## 8. Rojstvo moderne matematike

Sedemnajsto stoletje je v razvoju matematike izredno zanimivo. Nastopili so Napier s svojimi logaritmi, Harriot in Oughtred z notacijo in kodifikacijo algebre, Galileo, utemeljitelj dinamike, Kepler s planetarnimi gibanji, Desargues in Pascal z inovativnimi pristopi h geometriji, Descartes z revolucionarno idejo povezovanja geometrije in algebre, Fermat z moderno teorijo števil, vsestranski Huygens, konec stoletja pa še Newton in Leibniz, očeta infinitezimalnega računa.

### Zgodovinski in splošni matematični okvir

Politični, ekonomski in socialni napredek (prvi uporabni stroji, žage, boljša razsvetljava, kurjava, obleke) so težišče inovativne dejavnosti premaknili bolj na sever Evrope, v Francijo in Anglijo. Začela so se prva stalna britanska naseljevanja Novega sveta (Jamestown 1607). Trgovina in pomorstvo sta vzpodbudila nova znanstvena odkritja. Matematična aktivnost se je nasploh zelo povečala, raziskave naenkrat niso več tako zelo elementarne, pojavljajo se nova matematična področja. Astronomija, navigacija, inženirstvo, vojaška obrt so zahtevali hitrejše in natančnejše izračune. V veliko pomoč razvoju sta se izkazali indo-arabska notacija in decimalni zapis. Temu pa se je pridružilo tudi odkritje logaritmov.

### John Napier

Slika 1. John Napier

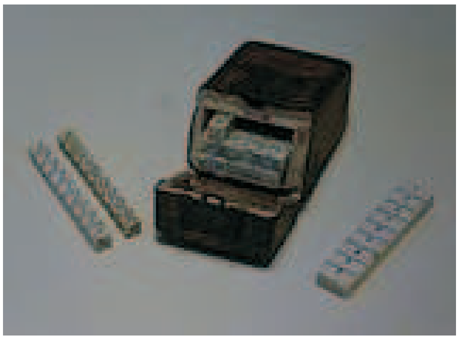
**John Napier** ali **Neper** (1550-1617) je bil Škot, živel je v bližini Edinburgha in se kot zagrizen antikatolik in privrženec Johna Knoxa in Jamesa I. vneto udejstvoval na političnem in verskem področju (leta 1593 je objavil oster napad na rimskokatoliško cerkev in papeža ter napovedal konec sveta med letoma 1688 in 1700).

Bil je znan tudi po raznih znanstveno fantastičnih napovedih (plovba pod morsko gladino, oklepna bojna vozila) in veljal za precej neuravnovešenega.

Študiral je matematiko in poleg logaritmov, za katere je najbolj zaslužen, prispeval različne matematične novotarije, npr.:
- pravilo krožnih delov za lažje pomnjenje formul za sferične trikotnike (*Napierov krog* oziroma *Napierov pentagram*), glej vajo 4,
- dve formuli sferične trigonometrije (*Napierova analogija*),
- praktični pripomoček za hitro množenje, deljenje in korenjenje (*Napierove palice* oziroma *kosti*), glej sliko 2 in vajo 5.

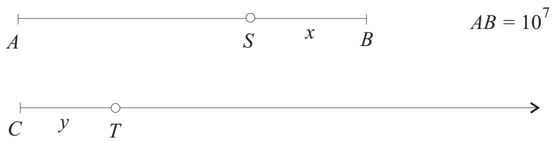
### Nastanek logaritmov

Napierovi logaritmi so nastali iz trigonometričnih formul, ki povezujejo množenje in seštevanje, npr. $\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2$. Napier je najprej računal logaritme sinusov kotov in teorijo razvijal vsaj dvajset let, preden jo je objavil. Njegova definicija logaritma je za današnje pojme nenavadna (glej sliko 3):



SLIKA 2. Napierove palice iz slonove kosti iz leta 1650

*Imejmo končno daljico $AB$ in neskončen poltrak $[C, \infty)$; točka $S$ naj se giblje po daljici $AB$ s hitrostjo, ki je enaka razdalji $x$ točke do krajišča $B$, točka $T$ pa istočasno po poltraku $[C, \infty)$ enakomerno s tako konstantno hitrostjo, kot jo je imela točka $S$ v začetku gibanja; potem je $y =$ Nap log $x$.*




SLIKA 3. K definiciji Napierovih logaritmov

Ker je imel tabele sinusov natančne na 7 decimalk, je Napier predpostavil, da je $AB = 10^7$. Odtod lahko potem z modernimi metodami (glej vajo 1) najdemo, kaj je res pomenil Napierov logaritem, namreč $\mathrm{Nap}\log x = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7)$. Vidimo, da je bil padajoča funkcija. Napier je z njim odkril glavno lastnost: če je $a/b = c/d$, velja $\mathrm{Nap}\log a - \mathrm{Nap}\log b = \mathrm{Nap}\log c - \mathrm{Nap}\log d$. Svoje ugotovitve je objavil leta 1614 v razpravi *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Opis čudovitega zakona logaritmov*), ki je vsebovala tudi tabelo logaritmov sinusov (za vsako minuto kota). Razprava je takoj vzpodbudila zanimanje.

MIRIFICI

Logarithmorum

*Canonis descriptio,*

Ejusque usus, in utraque *Trigonometria; ut etiam in* omni Logistica Mathematica, *Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.*

Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, *&c. Scoto.*

*EDINBURGI,* Ex officinâ ANDREÆ HART *Bibliopolæ*, CIↃ. DC. XIV.

SLIKA 4. Naslovnica Napierove knjige *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* iz leta 1614

**Henry Briggs** (1561-1631), profesor geometrije na Greshamovem kolidžu v Londonu (in kasneje v Oxfordu) je leta 1615 obiskal Napiera v Edinburghu. Skupaj sta spremenila definicijo tako, da je $\log 1$ enak 0 in $\log 10$ ustrezna potenca 10 (Briggsovi logaritmi z osnovo 10). Briggs se je lotil izdelovanja logaritmičnih tabel. Leta 1624 je objavil *Arithmetica logarithmica*, ki vsebuje 14-mestne tabele desetiških logaritmov za števila od 1 do 20.000 in od 90.000 do 100.000.

Vmesne vrednosti je preračunal in dodal **Adriaan Vlacq** (1600-1666), nizozemski knjigarnar in založnik. Leta 1620 je **Edmund Gunter** (1581-1626), Briggsov kolega in človek, ki je odgovoren za vpeljavo besed *kosinus* in *kotangens*, objavil 7-mestne tabele desetiških logaritmov sinusov in tangensov.

Beseda *logaritem* pomeni "razmerno število", Napier je uporabljal izraz "umetno število". Briggs je iznašel tudi besedi *karakteristika* in *mantisa*.

Alternativno definicijo logaritmov je neodvisno od Napierja leta 1620 podal tudi **Jobst Bürgi** (1552-1632), švicarski izdelovalec instrumentov, urar in matematik, Keplerjev sodelavec v Pragi.

Logaritme so potem razmeroma hitro vpeljali po vsej Evropi: **Bonaventura Cavalieri** jih je vpeljal v Italijo, **Johannes Kepler** v Nemčijo, **Edmund Wingate** (angleški pisec učbenikov) v Francijo.

Zanimivo je, da so logaritme iznašli pred eksponenti, čeprav jih danes definiramo ravno z njimi. Moderno definicijo logaritma kot inverzne operacije k eksponenciranju je podal šele **Euler** leta 1748.

### Prva stalna profesorska mesta na angleških univerzah

**Henry Briggs** je bil prvi *Savilian professor* v Oxfordu. Leta 1619 je namreč *Sir Henry Savile*, profesor na Merton Collegeu v Oxfordu, predavatelj Evklida, kasneje tudi provost na Etonu, ustanovil prvi dve stalni profesorski mesti na Oxfordu, eno v geometriji in eno v astronomiji. Savilianovi profesorji so bili tudi **John Wallis**, **Edmund Halley** in **Christopher Wren**.

Podobno je *Henry Lucas*, zastopnik Cambridgea v parlamentu v letih 1639-1640 leta 1663 odprl (zdaj po njem imenovano) profesorsko mesto na Cambridgeu. Prvi ga je zasedel **Isaac Barrow**, šest let pozneje pa njegov učenec **Isaac Newton**. Najstarejše profesorsko mesto v Angliji pa je že leta 1596 ustanovil *Sir Thomas Gresham* na Gresham Collegeu v Londonu.

### Harriot in Oughtred

**Thomas Harriot** (1560-1621), velja za ustanovitelja angleške matematične šole. Po diplomi na oxfordski univerzi ga je leta 1585 *Sir Walter Raleigh* poslal v Severno Ameriko, da bi kartiral Severno Karolino oziroma Virginijo.

Slika 5. Oxfordski portret Thomasa Harriota

Njegovo najpomembnejše delo *Artis analyticae praxis*, ki je izšlo posthumno leta 1631, je precej kompletna in sistematična algebrajska razprava, ki vsebuje teorijo enačb, zvezo med koeficienti in koreni, različne transformacije, numerične postopke, uvaja nove standarde in oznake (npr. $aa$ za $a^2$, znaka $>$ in $<$). Harriot je bil tudi astronom (odkril je Sončeve pege, opazoval Jupitrove lune, napravil zemljevid Lune pred Galileom) in fizik (odkril lomni zakon pred Snellom), z logaritmi pa se ni ukvarjal.

**William Oughtred** (1575-1660) pa je bil najvplivnejši angleški matematični pisec 17. stoletja. Bil je cerkveni dostojanstvenik, ki je dajal privatne lekcije iz matematike. Njegovi učenci so bili npr. **John Wallis**, **Christopher Wren** in **Seth Ward** (kasneje slaven kot matematik, arhitekt in astronom).


Slika 6. Portret Williama Oughtreda

Istega leta 1631 kot Harriotova razprava je izšla tudi Oughtredova popularna knjiga *Clavis mathematicae* iz aritmetike in algebre. V njej je uvedel številne oznake, od katerih se je obdržala le oznaka za množenje $\times$ (krat). Kratice sin, cos, tg in ctg za trigonometrične funkcije pa so se prvič pojavile v Oughtredovi knjigi *Trigonometria* leta 1657.

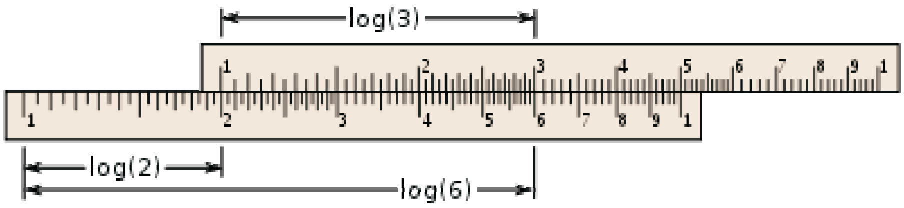
Oughtred je najbrž tudi avtor dodatka k angleški izdaji Napierove *Descriptio* leta 1618, s prvo tabelo *naravnih* logaritmov. Objavil je ekvivalent formule $\ln 10 = 2.302585$, ki pomeni prvo implicitno priznanje vloge števila $e$ v matematiki (sicer je to število vpeljal šele **Euler**). Leta 1647 pa je Oughtred prvi jasno formuliral značilno lastnost logaritemske funkcije, da namreč produkt spremeni v vsoto: $\log(ab) = \log a + \log b$. Prav to dejstvo je odločilno prispevalo k uporabnosti novega pojma.

Vsekakor so logaritmi pomenili revolucionarno izboljšanje računske sposobnosti (bili so računalniki tedanjega časa). **Laplace** je menda nekoč izjavil, da so logaritmi 's skrajšanjem dela podaljšali življenje astronomov za dvakrat'.

**Logaritmična računala**

Oughtred je menda prvi prišel na idejo o mehanski napravi za računanje logaritmov. Logaritmično skalo je sicer uvedel **Edmund Gunter** že leta 1620 (medtem ko se je dvojna logaritmična skala pojavila mnogo pozneje, leta 1815), Oughtred je dejansko iznašel tako krožno kot drsno logaritmično računalo leta 1622 in ga opisal leta 1632 v knjigi *The Circles of Proportions*.

Zares so delujoče logaritmično računalo konstruirali stoletje kasneje. Pravzaprav je šele francoski oficir **Amédé Mannheim** (1831-1906) leta 1859 standardiziral moderno logaritmično računalo, kakršnega smo poznali pred uvedbo elektronskih kalkulatorjev.




Slika 7. Princip delovanja drsnega logaritmičnega računala

**Slavna astronoma**

**Galileo Galilei** (1564-1642) je bil rojen v Pisi revnemu plemiču iz Firenc, študiral medicino po želji staršev ter znanost in matematiko po lastni želji. V Pisi se je začel zanimati za nihanje (lestenca v cerkvi), 25-leten je (na priporočilo **Claviusa**) postal 1589 profesor matematike v Pisi, kjer je opravljal tudi poskuse s prostim padom s poševnega stolpa ter ugotovil, da je pot sorazmerna kvadratu časa. Leta 1592 je sprejel mesto profesorja v Padovi, kjer je ostal 18 let, se seznanil s teleskopom, ki ga je leta 1607 iznašel Johann Lippersheim z Nizozemske. Tudi sam je začel izdelovati teleskop, z njim opazoval Sončeve pege, Venerine faze, Saturnove kolobarje in Jupitrove lune, kar je potrdilo Kopernikovo teorijo in vzbudilo nasprotovanje Cerkve. Tri leta po izidu Galilejeve knjige v podporo Koperniku, leta 1633, je bil zaslišan pred inkvizicijo. Kmalu nato je oslepel.

Galileo je "oče moderne znanosti", ki združuje tako teorijo kot eksperiment. S svojimi osnovami dinamike padajočih teles je bil predhodnik Newtona. Prvi je tudi opazil parabolično obliko trajektorje projektila v vakuumu in iznašel prvi moderni mikroskop. V matematiki je prišel na idejo ekvipolence dveh neskončnih množic (vseh naravnih števil in vseh popolnih kvadratov), zato ga imajo v tem smislu za predhodnika Cantorja. Njegovo glavno delo je *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, tiskano leta 1638 v Leidnu.

Slika 8. Sustermansov portret Galilea

**Johannes Kepler** (1571-1630) je bil rojen blizu Stuttgarta, študiral v Tübingenu, leta 1594 sprejel mesto predavatelja na univerzi v Gradcu v Avstriji, leta 1599 pa postal asistent slavnega dansko-švedskega astronoma **Tycho Braheja** (1546-1601), ki je bil takrat v Pragi dvorni astronom cesarja Rudolfa II. Ko je čez dve leti Tycho Brahe nenadoma umrl, je njegovo mesto zasedel Kepler (in obenem postal dvorni astrolog cesarja Rudolfa II.). Leta 1609 je (na osnovi številnih empiričnih podatkov svojega predhodnika!) formuliral prva dva zakona planetarnega gibanja, leta 1619 še tretjega:

I. *Planeti se gibljejo okrog Sonca po eliptičnih orbitah s Soncem v enem od gorišč.*
II. *Radij vektor od Sonca do planeta opiše v enakih časovnih intervalih enake ploščine.*
III. *Kvadrat obhodnega časa planeta je sorazmeren kubu velike polosi elipse.*

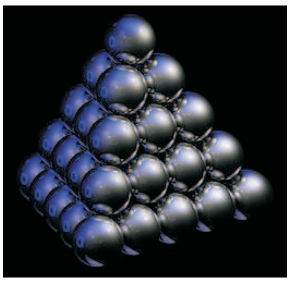
Slika 9. Keplerjev portret iz leta 1610

Zakoni, po katerih se gibljejo planeti, so Keplerju prinesli slavo. Bil pa je tudi eden od začetnikov integralskega računa; poleg ploščin je računal prostornino sodov in drugih rotacijskih teles (npr. *jabolk* in *limon*, če se okrog tetive zavrti večji oziroma manjši krožni lok). Pod vplivom Keplerja je bil v tem pogledu tudi italijanski matematik **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647). O njem in njegovem principu bomo govorili v naslednjem razdelku.

V ravninski geometriji se je ukvarjal z določanjem stožnic, odkril idealne točke in premice v neskončnosti (začetki projektivne geometrije) ter različne limitne lege likov, kar je leta 1822 nadaljeval **Poncelet**.

Kepler je prispeval tudi k teoriji poliedrov (iznašel je npr. *rombični dodekaeder*, *antiprizme*, *zvezdaste poliedre* itd.). V razpravi *Mysterium cosmographicum* je ugotovil, da je razmerje med polmeroma kocki očrtane in včrtane sfere enako razmerju med polmeroma Saturnove in Jupitrove orbite in razvil teorijo, da velja to tudi za druga platonska telesa in druge planete; med sfere šestih dotedaj znanih planetov (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter in Saturn) je vstavil pet pravilnih teles. Teorija je seveda napačna, kaže pa na to, da ga je pri odkrivanju naravnih zakonov vodila matematična estetika.

Kepler se je preskusil tudi v kombinatoriki. Dopisoval si je s **Thomasom Harriotom**, kateremu je *Sir Walter Raleigh* naročil izdelavo bolj ekonomičnega sistema za zlaganje topovskih krogel na palubi ladje. Kepler je o problemu razmišljal in leta 1611 prišel do domneve, da je izmed vseh zlaganj najboljše klasično (kubično) zlaganje krogel, ki ima po njegovem največjo povprečno gostoto, enako $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$ (glej vajo 9). To je znamenita *Keplerjeva domneva*. Še danes ni povsem gotovo, ali je ta domneva res veljavna, čeprav je leta 1998 njen dokaz napovedal in potem deloma objavil ameriški matematik **Thomas Hales** (rojen 1958).



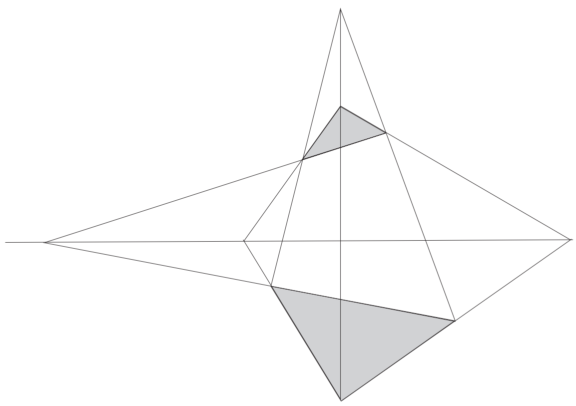
Slika 10. Klasično (kubično) zlaganje topovskih krogel

Keplerjevo delo je mešanica mističnega pristopa, drznih špekulacij in globokega znanstvenega uvida. V osebnem življenju pa je bil zelo nesrečen. Najljubši sin mu je umrl za ošpicami, žena zbolela in umrla, mater so obtožili čarovništva, njega krivoverstva. Ko se je vdrugo poročal, je skrbno in pazljivo izbiral - in na koncu izbral napačno. Nekaj časa je bil prisiljen sestavljati različne horoskope, da se je preživljal.

**Slavna geometra**

**Gérard Desargues** (1593-1662) je bil v Lyonu rojeni inženir, arhitekt in oficir. Leta 1639 je v Parizu izšla njegova pomembna drobna knjižica o stožnicah, ki pa je bila kmalu pozabljena. Šele dve stoletji kasnje je leta 1845 francoski geometer **Michel Chasles** (1793-1880) odkril ročni prepis knjižice, ki ga je naredil Desarguesov učenec **Philippe de la Hire** (1640-1718). Razlog pozabe je bil v sočasnem rojstvu Descartesove analitične geometrije in ekscentričnem Desarguesovem pisanju z mnogimi novimi izrazi (okrog 70, ohranila se je le "involucija"). Knjižica na osnovi Keplerjeve doktrine zveznosti o eksistenci idealnih točk in premic razvija osnove involucije, homologije, polarnosti in perspektive, kar je danes domače v projektivni geometriji. Zato velja danes Desargues za začetnika projektivne geometrije.

Znamenit je prvi geometrijski Desarguesov izrek o dveh trikotnikih: *če so zveznice parov ustreznih oglišč konkurentne, so presečišča parov ustreznih stranic kolinearna in obratno* (glej sliko 11).



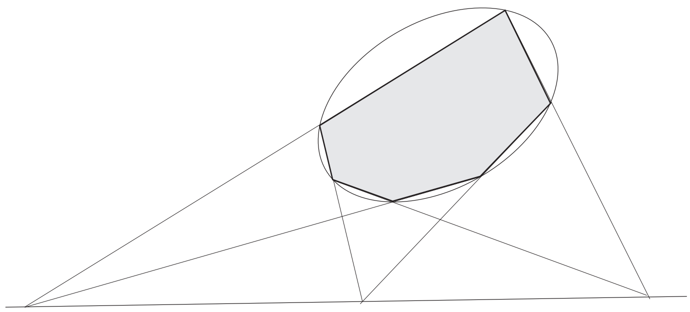
SLIKA 11. Ilustracija Desarguesovega izreka

Njegovo delo sta spoštovala *Descartes* in *Pascal*, nadaljevali pa šele geometri iz 19. stoletja: **Gergonne**, **Poncelet**, **Brianchon**, **Dupin**, **Chasles** in **Steiner**. Izraz *pol* je vpeljal leta 1810 francoski matematik **Servois**, polaro pa istega leta **Gergonne**. On in **Poncelet** sta začela s proučevanjem dualnosti v projektivni geometriji, ki je bila osvobojena vsake metrike šele v delu **Karla Georga Christiana von Staudta** iz leta 1847. Veliki nemški matematik **Felix Klein** je leta 1872 v svojem *Erlangenskem programu*, po katerem je geometrija pročevanje lastnosti, ki se ohranjajo pri določenih transformacijah, definiral projektivno geometrijo kot vedo o količinah in objektih, ki se ohranjajo pri projekcijah (na drugo ravnino), torej npr. kolinearnost, konkurenčnost, ne pa npr. ploščina, krogi, sredine daljic itd.

SLIKA 12. Portret Blaisa Pascala

**Blaise Pascal** (1623-1662), pravi matematični genij, je bil rojen v provinci Auvergne. Dvanajstleten je odkril mnoge izreke elementarne geometrije, štirinajstleten že sodeloval pri zbiranju skupine francoskih matematikov, iz katerih je 1666 zrasla Francoska akademija znanosti, šestnajstleten odkril nekatere globoke izreke projektivne geometrije, devetnajstleten skonstruiral vrsto računskega stroja. Leta 1648 je napisal obsežno študijo o stožnicah, leta 1650 je zbolel, kar mu je spremenilo življenje, saj se je odtlej večinoma posvečal globokim religioznim vprašanjem. Za kratek čas se je vrnil k matematiki, eksperimentiral s tlakom v tekočinah (po njem se imenuje enota *pascal*), s Fermatom je sodeloval pri utrjevanju osnov verjetnostnega računa, a se je leta 1654 že vrnil k verski meditaciji. Pred smrtjo je napisal *Provincialna pisma* in *Misli*, dve fundamentalni deli v izbrušenem stilu in vzor vse kasnejše francoske literature. Njegov oče **Étienne Pascal** (1588-1640) je bil tudi sposoben matematik (po njem se imenuje krivulja *Pascalov polž* oziroma *limaçon de Pascal*, ki smo jo omenili v 3. razdelku v zvezi s tretjinjenjem kota).

Descartes in Leibniz sta še videla Pascalovo razpravo o stožnicah (Leibniz je mislil, da jo je napisal oče Étienne), danes je izgubljena. V njej se pojavi "mistični"heksagram, včrtan v stožnico, in s tem povezan izrek projektivne geometrije, da se trije pari nasprotnih stranic sekajo na skupni premici (glej sliko 13).



Slika 13. Pascalov mistični heksagram

To je eden najbogatejših izrekov v geometriji, samo Pascal je iz njega izpeljal več kot 400 posledic. Razprava sicer ni bila nikoli natisnjena, objavil je le eno stran rezultatov (*Essay pour les coniques*), od katere sta ohranjeni le dve kopiji, ena v zbirki Leibnizovih rokopisov v Hannovru, druga v Nacionalni biblioteki v Parizu. Razprava *Traité du triangle arithmétique* je bila natisnjena posthumno leta 1665. V njem je znameniti Pascalov trikotnik (glej spodnjo tabelo) in tudi prva sprejemljiva formulacija principa matematične indukcije. (Najstarejši tak trikotnik so sicer našli v neki kitajski knjigi iz leta 1303.)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | ... |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | ... |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | ... |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Pascalov trikotnik (levi zgornji kot)

Pascal velja tudi za enega od očetov verjetnostnega računa. Igre s kocko so bile od nekdaj popularne. Že Luca Pacioli je v *Summi* 1494 spraševal, kako razdeliti točke med enakovredna igralca, če je igra pri nekem rezultatu prekinjena. O problemu (porazdelitve) točk je razpravljal tudi Cardano v 16. stoletju. Leta 1654 je *Chevalier de Méré*, znani kockar, o tem pisal Pascalu, ta pa Fermatu. Njuna korespondenca velja za začetek teorije verjetnosti.

Zadnje Pascalovo matematično delo pa se tiče *cikloide*, te zanimive krivulje, ki so jo zaradi številnih lepih lastnosti imenovali "Helena geometrije". Pozoren nanjo je bil že Galileo (v zvezi z gradnjo mostov), Pascal pa je začel o njej premišljevati leta 1658 menda zato, da bi pozabil na zobobol. O cikloidi je napisal razpravo, v kateri je poiskal prostornino in površino ustrezne vrtenine ter težišče lika pod njo (ploščino pod njenim lokom so znali izračunati že prej).

Pascal je včasih uporabljal psevdonim *Lovis de Montalte* ali njegov anagram *Amos Dettonville*.

**Računski stroji**

Pascalu pripisujejo tudi iznajdbo prvega računskega stroja. Že leta 1642 je konstruiral mehansko napravo za seštevanje 6-mestnih števil v pomoč očetu pri delu za vlado v Rouenu. Sam Pascal je izdelal 50 protototipov in jih testiral, nato pa v naslednjih desetih letih še 20 takih naprav. Nekatere so še ohranjene.

SLIKA 14. Pascalovi kalkulatorji

Kasneje v tem stoletju je **Gottfried Wilhelm Leibniz** leta 1672 izdelal napravo za množenje, podobno je konstruiral tudi **Samuel Morley** leta 1673 v Angliji in leta 1820 **Thomas de Colmar** (tudi za odštevanje in deljenje). Vse te naprave so bile precej nerodne. Prvi praktično delujoči računski stroj (za vse štiri računske operacije) je patentiral leta 1875 Američan **Frank Stephan Baldwin**, za njim pa leta 1878 podoben stroj Šved **Willgodt Theophile Odhner**.

S tem v zvezi je treba omeniti še Angleža **Charlesa Babbagea** (1791-1871), ki si je zamislil analitičen stroj za računanje matematičnih tabel in izvajanje različnih aritmetičnih operacij. Ker bi delal po inštrukcijah operaterja, je to nekakšen prototip računalnika. Program zanj mu je napisala **Ada Augusta Lovelace** (1815-1852), hči pesnika Lorda Byrona. Prvi sodobni računalniki so se pojavili ob koncu druge svetovne vojne v Ameriki na Harvardski univerzi 1944 (IBM ASCC) in na univerzi v Pennsylvaniji (ENIAC).

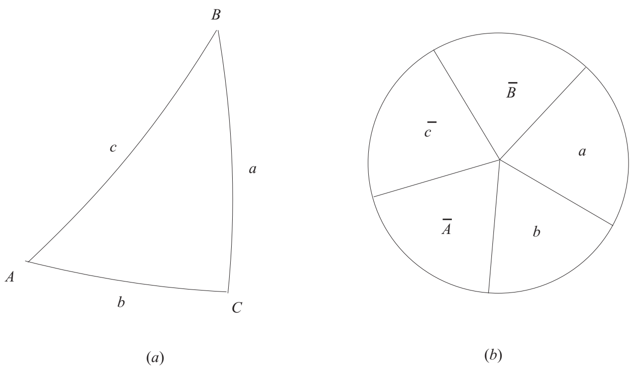
**Vaje**:

(1) Izpelji formulo za **Napierove logaritme** v današnji obliki: $\mathrm{Nap}\log x = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7)$, tako da predpostaviš, da je $-dx/dt = x$ (hitrost točke $S$) in $dy/dt = 10^7$ (hitrost točke $T$). Glej sliko 3.

(2) Z modernimi metodami integralskega računa izračunaj prostornino in površino rotacijskega telesa, če se okrog tetive dolžine $a$, $0 < a < 1$, zavrti (a) večji, (b) manjši od krožnih lokov v rogu s polmerom 1. **Kepler** je prvi primer imenoval *jabolko*, drugega *limona*.

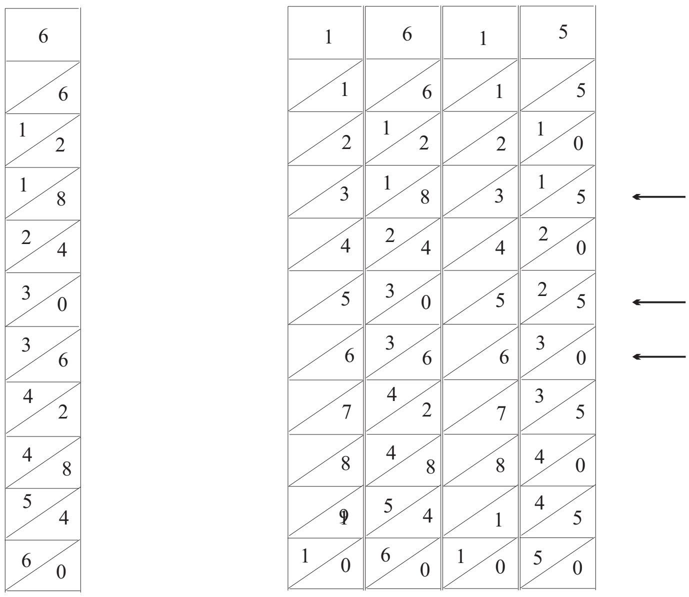
(3) Za sferični trikotnik $ABC$ s stranicami (loki) $a, b, c$ in koti v ogliščih $A, B, C$ izpelji
(a) *kosinusni zakon za stranice*: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$,
(b) *kosinusni zakon za kote*: $\cos C = -\cos A \cos A + \sin A \sin A \cos c$,
(c) *sinusni zakon*: $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$.

(4) Pri pravokotnem sferičnem trikotniku (s pravim kotom pri $C$) veljajo naslednje formule:
(i) $\sin a = \sin A \sin c = \mathrm{tg}\, b \,\mathrm{ctg}\, B$ in podobno za $b$ namesto $a$, $B$ namesto $A$ in obratno,
(ii) $\cos A = \cos a \sin B = \mathrm{tg}\, b \,\mathrm{ctg}\, c$ in podobno za $b$ namesto $a$, $B$ namesto $A$ in obratno,




Slika 15. Napierov krog za lažje pomnenje formul za pravokotni sferični trikotnik

(iii) $\cos c = \cos a \cos b = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$ (Pitagorov izrek za pravokotni sferični trikotnik).
(a) Izpelji zgornje formule iz prejšnjih zakonov.
(b) Preveri naslednji pravili v zvezi z *Napierovim krogom* (glej sliko 15, črtica pomeni komplementarni kot):
(i) *Sinus katerega koli dela je enak produktu kosinusov nasprotnih delov.*
(ii) *Sinus katerega koli dela je enak produktu tangensov priležnih delov.*



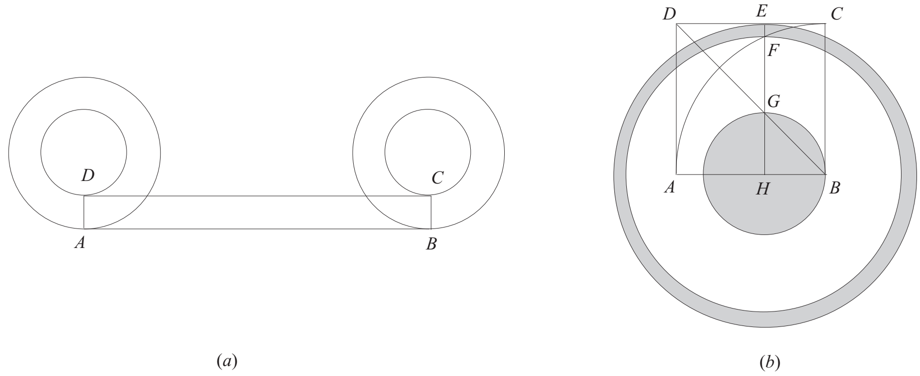
Slika 16. Napierove palice za hitro množenje

(5) *Napierove palice* (*kosti*), so priročno sredstvo za hitro množenje večmestnih števil. Vnaprej je treba pripraviti za vsako od desetih števk ustrezen trak večkratnikov (v več kopijah), tako kot npr. za števko 6 na sliki 16a. Ustrezne trakove potem zložimo skupaj in v ustreznih vrsticah preberemo števila (slika 16b), ki jih potem zamaknemo in seštejemo, npr. $1615 \times 365 = 484500 + 96900 + 8075 = 589475$. Zmnoži na ta način še $163 \times 2334$ in $3116 \times 624$.

(6) **Galileo** ima v *Discorsi* iz leta 1638 opisana naslednja dva paradoksa:

(a) Koncentrična kroga s polmeroma $OA$ in $OC$ sta fiksirana. Ko se veliki krog zakotali po daljici od $A$ do $B$, napravi polni obrat, zato je njegov obseg enak $AB$. V istem času tudi manjši krog napravi polni obrat, zato je njegov obseg enak $CD$ (slika 17a). Razloži, ali sta obsega obeh krogov res enaka.

(b) Naj bo $ABCD$ kvadrat in $HE$ poljubna navpična daljica v kvadratu, ki seka diagonalo $BD$ v točki $G$, krožnico $B(C)$ pa v točki $F$. Narišimo tri kroge: $H(G)$, $H(F)$, $H(E)$ (slika 17b). Pokaži, da je ploščina kroga $H(G)$ enaka ploščini kolobarja med krogoma $H(E)$ in $H(F)$. Če pošljemo $H$ proti $B$, se krog $H(G)$ skrči v točko $B$, kolobar pa v krožnico $B(C)$. Razloži, ali je tedaj res velikost točke $B$ enaka obsegu kroga $B(C)$.



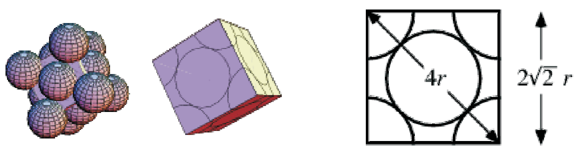

Slika 17. Galilejeva paradoksa

(7) V naslednji tabeli so podani obhodni časi (v letih) šestih planetov in velike polosi njihovih orbit (v astronomskih enotah). Preveri z izračunom, ali velja (približno) **Keplerjev tretji zakon**, da je razmerje med kvadratom obhodne dobe in kubom velike polosi konstantno.

| Planet | Obhodni čas | Velika polos |
|---|---|---|
| Merkur | 0.241 | 0.387 |
| Venera | 0.615 | 0.723 |
| Zemlja | 1.000 | 1.000 |
| Mars | 1.881 | 1.524 |
| Jupiter | 11.862 | 5.202 |
| Saturn | 29.457 | 9.539 |

(8) Mozaik je tlakovanje ravnine s pravilnimi večkotniki. Pokaži naslednje:
(a) V pravilnem $n$-kotniku meri notranji kot $(n-2)\pi/n$.
(b) V mozaiku, sestavljenem iz enakih pravilnih večkotnikov, se v vsakem oglišču stika $2n/(n-2)$ večkotnikov. Poišči vse možnosti.
(c) V mozaiku, pri katerem se v vsakem oglišču stikajo trije različni pravilni večkotniki s stranicami $p, q, r$, velja $1/p + 1/q + 1/r = 1/2$. Poišči tak primer, da je $p + q + r$ najmanjše število.

(9) Pri klasičnem (kubičnem) zlaganju krogel s polmerom $r$ je vsaka celica kocka z robom $2r\sqrt{2}$, vanjo pa spada v vsakem vogalu $1/8$ krogle in v središču vsake stranske ploskve $1/2$ krogle (glej sliko 18). Izračunaj odtod prostornino, ki jo v kocki zavzemajo krogle, in njen delež glede na prostornino cele kocke. Prepričaj se, da na ta način res dobimo za povprečno gostoto takega pakiranja krogel vrednost $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$.



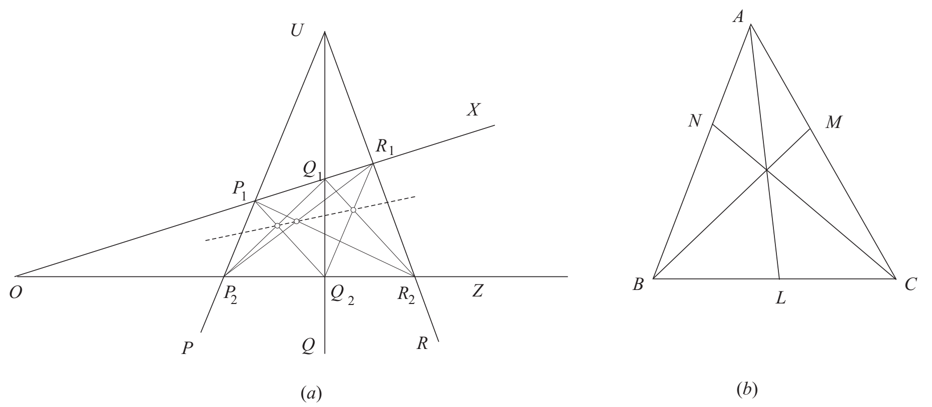

Slika 18. Klasično kubično pakiranje krogel

(10) S projiciranjem ustrezne premice v neskončnost dokažite naslednje trditve:

(a) (**Papos**) Naj bodo $UP$, $UQ$ in $UR$ tri ravninske premice, ki se sekajo v isti točki, premici $OX$ in $OY$ naj jih sekata zapored v točkah $P_1, Q_1, R_1$ in $P_2, Q_2, R_2$ (slika 19a). Potem so presečišča med $Q_1R_2$ in $Q_2R_1$, $R_1P_2$ in $R_2O_1$, $P_1Q_2$ in $P_2Q_1$ kolinearna.

(b) (**Obrat Desarguesovega izreka**) Isto označene stranice dveh ravninskih trikotnikov $A_1B_1C_1$ in $A_2B_2C_2$ naj se sekajo zapored v kolinearnih točkah $L, M, N$. Potem so premice $A_1A_2$, $B_1B_2$ in $C_1C_2$ konkurentne (se sekajo v isti točki).

(c) **Cevov izrek** iz leta 1678 pravi: *Tri daljice, ki povezujejo tri točke $L, M, N$ na stranicah $BC, CA, AB$ trikotnika $ABC$ z nasprotnimi oglišči, se sekajo v isti točki natanko takrat, ko velja* $(AN/NB)(BL/LC)(CM/MA) = 1$ (slika 19b). Z uporabo Cevovega izreka pokaži, da se zveznice dotikališč včrtanega kroga z nasprotnimi oglišči sekajo v isti točki in (s poševno projekcijo) da velja isto za včrtano elipso.




SLIKA 19. Metoda projiciranja

(11) Prepričaj se z zveznostnim argumentom, da **Pascalov izrek o heksagramu** velja tudi, če dve točki (ali več parov točk) na stožnici sovpadata. Z uporabo te posplošitve dokaži naslednje:

(a) Če je na stožnici danih pet točk, načrtaj v katerikoli od njih tangento na stožnico.

(b) Če so na stožnici dane štiri točke in tangenta v eni izmed njih, načrtaj še druge točke na stožnici.

(c) Če so na stožnici dane tri točke in tangenti v dveh od njih, načrtaj tangento v tretji.

(12) V projektivni geometriji v ravnini velja dualnost med točkami in premicami. **Pascalov izrek** (*Šest oglišč šestkotnika leži na stožnici natanko takrat, ko ležijo presečišča treh parov nasprotnih stranic na skupni premici*) ima za dualno verzijo naslednji **Brianchonov izrek** iz 1806: *Šest stranic šestkotnika je tangentnih na stožnico natanko takrat, ko se tri premice, ki povezujejo po dve in dve nasprotni oglišči, sekajo v skupni točki.* Z uporabo tega dokaži:

(a) Če je danih pet premic, poišči na katerikoli od njih dotikališče s stožnico, ki se dotika vseh petih premic.

(b) Če so dane štiri tangente na stožnico in dotikališče ene izmed tangent, konsturiraj nadaljnjo tangento na stožnic.

(c) Poišči dualno obliko Desarguesovega izreka.

(13) **Lucasova števila** $L_n$ dobimo iz Fibonaccijevih tako, da seštevamo dve Fibonaccijevi števili, ki se razlikujeta za 2, torej $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $n \geq 1$ ($F_0 = 0$). V tabeli, iz katere smo dobili Pascalov trikotnik, razmaknimo vrstice. Pokaži naslednje:

(a) Če vsak naslednji stolpec razmaknjene tabele zamaknemo za eno vrstico navzdol in seštejemo po vrsticah, dobimo v $n$-ti vrstici $n$-to Fibonaccijevo število $F_n$.

(b) Če najprej vsaki vrstici prištejemo naslednjo, nato pa zamaknemo prvi stolpec za eno vrstico navzdol, drugega pustimo pri miru, vsakega naslednjega pa za eno vrstico navzdol in seštejemo po vrsticah, dobimo v $n$-ti vrstici $n$-to Lucasovo število $L_n$.

## Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.