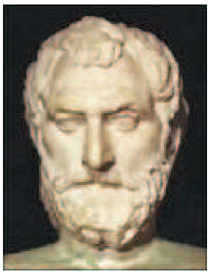
2. Pitagorejska matematika

Zgodovinski okvir

Konec drugega tisočletja pred našim štetjem so se ob vzhodnem Mediteranu zgodile velike politične spremembe. Moč Egipta in Babilonije je venela, pojavila so se nova ljudstva, Židje, Feničani, Grki. Nastopila je železna doba, ki je prinesla novo orožje in novo orodje; izumili so abecedo in uvedli kovani denar. Vrstila so se nova geografska odkritja, trgovina je naraščala, pri čemer so prednjačila mesta ob Sredozemlju, v Mali Aziji, Grčiji in južni Italiji.

V tem času so začeli opuščati mitološko razlago sveta. Prevladoval je duh racionalizma, ki mu ni več zadoščal odgovor na vprašanje *kako*, ampak je hotel vedeti tudi *zakaj*. Pojavila se je potreba po *dokazovanju* in z njo se je v Mali Aziji rodila prava matematika.

Prvi znani predstavnik jonske naravne filozofije je bil **Tales iz Mileta** (~ 624-546 pnš.) (slika 1), trgovec in popotnik (obiskal je Egipt), hkrati prvi, ki je življenje posvetil študiju matematike. Ko se je vrnil s potovanja, je v svojem mestu postal svetnik, inženir, poslovnež, filozof, matematik in astronom (pravilno napovedal sončni mrk). Pripisujejo mu naslednje rezultate, do katerih se je dokopal z logičnim razmišljanjem:
(1) premer razpolavlja krog,
(2) v enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici enaka,
(3) trikotnika sta skladna, če imata enaka dva kota in eno stranico,
(4) v polkrog včrtan kot je pravi.



Slika 1. Tales iz Mileta

Zgodovinski viri

Zgodnje grške matematike poznamo le po mnogo kasnejših zapisih in komentarjih (krščanskih, arabskih).

Prvi zgodovinar matematike je bil **Evdem z Rodosa** (~ 350-290 pnš.), Aristotelov učenec, ki je opisal čas nekako do leta 335 pnš., a se je na žalost njegov spis izgubil. Zanj vemo le po mnogo kasnejšem povzetku, ki ga je v sklopu svojega *Komentarja o Evklidu* okrog leta 450 nš. sestavil neoplatonist **Proklos** (410-485 nš.). To je najbolj zanesljiv vir za starejšo grško matematiko, vsebuje tudi podatke o Pitagori in pitagorejcih.

Moderne raziskave so opravili zgodovinarji matematike, kot so bili npr. *Hieronymus Georg Zeuthen* (1839-1920), *Paul Tannery* (1843-1904), *Johan Ludvig Heiberg* (1854-1928), *Thomas Little Heath* (1861-1940) in drugi.

Pitagorejska matematika

Pitagora (slika 2) je bil rojen ~ 572 pnš. na Samosu in je okrog petdeset let mlajši od Talesa. Najbrž je bil njegov učenec. Tudi on je potoval v Perzijo in v Egipt. Po vrnitvi je na Samosu našel Polikratovo tiranijo in se je pred njo umaknil v Krotono v južni Italiji, kjer je ustanovil svojo (filozofsko, znanstveno, matematično in versko) šolo. V tej šoli so na tajnih sestankih svoje vedenje in znanje širili samo ustno. Gojili so vero v moč števil (ki sestavljajo svet), njihove znanosti so bile aritmetika, geometrija, glasba in astronomija (v srednjem veku so to imenovali *kvadrivium*, ki se mu je pridružil z gramatiko, logiko in retoriko še *trivium*; skupaj torej t.i. *sedem liberalnih umetnosti*). Pitagora je odkril harmonijo tonov; zaradi svojega eksperimentiranja s strunami velja za prvega matematičnega fizika. Prvi je uporabljal besedo "filozof". Notranji krog približno 600 študentov so bili ti. *matematiki*, zunanji, okrog 2000 študentov, pa *akuzmatiki*. Njegova žena *Teona* je pripadala prvemu krogu in bi lahko bila prva po imenu znana matematičarka. Ko so zaradi aristokratske zaprtosti in misticizma pitagorejce pregnali iz Krotone, se je Pitagora zatekel v Metapont, kjer je umrl (morda je bil celo umorjen) v starosti 75 do 80 let. Njegovi pripadniki so se potem razkropili, a so delovali vsaj še dve sto let.

Slika 2. Pitagora s Samosa

Zanimanje pitagorejcev na matematičnem področju je bilo usmerjeno v aritmetiko, povezano z geometrijo (osnove teorije števil, npr. popolna, prijateljska, figurativna števila, pitagorejske trojice), začetke algebre v povezavi z geometrijo (Pitagorov izrek, geometrijski dokazi algebraičnih identitet, geometrijska rešitev kvadratne enačbe) in geometrijo (transformacija likov z isto ploščino, pravilna telesa).

Prijateljska števila

Dve naravni števili sta prijateljski, če je vsako od njiju vsota pravih deliteljev drugega. Kot pravi neoplatonist **Jamblih iz Apameje** ($\sim$ 245-325 nš.), naj bi prvi par prijateljskih števil (284, 220) odkril **Pitagora**, drugi par (2620,2924) je našel **Euler**, ki je leta 1747 podal seznam 30 prijateljskih parov, kasneje pa jih je našel vsaj še toliko. Euler je posplošil neko formulo za generiranje prijateljskih parov, ki jo je našel **Tabit Ibn Qurra** iz 9. stoletja (glej vajo 5). Zanimivo je, da je leta 1866 šestnajstletni fant s slavnim imenom **Nicolo I. Paganini** odkril spregledani drugi najmanjši par prijateljskih števil (1184, 1210) (glej vajo 4a). Do leta 1946 so odkrili 390 parov, kasneje so si pomagali z računalniki pri iskanju vseh prijateljskih parov do neke (visoke) meje, npr. do 10^{12}. Leta 2007 je bilo znanih skoraj 12.000.000 prijateljskih parov. V zvezi s prijateljskimi števili so še vedno odprti problemi. Ni znano npr. ali obstaja par prijateljskih števil, katerih komponenti sta nasprotne parnosti (eno sodo, eno liho); prav tako ni znano, ali obstaja prijateljski par tujih si števil (brez skupnega faktorja); in še mnogo drugih nerešenih vprašanj.

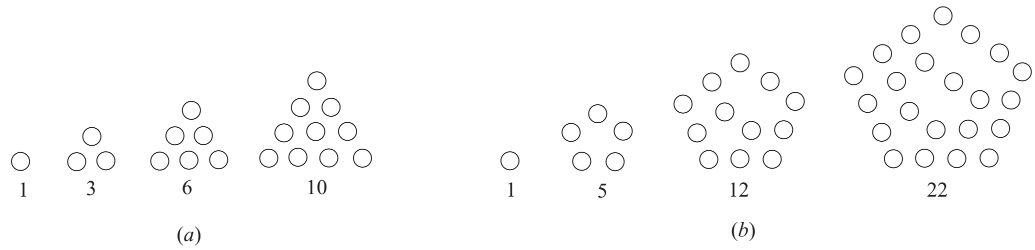
Popolna (perfektna) števila

To so taka, ki so enaka vsoti vseh svojih pravih deliteljev. Grki so poznali prva štiri: 6, 28, 496, 8128, peto (33.550.336) je našel leta 1456 neznani matematik. Do leta 1952 je bilo znanih samo 12 popolnih števil, do junija 2010 pa 47; vsa znana popolna števila so soda. Ni znano, ali je popolnih števil neskončno mnogo. Prav tako ni znano, ali obstaja liho popolno število; če je, je gotovo zelo veliko, večje od 10^{1500}. Metodo, kako poiskati soda popolna števila, je poznal že **Evklid** (v IX. knjigi *Elementov*): Če je $2^n - 1$ praštevilo (tako število danes imenujemo *Mersennovo praštevilo*, glej vajo 2 in opombo k njej), je $2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število (vaja 3). Kot je dokazal **Euler** (glej vaji 6 in 7), velja v resnici tudi obratno, tako da imamo bijekcijo med popolnimi števili in Mersennovimi praštevili. Npr. $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ ni praštevilo, torej $2^{10}(2^{11} - 1)$ ni popolno število. Na vzporednih računalnikih teče danes mednarodni projekt za iskanje novih Mersennovih praštevil.

Naslednji, ki je temeljiteje študiral popolna števila, je bil **Nikomah iz Gerase** $\sim$ 100 nš., ki je definiral *presežna* (*obilna*) in *pomanjkljiva števila*. Prva so taka, da vsota njihovih deliteljev preseže vrednost števila, pri drugih pa je ta vsota manjša od samega števila. Kasneje so o tem pisali **Sv. Avguštin** (354-430), **Tabit ibn Qurra** (826-901), **Alhazen** ali **Ibn al-Haitham** (965-1040), ki je podal delni obrat Evklidove trditve, in drugi, manj in bolj znani matematiki, med slednjimi npr. **Fermat**, **Mersenne**, **Euler** in drugi.

Figurativna števila

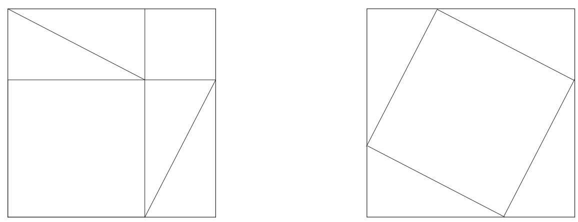
Tako se imenujejo števila točk v neki gemetrijski konfiguraciji, npr. *trikotna*, *kvadratna*, *petkotna števila* (slika 3). Med njimi so različne zveze, ki jih lahko dokažemo algebrajsko (z indukcijo) ali geometrijsko. Zgled: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, $S_n = T_n + T_{n-1}$, $P_n = n + 3T_{n-1}$ itd. (glej vaji 8 in 9). Odkritje figurativnih števil nedvomno pripada pitagorejski šoli.



Slika 3. Trikotna in petkotna števila

Pitagorov izrek in pitagorejske trojice

Čeprav so izrek morda poznali že stari Babilonci več kot tisoč let prej, zagotovo pa indijski matematik **Baudhayana** $\sim$ 800 pnš., prvi dokaz (z dopolnitvijo do kvadrata) pripisujejo Pitagori (slika 4). V dokazu, da na sredi res dobimo kvadrat, potrebujemo, da je vsota kotov v trikotniku 180 stopinj (za to pa lemo o kotih ob vzporednicah).



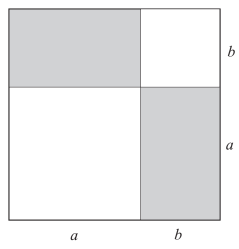
Slika 4. Pitagorov dokaz Pitagorovega izreka

Po tem prvem dokazu je znanih več kot 400 različnih dokazov, zelo zanimivih in iznajdljivih (glej vajo 11). Samo *E.S. Loomis* jih je zbral 371 in objavil leta 1927 (številne dokaze glej npr. v [27] ali [31]). S Pitagorovim izrekom je tesno povezan pojem *pitagorejskih trojic*: celih števil a, b, c, za katera velja $a^2 + b^2 = c^2$. Pitagora jih je znal generirati s formulo $(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$, kjer je m lih, tako da je $a = m$, $b = (m^2-1)/2$ in $c = (m^2+1)/2$. To je poseben primer današnje reprezentacije $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$. Če sta u, v tuji si števili različne parnosti, dobimo na ta način vse primitivne pitagorejske trojice, tj. pitagorejske trojice brez skupnega faktorja.

Algebraične identitete

Stari Grki niso poznali algebraične notacije, zato so npr. pitagorejci različne algebraične identitete odkrili in dokazovali geometrijsko, npr. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (glej sliko 5).

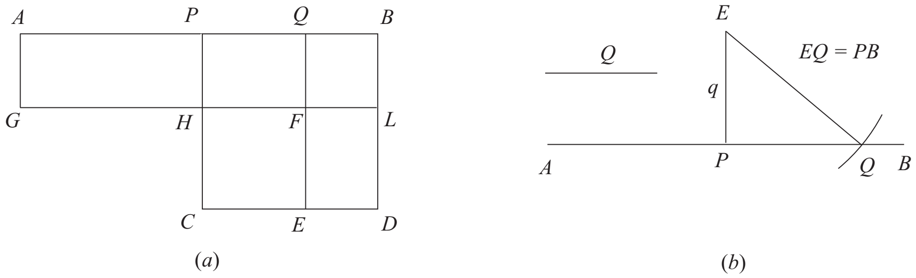
V II. knjigi *Elementov* najdemo npr.:



Slika 5. Geometrijsko dokazovanje algebraične identitete

Trditev 1. *Na daljici AB z razpoloviščem P naj bo Q nadaljna točka. Potem velja enakost* $(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$.

Dokaz: Pol pravokotnika z osnovnico AB in višino QB, prenesemo zasukanega za 90 stopinj pod daljico QB in dobljeni gnomon dopolnimo do kvadrata (glej sliko 6a).



Slika 6. Evklidovo reševanje kvadratne enačbe

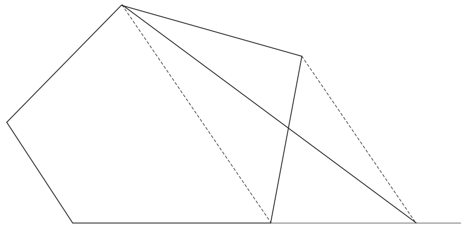
Geometrijska rešitev kvadratne enačbe

Če izberemo $AQ = 2a$ in $QB = 2b$, dobimo identiteto $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$, pri izbiri $AB = 2a$ in $PQ = b$ pa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Če leži točka Q zunaj daljice AB, dobimo podobno $(AQ)(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$. S tem v zvezi lahko geometrijsko poiščemo (pozitivno) rešitev kvadratne enačbe $x^2 - px + q^2 = 0$, $q \leq p/2$, saj iz trditve 1 pri $AB = p$ in $AQ = x$, dobimo omenjeno enačbo zaradi $AQ + QB = p$ in $(AQ)(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2$ (Pitagorov izrek) $= q^2$ (glej sliko 6b).

Podobno iz analogne trditve (ko je Q zunaj daljice AB) izpeljemo rešitev za malo drugačno enačbo $x^2 - px - q^2 = 0$. Nasprotni števili potem rešita enačbo $x^2 + px = \pm q^2$.

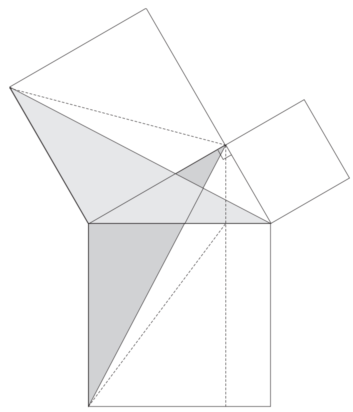
Geometrijske transformacije, ki ohranjajo ploščino

Pitagorejci so znali zmanjšati število stranic večkotnika, pri čemer so ohranili ploščino. Iz konveksnega oglišča potegnemo vzporednico zadnji diagonali, da seka podaljšek osnovnice (slika 7). Trikotnika z isto osnovnico in višino imata isto ploščino.



Slika 7. Transformacija večkotnika, ki ohranja ploščino

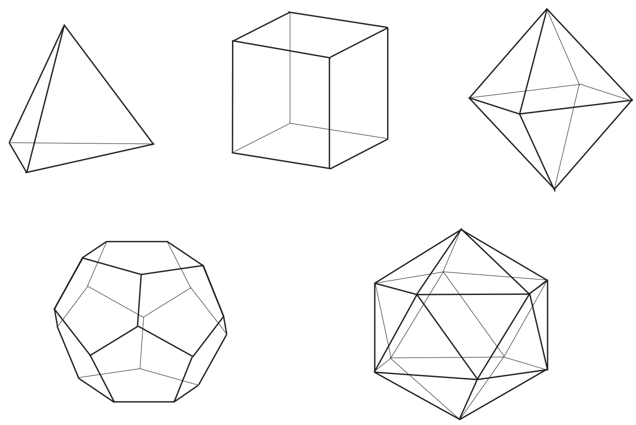
Evklid je to dejstvo izkoristil pri svojem znanem dokazu Pitagorovega izreka (slika 8).



Slika 8. Evklidov dokaz Pitagorovega izreka

Platonska telesa

Pitagorejci so tudi poznali nekatera pravilna telesa: *tetraeder*, *kocko* in *dodekaeder*, *oktaeder* in *ikozaeder* pa je odkril **Teajtet** $\sim$ 375 pnš. (slika 9). Opise vseh je podal **Platon** (430-349 pnš.), zato jih imenujemo tudi *platonska telesa*. Platon jih je povezal s štirimi *klasičnimi elementi* (zemlja - kocka, zrak - oktaeder, voda - ikozaeder, ogenj - tetraeder). Teajtet je dokazal, da drugih pravilnih teles ni. Leta 1885 so pri Padovi izkopali igračo v obliki dodekaedra iz časa $\sim$ 500 pnš.



Slika 9. Platonska telesa

Odkritje iracionalnih števil

Najverjetneje so najprej odkrili, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, morda pa se je to zgodilo s $\sqrt{5}$. Algebraičen dokaz je standarden, geometrijski malce bolj zapleten, s protislovjem (glej vajo 12). Odkritje je pomenilo velik logični škandal, saj je vsa pitagorejska filozofija temeljila na racionalnih razmerjih daljic (in števil). Pitagorejci so odkritje hoteli obdržati v tajnosti. Legenda pa pravi, da je **Hipasus** skrivnost izdal in bil zato kaznovan. Po Platonovem pripovedovanju je kasneje **Teodor iz Kirene** dokazal tudi iracionalnost drugih korenov ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$,$\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$). Njegovo delo je nadaljeval **Teajtet**, škandal pa je leta 370 pnš. dokončno razrešil **Evdoks iz Knida**, učenec **Platona** in pitagorejca **Arhita** z novo definicijo proporcionalnosti (glej spodaj).

Zenonovi paradoksi

Odkritje iracionalnosti, ki smo ga omenili, je povzročilo prvo veliko krizo v zgodovini matematike. Obstoj količin (dolžin, ploščin, prostornin), ki se jih ne da dobiti drugače kot z nekim neskončnim procesom (kot npr. diagonalo v enotskem kvadratu, ploščino kroga s polmerom 1 ali prostornino piramide), je dodobra zamajal dotedanje pitagorejsko prepričanje o harmonično zgrajenem svetu, temelječem na razmerju med celimi števili. Grški strah pred neskončnostjo so še povečali čisto filozofki premisliki o osnovah tedanjega dojemanja sveta.

Grški filozof **Zenon iz Eleje**, Parmenidov učenec, jih je formuliral ~ 450 pnš. Znani so štirje paradoksi:
(1) *Dihotomija*: če hočemo priti do konca odseka, moramo najprej doseči polovico, še prej četrtino itd. ad infinitum; ali sploh lahko začnemo?
(2) *Puščica*: v vsakem trenutku puščica miruje, ker ima fiksno pozicijo; ali se sploh lahko začne gibati?
(3) *Ahil in želva*: Ahil je dvakrat hitrejši od želve, ki ima pred njim določeno prednost; ko pride Ahil do mesta, kjer je bila želva v začetku, je le-ta že pol poti naprej itd; ali jo sploh kdaj ujame?
(4) *Stadion*: V treh vrstah so ljudje A v prvi pri miru, v drugi se B gibljejo z določeno hitrostjo v desno, v tretji C z isto hitrostjo v levo; če potrebuje B do naslednjega A enoto časa, potrebuje do naslednjega C le pol enote časa; ali potem lahko obstaja najmanjši nedeljiv del časa?

Ti paradoksi dokazujejo, da gibanje ni možno, če predpostavimo, da je
(a) dolžina neomejeno deljiva (dihotomija, Ahil in želva), ali da je
(b) čas sestavljen iz nedeljivih (atomarnih) enot (puščica, stadion).

Na sploh so Grki verjeli, da je neskončna vsota pozitivnih količin neskončno velika ter da je končna ali neskončna vsota ničelnih količin ničelna.

Evdoksova teorija sorazmernosti

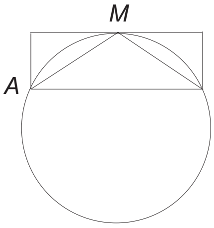
Arhitov in Platonov učenec **Evdoks iz Knida** je ~ 370 pnš. formuliral novo teorijo proporcionalnosti, da bi lahko vse geometrijske količine (tudi nesoizmerljive) obravnaval precizno in enotno. Vsaka taka količina (npr. λ) je določena, če poznamo njeno pozicijo med količinami (npr. a), ki so v racionalnem razmerju z dano količino. Torej $\lambda = \mu$, če iz $a < \lambda$ sledi $a < \mu$ in obratno. To je zelo moderno gledanje (iracionalno število poznamo, če poznamo vsa manjša in vsa večja racionalna števila). Evdoksovo teorijo sorazmernosti je vključil Evklid v V. knjigo, Teodorovo in Teajtetovo obravnavo nesoizmerljivih količin pa v X. knjigo *Elementov*. Iz Teajtetovih in Evdoksovih idej je črpal tudi nemški matematik **Richard Dedekind**, ko je leta 1872 predstavil moderno teorijo realnih števil (Dedekindovi rezi).

Evdoksova metoda izčrpavanja

Ta metoda je posplošitev teorije sorazmernosti. Kot vsaka (iracionalna) količina je tudi ploščina poljubnega lika ali prostornina poljubnega telesa določena z aproksimacijami. Krog npr. aproksimiramo z včrtanimi ali očrtanimi večkotniki, piramido s stopničasto naloženimi prizmami ipd.

V resnici pripisujejo enega od zgodnejših poskusov kvadrature kroga že sofistu **Antifonu** (~ 430 pnš.), Sokratovemu sodobniku. V krog je včrtaval pravilne večkotnike z vedno večjim (podvojenim) številom stranic. Sklepal je takole: ker se vsak večkotnik da kvadrirati, lahko v limiti kvadriramo tudi krog. Kritiki so mu odgovarjali: zaradi neskončne deljivosti količin kroga nikoli ne napolnimo v končno korakih. To je res, toda pri marsikateri izpeljavi zadošča le končno mnogo približkov.

Zgled: Uporabimo teorijo sorazmernosti za dokaz, da za krog s premeroma d_1, d_2 velja za razmerje ploščin $A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2$. Ploščina trikotnika ABM nad tetivo AB z ekstremno točko M na loku je enaka polovici ploščine pravokotnika $ABCD$ nad isto tetivo, zato večja od polovice krožnega odseka (glej sliko 10). Če bi veljalo $A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$, bi lahko včrtali večkotnik P_1 tako, da bi se njegova ploščina poljubno malo razlikovala od A_1 in bi zato veljalo $P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$. Če je P_2 podoben večkotnik, včrtan v drugi krog, bi zaradi



Slika 10. Včrtavanje večkotnikov v krog

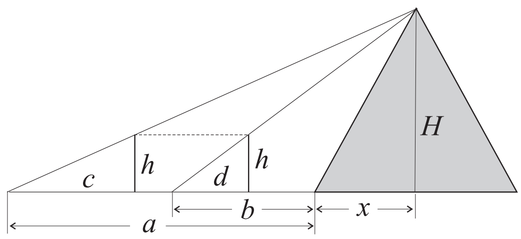
$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$ imeli $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$ oziroma $P_2 > A_2$, kar je protislovje. Podobno zavrnemo neenakost $A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2$. Če je torej A ploščina in d premer kroga, mora veljati $A = kd^2$, kjer je k konstanta (enaka $\pi/4$) za vse kroge.

Evdoksovo teorijo sorazmernosti in metodo izčrpavanja lahko imamo za odgovor platonske matematične šole na krizo iracionalnosti in na Zenonove paradokse. Kasneje jo je uporabljal in izpopolnil **Arhimed**. Za praktično uporabo je pomembna naslednja trditev: *Če od količine odštejemo vsaj pol, od ostanka vsaj pol itd., lahko dosežemo, da je po določenem številu korakov ostanek poljubno majhen* (*manjši od vsake vnaprej predpisane količine*).

Ta princip, ki v bistvu pomeni *Arhimedovo lastnost* realnih števil, pogosto zadošča za dokaz (s protislovjem) in ni treba napraviti neskončno mnogo korakov.

Vaje:

(1) **Tales** je v Egiptu računal višino piramide s podobnimi trikotniki [13]. Izpelji, kako je z dvema merjenima lahko zaobšel problem, da ni mogel izmeriti razdalje znotraj piramide (glej sliko 11).



Slika 11. Računanje višine piramide po Talesu

(2) Pokaži, da mora biti tudi n praštevilo, če je tako število $2^n - 1$. Obratno pa ne velja, prepričaj se, da je npr. število $2^{11} - 1$ deljivo s 23 (glej npr. [2]).

Opomba. Praštevila oblike $2^n - 1$ se imenujejo *Mersennova praštevila*. Ime so dobila po francoskem duhovniku in matematiku, Descartesovem sodobniku, **Marinu Mersennu** (1588-1648), ki je poznal prvih osem takih praštevil (za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ in 31). Menil je, da je tudi $2^{67} - 1$ praštevilo, kar pa je leta 1876 ovrgel **Édouard Lucas** (1842-1891), vendar brez faktorizacije. Pač pa je leta 1903 ameriški matematik **Frank Nelson Cole** (1861-1926) na srečanju Ameriškega matematičnega društva (AMS) "predaval" o tem številu. Brez besed je na tablo napisal vrednost $2^{67} - 1 = 147, 573, 952, 589, 676, 412, 927$ in nato zmnožil števili 761,838,257,287 in 193,707,721. Dobil je isti rezultat in - velik aplavz. Po Coleu, ki je bil v zadnjih letih 19. stoletja tudi tajnik AMS in urednik *Bulletina AMS*, se danes imenujeta dve prestižni nagradi Ameriškega matematičnega društva (za algebro in za teorijo števil).

(3) **Evklid** je dokazal, da je $2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število, če je $2^n - 1$ praštevilo.
(a) Napiši prvih pet popolnih števil, ki jih dobimo po tej poti.
(b) Dokaži Evklidovo trditev. (Navodilo [12]: poišči vse prave delitelje števila $N = 2^{n-1}p$, kjer je $p = 2^n - 1$ praštevilo, in jih seštej.)

(4) Pokaži:
(a) Števili 1184 in 1210 sta prijateljski.
(b) Vsak večkratnik presežnega (obilnega) ali popolnega števila je presežno število.
(c) Napiši vsa presežna števila manjša od 100 in ugotovi, da so vsa soda.
(d) Pokaži, da je $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ presežno število (to je najmanjše liho presežno število).

(5) Znani sta naslednji pravili za generiranje prijateljskih števil (glej splet):
(a) (**Tabit ibn Qurra**) Če za praštevila p, q, r velja $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ in $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, kjer je $n > 1$, sta $2^n pq$ in $2^n r$ prijateljski števili.
(b) (**Euler**) Če za praštevila p, q, r velja $p = 2^m(2^{n-m} + 1) - 1$, $q = 2^n(2^{n-m} + 1) - 1$ in $r = 2^{m+n}(2^{n-m} + 1)^2 - 1$, kjer je $n > m > 0$, sta $2^n pq$ in $2^n r$ prijateljski števili (posplošitev pravila (a) pri $m = n - 1$).
Poišči vse prijateljske pare po pravilu (a) za $n \leq 3$ in po pravilu (b) za $m, n \leq 3$.

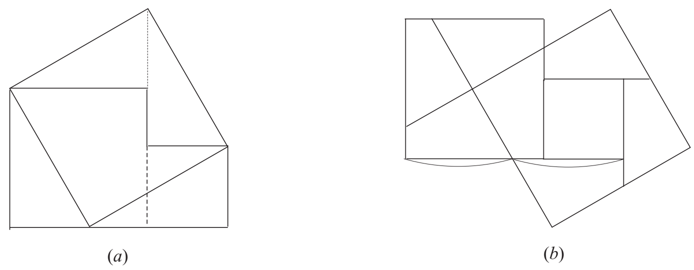
(6) **Euler** je vsoto *vseh* deliteljev naravnega števila n označil s $\sigma(n)$; tako je npr. $\sigma(p) = p + 1$ natanko takrat, ko je p praštevilo. Splošneje velja $\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + ... + p^k = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$ in v posebnem primeru $\sigma(N) = 2N - 1$, če je $N = 2^k$. Da se pokazati, da ima funkcija σ multiplikativno lastnost: $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Pokaži:
(a) Število n je popolno natanko takrat, ko je $\sigma(n) = 2n$.
(a) Par števil (m, n) je prijateljski natanko takrat, ko je $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$.
(c) Vsota recipročnih vrednosti vseh deliteljev popolnega števila je enaka 2.

(7) Dokaži **Eulerjevo** trditev, da je *vsako sodo* popolno število N oblike $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ (glej [12]), tako da najprej zapišeš N v obliki $N = 2^{n-1}b$, kjer je $n > 1$ in b liho število. Zaradi popolnosti je $\sigma(N) = 2N = 2^n b$, po drugi strani pa zaradi multiplikativnosti funkcije σ velja $\sigma(N) = (2^n - 1)\sigma(b)$. Izenačimo in odtod izpeljemo obstoj takega števila $c \geq 1$, da je $\sigma(b) = 2^n c$ in $b = c(2^n - 1)$. Predpostavi $c > 1$.
(a) Pokaži, da so števila $1, b, c$ in $2^n - 1$ *različni* delitelji števila b (glej [12]).
(b) Odtod izpelji $\sigma(b) \geq 1 + b + c + (2^n - 1) = 2^n(c + 1)$, kar je v nasprotju z $\sigma(b) = 2^n c$.
(c) Prepričaj se, da preostala možnost $c = 1$ pomeni, da je $b = 2^n - 1$ in $\sigma(b) = b + 1$, tako da je b tudi praštevilo.

(8) Algebrajsko in geometrijsko dokaži naslednje trditve:
(a) Vsako kvadratno število je vsota dveh zaporednih trikotnih števil: $S_n = T_n + T_{n-1}$.
(b) Osemkratnik trikotnega števila, povečan za 1, je kvadratno število: $8T_n + 1 = S_{2n+1}$.
(c) Vsako petkotno število je vsota aritmetičnega zaporedja s prvim členom 1 in diferenco 3: $P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)$. Izraunaj eksplicitno, koliko je P_n.
(d) Petkotno število P_n je za n povečan trikratnik trikotnega števila T_{n-1}, torej $P_n = n + 3T_{n-1}$.

(9) Pravokotna števila so števila oblike $R_n = n(n + 1)$. Prepričaj se, da je
(a) vsota prvih n sodih števil pravokotno število R_n in vsota prvih n lihih števil kvadratno število S_n,
(b) vsako pravokotno število vsota dveh enakih trikotnih števil,
(c) pravokotno število R_{3n-1} enako šestkratniku petkotnega števila P_n.

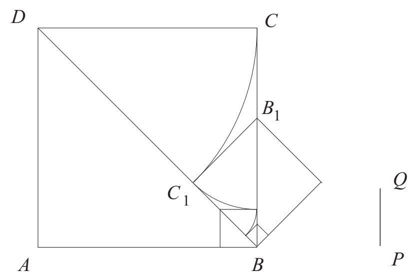
(10) Proklov *Evdemski povzetek* pozna tri klasične sredine dveh pozitivnih števil a in b, $a > b$: *aritmetično* $A = (a+b)/2$, *geometrijsko* $G = \sqrt{ab}$ in *harmonično* $H = 2ab/(a+b)$. Pokaži:
(a) $H \leq G \leq A$ z enakostjo natanko takrat, ko je $a = b$,
(b) $a/A = H/b$,
(c) H je harmonična sredina natanko takrat, ko obstaja tako pozitivno število c, da je $a = H + a/c$ in $H = b + b/c$,
(d) $1/(H - a) + 1/(H - b) = 1/a + 1/b = 2/H$,
(e) če je b harmonična sredina za a in c, je $b/(a + c)$ harmonična sredina za $a/(b + c)$ in $c/(a + b)$.



Slika 12. Ibn Qurrov in Dudeneyev dokaz Pitagorovega izreka

(11) Dva večkotnika sta *kongruentna* (*enaka*) *po razdelitvi* (*po seštevanju*), če lahko vsakega razdelimo na enako mnogo delov tako, da je vsak del enega lika skladen z enim od delov drugega lika, in *po dopolnitvi* (*po odštevanju*), če ju lahko s paroma skladnimi deli dopolnimo do dveh likov, ki sta kongruentna po razdelitvi. Dokazati se da, da sta poljubna večkotnika z isto ploščino enaka po razdelitvi ali po dopolnitvi (*Bolyai-Gerwienov izrek*). Prepričaj se, da uporablja
(a) Pitagorov dokaz Pitagorovega izreka (slika 4) kongruentnost po dopolnitvi,
(b) Tabit ibn Qurrov dokaz iz 9. stoletja (Perigalov iz 1873) na sliki 12a in Dudeneyev dokaz iz 1917 na sliki 12b pa kongruentnost po razdelitvi.

(12) Predpostavimo, da sta tako diagonala BD kot stranica AB kvadrata na sliki 13 celi večkratnik neke majhne daljice PQ. Pokaži,
(a) da sta potem tudi diagonala BB_1 in stranica BC_1 manjšega kvadrata cela večkratnika iste količine PQ,
(b) da merita BB_1 in BC_1 manj kot polovica količin BD oziroma AB in
(c) da po dovolj velikem številu korakov lahko s ponavljanjem istega postopka zmanjšamo dimenzije kvadrata pod PQ, kar je protislovje in pomeni, da razmerje $BD : AB$ ni racionalno.



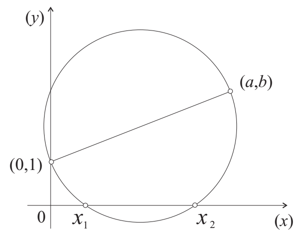
Slika 13. Geometrijski dokaz iracionalnosti kvadratnega korena iz 2

(13) Načrtaj tri različno dolge daljice, najdaljša naj meri a enot, srednja b enot, najkrajša pa naj meri 1 enoto. Z ravnilom in šestilom načrtaj daljice dolžine:
(a) $a + b$ in $a - b$,
(b) a^2 in $\sqrt{a}$,
(c) ab in a/b.

(14) Če je dana daljica dolžine 1, konstruiraj z ravnilom in šestilom (pozitivno) rešitev kvadratne enačbe
(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$,
(b) $x^2 + 4x - 21 = 0$.

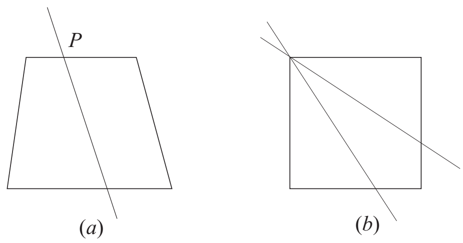
(15) Z ravnilom in šestilom razdeli daljico a v dva dela tako, da bo razlika njunih kvadratov enaka njunemu produktu. Pokaži, da je tedaj večji od delov geometrijska sredina daljice in drugega dela (pravimo, da smo daljico razdelili v razmerju *zlatega reza*). (Navodilo: geometrijsko reši ustrezno kvadratno enačbo.)

(16) Škotski pisec in učitelj matematike **Thomas Carlyle** (1795-1881) je predlagal naslednjo metodo za geometrijsko reševanje kvadratne enačbe oblike $x^2 - ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ (glej [13]): če krožnica s premerom od $(0, 1)$ do (a, b) seka abscisno os, sta abscisi presečišča korena kvadratne enačbe (glej sliko 14).
(a) Utemelji postopek.
(b) S to metodo reši kvadratne enačbe iz (14) in (15).



Slika 14. Carlyleova geometrijska metoda reševanja kvadratne enačbe

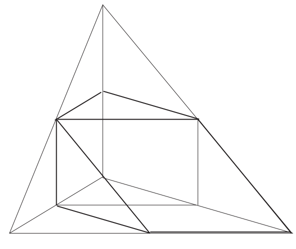
(17) Z ravnilom in šestilom razdeli [13]:
(a) trapezoid s premico skozi poljubno točko P na krajši osnovnici na dva ploščinsko enaka dela (slika 15a),
(b) kvadrat z dvema premicama skozi eno oglišče na tri ploščinsko enake dele (slika 15b).



Slika 15. Delitev večkotnika na ploščinsko enake dele

(18) Z ravnilom in šestilom določi kvadrat z isto ploščino
(a) pravilnemu šestkotniku,
(b) poljubnemu petkotniku.

(19) Razpolovi stranico tetraedra in vanj včrtaj dve prizmi kot na sliki 16. Ponovi Evklidovo izpeljavo formule za prostornino tetraedra $V = (O \cdot h)/3$ (glej sliko 16), tj. pokaži, da je:
(a) skupna prostornina obeh včrtanih prizem enaka $(O \cdot h)/4$, kar je več kot polovica prostornine, tako da lahko z iteracijo prostornino tetraedra aproksimiramo s prostorninami prizem tako dobro, kot želimo;
(b) prostornina tetraedra potem (v današnji obliki) enaka $(1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + ...)O \cdot h = (O \cdot h)/3$.



Slika 16. Evklidova izpeljava prostornine piramide

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.

[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.

[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.

[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.

[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.

[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.

[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.

[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.

[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.

[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.

[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.

[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.

[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.

[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.

[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.

[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu

[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.

[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.

[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).

[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.

[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.

[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.

[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).

[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.

[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.

[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.

[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.

[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)

[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.

[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.

[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.

[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.

[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.

[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.

[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.

[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.

[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.

[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.

[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.

[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.

[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.