13. Razvoj matematike v 19. stoletju

Kot rečeno, bomo v 19. stoletju zaradi obilice materiala in eksponentne rasti pomembnih matematičnih rezultatov lahko omenili le nekatere posameznike, ki so prispevali h glavnim trendom v razvoju moderne matematike, ki je tedaj že močno presegla elementarni nivo in postala bolj zahtevna. Večino časa bomo posvetili razvoju analize, ki se je razvila iz osnov diferencialnega in integralskega računa.

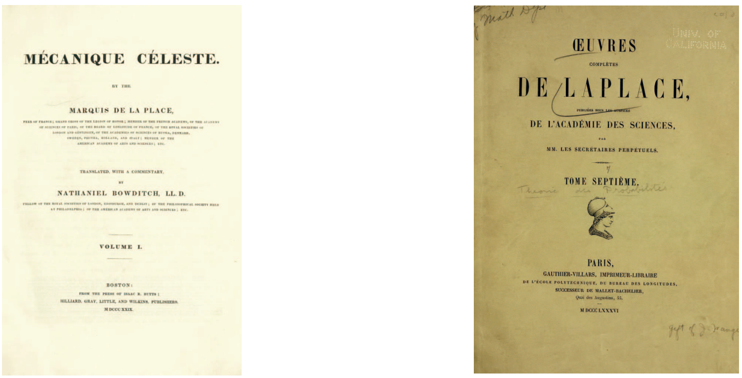
Napoleonovi sodobniki

Tako kot **Monge** so bili Napoleonovi sodobniki tudi **Laplace**, **Legendre** in **Fourier**, rojeni sredi 18. stoletja, svoja glavna dela pa so ustvarili že v novem stoletju. Prvi se je uveljavil že pred revolucijo, kot politični oportunist pa je dobro shajal tudi med njo in potem pod Napoleonom. Zadnji pa je bil sploh Napoleonov privrženec in imel pod njim (kot Monge) visoke politične funkcije.

Slika 1. Posthumni Laplaceov portret iz leta 1842

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Kljub revnim staršem je zaradi svoje matematične sposobnosti naredil veliko kariero kot učitelj in znanstvenik. Njegovo področje so bila nebesna mehanika, geodezija, diferencialne enačbe in verjetnost. Napisal je dve monumentalni deli: *Traité de mécanique céleste* v petih volumnih 1799-1825 in *Théorie analytique de probabilité* 1812.



Slika 2. Laplaceovi knjigi o nebesni mehaniki in teoriji verjetnosti

Zaradi prvega dela so ga primerjali z Newtonom. Drugo delo zajema poleg klasične definicije verjetnosti razprave o igrah na srečo, geometrijski verjetnosti, Bernoullijevem izreku, normalni porazdelitvi, metodi najmanjših kvadratov in aposteriorni verjetnosti Thomasa Bayesa; v delu je izpeljana tudi *Laplaceova transformacija*, ki jo je uporabil pri reševanju diferencialnih enačb.

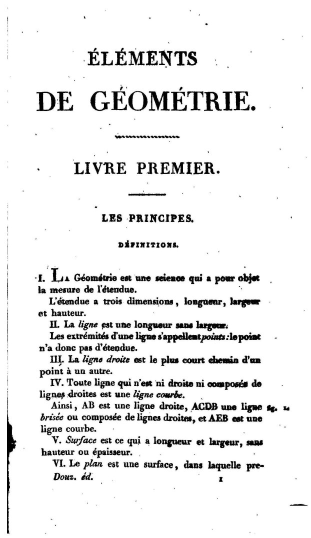
Kot matematik je znan tudi po razvoju determinant, kot naravoslovec in filozof pa po utemeljitvi klasičnega determinizma. Umrl je natanko sto let po Newtonu.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

V nasprotju od Mongea in Lapalacea je izhajal iz bogate družine, a je svoje imetje izgubil med revolucijo. Že pred njo si je na Collège de Mazarin pridobil odlično matematično izobrazbo in postal učitelj topničarjev (kot naš **Jurij Vega** (1754-1802)) na vojaški šoli. To delo je potem opravljal tudi pod Napoleonom. Leta 1795 je postal član akademije, kjer je preoblikoval geometrijsko sekcijo.

Slika 3. Adrien-Marie Legendre

Napisal je v naslednjih sto letih zelo popularno delo *Élements de géométrie* (1794), s katerim je pedagoško preoblikoval in poenostavil snov Evklidovih *Elementov.* Poskušal je dokazati aksiom o vzporednicah.


ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

LES PRINCIPES.

DÉFINITIONS.

I. La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur.

II. La *ligne* est une longueur sans largeur.

Les extrémités d'une ligne s'appellent *points*: le point n'a donc pas d'étendue.

III. La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.

IV. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites est une *ligne courbe*.

Ainsi, AB est une ligne droite, ACDB une ligne *brisée* ou composée de lignes droites, et AEB est une ligne courbe.

V. *Surface* est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur.

VI. Le *plan* est une surface, dans laquelle pre-

Douz. éd. 1

Slika 4. Legendrova knjiga *Élements de géométrie*

Poleg tega se je ukvarjal z vsem mogočim. V teoriji števil je dokazal Fermatov izrek za primer $n = 5$, napovedal je kvadratni reciprocitetni zakon (po njem se imenuje simbol, ki določa kvadratično naravno ostankov danega števila po praštevilskem modulu, ti. *Legendrov simbol*), ki ga je dokazal **Gauss**, ter *praštevilski izrek*, ki sta ga šele 1896 dokazala **Jacques Hadamard** in **Charles de la Valée Poussin**.

Razvil je *metodo najmanjših kvadratov*, ki ima ogromno uporabe v statistiki in drugje, ukvarjal se je z eliptičnimi funkcijami in klasifikacijo eliptičnih integralov. S svojo transformacijo je preoblikoval enačbe analitične mehanike.

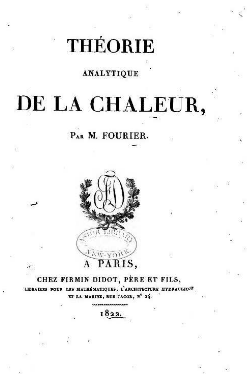
Najbolj pa je seveda znan po *Legendrovih polinomih*, ki so rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

Joseph Fourier (1768-1830)

Bil je krojačev sin iz Auxerra, nekoliko mlajši od predhodnikov. Tudi on si je s svojo inteligenco in bistrostjo priboril mesto učitelja matematike na vojaški šoli. Zagovarjal je francosko revolucijo, kar mu je olajšalo kasnejšo kariero. Leta 1795 je bil imenovan za profesorja na École Normale Supérieure in nadomestil **Lagrangea** na École Polytechnique. Kot Mongea je tudi njega Napoleon med številnimi drugimi znanstveniki vzel na svojo ekspedicijo v Egipt. Tam je postal tajnik novoustanovljenega Egiptovskega inštituta (kasneje je prispeval k izidu obsežne znanstvene monografije z opisom Egipta).

Slika 5. Joseph Louis Fourier

Po vrnitvi v Francijo ga je Napoleon leta 1801 imenoval za prefekta Grenobla. Zanimivo je, da je tedaj 11-letnega *Jeana Françoisa Champolliona* seznanil s kopijo kamna iz Rosette, ki jo je prinesel iz Egipta, in mu kot prefekt pomagal pri šolanju. Ta kamen je v letih 1822-1824 omogočil Champollionu nesmrtno slavo z razvozlanjem egiptovskih hieroglifov. Po Napoleonovem padcu je odšel v Anglijo in se vrnil leta 1822, ko je nadomestil **Delambra** na vplivnem mestu permanentnega tajnika Francoske akademije.


THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
1822.

Slika 6. Fourierova *Teorija toplote iz leta 1822*

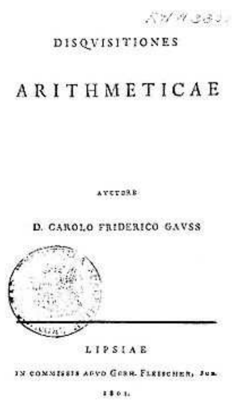
Fourierovo epohalno delo o analitični teoriji toplote (*Théorie analytique de chaleur*) iz leta 1822 prinaša poleg nedvomnih fizikalnih spoznanj pomembne matematične prispevke. Medtem ko je za Eulerja ali Lagrangea bila funkcija vedno podana z zaključeno formulo, je Fourier prvi prišel na misel, da so funkcijske vrednosti lahko podane kakorkoli (npr. kot porazdelitev temperature po nosilcu). Menil je, da se da vsaka funkcija, zvezna ali ne, razviti v posebno *trigonometrijsko vrsto* po sinusih in kosinusih večkratnih kotov. Za lepe funkcije je celo znal izračunati koeficiente in ji tako določiti *Fourierovo vrsto.*

To je bil začetek harmonične analize, ki je v teku stoletja močno vplivala na poostritev marsikaterega matematičnega pojma (npr. funkcije, zveznosti, konvergence, integrala) ter vzpodbudila nastanek novih matematičnih disciplin (npr. teorije množic, topologije, teorije mere). V zvezi s tem se je ukvarjala tudi s parcialnimi diferencialnimi enačbami (*Fourierova metoda*) in dimenzijsko analizo.

V algebri ga je zanimal položaj korenov algebrajske enačbe, v fiziki pa zlasti problem prevajanja toplote; odkril je tudi efekt tople grede.

Največji nemški matematik

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) je bil rojen v Braunschweigu. Bil je čudežni otrok (šolska anekdota o seštevanju prvih sto naravnih števil), devetnajstleten je leta 1796 odkril evklidsko konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika in zadosten pogoj za konstrukcijo pravilnega n-kotnika (lihi del števila n mora biti produkt različnih Fermatovih praštevil). To ga je navdušilo za študij matematike (želja, da bi imel pravilni *heptadekagon* vklesan v nagrobnik pa se mu ni uresničila). Rezultat je objavil v svojem najpomembnejšem delu *Disquisitiones arithmeticae*, ki je bilo končano leta 1798 (pri enaindvajsetih letih), objavljeno pa leta 1801.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, IVN.

1801.

Slika 7. Gaussova knjiga o aritmetiki *Disquisitiones arithmeticae*

To delo je za vso nadaljnjo dobo zakoličilo razvoj teorije števil. V njej je obravnaval tudi modularno aritmetiko, kvadratični reciprocitetni zakon, porazdelitev praštevil, predstavitve števila z vsoto kvadratov, trikotnih števil ipd. Leta 1799 je v Helmstedtu doktoriral pri **Pfaffu** z dokazom *osnovnega izreka algebre*, ki sta ga zaman skušala dokazati D'Alembert in Euler. Kasneje je Gauss v letih 1814, 1816 in 1848 podal še vrsto alternativnih dokazov. S temi zgodnjimi in kasnejšimi deli se je uveljavil kot vodilni matematik svojega časa z vzdevkom *Princeps mathematicorum*.

Slika 8. Jensenov portret Carla Friedricha Gaussa

Tridesetletnik je leta 1807 postal direktor astronomskega observatorija v Göttingenu in na tem mestu ostal do smrti. Poleg čiste matematike (neevklidske geometrije, diferencialne geometrije - *theorema egregium*) se je odtlej posvečal tudi uporabi matematike (geodeziji, astronomiji, optiki, magnetizmu). Preračunal je pot asteroida *Ceresa*, ki se je pojavil leta 1801, s kolegom fizikom **Wilhelmom Webrom** sta raziskovala zemeljsko magnetno polje (po Gaussu se imenuje enota za gostoto magnetnega toka), izboljšala telegraf itd.

Pogosto so ga (kot Laplacea) primerjali z **Newtonom**. Res so podobnosti: oba sta delala čisto matematiko in njeno uporabo, oba sta malo objavljala, čeprav sta se zavedala svoje vrednosti, oba sta bila sposobna neverjetne koncentracije, oba sta se gibala v visokih akademskih krogih, vendar sta se izogibala žolčnim akademskim razpravam in prepirom. Gauss je Newtona še presegel glede matematične natančnosti in perfekcionizma.

Gauss je bil konservativen in ni rad priznal drugim njihovih dosežkov (npr. **Janosu Bolyaiu**, sinu svojega prijatelja Farkasa, glede neevklidske geometrije ali **Legendru** glede metode najmanjših kvadratov), češ da je sam to že prej odkril, vendar ne objavil. Ignoriral je tudi zgodnja **Cauchyjeva dela**. Kljub temu je pokazal presenetljivo človeško širino in ni zavrnil priznanja **Sophie Germain** (1776-1831), ko je izvedel, da objavlja pod moškim imenom *Antoine Le Blanc*, in je zanjo (šest let po prezgodnji smrti zaradi raka na prsih) celo predlagal častni doktorat göttinške univerze, potem ko ji je ta naslov zaradi spola zavrnila berlinska univerza.

Sicer je Gauss imel kasneje slavne doktorske študente, kot so **Friedrich Bessel**, **Richard Dedekind**, **Bernhard Riemann** in znani zgodovinar matematike **Moritz Cantor**, med drugimi njegovimi učenci pa lahko naštejemo **Eisensteina**, **Kirchhoffa**, **Kummra**, **Dirichleta** in **Möbiusa**. Preko njih in seveda preko svojega dela je imel velik vpliv na celoten razvoj matematike v 19. stoletju.

Gaussovo načelo je bilo *Pauca sed matura* (*Malo ali vredno*), matematiko je cenil čez vse: "Matematika je kraljica znanosti, in teorija števil je kraljica matematike."

Slika 9. Gaussov spomenik v Braunschweigu in grob v Göttingenu

Splošne značilnosti razvoja matematike v 19. stoletju

Za devetnajsto stoletje je v matematičnem smislu značilen prehod od intuicije k rigoroznosti. Matematika se je osvobodila tradicionalnih vezi z astronomijo in fiziko, zatekla se je k lastnim zakonitostim in bolj abstraktnim konceptom. Hkrati se je postopoma povečeval pomen in odgovornost učenja matematičnih pojmov, ki ni bilo več vezano na kraljevske ugodnosti in učene akademije, ampak se je sčasoma skoncentriralo na univerzah. Nacionalni jeziki so polagoma zamenjali znanstveno latinščino, delo se je specializiralo na posameznih matematičnih področjih.

Poleg napredka v *geometriji* (opisna, neevklidska, projektivna, diferencialna geometrija) in proti koncu stoletja novih pogledov nanjo (Kleinov Erlangenski program, Hilbertova aksiomatizacija), sta se v devetnajstem stoletju razvili zlasti *algebra* (osnovni zakoni, nekomutativne strukture, večrazsežni vektorski prostori in linearne transformacije nad njimi) ter *analiza* (utrditev osnovnih konceptov, aritmetizacija analize z aksiomatiko realnih števil, uvedbo teorije množic).

Skica razvoja treh osnovnih matematičnih disciplin

Geometrija

O odkritju neevklidske geometrije smo že govorili; pomenila je osvoboditev od realnega sveta, še posebej, ko je **Eugenio Beltrami** (1835-1900) leta 1868 prvi dokazal konsistentnost neevklidske geometrije Bolyaia in Lobačevskega.

Kot vemo, je *opisno geometrijo* inavguriral **Gaspard Monge**, njegov najboljši učenec **Jean Victor Poncelet** (1788-1867) pa je s svojim delom *Traité des proprietés des figures* iz leta 1822 začetnik *projektivne geometrije* kot samostojne vede. Velik nadaljnji pospešek ji je dal švicarski geometer **Jakob Steiner** (1796-1863), ki je deloval v Berlinu, **Karl Georg Christian von Staudt** (1798-1867) pa jo je osvobodil metrike.

Med znanimi geometri devetnajstega stoletja omenimo **Augusta Ferdinanda Möbiusa** (1790-1868), **Michela Chaslesa** (1793-1880) in **Juliusa Plückerja** (1801-1868). Michel Chasle se je uveljavil tudi kot prvi zgodovinar geometrije. *Diferencialna geometrija*, ki se je začela z Mongem, je dobila svoje zagovornike in razvijalce v osebah velikih matematikov, kot sta npr. **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) in **Georg Bernhard Riemann** (1826-1866).

Nemški matematik **Felix Klein** (1849-1925) je s svojim *Erlangenskim programom* leta 1872 postavil ne samo projektivno, ampak tudi druge možne geometrije na nove temelje, ko jim je dal pomen proučevanja invariantnih lastnosti glede na neko grupo transformacij. Njegov učenec **David Hilbert** (1865-1943) pa je ob izteku stoletja v svojem delu *Grundlagen der Geometrie* predstavil leta 1899 formalni sistem 20 (originalno 21) aksiomov evklidske geometrije.

Slika 10. Felix Klein in David Hilbert

Omeniti je treba še italijansko geometrijsko šolo na čelu z odličnimi matematiki, kot so bili **Luigi Cremona** (1830-1903) s svojim raziskovanjem algebraičnih krivulj ter kasneje **Gregorio Ricci-Curbastro** (1853-1925) in njegov učenec **Tullio Levi-Civita** (1873-1941), ki sta razvila tenzorski račun, delala pa tudi na drugih področjih.

Slika 11. Niels Henrik Abel

Algebra

V začetku 19. stoletja so gledali na algebro kot na posplošeno aritmetiko, namenjeno reševanju enačb (spomnimo se **Paola Ruffinija** (1765-1822) in **Nielsa Henrika Abela** (1802-1829), ki sta dokazala nezmožnost rešitve splošne polinomske enačbe reda več kot štiri z radikali). Algebrajski zakoni naj bi bili tisti, ki veljajo za realna števila: komutativnost, asociativnost, distributivnost, obstoj enote itd. Leta 1815 pa je **Cauchy**, o katerem bomo več govorili v zvezi z analizo, obravnaval sestavljanje (komponiranje) permutacij in ugotovil, da je vrstni red pomemben. O grupah takrat še ni bilo govora.

Resneje so se matematiki zavedeli nove situacije okrog sredine stoletja, ko je leta 1843 irski matematik **William Rowan Hamilton** (1805-1865) iz fizikalnih pobud iznašel *kvaternione*. Le-ti sestavljajo algebro, v kateri komutativnostni zakon ne velja, kar je bilo veliko presenečenje. Nemec **Hermann Grassmann** (1809-1877) je že naslednje leto konstruiral celo družino algeber z nenavadnimi lastnostmi. Nazadnje je Anglež **Arthur Cayley** (1821-1895) leta 1857 odkril splošno *matrično algebro*, ki nam je danes najbližji oziroma najbolj domači primer nekomutativne strukture.

Richard Dedekind (1831-1916)

Znan je po posebni konstrukciji realnih števil in definiciji neskončne množice. Kasneje je aksiomatiziral algebro, definiral pojem *ideala* in začel teorijo funkcijskih obsegov. Vrata v abstraktno algebro so bila s tem odprta. Od takrat dalje so matematiki ustvarili plejado (več kot 200) različnih algebrajskih struktur, na katerih temelji moderna matematika (grupoidi, kvazigrupe, polgrupe, monoidi, grupe, kolobarji, celostne domene, mreže, Boolovi kolobarji, kolobarji z deljenjem, obsegi, vektorski prostori, jordanske in Liejeve algebre, splošne neasociativne algebre itd.)

Slika 12. Richard Dedekind

Analiza

Analizi bomo posvetili nekaj več prostora.

Potem ko je v 18. stoletju **D'Alembert** spoznal, da pri nadaljnjem razvoju infinitezimalnega računa potrebujemo limite, in je Lagrange začutil potrebo po večji rigoroznosti, je velik korak v to smer napravil leta 1821 francoski matematik **Cauchy**.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Razvil je teorijo in prakso računanja z limitami, korektno definiral konvergenco, zveznost in odvedljivost funkcij ter računanje določenega integrala (zveznih) funkcij ravno z uporabo limit.

Cauchy je bil rojen v Parizu v družini visokega policijskega uradnika, ki je nekako srečno preživela francosko revolucijo in teror (pod Napoleonom je oče celo dobil mesto generalnega sekretarja senata in je delal pod Laplaceom). Augustin-Louis je končal politehniko in se usmeril v civilno inženirstvo. Po letu 1812 se je začel globje zanimati za matematiko, neumorno raziskoval, a ni dobil primerne službe.

Slika 13. Augustin-Louis Cauchy

Šele leta 1816, ko so iz akademije izključili Mongea in Carnota, je na akademiji zasedel mesto enega od njiju, začel pa je tudi učiti na politehniki. Postal je zagrizen rojalist in zvest pripadnik Bourbonov in si s tem nakopal precej političnih nasprotnikov. Po smrti Ludvika XVIII. leta 1924 je služil Karlu X., zaposlil se je tudi kot profesor na Collège de France in Fakulteti za znanost na Sorbonni. Po julijski revoluciji leta 1830 pa je Cauchy pustil vse funkcije in za kraljem odšel v izgnanstvo v tujino (Torino, Praga, Gorica). Leta 1838 se je lahko vrnil v Pariz in zavzel svoje mesto na akademiji, ni pa smel učiti, ker ni prisegel novi oblasti Louisa Philippa. To se je uredilo šele po revoluciji 1848, ko so prisego sprva odpravili, kasneje pa, ko jo je Napoleon III. spet uvedel, Cauchyja od nje oprostili.

Cauchy je takoj za Eulerjem matematik z največ objavljenimi članki (skupaj 789). Že zgodaj je izkazal svoj talent (npr. z elegantno rešitvijo Apolonijevega problema o dotikanju treh krogov, s posplošitvijo Eulerjeve poliedrske formule), sicer pa se je ukvarjal z višjo matematiko. S številnimi matematičnimi prispevki je obravnaval konvergenco in divergenco neskončnih vrst (Cauchyjev kriterij, Cauchyjev produkt), realne in kompleksne funkcije (Cauchy-Schwarzova neenakost, Cauchyjeva integralska formula in Cauchyjev integral v kompleksni analizi), diferencialne enačbe (Cauchyjevi pogoji, Cauchy-Riemannove enačbe), verjetnost (Cauchyjeva porazdelitev), matematično fiziko (elastomehanika) itd.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

1.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

1821

Slika 14. Cauchyjev učbenik *Cours d'analyse*

Analizo je obravnaval tako natančno kot še nihče pred njim. Kritiziral je **Lagrangev** pristop s potenčnimi vrstami, saj je predstavil primer neskončnokrat odvedljive funkcije, ki ima v točki 0 vse odvode enake nič in se zato ne da razviti v (neničelno) potenčno vrsto (taka je funkcija f, pri kateri je $f(0) = 0$ in $f(x) = e^{-1/x^2}$ za $x \neq 0$). Njegovi knjigi *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* iz leta 1821 in *Résumé des leçons données a l'École royale polytechnique, sur le calcul infinitésimal* iz leta 1823 sta postali pojem rigoroznosti; iz njiju se je učila celotna matematična Evropa. Pri dokazovanju se ni zanašal na geometrijsko predstavo in intuicijo, ampak je vse skušal izpeljati algebrajsko iz definicij.

Imel pa je Cauchy, kar se rigoroznosti v analizi tiče, odličnega naslednika, **Karla Weierstrassa**, o katerem bomo govorili kasneje.

Pojem funkcije

Zanimivo je pogledati, kako se je razvijal npr. *pojem funkcije.* Za **Newtona** in **Leibniza** je funkcija pomenila *krivuljo*, saj sta izhajala iz naivnega geometrijskega pristopa.

Euler je napravil premik v pojmovanju: razlikoval je konstante in spremenljivke, funkcije so bile zanj analitični izrazi (formule), sestavljeni iz spremenljivk in konstant. Funkcijo $f(x) = x$, če je $x \geq 0$, in $f(x) = -x$, če je $x < 0$, je npr. imel za nezvezno zaradi nezvezne formule (v resnici je zvezna, **Cauchy** jo je celo znal opisati z eno samo formulo $f(x) = \sqrt{x^2}$, kar bi bilo všeč tudi Eulerju). Je pa res, da je kasneje, leta 1755, Euler v definiciji funkcije že opustil izraz formula.

Nadalje je pojem posplošil **Fourier**, ko je rekel, da se da *vsaka* funkcija razviti v trigonometrično vrsto $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a)$. "Vsaka" je zanj pomenila vsak nabor vrednosti, tudi če ne zadošča nekemu splošnemu zakonu, npr. vsaka porazdelitev temperature po nosilcu ali vsak položaj strune. Fourier je koeficiente trigonometrične vrste izračunal z integrali $a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dx$ in $b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dx$. Toda vprašanje je, ali ti integrali pri bolj splošnih funkcijah še obstajajo. **Cauchy** je npr. znal integrirati le zvezne funkcije. Za integracijo (nekaterih) nezveznih pa je zaslužen **Dirichlet** (in za njim **Riemann**).

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Študiral je v Parizu in Bonnu, učil pa v Wroclawu (Breslau) in Berlinu. Njegov glavni prispevek je na področju analitične teorije števil. Leta 1829 je v delu *Sur le convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données* definiral integral za funkcije, ki so zvezne povsod razen v končno mnogo točkah, z vsoto integralov na posameznih odsekih. Pokazal je tudi, da lahko *absolutno konvergentne* vrste poljubno preuredimo, ne da bi s tem spremenili njihove konvergence niti njihove vsote.

SLIKA 15. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Dirichlet je matematičnemu svetu predstavil funkcijo, ki je tako zelo nezvezna, da sploh nima integrala:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionalen}, \\ 0, & x \text{ iracionalen}. \end{cases}$$

Take funkcije so navedle Riemanna, da se je začel spraševati, koliko nezvezne so lahko funkcije, da se še dajo integrirati.

Georg Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann je torej oral ledino v smer večje abstraktnosti matematičnih konceptov. Bil je Dirichletov učenec in zadnji Gaussov doktorand. Pustil je neizbrisno sled v moderni matematiki.

Njegova doktorska disertacija iz leta 1851 nam je dala pojem *Riemannove ploskve* in z njo povezane prve topološke raziskave. Eden glavnih dosežkov je *Riemann-Rochov izrek*, ki povezuje analitične lastnosti funkcije s topološkimi lastnostmi ustrezne Riemannove ploskve. V tem času se je kot **Webrov** asistent intenzivno bavil s fiziko, ni pa zanemaril niti pomembne matematike.

SLIKA 16. Georg Bernhard Riemann

Riemannova habilitacijska teza iz leta 1854 je postregla z moderno diferencialno geometrijo, katere glavni pojmi *mnogoterost*, *Riemannova metrika* in *ukrivljenost* na novo opredeljujejo pojem prostora, kar vse je v začetku dvajsetega stoletja postalo osnova Einsteinove splošne teorije relativnosti. *Riemannova geometrija* je še ena od neevklidskih geometrij. V habilitacijskem delu je tudi predstavil rigorozno definicijo določenega (tj. *Riemannovega*) integrala (glej vajo 5), po kateri je znan med vsemi, ki so kdaj študirali višjo matematiko, in ki je na prelomu stoletja vodila do odkritja splošnejšega *Lebesguovega integrala.*

Riemann je znan tudi po svojem izreku o preureditvi pogojno konvergentnih vrst, ki pravi, da lahko tako vrsto preuredimo tako, da konvergira proti poljubnemu vnaprej izbranemu številu, ali da divergira. Razvil je teorijo trigonometričnih vrst, ki niso nujno Fourierove.

Leta 1859 pa je objavil domnevo o lokaciji ničel ti. *Riemannove funkcije* v teoriji števil. *Riemanova hipoteza* je danes eden najbolj slavnih še nerešenih problemov v matematiki. Umrl je za tuberkulozo, mlad, star komaj 40 let, in za sabo pustil sicer po obsegu majhnen, a po globini matematične misli izreden znanstveni opus.

Realna števila

Poleg funkcij so se matematiki prvenstveno ukvarjali z *realnimi števili.* Že v 18. stoletju so razločevali ne samo med racionalnimi in iracionalnimi števili, ampak so poznali tudi definicijo algebraičnih in transcendentnih števil. Algebraičnih števil ni bilo težko identificirati, taka so npr. vsa racionalna števila, pa različni koreni in sploh rešitve polinomskih enačb s celimi koeficienti.

Večji problem pa je nastal z iskanjem transcendentnih števil. Medtem ko je **Euler** leta 1737 dokazal, da je število e iracionalno, **Lambert** pa je leta 1768 isto storil za število π, za katerega je le domneval, da je tudi transcendentno, do sredine 19. stoletja niso poznali nobenega konkretnega transcendentnega števila. Prvo je konstruiral leta 1851 (glej vajo 8) francoski matematik **Joseph Liouville** (1809-1882), ki ga poznamo tudi po Sturm-Liouvilleovi teoriji iz diferencialnih enačb. Poleg tega se je ukvarjal z elektriko in termodinamiko, sodeloval v politiki, pomemben pa je tudi kot ustanovitelj in urednik enega prvih vplivnih časopisov za področje matematike *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ki izhaja neprekinjeno od leta 1836 do danes.

Kar se števil e in π tiče, je transcendentno naravo prvega ugotovil **Charles Hermite** (1822-1901) leta 1873, drugega pa **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) leta 1882. Lindemannov rezultat je hkrati pomenil, da klasična kvadratura kroga ni mogoča.

Potem ko je **Hilbert** leta 1900 postavil eksplicitno vprašanje o transcendentnosti števil kot je npr. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, je bil napredek v tej smeri dosežen šele leta 1934, ko sta **Alexandr Gelfond** (1906-1968) in **Theodor Schneider** (1911-1988) neodvisno dokazala transcendentno naravo cele družine števil: če je $\alpha \neq 0, 1$ algebraično število in β iracionalno algebraično število, je število α^β transcendentno. To je npr. res za število $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ali število $e^\pi = e^{(-i\pi)i} = (-1)^i$. Seveda pa ostaja vprašanje transcendentnosti nerešeno še za mnoga znana števila, npr. $e + \pi$, $e\pi$, π^e itd.

Karl Weierstrass (1815-1897)

Weierstrass je izjema, ki potrjuje pravilo, da se velika dela v matematiki zgodijo v mladih letih. Potem ko se kot študent ni ravno proslavil, je petnajst let učil na srednji šoli in razmišljal o pravi matematiki šele pozno zvečer, ko je že opravil svoje učiteljske obveznosti.

Slika 17. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Leta 1854 mu je v *Crellejevem Journalu* uspelo objaviti razpravo o *Abelovih integralih*, ki je izzvala znanstveno senzacijo. Univerza v Königsbergu, kjer je na istem področju delal Jacobi, mu je podelila častni doktorat, nakar so ga povabili na univerzo v Berlin, kjer je potem naredil akademsko kariero in postal eden od stebrov nemške matematike. Poleg zgodnjih člankov o eliptičnih integralih, Abelovih funkcijah in algebraičnih diferencialnih enačbah je njegovo najpomemnejše matematično delo posvečeno osnovam teorije kompleksnih funkcij in potenčnih vrst. Raziskoval je cele funkcije in neskončne produkte, odkril je pomem *enakomerne zveznosti* funkcij, razumel je razliko med konvergenco po točkah in *enakomerno konvergenco* funkcijskega zaporedja, hkrati s pomembnimi posledicami glede intergriranja takih zaporedij in vrst.

Weierstrass je analizo postavil na trdne temelje. Reduciral je lastnosti realnih števil na nekaj aksiomov, iz katerih je potem zgradil celotno analizo. Če je **Cauchy** (sicer korektno) vpeljal limito funkcije z besedami, s formulacijo, ki je vsebovala pojme, kot so približevanje neki vrednosti, je **Weierstrass** pojem limite osvobodil gibanja in jo izrazil v sodobnem jeziku z epsilonom in delto.

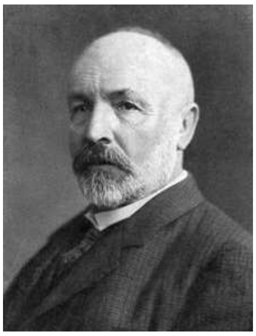
Leta 1861 je prvi odkril primer zvezne funkcije, ki ni odvedljiva v nobeni točki (vaja 9); leta 1872 jo je predstavil Berlinski akademiji, končno pa je primer objavil **Paul du Bois-Reymond** (1831-1889) leta 1875.

Tako vedenje je bilo za Weierstrassa značilno: ni se gnal za prvenstvo in marsikakšen pomemben rezultat je prepustil svojim učencem. Vsekakor je bil zelo vpliven učitelj in še danes predstavlja pojem rigoroznega razmišljanja v analizi in sploh v matematiki. Zaradi njegovih številnih zaslug na tem področju so ga imenovali "oče moderne analize".

Weierstrassove novotarije (npr. povsod zvezne, nikjer odvedljive funkcije) pa so njegovi sodobniki težko sprejemali, nekateri celo zavračali (npr. francoska šola na izkustvu in povezavi s fiziko utemeljene matematike s **Hermitom**, **Poincaréjem** in **Picardom** na čelu). **Henri Poincaré** (1854-1912) je ob tem govoril o "prestopku zoper zdravo pamet", **Émile Picard** (1856-1941) pa je izjavil naslednje: "Če bi Newton in Leibniz menila, da zvezne funkcije nimajo nujno odvoda, ... bi nikoli ne iznašla diferencialnega računa."

Georg Cantor (1845-1918)

To je še eden v vrsti odličnih nemških matematikov, ki so pustili trajno sled v moderni matematiki. Rojen v Sankt Peterburgu, se je že v mladosti preselil v Nemčijo, študiral v Berlinu pri **Weierstrassu** od 1863 do 1869, in potem ves čas učil v Halleju.



Slika 18. Georg Cantor

Zanimal se je za teorijo števil, enačbe in trigonometrične vrste, kar ga je pripeljalo do osnov analize. Izdelal je teorijo iracionalnih števil, temelječo na ekvivalenčnih razredih *Cauchyjevih zaporedij*, kar je bilo drugače (čeprav ekvivalentno) kot teorija, ki jo je predlagal **Dedekind** s svojimi *prerezi*.

Leta 1874 je začel z revolucionarnim delom na teoriji množic in teoriji neskončnosti, po kateri je najbolj znan. Ustvaril je novo področje matematičnega raziskovanja aktualne neskončnosti in transfinitnih števil, "raj, iz katerega nas ne bodo nikdar izgnali", kot se je izrazil **David Hilbert** (1862-1943). Večina njegovih kolegov matematikov, zlasti pa **Leopold Kronecker** (1823-1891), so njegovo delo zavračali. Nepriznanje ga je psihično obremenjevalo, tako da je resno zbolel in se je moral večkrat zdraviti v psihiatričnih ustanovah. Poleg tega so se v sami zgradbi teorije množic v začetku 20. stoletja pojavila protislovja (ti. paradoksi Russela, Burali-Fortija in drugih), ki so ogrozili njene temelje. Spor glede osnov matematike se je vlekel še dolgo v 20. stoletje, reševali so ga na različne načine; **Hilbert** s svojim *formalizmom* in **Brouwer** s svojim *intuicionizmom*.

Danes praktično celotna matematika temelji na Cantorjevi teoriji, njeni moderni rezultati se skoraj brez izjeme izražajo z množicami.

Problem, ki ga Cantor ni mogel rešiti, pa je bila *hipoteza kontinuuma*. Večkrat se je je lotil, prvič leta 1884, a brez uspeha; doživel je (prvič med več kasnejšimi ponovitvami) celo živčni zlom. **David Hilbert** (1862-1943) je to domnevo postavil na prvo mesto svojega seznama znamenitih 23 nerešenih problemov matematike, ki ga je predstavil 18. avgusta 1900 na drugem mednarodnem matematičnem kongresu v Parizu. **Kurt Gödel** (1906-1978) je leta 1937 dokazal konsistentnost hipoteze kontinuuma z drugimi aksiomi Zermelo-Fraenkelovega sistema, **Paul Cohen** (1934-2007) pa leta 1963 konsistentnost njene negacije. Torej je domneva neodvisna od drugih aksiomov in Cantor je nikakor ni mogel iz njih izpeljati ne zanikati. Situacija je podobna kot s petim Evklidovim postulatom. To dokazuje, da se v matematiki kljub ogromnim spremembam zares nič ne spreminja, zanjo velja: "Plus ça changes plus c'est la mème chose."

Vaje:

(1) Da ima zvezna funkcija f na intervalu (a, b) ničlo, če je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, je geometrijsko očitno, **Cauchy** pa je to želel dokazati iz definicije zveznosti. Razdelil je interval $[a, b]$ z dolžino $h = b - a$ na m enakih delov in v zaporedju $f(a)$, $f(a + h/m)$, $f(a + 2h/m)$, ..., $f(a + mh/m) = f(b)$ poiskal tak n, da je $f(a + nh/m) \leq 0$ in $f(a + (n + 1)h/m) \geq 0$.

(a) Postavi $a_1 = a+nh/m$ in $b_1 = a+(n+1)h/m$ in postopek ponovi na intervalu $[a_1, b_1]$ dolžine h/m, da dobiš interval $[a_2, b_2]$ dolžine h/m^2.

(b) S ponavljanjem postopka poišči nepadajoče zaporedje $a_1, a_2, ...$ in nenaraščajoče zaporedje $b_1, b_2, ...$, tako da $b_k - a_k = h/m^k \to 0$ $(h \to \infty)$. Prepričaj se, da zaradi polnosti sistema realnih števil obstaja tak $a \in \mathbb{R}$, da je $\lim_{k\to\infty} a_k = a = \lim_{k\to\infty} b_k$.

(c) Pokaži, da mora zaradi zveznosti funkcije f hkrati veljati $f(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq 0$ in $f(a) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) \geq 0$, torej $f(a) = 0$.

Odtod takoj sledi, da zavzame zvezna funkcija na vsakem zaprtem intervalu vsako vmesno vrednost med največjo in najmanjšo.

(2) V poskusu, dokazati *Lagrangev izrek*, je **Cauchy** najprej dokazal lemo: Če je $A \leq f'(x) \leq B$ za $a \leq x \leq b$, velja tudi $A \leq (f(b) - f(a))/(b - a) \leq B$ (glej [11]).

(a) Dokaži zgornjo lemo tako, da najprej za vsak $x \in [a, b]$ in vsak $\epsilon > 0$ poiščeš tak $\delta > 0$, da je $f'(x) - \epsilon < (f(x + h) - f(x))/h < f'(x) + \epsilon$ za $x \in [a, b]$ (slednje ne gre vedno, kot je zmotno mislil Cauchy; predpostaviti je treba enakomerno izbiro δ glede na x), nato pa razdeliš interval $[a, b]$ na dovolj majhne dele $[x_k, x_{k+1}]$ in s seštevanjem neenakosti $A - \epsilon < f'(x_k) - \epsilon < (f(x_{k+1}) - f(x_k))/(x_{k+1} - x_k) < f'(x_k) + \epsilon < A + \epsilon$ za $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$ dobiš neenakost $A - \epsilon < (f(b) - f(a))/(b - a) < A + \epsilon$.

(b) Z uporabo točke (1) izpelji odtod znani *Lagrangev izrek* $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(a + \theta(b - a))$, kjer je $0 \leq \theta \leq 1$.

(c) Izpelji posledico: če je odvod funkcije f povsod enak nič, je funkcija f konstantna.

(3) Tudi pri definiciji integrala se **Cauchy** ni zanašal na geometrijski pomen, ampak je preprosto najprej definiral 'levo' integralsko vsoto $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$ in nato integral kot približek takih vsot. Za zvezne funkcije f mu je uspelo dokazati enakost: $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(a + \theta(b - a))$, kjer je $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) Pokaži, da za funkcijo $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ s spremenljivko x in vsak h velja $\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ ter da obstaja tak θ med 0 in 1, da je $\Phi(x+h) - \Phi(x) = hf(x+\theta h)$.

(b) Izpelji odtod, da je funkcija Φ zvezna in odvedljiva v točki x z odvodom $\Phi'(x) = f(x)$.

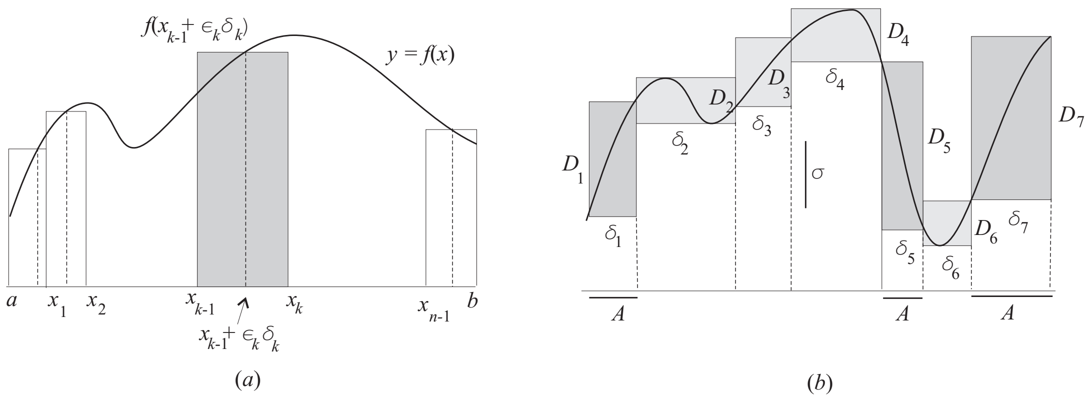
(c) Če je f poljubna odvedljiva funkcija z lastnostjo $F'(x) = f(x)$ za vsak x, dokaži odtod na običajen način osnovno formulo integralskega računa $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Opomba. **Vito Volterra** (1860-1940) je leta 1881 odkril funkcijo, ki ima v vsaki točki omejen odvod, vendar pa ta odvod ni integrabilen niti v Cauchyjevem niti v Riemannovem smislu (glej [11]). Osnovna formula integralskega računa $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ torej brez dodatnih predpostavk na odvod $F' = f$ (npr. zveznosti) nasploh ne velja.

(4) **Cauchy** je bil prvi, ki je zares obravnaval tudi konvergenco in divergenco neskončnih vrst (na moderen način). Je pa avtomatično privzel, da vsako (danes po njem imenovano) Cauchyjevo zaporedje števil tudi zares konvergira (torej polnost prostora realnih števil). Korenski kriterij za konvergenco vrst s pozitivnimi členi je dokazal podobno, kakor to storimo danes. Uporabljal je tudi kvocientni kriterij in ga pripisal D'Alembertu. Tudi naslednji test je njegov: *če ima vrsta* $\sum u_k$ *pozitivne člene in velja* $\lim_{k\to\infty} \ln(u_k)/\ln(1/k) = h > 1$, *vrsta konvergira* [11].

(a) Izberi $1 < a < h$ in naravno število m tako, da bo $\ln(u_k)/\ln(1/k) > a$ za $k \geq m$, ter izpelji odtod neenakost $u_k < 1/k^a$ za $k \geq m$. S primerjavo z vrsto $\sum(1/k^a)$ se prepričaj, da vrsta $\sum u_k$ konvergira.

(b) Uporabi zgornji kriterij za dokaz konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(k)/k^p$, kjer je $p > 1$.



Slika 19. K definiciji Riemannovega integrala

(5) **Riemann** je svoj integral poljubne *omejene* funkcije začel z delitvijo intervala $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$, oznako $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, izbiro poljubnih $\epsilon_k \in [0,1]$ in definicijo integralske vsote $S = \sum_{k=1}^{n} \delta_k f(x_{k-1} + \epsilon_k \delta_k)$ (slika 19a). Če obstaja število A, kateremu so integralske vsote ne glede na izbiro ϵ_k in δ_k poljubno blizu, je $A = \int_a^b f(x)dx$ integral funkcije f na intervalu $[a,b]$. Definiral je še *oscilacijo* D funkcije na celotnem intervalu $[a,b]$ in D_k na k-tem podintervalu, oscilacijsko vsoto $R = \sum_{k=1}^{n} \delta_k D_k$ in $\Delta(d)$ 'največjo' izmed oscilacijskih vsot glede na delitve z normo (največjo dolžino podintervala) pod $d > 0$ (slika 19b). Vedel je, da integral obstaja natanko takrat, ko je $\lim_{d\to 0} \Delta(d) = 0$. Za $\sigma > 0$ je podintervale razdelil na tiste tipa A, kjer je oscilacija $D_k > \sigma$, in tipa B, kjer je $D_k \leq \sigma$ (slika 19b) in definiral $s(\sigma) = \sum_A \delta_k$ (seštevanje po podintervalih tipa A). Dokaži naslednji *Riemannov integrabilnostni kriterij* [11]: *Integral obstaja natanko takrat, ko za vsak* $\sigma > 0$ *velja* $s(\sigma) \to 0$, *ko* $d \to 0$, tako da
(a) za potrebnost iz zgornjih definicij oceniš $0 \leq s(\sigma) \leq \Delta(d)/\sigma$ in potem upoštevaš $\Delta(d) \to 0$,
(b) za zadostnost zapišeš $R = \sum_A \delta_k D_k + \sum_B \delta_k D_k$ in prvo vsoto oceniš navzgor z $Ds(\sigma)$, drugo pa z $\sigma(b-a)$.

Z uporabo tega kriterija se prepričaj, da Dirichletova funkcija, definirana s predpisom $\phi(x) = 1$ za $x \in \mathbb{Q}$ in $\phi(x) = 0$ za $x \notin \mathbb{Q}$, ni integrabilna.

(6) Naj pomeni $(x) = x - n$, kjer je n *najbližje* celo število. *Riemannova patološka funkcija* (z neskončno skoki, a kljub temu integrabilna) je potem definirana z vrsto $f(x) = (x)/1 + (2x)/4 + (3x)/9 + (4x)/16 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (kx)/k^2$ [11]. Pokaži:
(a) Vrsta konvergira in vrednost funkcije $f(x)$ obstaja za vsak $x \in \mathbb{R}$.
(b) Funkcija je zvezna pri vseh iracionalnih številih (povsod, kjer so zvezni vsi členi).
(c) V točkah $x = m/2n$, kjer sta si m in n tuji naravni števili, doživi f skok velikosti $1/n^2 + 1/9n^2 + 1/25n^2 + ... = \pi^2/8n^2$ (po rešitvi baselskega problema).
(d) Za vsako pozitivno število $\sigma > 0$ je samo *končno mnogo* točk oblike $x = m/2n$, v katerih je skok večji od σ.

Ker je oscilacija drugje manjša od σ, skupno dolžino intervalov, ki vsebujejo teh končno mnogo točk, pa lahko napravimo poljubno majhno, Riemannov kriterij integrabilnosti iz točke (5) pove, da je funkcija f integrabilna.

(7) **Liouville** je dokazal, da se dajo iracionalna algebraična števila slabo aproksimirati z racionalnimi, natančneje: če je x_0 iracionalno algebraično število z minimalnim polinomom $P(x)$ stopnje $n \geq 2$, obstaja $A > 0$, tako da za vsako racionalno število $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ velja $|p/q - x_0| \geq 1/Aq^n$. Preveri, da je to res, tako da:
(a) pokažeš, da zaradi minimalnosti polinoma P in iracionalnosti števila x_0 število p/q ni ničla polinoma P,
(b) z uporabo Lagrangevega izreka oceniš $|P(p/q)| \leq A|p/q - x_0|$ in
(c) zaradi cele leve strani dobiš odtod $1 \leq |q^n P(p/q)| \leq Aq^n |p/q - x_0|$.

(8) Naj bo $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(1/10^{k!}) = 1/10 + 1/10^2 + 1/10^6 + 1/10^{24} + ...$ (glej [11]).

(a) Pokaži, da vrsta konvergira in da je z njo definirano realno število x_0 iracionalno.

(b) Predpostavi, da je x_0 algebraično število z minimalnim polinomom stopnje $n \geq 2$, izberi naravno število $m > n$ in zapiši $\sum_{k=1}^{m}(1/10^{k!}) = p_m/10^{m!}$, kjer je p_m naravno število.

(c) Z indukcijo pokaži, da je za vsak $r \geq 1$ res $(m+r)! \geq (m+1)! + r - 1$ in oceni $|p_m/10^{m!} - x_0| = \sum_{k=m+1}^{\infty}(1/10^{k!}) \leq (1/10^{(m+1)!}(1 + 1/10 + 1/10 + 1/10^3 + ...) < 2/10^{(m+1)!}$.

(d) Prepričaj se, da je to v nasprotju z Liouvilleovo neenakostjo iz točke (7).

(9) **Weierstrass** je dokazal, da je pri pogojih $a \geq 3$, $0 < b < 1$ in $ab > 1 + 3\pi/2$ funkcija f, definirana z vrsto $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(\pi a^k x)$, povsod zvezna in nikjer odvedljiva [11]. Sledi njegovim korakom in dokaži:

(a) Zgornja vrsta konvergira enakomerno proti zvezni funkciji f.

(b) Naj bo r poljubno realno število. Za vsak $m \geq 1$ definirajmo $\epsilon_m = (a^m r)$, z oznakami iz točke (6), in $h_m = (1 - \epsilon_m)/a^m$. Potem je $-1/2 < \epsilon_m \leq 1/2$ in $0 < 1/2a^m \leq h_m < 3/2a^m$, tako da $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$.

(c) Izrazi diferenčni kvocient v obliki

$$\frac{f(r+h_m) - f(r)}{h_m} = \sum_{k=0}^{m} b^k \frac{\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r)}{h_m} +$$
$$\sum_{k=m}^{\infty} b^k \frac{\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r)}{h_m}$$

in z uporabo (a) oceni prvo vsoto navzgor z $\frac{\pi(ab)^m}{ab-1}$.

(d) Naj bo c_m najbližje celo število k $a^m r$, tako da je $a^m r = c_m + \epsilon_m$. Prepričaj se, da je $\pi a^k r + \pi a^k h_m = \pi a^{k-m}(c_m + 1)$ za $k \geq m$ in zato $\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) = (-1)^{c_m+1}$, $\cos(\pi a^k r) = (-1)^{c_m} \cos(\pi a^{k-m} \epsilon_m)$.

(e) Za drugo vrsto zaradi (d) velja $|\sum_{k=m}^{\infty} b^k(\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r))/h_m| = \frac{1}{h_m}\sum_{k=m}^{\infty} b^k(1 + \cos(\pi a^{k-m}\epsilon_m)$ in jo lahko zato navzdol ocenimo s prvim členom vrste $b^m(1 + \cos(\pi\epsilon_m))/h_m \geq b^m/h_m > 2(ab)^m/3$.

(f) Dobimo končno oceno $|\frac{f(r+h_m)-f(r)}{h_m}| > \frac{2(ab)^m}{3} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1} = (\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})(ab)^m$, kjer je koeficient pred $(ab)^m$ pozitiven. Ker velja to za poljuben m, je v limiti leva stran enaka neskončno, tako da funkcija f v (nobeni) točki r ni odvedljiva.

(10) **Karl Thomae** (1840-1921) je leta 1875 definiral na intervalu funkcijo, ki je zvezna v vsaki iracionalni točki in nezvezna v vsaki racionalni točki: $r(x) = 1/q$, če je $x = p/q$ (okrajšan ulomek), in $r(x) = 0$, če je x iracionalno število (glej [11]).

(a) Pokaži, da za vsak $a \in (0,1)$ velja $\lim_{x\to a} r(x) = 0$.

(b) Izpelji odtod zveznost funkcije r v iracionalnih in nezveznost v racionalnih točkah.

(c) Pokaži, da je za $d > 0$, $\sigma > 0$ in $N > 1/\sigma$ samo končno mnogo, npr. M, racionalnih točk p/q takih, da je $r(p(q) \geq 1/N$, in naj vsaka leži v podintervalu dolžine $d/2M$. Potem je po Riemannovem kriteriju iz točke (5) $s(\sigma) = \sum_A \delta_k = \sum_A d/2M \leq d/2$, torej $s(\sigma) \to 0$ ko $d \to 0$, in funkcija r je integrabilna na intervalu (0,1). Da se pokazati, da je njen integral enak nič.

Opomba. Enake lastnosti ima na celo realno os razširjena Thomaejeva funkcija R, definirana s predpisom $R(x) = 1$ za $x \in \mathbb{Z}$ in $R(x) = r(x - n)$ za $n < x < n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

(11) Znani italijanski matematik **Vito Volterra** (1860-1940) je leta 1881 pokazal, da ne obstaja realna funkcija, ki bi bila zvezna v vsaki racionalni in nezvezna v vsaki iracionalni točki (torej ravno obratno kot velja za Thomaejevo funkcijo). Za poljubno funkcijo f definirajmo množici $C_f = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ je zvezna v } x\}$ in $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ ni zvezna v } x\}$. Predpostavimo, da obstajata taki funkciji f, g na (a,b), ki sta zvezni vsaka na svoji gosti množici točk, da je $C_f = D_g$ in $D_f = C_g$. Funkcija f ima na (a,b) vsaj eno točko zveznosti x_0, torej obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < 1/2$ [11].

(a) Pokaži, da na poljubnem zaprtem podintervalu $[a_1', b_1'] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ velja $|f(x) - f(y)| < 1$. Ponovi prejšnje izvajanje zdaj za funkcijo g in za interval (a_1', b_1'), tako da dobiš zaprt podinterval $[a_1, b_1]$, na katerem velja tako $|f(x) - f(y)| < 1$ kot $|g(x) - g(y)| < 1$.
(b) Ponovi celoten postopek na intervalu (a_1, b_1) z manjšo vrednostjo $1/4$, in potem na dobljenem manjšem intervalu (a_2, b_2) še z manjšo vrednostjo $1/8$ itd. Na koncu dobimo zaporedje vloženih intervalov $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$, tako da je $|f(x) - f(y)| < 1/2^{k-1}$ in $|g(x) - g(y)| < 1/2^{k-1}$ za vsak par $x, y \in [a_k, b_k]$.
(c) Naj bo c poljubna skupna točka vseh vloženih podintervalov. Pokaži, da sta funkciji f in g obe zvezni v točki c, kar je v nasprotju s predpostavko $C_f = D_g$ in $D_f = C_g$. Torej taki dve funkciji ne obstajata.
(d) Dokaži odtod posledico: *Ne obstaja funkcija, ki bi bila zvezna v vsaki racionalni in nezvezna v vsaki iracionalni točki.*

(12) Z uporabo **Volterrove trditve** iz prejšnje točke pokaži, da ne obstaja zvezna funkcija g, tako da bi bilo $g(x) \in \mathbb{Q}$ za $x \notin \mathbb{Q}$ in $g(x) \notin \mathbb{Q}$ za $x \in \mathbb{Q}$. (Navodilo: Predpostavi, da taka funkcija g obstaja. Če je R razširjena Thomaejeva funkcija iz točke (10), naj bo $G(x) = R(g(x))$; pokaži, da je potem G zvezna pri $x \in \mathbb{Q}$ in nezvezna pri $x \notin \mathbb{Q}$.)

(13) Leta 1874 je **Cantor** pokazal, da zaporedje ne more izčrpati celotnega intervala in s tem ugotovil neštevnost intervala (znameniti diagonalni argument, ki ga uporabljamo danes, je odkril šele leta 1891). Pri tem je uporabil polnost sistema realnih števil v obliki trditve, da je presek vsakega padajočega zaporedja zaprtih podintervalov neprazen [11]. S pomočjo tega pokaži:
(a) Naj bosta vsaj dva člena zaporedja (x_k) v odprtem intervalu (a, b) (sicer je trivialno); prva dva, ki padeta vanj označimo z a_1 (manjšega) in z b_1 (večjega), nato isto storimo z odprtim intervalom (a_1, b_1) itd. Prepričaj se, da lahko s ponavljanjem tako konstruiramo zaporedji (a_r) in (b_r), tako da je $a < a_1 < a_2 < ... < a_r < ... < b_r < ... < b_2 < b_1 < b$ in da velja $x_k \in (a_r, b_r)$, samo če je $k \geq 2r + 1$.
(b) Uporabi dejstvo, da obstaja $c \in [a_r, b_r]$ za vsak r, in se prepričaj, da ne more veljati $c = x_N$ za noben N.

(14) Dokaži **Cantorjev** izrek, da je moč katerekoli množice A manjša od moči njene potenčne množice $\mathcal{P}(A)$, tako da najprej
(a) poiščeš injekcijo iz A v $\mathcal{P}(A)$,
(b) pri predpostavki, da obstaja bijekcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$, konstruiraš podmnožico $B = \{x \in A;\ x \notin f(x)\}$ in se prepričaš, da to vodi do protislovja (vprašaj se, ali element $y \in A$ z lastnostjo $f(y) = B$ pripada množici B ali ne).

(15) Če je $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + fx + g$ polinom n-te stopnje s celimi koeficienti, definirajmo njegovo *višino* s predpisom $h(P) = n - 1 + |a| + |b| + ... + |g|$ (kar je naravno število). Ker ima vsako algebraično število minimalni polinom, v katerem imajo koeficienti največji skupni delitelj 1, lahko vsa algebraična števila razvrstimo v zaporedje (a_k) glede na višino minimalnega polinoma. Pokaži:
(a) Obstaja samo končno mnogo algebraičnih števil z dano višino minimalnega polinoma.
(b) Algebraičnih števil je števno mnogo.
(c) Transcendentnih števil je neštevno mnogo.

Opomba. To je (nekonstruktiven) dokaz, da transcendentna števila obstajajo, ne da bi posebej izpostavili ali konstruirali vsaj enega (kot je to npr. storil **Liouville**, glej vajo 8). Na veliko presenečenje matematikov se je s tem pričela nova doba primerjanja moči množic. Naravno so se postavila vprašanja kot npr.: Ali obstajajo tudi neštevne množice z večjo kardinalnostjo, kot jo ima interval? Ali obstajajo neskončne množice s kardinalnostjo med števnim zaporedjem in neštevnim intervalom? Odgovor na prvo vprašanje je pozitiven (glej vajo 14), odgovor na drugo ni možen (glej besedilo o **Cantorju** in njegovo dokazovanje *hipoteze kontinuuma*).

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.