

11. Matematiki v osemnajstem stoletju

Splošni matematični okvir

Doslej smo spremljali razvoj matematike s poudarkom na elementarni matematiki. Z nastankom infinitezimalnega računa se je odkrivanje in razvijanje elementarnih metod v glavnem izčrpalo (nekatero kasnejše prilagoditve in dopolnitve smo že omenili). Odslej se je razvijala matematika na višjem nivoju, postajala je čedalje bolj abstraktna, nastajale so nove matematične discipline, kar vse zahteva bolj poglobljeni študij matematike, če hočemo razumeti zgodovinske procese. Šele tako zavzame tudi elementarna matematika svoje pravo mesto v zgodovinskem razvoju celotne vede.

Zaradi obilice materiala (števila ustvarjalcev matematike, njihovih člankov in rezultatov) ostane vsak pregled nadaljnjega dogajanja nujno le nepopolna skica. Če je nemški zgodovinar matematike **Moritz Cantor** (1829-1920) popisal njeno zgodovino do konca 18. stoletja v štirih debelih knjigah s po 1000 strani, bi samo za 19. stoletje potrebovali ob enaki ločljivosti 14 dodatnih knjig enakega obsega in podobno samo za prvo polovico 20. stoletja. Število mednarodnih časopisov, ki so posvečeni izključno matematiki, se je enormno povečalo. Res pa je, da lahko samo zelo majhen del objavljenih člankov prebere še kdo razen peščica specialistov.



SLIKA 1. Naslovna stran prve knjige Zgodovine matematike Moritza Cantorja

Nastanek infinitezimalnega računa je prinesel razcvet analize in njene uporabe v fiziki in povsod. Le malokdo se je v začetku spraševal po logičnih utemeljitvah in rigoroznih dokazih. To se je v večji meri zgodilo šele v 19. stoletju z natančnejšimi definicijami osnovnih pojmov, kot so limita, funkcija, zveznost, odvedljivost, integrabilnost, konvergenca, prostor, dimenzija. Razvile so se nove veje matematike (teorija množic, topologija, kasneje funkcionalna analiza) in s paradoksi prinesle probleme logičnih osnov matematike. V dvajsetem stoletju so vse skupaj postavili na še bolj splošno in abstraktno raven. Po drugi strani pa so se uveljavile nove uporabe v zavarovalništvu, statistiki, vojaških vedah, ekonomiji, razvijanju novih tehnologij, moderni fiziki itd.

Matematika 18. stoletja pa je bila še vedno v tesni povezavi z astronomijo in mehaniko. Omenili smo že dela **Antoina Parenta** in **Alexisa Clauda Clairauta** v prostorski analitični geometriji, pa **Girolama Saccherija** in **Johanna Lamberta** v neevklidski geometriji (ki je vrhunec dosegla v prvi polovici 19. stoletja v delih **Carla Friedricha Gausa**, **Nikolaja Lobačevskega** in **Janosa Bolyaia**). Glavni prispevek k matematiki in zlasti matematični analizi pa so v 18. stoletju dali člani družine **Bernoulli**, **Abraham De Moivre**, **Brook Taylor**, **Colin Maclaurin**, **Leonhard Euler**, **Alexis Claude Clairaut**, **Jean-le-Rond D'Alembert**, **Johann Heinrich Lambert**, **Joseph Louis Lagrange** in **Gaspard Monge**.

Znameniti švicarski matematiki

Jakob in **Johann Bernoulli**, švicarska brata matematika, predstavnika ene najodličnejših družin v celotni zgodovini matematike, sta se učila iz **Leibnizovih** člankov, ki so izhajali v *Acta eruditorum*. Bila sta najbolj zvesta **Leibnizova** privrženca in sta veliko doprinesla k širjenju infinitezimalnega računa po Evropi. Od leta 1687 do smrti je starejši Jakob zasedal mesto profesorja matematike na univerzi v Baslu, mlajši Johann pa je leta 1697 postal profesor na univerzi v Groningenu na Nizozemskem. Leta 1705 je nasledil brata na univerzi v Baslu. Brata sta bila aktivna raziskovalca matematike in sta stalno izmenjavala svoje ideje z **Leibnizom**, drugimi sodobniki in med sabo, pogosto kot zagrizena nasprotnika oziroma tekmeča.



SLIKA 2. Jakob in Johann Bernoulli

Jakob Bernoulli (1654-1705)

K matematiki je prispeval veliko. Njegov doprinos so npr. zgodnja vpeljava polarnih koordinat, izpeljava formule za ukrivljenost ravninskih krivulj, študij krivulje verižnice (tudi take s spremenljivo gostoto in delujoče v polju centralne sile), odkritje krivulje *izohrone* (neke vrste kubične parabole, vzdolž katere je v gravitacijskem polju gibanje enakomerno), določitev oblike upogiba na enem koncu pritrjene elastične palice z bremenom na drugem koncu in upogiba opne. Navdušen je bil nad lastnostmi *logaritemske spirale* in si jo je (podobno kot Arhimed v valj včrtano kroglo) zaželel vklesano na nagrobniku. Predlagal je tudi raziskovanje *izoperimetričnega problema* in tako vzpodbudil začetke *variacijskega računa*.

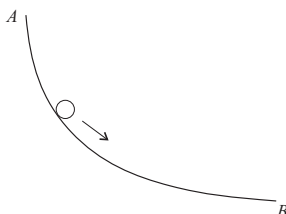
Bil je eden od utemeljiteljev matematične teorije verjetnosti (njegova knjiga o tem *Ars conjectandi* je izšla posthumno leta 1713). Po njem se imenuje v verjetnosti *Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov* in *Bernoullijev zakon velikih števil*, v analizi pa *Bernoullijeva lemniskata*, ki smo jo že srečali, pa *Bernoullijeva števila* in *Bernoullijevi polinomi* in še *Bernoullijeva diferencialna enačba prvega reda*. V delu Jakoba Bernoullija iz leta 1690 prvič srečamo besedo *integral* (v smislu analize). Medtem ko je Leibniz sprva še uporabljal zvezo *calculus summatorius*, sta se leta 1696 Leibniz in Johann Bernoulli dogovorila o uporabi izraza *calculus integralis*.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Johann je bil še bolj plodovit matematični pisec kot njegov brat, na katerega je bil ljubo-sumen. Bil je hkrati eden najuspešnejših učiteljev matematike svojega časa. Obogatil je infinitezimalni račun in mnogo pripomogel k njegovemu širjenju po Evropi. Njegov učenec, bogati markiz **de l'Hospital** (1661-1704), je učiteljevo znanje zajel in leta 1696 oblikoval v prvi učbenik infinitezimalnega računa v Evropi. V njem je med drugim objavljeno tudi slavno *L'Hospitalovo pravilo* za računanje limit.

Johann Bernoulli je pisal o številnih različnih temah: o optiki (odboj in lom svetlobe), ortogonalnih trajektorijah družine krivulj, rektifikaciji in kvadraturi krivulj, razvojih v vrsto, analitični trigonometriji, eksponentni funkciji itd.

Pomembno in slavno je njegovo delo v zvezi s problemom *brahistohrone*, krivulje, vzdolž katere se masna točka pod vplivom gravitacije spusti najhitreje. O problemu je razpravljajal z bratom Jakobom in izkazalo se je, da je taka krivulja ustrezni cikloidni lok (slika 3). Cikloida je tudi *tavtohrona*, to je taka krivulja, vzdolž katere se masna točka pod vplivom teže spusti v izhodiščni položaj vedno v istem času, ne glede na to, kako visoko smo jo spustili. Ta problem sta sicer že prej rešila **Huygens** (1673) in **Newton** (1687). **Huygens** ga je uporabil tudi pri svoji konstrukciji cikloidne ure, kasneje pa sta se z njim ukvarjala tudi **Euler** in **Lagrange**.



SLIKA 3. Cikloida kot brahistohorna in tavtohrona

Sinovi in nečaki

Johann Bernoulli je imel tri sinove, Nicolausa II., Daniela in Johanna II.; vsi so postali znani matematiki in znanstveniki.

Nicolaus II. Bernoulli (1695-1726) je študiral matematiko in pravo v Baslu, potem postal profesor matematike v Padovi in Bernu ter pomagal očetu pri korespondenci v zvezi z Leibniz-Newtonovim sporom. Zaradi matematične odličnosti ga je Peter Veliki (skupaj z bratom Danielom) leta 1725 poklical na novoustanovljeno Sanktpeterburško akademijo, kjer pa je po osmih mesecih staknil hudo vročino in nesrečno umrl. Nasledil ga je brat Daniel, istočasno pa je na vzporedno mesto za fiziologijo prišel tudi **Leonhard Euler**, s katerim sta bila brata Bernoulli prijatelja.

Kot matematik se je Nicolaus ukvarjal s krivuljami, diferencialnimi enačbami in verjetnostjo. Najbolj je znano njegovo odkritje *ti. peterburškega paradoksa* o neskončnem matematičnem upanju v igri, kjer dobi igralec v naslednjem poskusu metanja kovanca dvakrat več kot prej, če pade grb. Paradoks je sicer razrešil in objavil leta 1738 brat Daniel.

Daniel Bernoulli (1700-1782) je bil najslavnejši od Johannovih sinov. Potem ko je sedem let preživel v Sankt Peterburgu, se je vrnil v Basel. V verjetnosti je razvil koncept *moralnega pričakovanja*, v svoji *Hidrodinamiki* iz leta 1738 pa je postavil osnove fizikalne teorije tekočin (*Bernoullijeva enačba*). Pisal je o plimi, kinetični teoriji plinov, študiral nihajočo struno in kot eden prvih raziskoval parcialne diferencialne enačbe.



SLIKA 4. Daniel Bernoulli

Nečak Jakoba in Johanna (sin brata Nicolausa, ki ni bil matematik) in starejši bratranec treh mladih Bernoullijev je bil **Nicolaus I. Bernoulli** (1687-1759) in je tudi postal slaven v matematiki. V Padovi je zasedal profesorsko mesto, ki ga je nekoč imel Galilei. Pisal je o geometriji in diferencialnih enačbah, v kasnejših letih pa je učil logiko in pravo.

Tudi **Johann II. Bernoulli** (1710-1790) je bil v poznih letih profesor matematike v Baslu (nasledil je očeta), ukvarjal pa se je v glavnem s teorijo toplote in svetlobe. Leta 1736 je dobil nagrado Francoske akademije, ker je predlagal študij etra. Njegov sin **Johann III.** (1744-1807) se je prav tako kot oče od prava obrnil k matematiki, že 19-leten je dobil mesto profesorja matematike na Berlinski akademiji. Drugi sin **Jakob II.** (1759-1789) je bil malo pred tridesetim letom starosti imenovan za profesorja matematike v Sankt Peterburgu; poročil se je z vnukinjo Leonharda Eulerja, a je utonil v reki Nevi julija 1789 nekaj mesecev po poroki. Še dva sinova **Daniel II.** in **Nicolaus IV.** sta manj znana. Zanimivo je morda le to, da je bil eden od kasnejših potomcev Nicolausa IV. slavni švicarski arhitekt *Hans Benno Bernoulli* (1876-1959), drugi pa še bolj slavni pisatelj in Nobelov nagrajenec za literaturo leta 1946 *Hermann Hesse* (1877-1962).

Leonhard Euler (1707-1783)

Euler je bil učenec **Johanna Bernoullija** in eden največjih matematičnih genijev vseh časov, vsekakor pa najbolj ustvarjalen in plodovit matematični pisec. Matematiko je s svojim delom spremenil za zmeraj.



SLIKA 5. Bruckerjev portret Leonharda Eulerja iz leta 1756

Rojen je bil v Baslu leta 1707. Nadarjenost je pokazal že v otroštvu in matematiko prizadevno študiral pri **Johannu Bernoulliju**, ki je hitro spoznal njegov talent. Star devetnajst let je dobil (drugo) nagrado Francoske akademije za analizo najboljšega nameščanja jarnorborov na ladje (čepprav do takrat morja in jadrnic sploh še ni videl).

Kot dvajsetletnik je leta 1727 dobil mesto profesorja (za medicino in fiziologijo) na Sankt-peterburški akademiji, kjer je kot profesor matematike deloval že njegov prijatelj Daniel Bernoulli. Leta 1733, ko se je Daniel vrnil v Basel, je zasedel njegovo mesto. V tridesetih letih 18. stoletja je z neverjetno energijo reševal različne matematične probleme in delal na vseh področjih od geometrije, teorije števil, kombinatorike do uporabe matematike v mehaniki, hidrodinamiki in optiki, čepprav je že tedaj začel izgubljati vid na desnem očesu. Leta 1741 je za 25 let na povabilo Friderika Velikega prevzel pozicijo na Berlinski akademiji znanosti, nato pa se je 1766 vrnil v Sankt Peterburg, kjer je ostal (in od 1768 dalje popolnoma slep še vedno ustvarjalno delal) do smrti. Pokopan je v Sankt Peterburgu.

Euler je imel odličen spomin; ne le, da si je npr. zapomnil prvih 100 praštevil, ampak tudi njihove kvadrate, kube in četrte potence. Na pamet je brez posebnega napora izvajal račune tudi do 50 mest natančno. V mladosti si je zapomnil celotno Vergilovo Eneido in jo znal citirati še pol stoletja kasneje.

Eulerjeva slava temelji na njegovih knjigah. Najbolj znan učbenik matematike, v katerem je združil in poenostavil večji del dotedanjega matematičnega znanja, je *Introductio in Analysin infinitorum* iz leta 1748, temu je dodal knjigo o diferencialnem računu *Institutiones calculi differentialis* leta 1755 in tri volumne o integralnem računu v letih 1768-1774.



SLIKA 6. Eulerjevi razpravi o integralnem in diferencialnem računu

V teh knjigah je uvedel jasno in moderno notacijo (npr. $f(x)$ za funkcijo, e za osnovo naravnih logaritmov, i za imaginarno enoto, znak Σ za vsoto itd.). To so obenem prve knjige, ki so tudi na videz take kot sodobni matematični teksti. Uvedel je znamenito formulo $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ s posledico $e^{i\pi} + 1 = 0$ in 'čudno' zvezo $i^i = e^{-\pi/2}$. V geometriji trikotnika je znana *Eulerjeva premica*, v zvezi s konveksnimi poliedri *Eulerjeva formula* $V - E + F = 2$, v teoriji števil *Eulerjeva funkcija* ϕ , pa *Eulerjev izrek* (posplošitev Fermatovega). Večino trditev, ki jih je navedel **Fermat** brez dokaza, je dokazal ravno Euler, npr. dejstvo, da se da praštevilo oblike $p = 4k + 1$ na en sam način zapisati kot vsota dveh kvadratov, pa *mali Fermatov izrek* (glej vajo 11). Do Eulerja so poznali le tri pare prijateljskih števil, on je odkril skoraj 60 novih parov. Zavrnil je domnevo o *Fermatovih praštevilih* (vaja 12). Pripisujejo mu definicijo funkcij beta in gama, čeprav jih je poznal že Wallis. Pri diferencialnih enačbah je uvedel integracijski faktor, znana je *Eulerjeva diferencialna enačba*, napisal je osnovne formule variacijskega računa. Velja tudi za začetnika teorije particij in v kombinatoriki za predhodnika teorije grafov (Königsberski mostovi, premikanje šahovskega konja), konstruiral je magične kvadrate.



SLIKA 7. Königsberski mostovi čez reko Pregel

Mnogo del je posvetil uporabni matematiki, nebesni mehaniki, hidravliki, astronomiji, gradnji ladij, artileriji, akustiki in teoriji glasbe. Še več, tudi marsikateri matematični rezultat ali pojem, ki ga pripisujejo drugim, je v resnici Eulerjevo delo. Razširil je meje znanega v teoriji števil, v algebri in geometriji, posebej pa v analizi. Bil je neumorni integrator (računar integralov) in manipulator z neskončnimi vrstami. Seveda pa pri vsem tem ni mogel vedno poznati standardov rigoroznega izvajanja dokazov, ki so se jih matematiki zavedeli in jih vzpostavili šele v 19. stoletju. Še več, znano je, da je marsikateri rezultat o seštevanju vrst napisal nekritično, npr. $-1 = (1 - 2)^{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ ali, ko je iz $x + x^2 + \dots = x/(1 - x)$ in $1 + 1/x + 1/x^2 + \dots = x/(x - 1)$ izpeljal, da je $\dots 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + \dots = 0$. Kljub temu je bil ne samo prodoren raziskovalec, ampak tudi izvrsten učitelj ("Mojster vseh nas", kot se je izrazil Laplace). Skrbel je, da so njegovi bralci, kar je napisal, tudi razumeli, čeprav jih je rad presenečal in ob tem občutil posebno zadovoljstvo.



SLIKA 8. Eulerjeva knjiga o izoperimetričnih problemih

Njegovo celokupno delo, *Opera Omnia*, 73 zvezkov zbranih člankov in knjig, skupaj jih je 886, napisanih v latinščini, francoščini in nemščini, je opus, ki ga ni še nihče presegel. Ocenjujejo, da je tretjino vseh matematičnih del v drugi polovici 18. stoletja napisal Euler. Pisal je tako naglo, da ga založniki niso mogli dohajati, izdajanje njegovih del je trajalo še 47 let po njegovi smrti. Na prvem mednarodnem matematičnem kongresu leta 1897 v Zürichu so Švicarji napovedali in v začetku 20. stoletja tudi začeli urejati in izdajati njegova zbrana dela. To je projekt, ki ob pomoči različnih akademij (Berlinske, Sankt-peterburške) in drugih ustanov še vedno traja. Skupaj so natisnili že čez 25.000 strani Eulerjevih matematičnih besedil. Samo o analizi je izdanih 18 debelih zvezkov s skoraj 9000 stranmi (tri knjige in na desetine člankov od diferencialnih enačb preko neskončnih vrst do eliptičnih integralov).

Drugi, v glavnem francoski, matematiki 18. stoletja

Med ostalimi matematiki tega časa omenimo **Abrahama De Moivre** (1667-1754), Francoza, ki je skoraj vse svoje življenje preživel v Angliji, znanega po svoji *Doktrini verjetnosti* in kot začetnika actuarske matematike. Ukvarjal se je tudi z analizo in trigonometrijo, prvi je napisal verjetnostni integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, iznašel formulo $n! \approx (2\pi n)^{1/2} e^{-n} n^n$, ki nosi ime po **Jamesu Stirlingu** (1692-1770), in nas naučil, da je $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.



SLIKA 9. Abraham de Moivre

Druga dva omembe vredna matematika sta povezana z razvojem odvedljivih funkcij v vrsto; to sta Anglež **Brook Taylor** (1685-1731), Newtonov učenec, in Škot **Colin Maclaurin** (1698-1746). Prvi je leta 1715 uporabil svoj razvoj $f(x+h) = f(a) + hf'(a) + h^2 f''(a)/2! + \dots$ za numerično reševanje enačb, ukvarjal pa se je tudi s perspektivo v geometriji, kar je našlo uporabo v moderni fotogrametriji. Drugi, **Maclaurin**, je bil eden najspodobnejših matematikov v 18. stoletju. Leta 1742 je uporabil poseben primer Taylorjevega razvoja (pri $a = 0$), kar je sicer že prej našel **James Stirling**. Študiral je višje krivulje, delal še v geometriji in njeni uporabi v fiziki ter razvil matematično teorijo plimovanja.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765)

Bil je Parižan, nekoliko mlajši od Eulerja in čudežni otrok, ki je že kot trinajstletnik napisal razpravo o krivuljah tretjega reda, kasneje pa še razpravo o prostorskih krivuljah. To mu je zagotovilo mesto v Francoski akademiji znanosti pri 18. letih, kar ni bilo niti običajno niti po pravilih.



SLIKA 10. Alexis Claude Clairaut

Triindvajsetletnik se je leta 1736 udeležil **Maupertuisove** geografske odprave na Laponsko, da bi izmerili dolžino stopinje zemeljskega poldnevnik. Istočasno je **La Condamine** vodil podobno odpravo v Peru. Član te druge odprave **Pierre Bouguer** je, zanimivo, bil tisti, ki je leta 1727 pobral prvo nagrado akademije pred Eulerjem; takrat je dobil vzdevek "oče mornariške arhitekture".

Francozi so te odprave organizirali zato, da bi končali znanstveni spor o sploščenosti Zemlje. Medtem ko sta Huygens in Newton trdila, da je Zemlja na polih sploščena, sta italijanski matematik in astronom **Giovanni Domenico Cassini** (1625-1712) in njegov v Franciji rojeni sin **Jacques Cassini** (1677-1756) z merjenji zemljepisne dolžine od Dunkerqua do Perpignana stopila na stran Descartesove teorije o polarni raztegnjenosti Zemlje. Odpravi na Laponsko in v Peru sta nedvomno potrdili Huygens-Newtonovo domnevo (**Maupertuisu** so zato dali vzdevek 'sploščitelj Zemlje').

Po vrnitvi z odprave je Clairaut leta 1743 objavil *Théorie de la figure de la Terre*, leta 1752 pa prejel nagrado Sanktpeterburške akademije za razpravo *Théorie de la Lune*. Hkrati s tem je postal znan po svoji diferencialni enačbi oblike $y = px + f(p)$, kjer je $p = dy/dx$, za katero je našel tudi singularno rešitev. Podobno je prej enačbo obravnaval tudi **Brook Taylor**. Leta 1759 je izračunal (z enomesečno napako) datum vrnitve *Halleyevega* kometa. Tudi Clairautov oče je bil učitelj matematike in pisal o geometriji, njegov nadarjeni brat pa je umrl že pri šestnajstih letih, potem ko je napisal članek o geometriji.

Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783)

Tudi Parižan, najdenček v bližini cerkve Saint Jean-le Rond (od tod ime), je postal vnet nasprotnik in tekmeč **Clauda Clairauta**. Kot 24-letnik je postal član akademije, leta 1743 objavil razpravo *Traité de dynamique* iz kinetike, raziskoval hidrodinamiko in gibanje v zraku (nastanek vetrov). Leta 1747 ga je raziskovanje nihajoče strune pripeljalo do *parcialnih diferencialnih enačb* in velja za začetnika teorije. Dokončno je rešil problem precesije ekvinokcija in se v glavnem posvečal analizi.

Ni bil zadovoljen z neskončno majhnimi količinami kot osnovnim pojmom infinitezimalnega računa in je bil prvi, ki je predlagal pojem limite za bolj korektno vpeljavo odvoda, a v 18. stoletju na ta njegov predlog ni bilo odziva.

Leta 1754 je postal *permanentni sekretar Francoske akademije*, kar je bila vseskozi zelo pomembna funkcija, ker je odločal o objavah in dajal predloge za nove člane. V zadnjih letih življenja je skupaj z **Denisom Diderotom** uredil delo, po katerem je najbolj znan: *Veliko francosko enciklopedijo*, ki je izhajala od 1751 do 1772. D'Alembert je zanjo prispeval članke o matematiki, filozofiji in religiji.



SLIKA 11. Jean le Rond d'Alembert

Johanna Heinricha Lamberta (1728-1777) smo že omenili v zvezi z neevklidsko geometrijo. Rojen je bil v Mulhousu v Alzaciji, takrat v Švici, v precejšnji meri samouk, postal pa je kvaliteten matematik z občutkom za rigoroznost.

Prvi je leta 1761 korektno dokazal, da je število π iracionalno, in sicer tako, da je najprej ugotovil, da za neničelne racionalne argumente x vrednost $\operatorname{tg} x$ ne more biti racionalna, nato je vstavil $x = \pi/4$. Prvi je tudi vpeljal in raziskal hiperbolične funkcije. Ukvarjal se je s petim Evklidovim postulatoma o vzporednicah (*Lambertov štirikotnik*); leta 1766 je svoja tovrstna raziskovanja opisal v delu *Die Theorie der Parallellinien*. Pisal je še o opisni geometriji, računal orbite kometov, uporabljal projekcijo pri kartiranju itd.



SLIKA 12. Johann Heinrich Lambert

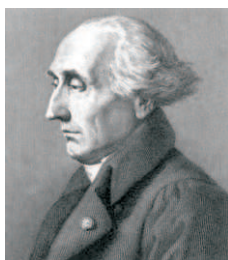
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Za Eulerjem največji matematik 18. stoletja je bil rojen v Torinu v Italiji. Ko je Euler leta 1766 zapustil Berlin, ga je na akademiji nadomestil Lagrange, in tam ostal dvajset let. Po nekaj letih v Parizu je sprejel mesto na *École Normale* in nekaj kasneje na *École Polytechnique*. Obe znameniti šoli sta bili ustanovljeni po francoski revoluciji leta 1794 in mnogi znani francoski matematiki so bili njeni študentje ali profesorji. Lagrangeovo delo ima velik vpliv na kasnejši razvoj matematike.

Prvi je spoznal nezadovoljivo stanje osnov matematične analize, kar je želel leta 1797 izboljšati v razpravi *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel* (ni mu uspelo, ker ni poznal pojma konvergence in divergence), je pa to prva resna splošna obravnava realnih funkcij in ne le posameznih posebnih primerov. Zanimivo je, da je odvode (tako kot pred njim Newton) računal iz vrst in ne obratno. Drugo njegovo delo je *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés*, najbolj znano pa *Mécanique analytique* 1787.

V Berlinu je odkril in obdelal splošne enačbe gibanja in dinamičnih sistemov, kar danes imenujemo *Lagrangeve enačbe* (v povezavi z razvojem variacijskega računa). V teorijo diferencialnih enačb je vpeljal metodo variacije konstant. Imel je tudi nagnjenje do teorije

števil (izrek o reprezentaciji števil z vsoto štirih kvadratov), v algebri je znan njegov izrek o deljivosti reda grupe z redom podgrupe. Lagrangea lahko imamo za prvega realnega analitika z modernim pristopom.



SLIKA 13. Jean Louis Lagrange

Gaspard Monge (1746-1818)

Človek, ki je iznašel *opisno geometrijo*, se je rodil v Burgundiji in v Lyonu izšolal za učitelja fizike, uveljavil pa kot dober risar in inženir. Navdušil se je za francosko revolucijo in se ukvarjal s politiko. Leta 1792 je postal celo minister za mornarico in kolonije, leta 1793 pa član konventa in skupaj s prijateljem kemikom *Claudom-Louisom Bertholletom* odgovoren za tovarne smodnika in obrambo ogrožene republike.



SLIKA 14. Gaspard Monge

Leta 1794 je pomagal ustanoviti *École Polytechnique* in tedaj tudi postal na njej profesor matematike. Znan je po uvedbi in izpopolnitvi opisne geometrije ter po zgodnji obravnavi diferencialne geometrije. Bil je nadarjen učitelj z vplivom na bodoče geometre.

Kasneje je postal dober prijatelj Napoleona, ki ga je vodil s seboj v Italijo in Egipt - in skupaj z njim tudi pobegnil iz Egipta; Monge mu je ostal zvest do konca; po Napoleonovem padcu so ga zato leta 1815 skupaj s **Carnotom** iz političnih razlogov izključili iz Francoske akademije.

Vaje:

(1) Da harmonična vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ divergira, je vedel že **Nicole Oresme** ($\sim 1323-1389$) in za dokaz uporabil v bistvu isti argument kot danes (združevanje členov v skupine z vsoto več kot $1/2$). **Pietro Mengoli** (1625-1686) pa je leta 1647 združil po tri zaporedne člene in tudi dokazal divergenco harmonične vrste. Ponovi njegov dokaz v naslednjih korakih [10]:

(a) Za $a > 1$ velja $1/(a-1) + 1/a + 1/(a+1) > 3/a$.

(b) Z grupiranjem treh zaporednih členov dobimo $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots =$

$1 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7) + \dots > 1 + 3/3 + 3/6 + 3/9 + \dots =$

$2 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + \dots > 2 + 3/3 + 3/6 + 3/9 \dots = 3 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + \dots$ itd.

(2) **Johann Bernoulli** je odkril dokaz divergence harmonične vrste, vendar ga ni objavil. Izšel pa je kasneje v *Razpravi o neskončnih vrstah* brata Jakoba. Prepostavka, da je $A = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ končno število, pripelje do protislovja. Ideja je v seštevanju neskončnih vrst, sestavljenih iz recipročnih vrednosti produktov zaporednih števil: $B = 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + \dots = 1$, $C = 1/6 + 1/12 + 1/20 + \dots = 1 - 1/2 = 1/2$, $D = 1/12 + 1/20 + \dots = 1/2 - 1/6 = 1/3$, itd. Pokaži, da je $B + C + D + \dots = 1/2 + 2/6 + 3/12 + 4/20 + \dots = 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots = A - 1$, kar pripelje do protislovja, ker po drugi strani velja tudi $B + C + D + \dots = A$ (glej [10]).

(3) **Jakob Bernoulli** pa je divergenco harmonične vrste dokazal v naslednjih korakih:

(a) Če imata geometrijska in aritmetična vrsta s pozitivnimi členi enaka prvi in drugi člen, je vsak nadaljnji člen geometrijske vrste večji od ustreznega člena aritmetične vrste.

(b) Vsota končnega števila členov geometrijske vrste naj bo $S = A + B + C + \dots + E$. Potem je $A/B = (S - E)/(S - A)$ oziroma $S = (A^2 - BE)/(A - B)$.

(c) Iz ostanka harmonične vrste $1/a + 1/(a + 1) + 1/(a + 2) + \dots$ lahko izberemo toliko zaporednih členov, da njihova vsota presega 1. (Navodilo: ker je $a, a + 1, a + 2, \dots$ aritmetično zaporedje, oceni s členi geometrijske vrste $1/a + 1/(a + 1) + 1/(a + 2) + \dots > 1/a + 1/(a + 1) + 1/C + \dots + 1/K$, kjer je $K \geq a^2$; to končno vsoto seštej po točki (b) in dobiš ≥ 1 .)

Jakob Bernoulli je v skladu s tem združeval člene harmonične vrste v obliki

$$1 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + \dots + 1/25) + \dots \quad (\text{glej [11]}).$$

(4) **Jakob Bernoulli** je znal sešteti tudi ti. *figurativne vrste* $a/A + b/B + c/C + \dots$, kjer so A, B, C, \dots členi geometrijskega zaporedja, a, b, c, \dots pa ti. *figurativna števila* (npr. kvadrati 1, 4, 9, 16, ..., kubi 1, 8, 27, 64, ..., trikotna števila 1, 3, 6, 10, ..., piramidalna števila 1, 4, 10, 20, ..., itd.). Naj bo $b > 0$ in $d > 1$. Pokaži naslednje [11]:

(a) S seštevanjem geometrijskih vrst $1/b + 1/bd + 1/bd^2 + \dots = d/b(d-1)$, $1/bd + 1/bd^2 + \dots = 1/b(d-1)$, $1/bd^2 + \dots = 1/bd(d-1)$ itd. dobimo $1/b + 2/bd + 3/bd^2 + \dots = d^2/b(d-1)^2$.

(b) S seštevanjem vrst $1/b + 1/bd + 1/bd^2 + \dots = d/b(d-1)$, $2/bd + 2/bd^2 + \dots = 2/b(d-1)$, $3/bd^2 + \dots = 3/bd(d-1)$ itd. dobimo $1/b + 3/bd + 6/bd^2 + \dots = d^3/b(d-1)^3$.

(c) Iz točke (b) lahko hitro sestavimo tudi vsoto vrste $P = 1/b + 4/bd + 10/bd^2 + \dots = d^4/b(d-1)^4$ s piramidalnimi števili v števcih. Velja namreč $P = (1/b + 3/bd + 6/bd^2 + \dots) + (1/bd + 4/bd^2 + 10/bd^3 + \dots) = T + P/d$, kjer je T vsota vrste iz (b).

(d) Podobno dobimo vsoto vrste $C = 1/b + 8/bd + 27/bd^2 + \dots = d^2(d^2 + 4d + 1)/b(d-1)^4$, če upoštevamo, da je $C = N + 6P/d$, kjer je N vsota vrste iz točke (a) in P vsota vrste iz točke (c).

Opomba. Vrsta recipročnih kvadratov $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$ pa je bila pretežka za **Jakoba Bernoullija**, čeprav je s primerjavo z vrsto recipročnih trikotnih števil znal pokazati, da konvergirata. Določitev njene natančne vsote je pustil kot odprt problem v svoji *Razpravi o neskončnih vrstah* 1689 (to je znameniti *baselski problem*, glej vajo 9). Rešil ga je leta 1734 mladi **Leonhard Euler**, ki je študiral pri **Johannu Bernoulliju**.

(5) **Johann Bernoulli** je izračunal ploščino pod krivuljo $y = x^x$ z vrsto, tako da je sklepal: če je $z = \ln y$, je $y = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \dots$ (eksponentna vrsta). Vstavil je $y = x^x$, torej $z = x \ln x$ in dobil $x^x = 1 + x \ln x + x^2(\ln x)^2/2! + x^3(\ln x)^3/3! + \dots$; iskano ploščino je potem izračunal z integriranjem po členih [11].

(a) Z integracijo po delih (per partes) izpelji za $n \geq 1$ rekurzivno formulo

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx \text{ in iz nje eksplicitno relacijo}$$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (-1)^n n! / (m+1)^{n+1}.$$

(b) Z uporabo točke (a) pokaži: $\int_0^1 x^x dx = 1 - 1/2^2 + 1/3^3 - 1/4^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} / k^k$.

(c) Uporabi Leibnizovo pravilo za alternirajoče vrste, da ugotoviš, koliko členov vrste iz točke (b) je treba sešteti, da bo rezultat pravilen na štiri decimalke natančno.

(6) Za **Eulerja** je bil diferencial enak nič, $dx = dy = 0$, zato je npr. lahko zapisal $y + dy = \sin(x + dx)$ ali $y + dy = \ln(x + dx)$ in še toliko lažje zanemaril potence diferenciala. Z razvojem v vrsto ustrezne funkcije in s črtanjem višjih potenc izpelji po Eulerjevi poti naslednji diferencialni formuli:

- (a) $dy = (\cos x)dx$ (za funkcijo $y = \sin x$),
 (b) $dy = dx/x$ (za funkcijo $y = \ln x$).

(7) **Euler** je spretno izračunal številne težke integrale, pri čemer si je (kot Newton) pomagal z razvojem v vrsto in integracijo po členih (glej [11]). Kot primer Eulerjeve metode pokaži:

$$\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx = \pi/4.$$

- (i) Najprej razvij integrand po potencah logaritma,
 (ii) Nato vrsto členoma integriraj, rekurzivno z uporabo metode integracije po delih.
 (iii) Nazadnje upoštevaj vsoto Leibnizove vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \pi/4$.

(8) Po klasični (Arhimedovi) metodi računanja števila π je treba zaradi aproksimacije kroga s pravilnim večkotnikom izračunati številne vgnezdene kvadratne korene. **Viète** je za devet pravih decimalk moral izračunati vgnezdene korene globine 17, **Ludolph van Ceulen** za 35 decimalk globine 60 (lahko si predstavljamo, da je za to porabil pol življenja). **Euler** je leta 1779 našel hitrejšo pot z uporabo formule za tangens razlike dveh kotov oziroma formule

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{z}{w} = \operatorname{arctg} \frac{xw - yz}{yw + xz}.$$

V eni uri je izračunal π na 20 mest natančno [11]. Ponovi njegove izračune tako, da

- (a) v zgornjo formulo vstaviš po vrsti naslednje vrednosti: (i) $x = y = z = 1$ in $w = 2$,
 (ii) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ in $w = 7$, (iii) $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$ in $w = 7$ ter (iv) $x = 2$,
 $y = 11$, $z = 1$ in $w = 7$; na koncu dobiš formulo

$$\pi = 20 \operatorname{arctg}(1/7) + 8 \operatorname{arctg}(3/79);$$

- (b) arkus tangensa v zadnji formuli razviješ v potenčno vrsto in sešteješ 6 členov, da dobiš približek $\pi \approx 3.14159265357$, ki ima napako 2 enoti na 11. mestu.

(9) Znamenitega *baselskega problema*, poiskati vsoto vrste $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$, se je Euler lotil s faktorizacijo potenčne vrste, ki mu je omogočila izračun vsote cele serije bolj splošnih potenčnih vrst [11]. Sledeč njegovemu postopku pokaži naslednje:

- (a) Če je $P(x) = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots = (1 + a_1x)(1 + a_2x)(1 + a_3x)\dots$, imamo naslednje relacije $\sum a_k = A$, $\sum a_k^2 = A^2 - 2B$, $\sum a_k^3 = A^3 - 3AB + 3C$ itd.
 (b) Razvij v potenčno vrsto zgornje oblike funkcijo $P(x) = \cos(\pi x/4) + \sin(\pi x/4)$, od koder dobiš $A = \pi/4$, $B = -\pi^2/32$, $C = -\pi^3/384$ itd.
 (c) Ničle funkcije $P(x)$ so cela števila $-1, 3, -5, 7, -9, \dots$, od koder dobimo $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$, $a_3 = 1/5$, $a_4 = -1/7$ itd.
 (d) Po formulah iz točke (a) dobimo
 (i) $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$,
 (ii) $1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 + \dots = \pi^2/8$ in od tod s preoblikovanjem
 $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \dots = \pi^2/6$,
 (iii) $1 - 1/27 + 1/125 - 1/343 + \dots = \pi^3/32$,
 (iv) $1 + 1/16 + 1/81 + 1/256 + 1/625 + \dots = \pi^4/90$.

Opomba. Formula (ii) je presenetila celo Eulerja; nihče ni pričakoval, da bo rezultat povezal kvadrate števil (kvadrate v geometriji) s številom π (s krogom v geometriji).

(10) Da bi izpeljal funkcijo gama, je Euler definiral za $x > -1$ neskončni produkt [11]:

$$f(x) = \frac{1 \cdot 2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{3+x} \cdot \dots$$

(a) Pokaži, da je $f(n) = n!$ za vsako naravno število n , da velja formula

$$f(1/2) = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}} = \sqrt{\pi}/2,$$

(po Wallisovi formuli) ter rekurzivna zveza $f(x) = xf(x-1)$.

(b) Eulerju je uspelo funkcijo $f(x)$ izraziti z integralom: $f(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt$. S substitucijo se prepričaj, da je ta integral enak integralu $\int_0^\infty y^x e^{-y} dy$.

Euler je potem definiral *funkcijo gama* s predpisom $\Gamma(x) = f(x-1)$.

Opomba. Funkcija gama je danes ena najpomembnejših višjih funkcij v analizi. To je zgodovinsko prva funkcija, katere definicija zahteva poznavanje infinitezimalnega računa in torej presega elementarno matematiko.

(11) *Fermatov mali izrek* pravi, da velja $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ za poljubno praštevilo p in za vsako celo število a , ki ni deljivo s p . **Fermat** je to le omenil v pismu leta 1640, **Euler** pa dokazal skoraj sto let kasneje, leta 1736. Najprej je pokazal, da je za vsako praštevilo p in celo število a tudi izraz $a^{p-1} + \frac{p-1}{2!}a^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{3!}a^{p-3} + \dots + a$ celo število [10].

Ob tem privzetku pokaži, da je:

- (a) število $(a+1)^p - a^p - 1$ deljivo s p ,
 - (b) število $(a+1)^p - (a+1)$ deljivo s p , če velja to za število $a^p - a$,
 - (c) število $a^p - a$ vedno deljivo s p
- in odtod izpelji mali Fermatov izrek.

(12) **Euler** se je začel zanimati za teorijo števil pod vplivom korespondence s **Christianom Goldbachom** (1690-1764), ki je znan po še vedno nerešeni *Goldbachovi domnevi* (da je vsako sodo število, večje od 4, vsota dveh lihih praštevil). Ta ga je 1. decembra 1729 opozoril na Fermatovo domnevo, da so vsa števila oblike $2^{2^n} + 1$ praštevila. Za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ je to res. Pri $n = 5$ pa dobimo $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294,967.297$. V poskusu, da bi to število faktoriziral ali dokazal, da je praštevilo, je z uporabo malega Fermatovega izreka razvil poseben test, kakšno mora biti praštevilo p , ki deli števila oblike $a^{2^n} + 1$. Pokaži (glej [10]):

- (a) Če praštevilo p ne deli sodega števila a , deli pa $a^2 + 1$, mora biti oblike $p = 4k + 1$. (Namig: sicer bi moral p deliti $a^{4k+2} - 1$ po malem Fermatovem izreku in $a^{4k+2} + 1$ zaradi faktorizacije, kar ne gre.)
- (b) Če praštevilo p ne deli sodega števila a , deli pa $a^4 + 1$, mora biti oblike $p = 8k + 1$. (Namig: zaradi $a^4 + 1 = (a^2)^2 + 1$ vidimo iz točke (a), da je lahko praštevilo le oblike $p = 8k + 1$ ali $8k + 5$. Drugo možnost izločimo podobno kot v točki (a).) Podobno lahko ugotovimo, da mora biti praštevilo oblike $p = 16k + 1$, če deli $a^8 + 1$, oblike $p = 32k + 1$, če deli $a^{16} + 1$ in oblike $p = 64k + 1$, če deli $a^{32} + 1$.
- (c) Praštevilo, ki deli $F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294,967.297$ mora biti torej oblike $p = 64k + 1$. Preveri, da za $k = 1, 2, 3, \dots, 9$ število $64k + 1$ bodisi ni praštevilo, ali pa ne deli F_5 , da pa je za $k = 10$ število $64k + 1 = 641$ praštevilo, hkrati pa je $F_5 = 4.294,967.297 = 641 \cdot 6.700.417$.
- (d) **Euler** je prej dokazal, da ima praštevilo oblike $p = 4k + 1$ eno samo reprezentacijo kot vsota dveh kvadratov (glej vajo 13 v razdelku 9). Ker je $2^{32} + 1 = 4.294,967.297$ očitno oblike $4k + 1$ in lahko ugotovimo, da je $4.294,967.297 = 65536^2 + 1^2 = 20449^2 + 62264^2$, ne more biti praštevilo.

Opomba. Šesto Fermatovo število $F_6 = 2^{64} + 1 = 2^{64} + 1 = 18,446,744,073,709,551,617$ je deljivo s praštevilom $p = 274,177$. Tudi naslednje število $F_7 = 2^{128} + 1 = 2^{128} + 1$ je sestavljeno, vendar so to odkrili z bolj kompliciranimi metodami leta 1905, faktorizirali pa so ga šele leta 1971. Podobno so do leta 1988 ugotovili, da so sestavljena vsa števila F_8, F_9, \dots, F_{31} . Pravzaprav niso doslej našli med števili oblike $2^{2^n} + 1$, $n > 4$, nobenega praštevil, zato sklepajo, da so morda tista, ki jih je poznal Fermat, edina te vrste.

LITERATURA

- [1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
- [2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
- [3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
- [4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
- [5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
- [6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
- [7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
- [8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
- [9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
- [10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
- [11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
- [12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
- [13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- [15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
- [16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
- [17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
- [18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
- [19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
- [20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
- [21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- [22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
- [23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
- [24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
- [25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
- [26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [28] E. Maor, *The Story of e*, Princeton University press, 1994.
- [29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
- [30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [31] A.S. Posamentier, *The Pythagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
- [32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
- [33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- [34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- [35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- [36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
- [37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
- [38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
- [39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
- [40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
- [41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
- [42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.