj.

Slika 6. Portret Isaaca Barrowa

Najpomembnejše delo je *Lectiones opticae et geometricae.* V tej knjigi najdemo najboljši približek modernemu procesu odvajanja, npr. znameniti *diferencialni trikotnik*, katerega slika je v vseh učbenikih na začetku poglavja o odvajanju (podobno kot na sliki 5). Barrow je namesto deljenja z e in postavljanja $e = 0$ zanemaril člene z višjimi potencami za e in dobil razmerje b/e, ki je v bistvu odvod. To metodo je uporabil na številnih zgledih, npr. *Descartesovem listu* (ki ga je imenoval *la galande*) $x^3 + y^3 = rxy$, *krivulji kappa* $x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2$, *kvadratrisi* $y = (r - x)\operatorname{tg}\pi x/2r$ itd.

Zgled (*Laméjeva krivulja*) $x^3 + y^3 = r^3$: če so koordinate dotikališča (x, y) in koordinate premaknjene točke $(x+e, y+b)$, kjer je $b = ey/a$, se delajmo, da ležita obe točki na krivulji, zato dobimo $(x+e)^3+(y+b)^3 = r^3$ oziroma $x^3+3ex^2+3e^2x+e^3+y^3+3by^2+3b^2y+b^3 = r^3$; znemarimo člene z višjo potenco števila e, upoštevajmo $x^3+y^3 = r^3$ in dobimo $3ex^2+3by^2 = 0$, se pravi $b/e = -x^2/y^2$.

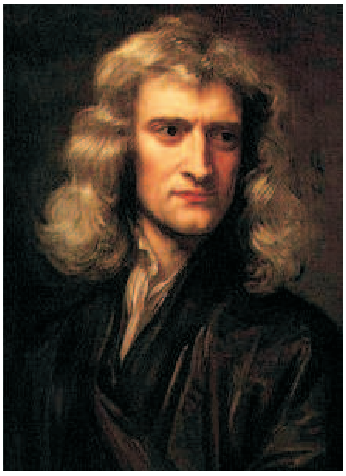
Barrowu pripisujejo, da je prvi spoznal, da sta integriranje in odvajanje inverzni operaciji. O tem je izdal knjigo svojih predavanj s skoraj samimi geometrijskimi slikami, ki pa je (razen **Newtona**, ki je ta predavanja poslušal) niso razumeli. V bistvu je odkril *Newton-Leibnizovo formulo.* Izpeljal je tudi njene posledice, npr. zamenjavo spremenljivk v integral ter postopek za reševanje diferencialnih enačb z ločljivimi spremenljivkami. Leta 1675 je izdal prve štiri knjige Apolonijevih *Stožnic* in dela Arhimeda in Teodozija. Barrow je poznan tudi po formuli za določanje goriščne razdalje pri lečah.

V tem času so v zvezi z infinitezimalnim računom že obvladali integracijo različnih primerov, konstrukcijo tangent na razne krivulje, počasi so se seznanjali s pojmom limite, prepoznavali osnovne izreke. Simbolizma pa še ni bilo (to sta prispevala **Newton** in **Leibniz**), tudi ne rigorozne izpeljave (to je zasluga šele matematikov 19. stoletja, predvsem **Augustina-Louisa Cauchyja**).

Za prava očeta infinitezimalnega računa štejemo angleškega matematika in fizika **Isaaca Newtona** in nemškega matematika in filozofa **Gottfrieda Wilhelma Leibniza**.

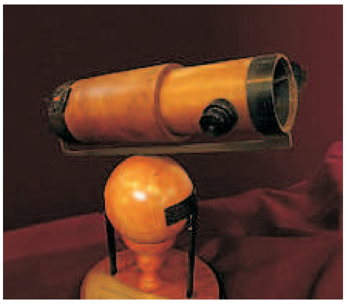
Isaac Newton (1642-1727)

Rojen je bil leta 1642 po starem (julijanskem) koledarju v Woolsthorpu blizu Cambridgea, istega leta, kot je umrl Galileo Galilei. Oče mu je umrl že pred rojstvom, mati se je vdrugo poročila in je pustila malega Isaaca stari mami. Ker je v šoli izkazal veliko nadarjenost, so mu omogočili nadaljnje šolanje, tako da ni postal kmet kot njegov oče. Že v mladosti je izvedel veliko eksperimentov in konstruiral različne naprave (npr. leseno uro, ki jo je poganjala voda). Od leta 1661 je študiral na Trinity Collegeu v Cambridgeu in se ob tem začel zanimati za matematiko (pod vplivom Isaaca Barrowa).



Slika 7. Knellerjev portret Isaaca Newtona iz leta 1689

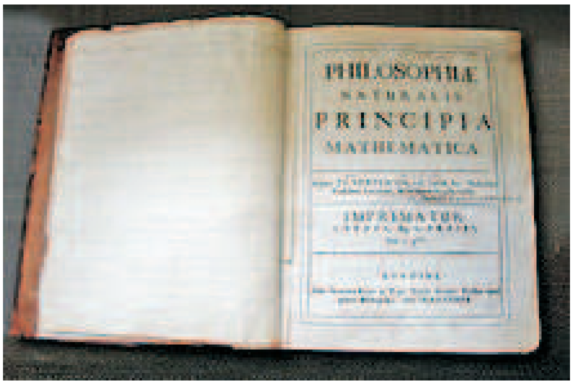
Prebral je Evklidove *Elemente* (prelahko), Descartesovo *La géometrie* (težko), dela Oughtreda, Keplerja in Vièta ter Wallisovo *Arithmetico infinitorum*. Začel je matematiko tudi odkrivati na novo. Leta 1665 je poznal splošni binomski obrazec in metodo fluksov, temelj njegovega diferencialnega računa. Zaradi kuge je bila univerza več kot leto zaprta, zato je živel doma in razmišljal, kako poiskati tangento na krivuljo in njen krivinski polmer. Zanimal se je za fizikalna vprašanja, gravitacijo in optiko. Leta 1667 se je vrnil na univerzo in se ukvarjal z optiko. Naslednje leto je končal magisterij in postal stalni član Trinity Collegea. Leta 1669 mu je Barrow prepustil mesto Lucasovega profesorja. Imel je malo študentov in malo obveznosti (pol ure na dan). Predaval je optiko, leta 1671 izumil zrcalni teleskop, ki je do danes ostal standard v astronomiji, kar je bil njegov prvi večji javni uspeh.



Slika 8. Replika Newtonovega zrcalnega teleskopa iz leta 1671

Svoja dognanja je predložil Kraljevi družbi, vendar so njegovo teorijo barv in druga spoznanja (Hooke in drugi) tako močno kritizirali, da po tem ni hotel več objavljati. To je imelo za zgodovino matematike in posebej infinitezimalnega računa precej hude posledice. **Leibniz** je namreč podobne rezultate objavil prej (leta 1684 v razpravi *Nova Methodus pro maximis et minimis*) in sprožil nesrečni spor glede prvenstva. Prišlo tako daleč, da so se angleški matematiki, ki so podpirali svojega voditelja, za skoraj sto let popolnoma izolirali od razvoja matematike na celini. Zaradi velikega Newtonovega vpliva je v optiki za lep čas prevladala njegova korpuskularna teorija svetlobe nad valovno.

Newtonova univerzitetna predavanja v letih od 1673 do 1683 so bila posvečena *algebri in teoriji enačb*. Leta 1679 pa je tudi preveril svojo gravitacijsko teorijo z novimi merjenji Zemljinega polmera in gibanja Lune. Spoznal je skladnost tega zakona s **Keplerjevimi** ugotovitvami o gibanju planetov, vendar ga je šele Halleyev obisk leta 1684 vzpodbudil, da je to napisal v obliki razprave, ki jo je poslal Kraljevi družbi in je postala temelj njegove *Principie*. Ob istem času je tudi matematično rešil problem gibanja točkaste mase v gravitacijskem polju. Prvo knjigo *Principie* je končal poleti 1685, leto kasneje je končal drugo in začel tretjo. Toda Hookove obtožbe na račun Newtonovega prilaščanja njegovih idej so delo zavrle in skoraj ustavile. Kompletna razprava *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ki jo je financiral astronom **Edmund Halley** (1656-1742), je izšla sredi leta 1687 in nemudoma naredila močan vtis na vso evropsko znanost.



Slika 9. Originalna Newtonova kopija *Principie* (z latnoročno pripisanimi popravki za drugo izdajo)

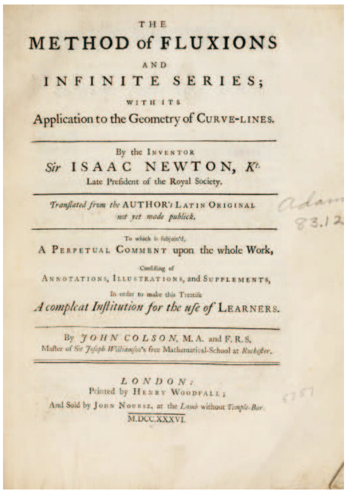
Leta 1689 je Newton kot član parlamenta zastopal univerzo, leta 1693 je resno zbolel in utrpel kratek živčni zlom, kasneje pa se je bolj posvetil kemiji, alkemiji in teologiji, s katerimi se je ukvarjal že prej. Še vedno pa je znal rešiti marsikateri težak matematični problem, s katerim so ga nadlegovali. Leta 1699 je postal Mojster kovnice, 1703 predsednik Kraljeve družbe, visoko funkcijo je obdržal do smrti. Leta 1705 ga je kraljica Ana povišala v viteza (ta naziv je med znanstveniki dobil drugi, za *Francisom Baconom*) in z naslovom 'Sir Isaac' živel do 84-tega leta starosti. Ko je leta 1727 umrl, so ga pokopali z vsemi častmi v Westminstrski opatiji. Zraven njega leži danes tudi Charles Darwin, oba sta s svojim delom in svojimi zakoni racionalno razložila svet, prvi neživo in drugi živo naravo.

Newtonova dela

Vsa njegova glavna matematična dela, razen *Principie*, so bila objavljena veliko let potem, ko so nastala: *Kubične krivulje* ter *Kvadratura in rektifikacija krivulj z uporabo neskončnih vrst* leta 1704 kot dodatek k njegovi pomembni razpravi *Opticks*, *Arithmetica universalis* leta 1707, *Analysis per Series, Fluxiones etc.* in *Methodus differentialis* leta 1711, *Lectiones opticae* leta 1729.

Nekaj svojih matematičnih metod je Newton razkril že leta 1676 v pismu H. Oldenburgu, tajniku Kraljeve družbe, npr. vpeljavo splošnega binomskega izreka za lomljene eksponente, katerega pravilnost je dokazal sto petdeset let kasneje norveški matematik **Niels Henrik Abel** (1802-1829). Svojo idejo o fluksih je Newton sporočil Barrowu leta 1669, dokončno jo je opisal v latinščini v knjigi *Method of Fluxions and Infinite Series* leta 1671.

Knjiga je sicer izšla šele po njegovi smrti, leta 1736, v angleškem prevodu J. Colsona. Krivuljo vidi kot sled zveznega gibanja točke, spremenljivo količino y imenuje *fluento*, hitrost spreminanja $\dot{y}$ *fluksijo*, njen diferencial $\dot{y}o$ ($o = dt$) pa *moment fluente*. Če v enačbo krivulje pišemo $x + \dot{x}o$ namesto x in $y + \dot{y}o$ namesto y ter zanemarimo vse višje člene v o, dobimo zvezo med fluentami in fluksijami (kar je ekvivalentno našemu odvajanju oziroma diferenciranju). Obratni problem je iz take zveze spet poiskati zvezo med fluentami (kar ustreza reševanju diferencialne enačbe).


THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, K^t.
Late Prefident of the Royal Society.

Tranflated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is fubjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Confifting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatife
A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M.A. and F.R.S.
Mafter of Sir *Jofeph Williamfon*'s free Mathematical-School at *Rochefter*.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.
M.DCC.XXXVI.

SLIKA 10. Naslovnica Newtonove knjige *Method of Fluxions and Infinite Series*, ki je izšla leta 1736

Newton je metodo fluksij uporabil za reševanje različnih problemov (iskanje tangent, ekstremov, prevojev, ukrivljenosti itd.), spreten pa je bil tudi pri reševanju diferencialnih enačb, npr. določanju ortogonalnih trajektorij dane družine krivulj (problem, ki mu ga je bil zastavil **Leibniz**). V resnici je on izpeljal Taylorjeve vrste za elementarne funkcije in jih uporabil za računanje odvoda. V omenjenem delu je opisana tudi metoda iskanja približne numerične vrednosti korenov algebrajske ali transcendentne enačbe (današnja Newtonova metoda).

V delu *Arithmetica universalis* se skriva teorija enačb (kompleksne rešitve nastopajo v parih, ocene za mejo korenov polinoma, Newtonove formule za vsoto n-tih potenc korenov, izraženo s koeficienti itd.). *Kubične krivulje* so dodatek k *Optiki* in prinašajo klasifikacijo kubičnih krivulj (72 od 78 tipov), v glavnem brez dokaza, pa trditev, da vse kubike dobimo s centralno projekcijo enačbe oblike $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (dokaz šele 1731). Kompleten sistem dinamike in matematično formulacijo vseh zemeljskih in nebesnih gibanj predstavlja seveda *Principia*, najbolj občudovano in najbolj vplivno delo v zgodovini znanosti. Izreki, ki jih je najbrž Newton odkril z uporabo svoje teorije fluksov, je rigorozno dokazal z uporabo grške geometrijske metode in z nekaj uporabe preprostega limitnega procesa. Tudi v *Principii*, ki je v prvi vrsti referenčno delo vse sodobne fizike (do teorije relativnosti), najdemo mnoge zanimive matematične izreke (o tangentah na stožnice itd.).

Newtonov pomen

Newton se uvršča med vodilne matematike vseh časov. Celo **Leibniz**, njegov veliki tekmec, je nekoč izjavil: "Kar je naredil Newton, je več od polovice tega, kar so naredili vsi matematiki pred njim." Newton je ostal glede svojega prispevka skromen: "Ne vem, kakšen se morda zdim svetu; sam sebi se zdim kot deček, ki se igra na obali in se veseli najdbe bolj okroglega kamenčka ali lepše školjke, medtem ko ocean resnice leži neodkrit pred menoj." In še: "Če sem kdaj videl dlje od drugih, je to zato, ker sem stal na ramenih velikanov." Bil je neverjetno delaven, sposoben v veliki koncentraciji zdržati in pisati 18 ali 19 ur na dan. Zato pa je bil v drugih rečeh pogosto raztresen, tako da o njem kroži veliko legend.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Veliki univerzalni um 17. stoletja in Newtonov tekmec je bil rojen v Leipzigu leta 1646. Kot otrok se je naučil brati grško in latinsko, do dvajsetega leta je obvladal skoraj vse, kar so vsebovali standardni učbeniki matematike, filozofije, teologije in prava. Že tedaj se je ukvarjal z univerzalnimi zakoni logike. Ker so mu v Leipzigu zaradi mladosti zavrnili podelitev doktorata v pravu, se je preselil v Nürnberg in napisal briljantno delo o poučevanju prava, zato so ga izbrali za kodifikacijo statuta. Tako je potem vse svoje življenje od leta 1676 dalje ostal v diplomatski službi najprej volilnega kneza v Mainzu in nato brunsviškega vojvode v Hannovru. Že leta 1672 so ga poslali v Pariz, kjer je za Ludvika XIV. pripravil projekt o zasedbi Egipta (uresničil ga je šele Napoleon).

Slika 11. Gottfried Wilhelm Leibniz

Leta 1672 se je v Parizu srečal s **Huygensom**, ki ga je seznanil z najpomebnejšimi matematičnimi dosežki. Za matematiko se je sicer zanimal že prej, ker se je pač zanimal za vse splošne ideje. Naslednje leto je v Londonu obiskal Oldenburga. V Angliji je zasnoval svoj znameniti računski stroj in ga prikazal Kraljevi družbi (iznajdljivi Hooke ga je takoj nekoliko izboljšal). Predno se je vrnil v Hannover za knjižničarja brunsviškega vojvode, je odkril osnovni izrek integralskega računa, poenostavil notacijo (oznaka $\int$ za integral iz prve črke latinske besede *summa*, oznaki dx, dy za diferencial, kjer je $dy : dx = y$: subtangenta) in izdelal skoraj vse elementarne formule za odvajanje (zdaj se po njem imenuje samo ena, formula za višji odvod produkta). Njegova notacija je bila bolj posrečena od Newtonove in se je v Evropi hitro prijela (razen v Angliji). Sploh je imel Leibniz dober občutek za matematiko in večjo širino kot Newton, čeprav ni bil toliko prodoren.

Prva knjiga o infinitezimalnem računu se je pojavila že leta 1696; napisal jo je **Markiz de l'Hospital** (1661-1704) po predavanjih svojega učitelja **Johanna Bernoullija**. Po letu 1700 so postali integrali in diferenciali standarni del vseh učbenikov analize, skoraj v taki obliki, kot jo v prvem letniku spoznavajo današnji študentje.

ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI
publicata,
ac
POTENTISSIMO SERENISSIMO-QUE PRINCIPI AC DOMINO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R.IMPERII ARCHIMARESCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
LIPSIÆ,

Slika 12. *Acta Eruditorum*

Leibniz je bil tudi nadarjen lingvist (poznal npr. sanskrt) in cenjen filozof (razvil je sistem matematične logike). Lotil se je različnih globalnih projektov, npr. združitve vseh cerkva ali vsaj prostestantske in katoliške cerkve.

Z **Ottom Menckejem** je ustanovil leta 1682 časopis *Acta eruditorum*, ki ga je urejal in v njem v desetih letih objavil večino svojih matematičnih člankov. Leta 1700 je ustanovil Berlinsko akademijo in načrtoval podobne akademije v Dresdenu, v Sankt Peterburgu in na Dunaju, skušal za carja Petra Velikega prenoviti ruski pravni sistem (prva perestrojka), a mu ni uspelo. Iskal je ti. *karakteristike*, univerzalne prvine vseh znanosti in univerzalno metodo za rešitev vseh problemov. V zadnjih sedmih letih se je zapletel v prepir z Newtonom glede neodvisnega odkritja infinitezimalnega računa. Leta 1714 je njegov delodajalec, brunsviški vojvoda, postal *Jurij I.*, (prvi nemški) kralj Anglije. Leibniz je ostal v Hannovru in umrl bolj ali manj osamljen.

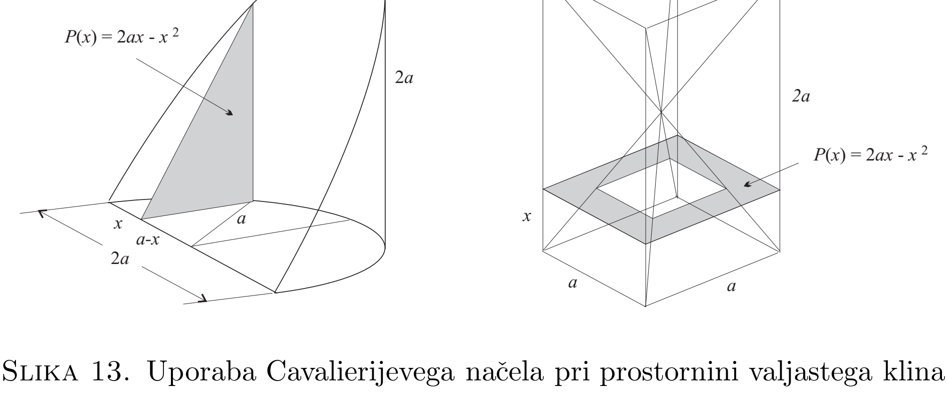
Spor med Newtonom in Leibnizom

Spor glede vprašanja, kdo je bolj zaslužen za nastanek infinitezimalnega računa, ni obremenil le zadnja leta njunega ustvarjalnega življenja, ampak je trajala debata o tem še stoletje in več. Danes prevladuje med matematiki in zgodovinarji matematike mnenje, ki enake zasluge pripisuje obema. Oba sta delala bolj ali manj neodvisno; Newton je res prvi prišel do odločilnih rezultatov, vendar jih je Leibniz leta 1684 prvi objavil. Sta pa oba velika moža uporabljala pri utemeljitvi diferencialnega računa za današnje in tudi za tedanje pojme precej skrivnostne in nerazumljive argumente. Newton se je skliceval na 'zadnji ulomek', *ultimo ratio*, tj. na diferenčni kvocient tik predno prirastek $o = dt$ izgine. Leibniz pa je raje govoril o neskončno majhnih količinah, ki še niso nič, ne more pa se jih še bolj zmanjšati.

Tak pristop je upravičeno ostro (in z dobro mero ironije) kritiziral že filozof in škof **George Berkeley** (1685-1753) v delu *The Analyst, or a Discourse Addresed to an Infidel Mathematician*: "In kaj so ti fluksi? Hitrosti izginjajočih prirastkov? In kaj so ti izginjajoči prirastki? Niso niti končne količine niti neskončno majhne količine niti niso še nič. Ali jih ne bi raje imenovali duhovi odhajajočih količin?". Videli bomo, da so matematiki šele v 19. stoletju razrešili ta vprašanja in diferencialni račun postavili na trdne temelje.

Vaje:

(1) Z modernimi metodami integralskega računa izračunaj
  (a) površino krogelne kapice s polmerom r in višino h ter njeno težišče,
  (b) prostornino *valjastega klina*, tj. telesa, ki ga od pokončnega valja s polmerom r in višino h odreže poševna ravnina skozi premer osnovne ploskve in robno točko zgornje osnovne ploskve,
  (c) prostornino preseka dveh pravokotnih krožnih valjev z enakim polmerom.



Slika 13. Uporaba Cavalierijevega načela pri prostornini valjastega klina

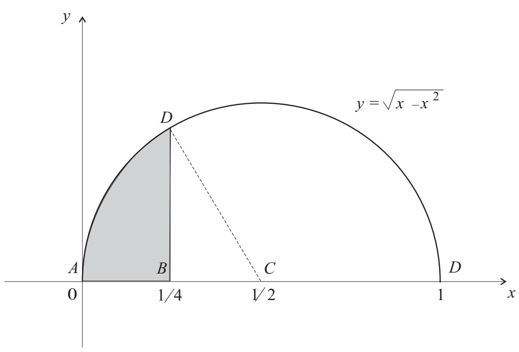
(2) S *Cavalierijevim načelom* izračunaj prostornino:
  (a) *valjastega klina* nad premerom kroga $2a$ in višino $2a$ (za primerjavo izberi kvader dimenzije $a \times a \times 2a$ z izrezanima kvadaratnima piramidama z osnovnima ploskvama $a \times a$ in skupnim vrhom v središču kvadra), glej sliko 13,
  (b) *kroglinega prstana* (tj. krogle z valjasto odprtino okrog osi) z višino $2h$ (za primerjavo izberi kroglo s polmerom h).

(3) Poišči naklon tangente v točki $(3, 4)$ na krožnici $x^2 + y^2 = 25$ po
  (a) Fermatovi metodi,
  (b) Barrowovi metodi,
  (c) Newtonovi metodi,
  (d) moderni metodi.

(4) Dokaži naslednja **Newtonova** rezultata:
  (a) Kompleksni koreni polinoma z realnimi koeficienti nastopajo v konjugiranih parih.
  (b) Vsako število a, za katerega so za polinom n-te stopnje f pozitivna vsa števila $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), ..., f^{(n)}(a)$, je zgornja meja za korene enačbe $f(x) = 0$.

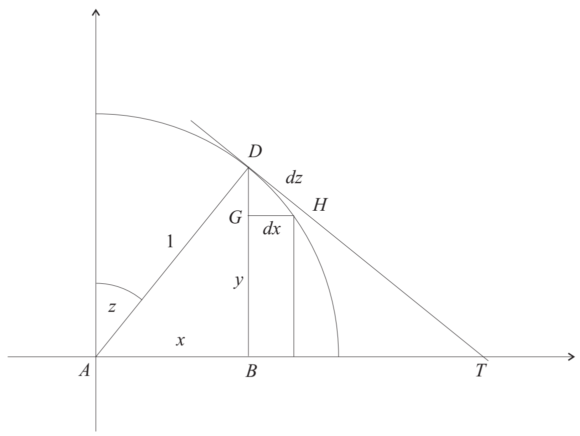
(5) Leta 1665 je **Newton** odkril način za razvoj binomskega izraza $(P+PQ)^{m/n}$ s poljubnim (pozitivnim, negativnim) racionalnim eksponentom v potenčno vrsto: $(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + (m/n)AQ + ((m-n)/2n)BQ + ((m-2n)/3n)CQ + ((m-3n)/4n)DQ + ...$, kjer predstavlja $A, B, C, ...$ prejšnji člen (glej [10] ali [11]).
  (a) Izrazi $A, B, C, ...$ z P in Q in se prepričaj, da dobimo na ta način v potenčni vrsti običajne binomske koeficiente.
  (b) Uporabi Newtonovo metodo na primeru razvoja v potenčno vrsto binoma (i) $\sqrt{c^2 + x^2}$, (ii) $1/\sqrt{1-x^2}$.

(6) Oborožen z binomskim izrekom je **Newton** znal poljubno natančno aproksimirati število π, tako da je na dva načina izračunal ploščino pod krožnico $x^2 + y^2 = x$ na intervalu od 0 do 1/4 (slika 14). Ponovimo njegov postopek [10]:
  (a) Razvij v binomsko vrsto $y = \sqrt{x - x^2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2}(1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 - 5x^4/128 - 7x^5/256 - ...) = x^{1/2} - x^{3/2}/2 - x^{5/2}/8 - x^{7/2}/16 - 5x^{9/2}/128 - ...$
  (b) Z integracijo prvih devet členov in vstavljanjem $x = 1/4$ pokaži, da je ploščina enaka 0.7677310678.
  (c) Pokaži, da je po drugi strani ploščina enaka $\pi/24 - \sqrt{3}/32$ (ploščina krožnega izseka minus ploščina trikotnika) in s primerjavo izpelji, da je $\pi \approx 3.141592668$ (natančno na 7 decimalk).



SLIKA 14. Newtonova aproksimacija števila π

(7) **Newton** je potenčno vrsto oblike $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + ...$, za $A \neq 0$ znal obrniti, tj. izraziti x s spremenljivko z. To je storil tako, da je zanemaril višje potence za x in rešil preostalo enačbo $x = z/A$, nato je iskal rešitev v obliki $x = z/A + p$, vstavil v vrsto, razvil po p, zanemaril višje potence p in rešil glede p v obliki ulomka dveh potenčnih vrst, v katerih je zanemaril višje potence z in izrazil p s kvadratom z^2, itd. [11]. Uporabi to metodo na primeru $z = x - x^2 + x^3 - x^4 + ...$



Slika 15. Newtonova izpeljava sinusne vrste

(8) Iz podobnosti trikotnikov DGH (infinitezimalno majhnega), DBT in ABD na sliki 15 dobimo razmerje $GH/DH = BD/AD$ oziroma $dx/dz = y/1$ in zato $dz = dx/y$. Ker je $y = \sqrt{1-x^2}$, dobimo z uporabo razvoja iz točke (5b)(ii) $dz = (1 + x^2/2 + 3x^4/8 + 5x^6/16 + ...)dx$. **Newton** je odtod z integracijo izrazil z s potenčno vrsto v spremenljivki x. To je vrsta za $\arcsin x$; poišči jo [11]. Nato je z metodo obračanja vrst iz vaje 7 določil še znano vrsto za $x = \sin z$ [11]. Preveri vse njegove korake.

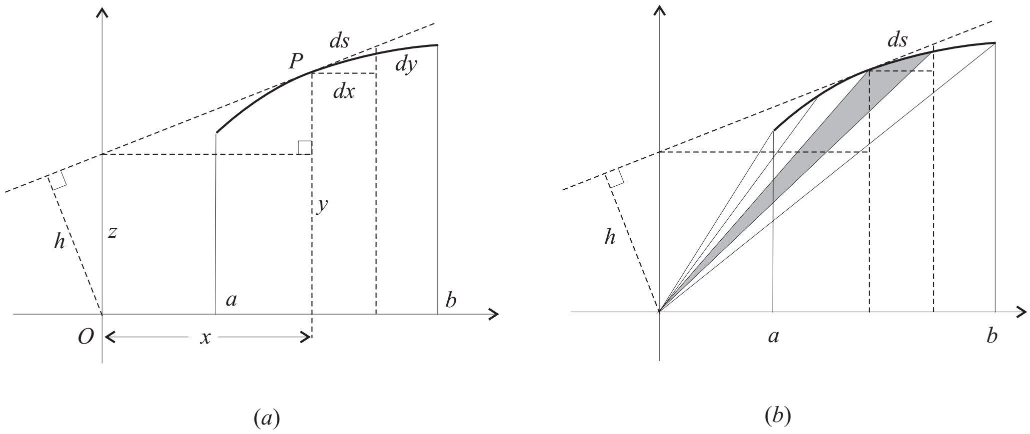
Opomba. Na Zahodu je bil to prvi zapis vrste za sinus, vendar so odkrili, da je že leta 1545 opisal to vrsto indijski matematik **Nilakantha** (1445-1545) (v verzih v pesnitvi *Tantrasangraha*) in jo celo pripisal še starejšemu matematiku **Madhavi** ($\sim$ 1350-1425), začetniku matematične šole v Kerali.

(9) *Newtonova tangentna metoda* za približno iskanje ničel algebraičnih in transcendentnih enačb se glasi: *Naj ima enačba* $f(x) = 0$ *samo en koren na intervalu* $[a, b]$ *in naj prvi in drugi odvod* f' *in* f'' *ne spremenita predznaka na* $[a, b]$. *Če za* x_0 *izberemo tisto krajišče, a ali b, v katerem imata* $f(x_0)$ *in* $f''(x_0)$ *isti predznak, je število* $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ *bliže korenu enačbe kot začetni približek* x_0.
(a) Dokaži ta rezultat s sodobnimi metodami.
(b) Poišči z Newtonovo metodo tisti koren kubične enačbe $x^3 - 2x - 5 = 0$, ki leži med 2 in 3.
(c) Poišči z Newtonovo metodo tisti koren transcendentne enačbe $x = \operatorname{tg} x$, ki leži med 4.4 in 4.5.
(d) Poišči z Newtonovo metodo $\sqrt{3}$ na tri decimalke natančno.

(10) **Leibniz** je iznašel osnovna pravila za računanje z množicami (v zvezi s presekom, unijo, komplementom). Z uporabo *Vennovih diagramov* se prepričaj o veljavnosti naslednjih formul:
(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
(iv) $(A' \cup B)' = A \cap B'$.

(11) **Huygens** je Leibnizu v Parizu zastavil problem določiti vsoto recipročnih vrednosti trikotnih števil $k(k+1)/2$, $k = 1, 2, ...$, torej vsoto $S = 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + ...$ **Leibniz** je S najprej delil z 2 in vsoto dobljene vrste izračunal z razčlembo členov na parcialne ulomke. Ponovi njegov postopek in izračunaj S.

(12) Da bi izračunal ploščino pod krivuljo med abscisama a in b, je **Leibniz** v dani točki $P = P(x, y)$ načrtal tangento in iz podobnih trikotnikov (eden je infinitezimalni) na sliki 16a našel $dy/dx = (y - z)/x$ oziroma $z = y - xdy/dx$, poleg tega pa še $ds/dx = z/h$ oziroma $hds = zdx$ (glej [11]).



Slika 16. Izpeljava Leibnizove formule za ploščino pod krivuljo

Potem je seštel ploščine infinitezimalnih trikotnikov z vrhom v izhodišču na sliki 16b in tako geometrijsko odkril svoj t.i. *transmutacijski* izrek, ki mu je dal ploščino pod krivuljo: $\int y dx = \frac{1}{2}\int z dx + \frac{1}{2}by(b) - \frac{1}{2}ay(a)$ [11].

(a) Vstavi iz prejšnje formule izraz $z = y - xdy/dx$, da dobiš integralsko enakost $\int y dx = \frac{1}{2}\int y dx - x dy + \frac{1}{2}(by(b) - ay(a))$ oziroma (če vstavimo tudi meje, kot smo vajeni) $\int_a^b y dx = by(b) - ay(a) - \int_{y(a)}^{y(b)} x dy$.

(b) Izpelji enakost iz točke (a) tudi geometrijsko in se prepričaj, da je to poseben primer formule za integracijo po delih (per partes).

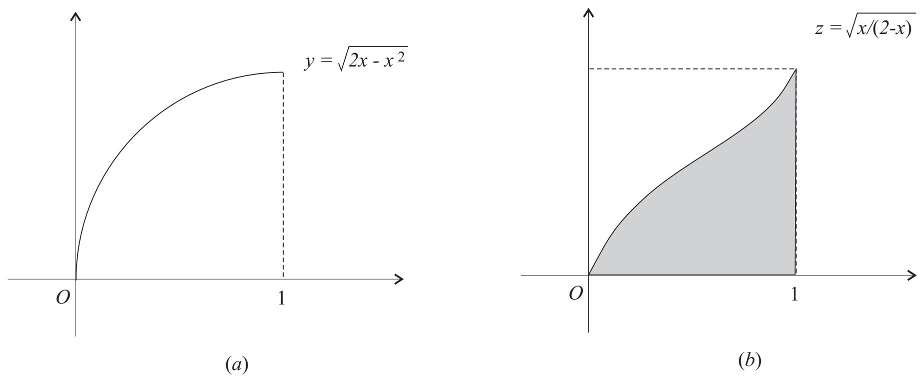
(13) **Leibniz** je transmutacijski izrek uporabil na četrtini krožnice $(x-1)^2+y^2 = 1$ oziroma $x^2 + y^2 = 2x$ v mejah od 0 do 1 (slika 17a) in s tem izpeljal svojo znamenito vrsto $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$ (glej [11]).

(a) Z diferenciranjem krožnice s pomočjo ustrezne formule iz točke (12) ugotovi, da je $z = x/y$ in zato $z^2 = x/(2-x)$ oziroma $x = 2z^2/(1+z^2)$.

(b) Izrazi ploščino pod krivuljo $z = z(x)$ kot $\int_0^1 z dx = 1 - \int_0^1 x dz$ (slika 17b) in z uporabo transmutacijskega izreka iz vaje 12a zapiši $\pi/4 = 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}$.

(c) Z razvojem integranda v geometrijsko vrsto in integriranjem po členih izpelji Leibnizovo vrsto.

(d) Z deljenjem z 2 in združitvijo po dveh in dveh členov izpelji iz Leibnizove vrste, da je $\pi/8 = 1/(2^2-1) + 1/(6^2-1) + 1/(10^2-1) + ...$



Slika 17. Izpeljava Leibnizove vrste za $\pi/4$

Opomba. Čeprav je nekaj let prej **James Gregory** našel bolj splošno vrsto za $\operatorname{arctg} x$ (česar **Leibniz** leta 1674 ni vedel), je bil nad Leibnizovim rezultatom **Huygens** tako navdušen, da je izjavil, ”da se bodo matematiki tega odkritja vedno spominjali”.

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.