

II. MATEMATIKA SREDNJEGA IN NOVEGA VEKA

Evropa se je ravno s posredovanjem arabskih in perzijskih naravoslovcev, matematikov in astronomov seznanila z matematičnimi dosežki starih civilizacij. Najprej si bomo ogledali (bolj skromna) prizadevanja evropskih matematikov v srednjem veku, da bi vsaj obdržali določen (elementarni) nivo matematične kulture, tudi s prevajanjem antičnih tekstov iz arabščine v latinščino in kasneje v druge jezike. Z iznajdbo tiska je postalo matematično znanje bolj dostopno in v renesansi so že dosegli prve uspehe pri reševanju enačb in v astronomiji. Odkrili so nova matematična orodja (npr. logaritme) in cele nove matematične discipline (verjetnost, analitično geometrijo, moderno teorijo števil, kasneje v 17. stoletju infinitezimalni račun). Prikaz evropske zgodovine matematike bomo zaključili z Eulerjem in potem podali še kratek pregled njenega nadaljnjega razvoja v 19. stoletju.

7. Srednji vek in renesansa

Splošne razmere

S propadom Rimskega cesarstva so propadle tudi uveljavljene šole in univerze, pozabljena je bila grška tradicija, mnoga znanja, številne obrti in umetnosti. Izginila je celo inženirska matematika, ki so jo prakticirali Rimljani. Določeno vedenje o matematiki so gojili le še menihi po samostanih (v glavnem v zvezi s cerkvenim koledarjem) in redki posamezniki. Med izstopajočimi osebnostmi, ki so znali nekaj matematike, omenimo naslednje:

Boecij (Boethius) (480-525) iz Rima, filozof, ustanovitelj sholastike, je napisal standardne učbenike za aritmetiko (po Nikomahu iz 1. stoletja) in geometrijo (v glavnem le snov I. in del II. in IV. knjige Evklidovih *Elementov*). Bil je konzul pod ostrogotsko vladavino; zaradi (najbrž lažne) obtožbe o izdajstvu ga je dal umoriti Teodorik Veliki.

Beda Častitljivi (673-735), rojen v Northumbriji v Angliji, je postal eden največjih cerkvenih učenjakov in je pisal o matematičnih osnovah koledarja ter računanju na prste.

Alkuin (735-804), rojen v Yorkshiru v Angliji, deloval pa kot učitelj na dvoru Karla Velikega, je v matematičnem smislu znan predvsem po zbirki problemov *Za bistrenje mladih*, v kateri je vrsta znanih starih ugank in nalog (npr. tista o volku, kozi in zelju).

Gerbert d'Aurillac (950-1003), kasnejši papež Silvester II., je bil eden najbolj izobraženih cerkvenih dostojanstvenikov svojega časa. Študiral je tudi arabske tekste v Španiji in morda prvi prinesel v Evropo znanje o indijsko-arabskih številkah (brez ničle). Pripisujejo mu tudi uvedbo računala (abacusa), uporabo zemeljskega in nebesnega globusa (sferičnega astrolaba), konstrukcijo prve mehanske ure (v Magdeburgu) in nekateri tudi izgradnjo orgel v katedrali v Reimsu.

Prenašanje starega znanja

Dobo po letu 1100 lahko na področju matematike imenujemo tudi dobo prenosa grške in arabske tradicije in znanja v krščansko Evropo. To se je dogajalo hkrati po treh poteh. Krščanski učenjaki so potovali v arabska središča učenosti, predvsem v tiste dele Španije, ki so jo ponovno zasedli kristjani. Toledo je bil npr. osvobojen leta 1085 izpod mavrske nadvlade in njegova bogata knjižnica je v naslednjem stoletju postala zaželjeni cilj mnogih učenjakov in prevajalcev.

Eden prvih je bil **Adelard iz Batha** (1075-1164), ki je potoval tudi v Grčijo, Sirijo in Egipt, prevajal Evklidove *Elemente* in al Hvarizmijeve astronomske tabele. **Ivan iz Seville** (1090-1150) je prevajal direktno v kastiljščino. **Robert iz Chestra** je prevedel al Hvarizmijevo algebro. Bil je pariški študijski kolega in prijatelj našega **Hermana Koroškega** (~ 1100-1160), ki je v Toledu prav tako prevajal različne arabske spise (zlasti astronomske in verske) v latinščino in prispeval tudi nekaj originalnih filozofskih in matematičnih razprav. Z Robertom sta delala skupaj, oba npr. prevajala koran ter skupaj potovala

tudi v Carigrad, Palestino in Damask. **Platon iz Tivolija**, ki je od 1132 do 1146 živel v Barceloni, je bil prevajalec al Batanijeve astronomije in Teodozijevih *Sferik*. Najbolj marljivo pa se je prevajanja lotil **Gerardo iz Cremona** (1114-1187), ki je v latinščino prevedel več kot 90 arabskih del, med njimi Ptolemajev *Almagest*, Evklidove *Elemente* in al Hvarizmijevo algebro.



SLIKA 1. Herman Koroški, ilustracija iz 13. stoletja

Posrednik med vzhodom in zahodom je bila tudi Sicilija z zanimivo zgodovino. Najprej je bila grška kolonija, potem del Rimskega imperija, po propadu Rima povezana s Konstantinoplom oziroma Bizancem, bila petdeset let pod Arabci v 9. stoletju, nato so jo spet osvojili Bizantinci in nazadnje Normani. Njeni diplomati so stalno potovali na vzhod, v Bizanc in Bagdad, uporabljali tako latinščino kot arabščino, ter pridobili veliko grških in arabskih rokopisov. To dejavnost sta močno podpirala vladarja Friderik II. (1194-1250) in njegov sin Manfred (1231-1260).

Poleg tega so se v 12. in 13. stoletju zaradi trgovskih stikov z arabskim svetom močno razvila italijanska mesta Genova, Pisa, Benetke, Milano in Firenze. Trgovci so se na svojih poslovnih poteh dodobra seznanili z računsko in algebrsko prakso vzhoda, kar je imelo pomembno vlogo pri njeni vpeljavi v Evropo vključno z modernim indijsko-arabskim številskim sistemom.

Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170-1250) je bil eden najbolj nadarjenih matematikov srednjega veka. Znan je tudi kot **Leonardo iz Pise** ali **Leonardo Pisano**.



SLIKA 2. Leonardo iz Pise, imenovan Fibonacci

Bil je sin trgovca Bonaccija, ki ga je jemal na svoja poslovna potovanja na Sicilijo, v Alžirijo, Grčijo, Sirijo in Egipt. Svoja matematična spoznanja, ki si jih je pridobil v stikih z Arabci, je leta 1202 opisal v svoji slavni knjigi *Liber abbaci*. Druga izdaja je izšla leta 1228. Knjiga, posvečena aritmetiki in algebri, kaže močan vpliv al Hvarizmija in Abu

Kamila ter zagovarja indo-arabsko notacijo, vključno z ničlo. V 15 poglavjih predstavlja računanje s celimi števili in ulomki, kvadratnimi in kubičnimi koreni, reševanje linearnih in kvadratnih enačb (negativnih in imaginarnih korenov ne pozna) ter slavno zaporedje 1,1,2,3,5,.. števil, danes imenovano po avtorju. Velika zbirka problemov v *Liber abbaci* je več stoletij dobro služila študentom matematike.



SLIKA 3. Stran iz knjige Liber abbaci, na desni so napisana Fibonaccijeva števila

Fibonacci je napisal še druge knjige: *Practica geometriae* 1220, *Liber quadratorum* 1220 (verjetno najgloblje delo o analizi nedoločenosti). To ga uvršča med najpomembnejše algebriske med Diofantom in Fermatom. Zaradi nedvomnega matematičnega talenta so ga povabili na dvor Friderika II., kjer je na matematičnem turnirju rešil različne težke probleme, npr. poiskal racionalno število x , tako da sta $x^2 - 5$ in $x^2 + 5$ kvadrata racionalnih števil (takoj je našel rešitev $x = 41/12$ in jo kasneje objavil v *Liber quadratorum*; omenimo, da je to možno, ker je 5 - najmanjše - ti. kongruentno število), ali poiskal (na 9 decimalk natančno) približno rešitev 1.3688081075 kubične enačbe $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ter pokazal, da rešitev ni racionalna in da se ne izraža s koreni oblike $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

Drugi matematiki v 13., 14. in 15. stoletju

Poleg Fibonaccija se zdijo drugi matematiki 13. stoletja le njegove blede sence. Vseeno omenimo nekatere: **Jordanus Nemorarius** (1225-1260) je pisal o aritmetiki, algebri, geometriji, astronomiji in statiki, prvi je uporabljal črke za splošna (obča) števila. **Johannes de Sacrobosco** (1195-1256), angleški (morda škotski ali irski) menih, se je šolal in potem poučeval na univerzi v Parizu in je avtor v srednjem veku avtoritativnega astronomskega dela *Tractatus de Sphaera* (po Ptolemajevem *Almagestu* in nekaterih arabskih spisih). **Johannesa Campanusa** (1220-1296) iz Novare, prevajalca Evklidovih *Elementov* in astronoma (prvi opis planetarija), smo že omenili. Eden največjih filozofov tega časa, **Roger Bacon** (1214-1294), je študiral v Oxfordu, postal frančiškan, zagovornik znanstvene metode, poznavalec grške in arabske tradicije. Sicer nematematik je pisal tudi o matematiki (njegovo obsežno delo *Opus majus* (1267, 840 strani) vsebuje tudi matematiko in optiko ter izračune položaje in velikosti nebesnih teles).

Sholastiki visokega srednjega veka so poleg praktične matematike prispevali tudi k spekulativni matematiki, teoretizirali so o neskončnosti, gibanju in kontinuumu, diskretnosti in zveznosti (npr. cerkveni učitelj **Tomaž Akvinski** (1225-1274) ali **Thomas Bradwardine** (1290-1349), canterburijski nadškof).

Ni odveč pripomniti, da so v tem času v Evropi nastale in se razvile *prve univerze*: Bologna 1088, Pariz 1150, Oxford 1167, Cambridge 1209, Padova 1222, Napoli 1224, Toulouse 1229, Siena 1240, Coimbra 1290, Madrid 1293, Rim 1303, Firenze 1321, Pisa 1343, Praga 1361, Krakow 1364, Dunaj 1365 in Heidelberg 1386.

Štirinajsto stoletje, ki ga je prizadela črna smrt (kuga) in poleg stoletne vojne zmanjšala evropsko prebivalstvo za eno tretjino, je bilo matematično revno. Največji matematik tega obdobja je bil **Nicole Oresme** (1323-1382), ki je bil rojen v Normandiji in postal škof. Napisal je pet matematičnih del in prevedel Aristotela. Prvi je govoril o lomljenih eksponentih in se približal koordinatnemu sistemu, znan je njegov dokaz (ki ga uporabljamo še danes in temelji na združevanju 2^n zaporednih členov), da divergira harmonična vrsta

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

V petnajstem stoletju, ko se je pričela renesansa v umetnosti in učenju, so po padcu Bizanca 1453 begunci v Italijo prinesli zaklade grške civilizacije. Zdaj so lahko tudi zahodnjaki grške klasike študirali v originalu, ne le posredno preko arabskih prevodov. Sredi stoletja so tudi iznašli tisk, ki je omogočil hitrejše širjenje informacij. Konec stoletja so odkrili Ameriko. Matematična dejavnost je bila najbolj živa v italijanskih in srednje evropskih mestih (Nürnberg, Dunaj, Praga), kjer so se ukvarjali z aritmetiko, algebro in trigonometrijo, v glavnem zaradi trgovine, navigacije in astronomije.

Nicolas Cusa (1401-1464), iz mesta Cues v francoski provinci Moselle; postal je kardinal, leta 1448 celo guverner Rima, z matematiko se je ukvarjal bolj slučajno, poskusil se je v reformi koledarja, kvadraturi kroga in tretjinjenju kota.

Georg von Peurbach (1423-1461), Cusov učenec, je učil astronomijo v Italiji in na Dunaju, kjer je naredil univerzo, ustanovljeno 1365, za center učenosti in raziskovanja. Sestavil je tabelo sinusov, pisal o aritmetiki in astronomiji ter začel iz grščine prevajati Ptolemajev *Almagest*.

Johann Müller ali **Regiomontanus** (1436-1476) iz bavarskega Königsberga je študiral pri Peurbachu na Dunaju, dokončal prevod *Almagesta* ter iz grščine prevedel še dela Apolonija, Herona in Arhimeda. Najboljše njegovo delo *De triangulis omnimodis* iz leta 1464 (posthumno izdano leta 1533) je prva evropska sistematična predstavitev ravninske in sferične trigonometrije, neodvisna od astronomije (pet knjig o določanju trikotnika, npr. če je dana stranica, višina nanjo in razmerje ostalih dveh stranic ipd., sinusni zakon sferne trigonometrije). Kasneje je sestavil tudi tabelo tangensov. Potoval je po Italiji in Nemčiji ter se ustalil v Nürnbergu, kjer je ustanovil observatorij in tiskarno ter bil nasploh zelo aktiven. Menda je konstruiral mehničnega orla, predvsem pa pisal razprave iz astronomije. Astronomske tabele je (prvi) poimenoval *efemeride*. Leta 1475 ga je papež Sikst IV. povabil v Rim, da bi sodeloval pri reformi koledarja, a je kmalu umrl, star komaj 40 let.



SLIKA 4. Johann Müller, imenovan Regiomontanus

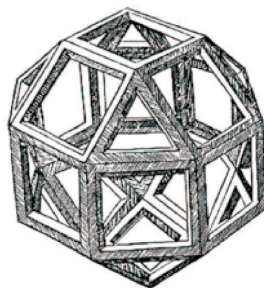
Nicolas Chuquet (1445-1500), najbolj nadarjen francoski matematik 15. stoletja, rojen v Parizu in deloval kot zdravnik v Lyonu. Leta 1484 je napisal razpravo o aritmetiki *Triparty en la science des nombres*, v kateri je obravnaval racionalna in iracionalna števila, pozitivne in negativne eksponente, imena za velika števila, različne okrajšave itd.

Luca Pacioli (1445-1517) iz Sansepolcra v Toskani, italijanski menih (frančiškan), živel in poučeval matematiko v Benetkah, Perugi in Milanu. Leta 1494 je natisnil knjigo *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità*, nekakšen povzetek matematike tistega časa, ki ne prinaša veliko novega v primeri z *Liber abbaci*, ima pa odlično notacijo. Vsebinsko obravnava aritmetični del postopke za osnovne operacije in korenjenje, trgovsko računovodstvo, pravilo napačne predpostavke in je dolgo veljal za standardni računski priročnik. Algebraični del vsebuje kvadratne enačbe in probleme, ki pripeljejo do njih, uporablja različne okrajšave, npr. *p* (*piu*) za +, *m* (*meno*) za -, *co* (*cosa*) za neznanko x , *ce* (*censo*) za x^2 , *cu* (*cuba*) za x^3 , *cece* (*censo censo*) za x^4 , *ae* (*aequalis*) za = itd. Mnogo je potoval in mnogo pisal.



SLIKA 5. De Barbarijev portret Luca Paciolija

Leta 1509 je objavil drugo knjigo *De divina proportione* o pravilnih telesih (ki mu jih je v knjigi narisal prijatelj *Leonardo da Vinci*)



SLIKA 6. Da Vincijeva risba rombičnega kbooktaedra v Paciolijevi knjigi *De divina proportione*

Seznam zgodnjih aritmetičnih tiskov

S povečanim renesančnim zanimanjem za izobrazbo in s povečano trgovsko aktivnostjo se je z iznajdbo tiska pojavila cela vrsta aritmetičnih besedil, ena pisana v latinščini s strani cerkvenih učenjakov, druga v ljudskih jezikih za potrebe trgovine:

Aritmetika iz Trevisa anonimnega avtorja (Treviso 1478), v beneškem narečju, najstarejša tiskana knjiga sploh iz matematike (iz Plimptonove zbirke univerze Columbia),

Aritmetika Piera Borgija (Benetke 1484), uspešno in vplivno komercialno delo v italijanščini, doživelo 17 izdaj,

Aritmetika Johanna Widmana (Leipzig 1489) v nemščini, na Nemškem zelo razširjena,

Aritmetika Filippa Calandrija (Firence 1491), vsebuje prvi opis postopka dolgega deljenja in prve ilustrirane probleme v tisku,

Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità Luca Paciolija (Benetke 1494), že opisana,

Aritmetika Jacoba Köbela (Heidelberg 1514), zelo popularna, doživela 22 izdaj,
Aritmetika Adama Rieseja (1522) v nemščini, namenjena poslovnemu in obrtnikom, doživela 114 izdaj (še danes je v nemško govorečih deželah v veljavi izraz "aritmetika po Rieseju"),
Aritmetika Cuthberta Tunstalla (1522) v latinščini, zasnovana na Paciolijevi *Summi*,
The Grounde of Artes Roberta Recorda (1542) v angleščini, pisana v obliki dialoga med učiteljem in učencem, popularna, doživela 29 izdaj.

Začetek aritmetičnega in algebraičnega simbolizma

Prvič se znaka $+$ in $-$ pojavita v Widmanovi aritmetiki (**Johann Widman** je bil rojen ~ 1460 na Češkem). Znak $+$ je najbrž izpeljan iz latinske besede *et*, znak $-$ pa iz okrajšave \overline{m} za *minus*. Nista pa še pomenila algebraičnih operacij. Kot taka prvič nastopata v neki knjigi nizozemskega matematika **Gillisa van der Hoeckeja** iz leta 1514.

Robert Recorde (1510-1558) je študiral v Oxfordu, medicino v Cambridgeu in učil matematiko v privatnih razredih na obeh inštitucijah. Kasneje je bil osebni zdravnik kralja Edvarda VI. in kraljice Marije (Queen Mary), potem pa kontrolor rudnikov in kovnice denarja. Poleg aritmetike je pisal o astronomiji, geometriji, algebri in medicini. Astronomska knjiga *The Castle of Knowledge* iz leta 1551 je ena prvih knjig, ki je angleškemu bralcem predstavila Kopernikov heliocentrični sistem. Istega leta je izšla njegova geometrija (*The Pathewaie to Knowledge*), skrajšana različica Evklidovih *Elementov*, leta 1557 pa še algebra (*The Whetstone of Witte*).

Recordova algebra *The Whetstone of Witte* (1557) je zgodovinsko pomembna zaradi uporabe modernih simbolov. V njej je npr. prvič vpeljan enačaj = "because noe 2 thynges can be moare equalle" (podrobneje: "I auoide the tedious repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe (thus =), bicause noe .2. thynges, can be moare equalle").



SLIKA 7. Robert Recorde

Christoff Rudolff (1499-1545) je že prej, leta 1525 v svoji algebri *Die Coss*, prvi nemški knjigi o algebri, vpeljal znak za kvadratni koren. Znak je nastal iz malega *r*, kot okrajšave za *radix* (koren). Drugo izboljšano izdajo je priskrbel Michael Stiffel leta 1553. Že prej je nastala tudi Stiefflova *Arithmetica integra* (1544) v treh delih (racionalna, iracionalna števila in algebra).

V njej je **Michael Stiffel** (1486-1567), ki velja za največjega nemškega algebraika 16. stoletja, povezal aritmetično in geometrično zaporedje (in tako ustvaril predhodno stopnjo logaritmov), podal tabelo binomskih simbolov, predstavil Evklidovo X. knjigo ter uporabljal posebne znake $+$, $-$, $\sqrt{\quad}$ ter črke za neznanke. Stiffel je bil menih, se spreobrnil v luteranstvo in postal fanatičen reformator. Napovedal je konec sveta za 3. oktober 1533 in uničil življenja mnogim, ki so mu sledili, zato je pristal v ječi. Papeža Leona X. je na osnovi numerologije proglasil za Zver iz Knjige razodetij: LEO DECIMVS je preoblikoval v LDCIMV, dodal X (za Leona X.), izpustil M (misterij), permutiral črke in dobil DCLXVI = 666, ki pomeni Zver (to število so v zgodovini pogosto aplicirali na osovražene ljudi, npr. v rimski dobi na cesarja Nerona, na različne papeže, Luthra, med 1. svetovno vojno na nemškega cesarja Wilhelma).

Kubična in kvartična enačba

Problem reševanja enačbe tretje in četrte stopnje so ugnali italijanski matematiki v 16. stoletju. Zgodba je na kratko naslednja:

Okrog leta 1515 je **Scipione del Ferro** (1456-1526), profesor matematike na univerzi v Bologni, najbrž na osnovi arabskih virov našel rešitev splošne enačbe oblike $x^3 + mx = n$; rezultata pa ni objavil, ampak ga je zaupal svojemu učencu **Antoniu Fioru**. Dvajset let kasneje je **Niccolò Fontana iz Brescie (Tartaglia)** trdil, da zna rešiti enačbo oblike $x^3 + px^2 = n$. Fior mu ni verjel, misleč da blefira, zato ga je povabil na dvoboj, kjer pa se je Tartaglia izkazal, saj je rešil več tipov enačb kot Fior. Kasneje je **Girolamo Cardano**, zdravnik in matematik iz Milana, iz Tartaglia izvabil skrivnost reševanja kubičnih enačb in jo (brez dovoljenja) objavil v svoji knjigi *Ars magna*, izdani v latinščini v Nürnbergu leta 1545. Tartaglia je protestiral, toda **Lodovico Ferrari**, Cardanov učenec, je zatrdil, da je Cardano dobil rešitev od Scipiona del Ferrera preko tretje osebe, in vrnil Tartagliu s protiobtožbo. Cardanova rešitev je naslednja: Ker je $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$, lahko pišemo $3ab = m$, $a^3 - b^3 = n$ in $x = a - b$. Odtod dobimo rešitev:

$$a = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}} \text{ in } b = \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}.$$

Leta 1540 je italijanski matematik **Zuane de Tonini da Coi** predlagal Cardanu problem, ki je vodil do enačbe četrte stopnje. Cardano ga ni znal rešiti, pač pa je to uspelo njegovemu učencu Ferrariju. Tudi ta rešitev je bila objavljena v *Ars magni*. Ferrari je enačbo $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ zapisal v obliki $(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$; z uvedbo dodatne neznanke je dobil $(x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$. Če določimo y tako, da bo na desni popolni kvadrat, bomo enačbo za x znali rešiti. To pa je res natanko takrat, ko je $4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0$, kar pa je enačba tretje stopnje. (Kasneje sta **François Viète** in **René Descartes** ponudila še drug način reševanja.)

Leonhard Euler je skušal leta 1750 na podoben način reducirati enačbo pete stopnje na enačbo četrte stopnje, a ni uspel. Enako se je zgodilo Lagrangeu trideset let kasneje. Italijanski zdravnik **Paolo Ruffini** (1765-1822) je leta 1803, 1805 in 1813 podal dokaze, da to ne gre. Neodvisno je leta 1824 to ugotovil tudi norveški matematik **Niels Henrik Abel** (1802-1829). S teorijo reševanja enačb višje stopnje so se prej in kasneje ukvarjali še mnogi: **Bring**, **Jerrard**, **Tschirnhaus**, **Galois**, **Jordan** in drugi. Iz teorije enačb je zrasla moderna teorija grup.



SLIKA 8. Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501-1576) je bil rojen v Paviji, študiral medicino in postal ugleden in po Evropi iskan zdravnik. Potoval je na Škotsko, da je ozdravil astme nadškofa Hamiltona, po vrnitvi pa imel mesti profesorja na univerzah v Paviji in Bologni. Za dodaten zaslužek se je ukvarjal tudi z astrologijo (ne preveč uspešno), a kljub temu kasneje postal astrolog na papeškem dvoru v Rimu, kjer je umrl na isti dan, kot je napovedal. Bil je nagle jeze in nasploh kontroverzna oseba.

Napisal je več razprav o aritmetiki, astronomiji in fiziki, najpomembnejše delo je brez dvoma *Ars magna* iz leta 1545, velika razprava v latinščini, posvečena samo algebri (v njej dopušča tudi negativne rešitve in uporabo imaginarnih števil, opisani so približni postopki itd.). Poznal je že kasnejše Descartesovo pravilo predznakov.



SLIKA 9. Naslovna stran Cardanove knjige *Ars Magna* (1545)

Cardano je bil tudi strasten kockar in je o tem napisal priročnik *Liber de ludo aleæ*, ki je izšel posthumno in vsebuje nekaj zanimive verjetnosti.

Niccolò Tartaglia (1499-1557) je imel težko otroštvo, med francosko zasedbo Brescie 1512 je bil ranjen v usta in je zato celo življenje jecljal (tartaglia pomeni jecljavček), oče pa mu je umrl. Kljub pomanjkljivi izobrazbi je bil zelo nadarjen za matematiko, morda najboljši italijanski matematik 16. stoletja. Preživljal se je s poučevanjem matematike in drugih znanosti. Umrl je v Benetkah. Poleg reševanja kubične enačbe je tudi napisal obsežno aritmetično delo v dveh delih, izdal Evklida in Arhimeda. Ukvarjal se je tudi z uporabo matematike v topništvu.



SLIKA 10. Niccolò Fontana Tartaglia

Rafael Bombelli (1526-1572) je še ena pomembna osebnost italijanske matematike 16. stoletja. Rojen in živel je v Bologni, znan pa je predvsem po svoji *Algebri*, ki jo je izdal tik pred smrtjo 1572. V njej je obravnaval tudi reševanje kubične enačbe $x^3 + mx = n$ v primeru, ko je $(n/2)^2 + (m/3)^3 < 0$ in ima enačba tri realne korene, ki se po Cardanovih formulah izražajo z imaginarnimi števili (*casus irreducibilis*).

V svoji *Algebri* je Bombelli uvedel različne okrajšave za zapisovanje kvadratnih korenov in pri tem uporabljal oklepaje. Izraz $\sqrt{7 + \sqrt{14}}$ bi npr. Pacioli zapisal še v obliki $RV\ 7\overline{p}\ R\ 14$, Bombelli pa kot $R\perp\ 7\overline{p}\ R\ 14\perp$.

Modern notation	Bombelli printed	Bombelli written
$5x$	$\frac{\downarrow}{5}$	$\frac{\downarrow}{5}$
$5x^2$	$\frac{\downarrow}{5}$	$\frac{\downarrow}{5}$
$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$	Rq[4pRq6]	R[4pR6]
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$	Rc[2pRq[0m121]]	R ³ [2pR[0m121]]

SLIKA 11. Bombellijeva notacija

François Viète

Največji francoski matematik 16. stoletja je **François Viète** (1540-1603), pravnik in član parlamenta. Rojen je bil v Fontenayu, umrl v Parizu. Nizozemski ambasador je kralju Henriku IV. prinesel problem, ki ga je 1593 zastavil **Adrianus Romanus** (ali **Adriaen van Roomen**) (1561-1615) in se prevede na enačbo 45. stopnje. Viète je takoj našel dva korena, kasneje pa še 21 drugih (ne pa negativnih). Romanusu, s katerim sta postala prijatelja, je zastavil Apolonijev problem. Viète je koristil Franciji tudi drugače, v sporu s Španijo: leta 1590 je zlomil ti. špansko kodo, za katero je španski kralj Filip II. mislil, da je nezlomljiva (Filip se je zaradi tega pritožil papežu, češ da gre za črno magijo).

Viète je napisal dela iz trigonometrije, algebre in geometrije. *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) je prva knjiga v zahodni Evropi, ki razvija metode za reševanje trikotnika z uporabo vseh šestih trigonometričnih funkcij. Znal je izračunati $\cos n\theta$ kot funkcijo $\cos \theta$ za $n = 1, 2, \dots, 94$. Najslavnejše delo *In artem analyticam isagoge* (1591) prinaša simbolično algebro, uporablja samoglasnike za neznanke in soglasnike za znane količine (naš sedanji dogovor o označevanju neznank s črkami s konca abecede je vpeljal Descartes leta 1637). Enačaja ni pisal, namesto njega je zapisal *aequatur*, je pa uporabljal znaka $+$ in $-$. V knjigi o trigonometriji in geometriji *Supplementum geometriae* iz leta 1593 je predstavil tudi svojo rešitev podvojitve kocke in tretjinjenja kota. V delu *De numerosa potestatum resolutione* (1600) je obravnaval približno reševanje enačb (z nerodno metodo, ki je po mnenju nekaterih pomenila pravo "mučenje kristjanov"). Zelo pa so znane njegove formule, ki povezujejo koeficiente enačbe z elementarnimi simetričnimi funkcijami njenih korenov; npr. za kvadratno enačbo $x^2 + px + q = 0$ s korenoma α, β velja $\alpha + \beta = -p$ in $\alpha\beta = q$.

Leta 1615 je posthumno izšla njegova zadnja knjiga *De aequationum recognitione et emendatione*, v kateri predstavlja novo metodo za reševanje kubične enačbe $x^3 + 3ax = 2b$. Rešitev išče v obliki $x = a/y - y$ in za y^3 dobi kvadratno enačbo $y^6 + 2by^3 = a^3$, ki jo reši, da najde y^3 in nato y , torej tudi x . Za rešitev enačbe 4. stopnje $x^4 + bx^2 + cx = d$ ravna podobno kot Ferrari. Zapiše $x^4 = -bx^2 - cx + d$, na obeh straneh prišteje $x^2y + y^2/4$, tako da dobi $(x^2 + y/2)^2 = (y - b)x^2 - cx + (y^2/4 + d)$, in izbere y tako, da je tudi na desni strani popolni kvadrat. To doseže z rešitvijo pomožne enačbe 3. stopnje $(y - b)(y^2 + 4d) = c^2$.

Viète je bil torej izjemen algebraik, prispeval pa je tudi k reševanju treh klasičnih grških problemov, našel formulo z neskončnim produktom za število $2/\pi$, namreč formulo

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdots,$$

ki smo jo navedli v pregledu aproksimacij števila π v 3. razdelku, in skušal obnoviti izgubljeno Apolonijevo delo o tangentah. V sporu s **Claviusom** glede gregorjanske reforme koledarja pa je zastopal povsem zgrešeno in neznanstveno stališče.



SLIKA 12. François Viète

Drugi matematiki in astronomi 16. stoletja

Christopher Clavius (1537-1612), jezuit, rojen v Bambergu na Nemškem, umrl v Rimu, študiral na univerzi v Coimbri, ustanovljeni leta 1290, morda pri Pedru Nuñesu, postal nadarjen učitelj in velik promotor matematike, napisal učbenika aritmetike 1583 in algebre 1608, izdal Evklidove *Elemente* 1574, pisal o trigonometriji in astronomiji ter igral pomembno (morda celo vodilno) vlogo pri gregorijanski reformi koledarja, ki jo je leta 1582 uzakonil papež Gregor XIII. (izpustili so 10 dni, 4. oktobru je sledil 15. oktober).

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), rojen v Bologni, učil matematiko in astronomijo v Firencah, Perugi in Bologni, napisal aritmetiko (popolna števila), uredil izdajo Evklidovih *Elementov* in kratko algebro. Napravil je prve korake v teorijo verižnih ulomkov.

Simon Stevin (1548-1620) je bil najvplivnejši matematik na Nizozemskem, postal general, kot ekspert v statiki in hidrostatici je vodil mnoga javna dela, napisal aritmetiko s sistematično obravnavo decimalnih števil.

Nikolaj Kopernik (1473-1543), študiral v Krakovu, potem pravo, medicino in astronomijo v Padovi in Bologni. Svoj heliocentrični sistem je dognal leta 1530, objavljen pa je bil šele v letu njegove smrti 1543. Ni bil matematik, je pa napisal delo o trigonometriji.



SLIKA 13. Naslovna stran Kopernikovega slavnega dela *De revolutionibus orbium coelestium* iz leta 1543

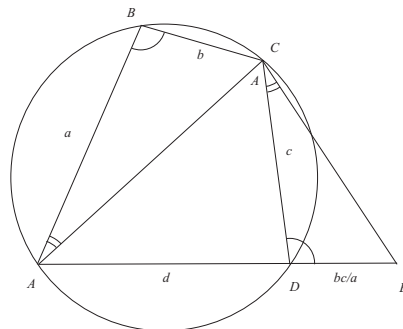
Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576) je bil vodilni nemški astronom 16. stoletja, dvanajst let je s skupino sodelavcev sestavljal natančne in koristne trigonometrične (10- in 15-mestne) tabele za sinus za vsakih 10 sekund. Prvi je definiral trigonometrične funkcije z razmerjem stranic v pravokotnem trikotniku.

Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) je leta 1593 izpopolnil Rhaeticusove tabele. Njegova razprava o trigonometriji je prva, ki res zasluži to ime.

V 16. stoletju je torej štartala simbolna algebra, indo-arabski zapis števil se je standardiziral, prav tako decimalni, priznana so bila negativna števila, kubične in kvartične enačbe so bile dokončno rešene, trigonometrija je bila sistematizirana, napisane odlične tabele. Leta 1556 je v Mexicu Cityju izšla prva matematična tiskana knjiga v Novem svetu (*Juan Diez*, komercialni priročnik).

Vaje:

- (1) Naslednje naloge so iz **Alkuinove** zbirke ~ 775 :
 - (a) Volka, kozo in zelje je treba prepeljati čez reko v čolnu, ki lahko poleg čolnarja prepelje samo še eno reč. Kako to storiti, da ne bo volk požrl koze ali koza zelje?
 - (b) 100 mernikov žita je treba razdeliti med 100 ljudi tako, da vsak moški dobi 3 mernike, vsaka ženska 2 mernika in vsak otrok $1/2$ mernika. Koliko moških, žensk in otrok je v skupini? Poišči vse rešitve. Koliko jih je?
 - (c) Imamo 30 steklenic, med njimi 10 polnih, 10 na pol praznih in 10 praznih. Kako naj jih razdelimo med tri ljudi, da vsak dobi enako mnogo steklenic in enako količino tekočine? Koliko je vseh rešitev?
 - (d) Pes dela 9 čevljev dolge skoke, zajec pa 7. Po kolikih skokih bo pes ujel zajca, če je na začetku le-ta 150 čevljev pred njim in oba skočita hkrati?
- (2) **Fibonaccijeva** knjiga *Liber abbaci* je znana po prvi od naslednjih nalog:
 - (a) Koliko parov zajcev producira začetni par v enem letu, če vsak par vsak mesec skoti nov par, začnši od drugega meseca dalje?
 - (b) Označimo n -ti člen Fibonaccijevega zaporedja $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ z u_n . Pokaži, da je:
 - (i) $u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n$, $n \geq 2$,
 - (ii) $u_n = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n] / 2^n \sqrt{5}$,
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = (1 + \sqrt{5})/2$.
- (3) Tudi naslednje naloge so iz knjige *Liber abbaci*:
 - (a) Oče je zapustil najstarejšemu sinu 1 hektar in $1/7$ ostanka posestva, naslednjemu 2 hektarja in $1/7$ ostanka itd. Zadnji sin je dobil vse, kar je ostalo. Koliko sinov je imel oče in kako veliko je bilo njegovo posestvo, če so na koncu vsi sinovi dobili enako?
 - (b) Trije možje imajo v blagajni kup denarja z deleži $1/2$, $1/3$ in $1/6$. Vsak vzame iz blagajne nekaj denarja, tako da v njej nič ne ostane. Prvi vrne $1/2$ vsote, ki jo je vzel, drugi $1/3$ svoje vsote in tretji $1/6$ vsote. Kar je bilo vrnjeno v blagajno, razdelijo na enake dele in vsak dobi enega. Na koncu imajo vsi ravno toliko, kot jim pripada od vsega začetka. Koliko je bilo vsega denarja v blagajni in koliko je na začetku vzel vsak?
 - (c) Nabiralec jabolk je pri odhodu iz sadovnjaka vsakemu od 7 stražarjev zaporedoma moral dati nekaj jabolk, ki jih je nabral. Prvemu je dal $1/2$ od vseh nabranih jabolk in še enega, drugemu $1/2$ od preostalih jabolk in še enega itd. Na koncu mu je ostalo eno samo jabolko. Koliko jabolk je nabral?
- (4) **Regiomontanus** ponuja bralcu v knjigi *De triangulis omnimodis* iz leta 1484 naslednje konstrukcijske naloge:
 - (a) Določi trikotnik, če je dana razlika dveh stranic, višina na tretjo stranico in razlika odsekov, na katere razdeli višina tretjo stranico.
 - (b) Določi trikotnik, če je dana stranica c , višina h na to stranico in razmerje $a/b = r$ preostalih dveh stranic.



SLIKA 14. Regiomontanusova konstrukcija tetivnega štirikotnika z znanimi stranicami

- (c) Konstruiraj krožni (tetivni) štirikotnik, če so dane vse štiri stranice a, b, c, d . Navodilo: na podaljšku AD najprej konstruiraj točko E , tako da bo $DE = bc/a$ in izkoristi podobnost trikotnikov DCE in BAC (glej sliko 14).
- (5) **Luca Pacioli** ima v svoji *Summi* iz 1494 tudi naslednji konstrukcijski problem:
Polmer trikotniku včrtaneg kroga je 4, njegovo dotikališče razdeli eno od stranic na dva odseka, dolga 6 in 8. Določi dolžine vseh treh stranic.
- (6) V starih aritmetikah je bilo veliko trgovskih nalog, npr.:
- (a) (**Chuquet**) Trgovec je obiskal tri sejme. Na prvem je podvojil svoj kapital in porabil 30 dukatov, na drugem potrojil kapital in potrošil 54 dukatov, na tretjem pa je početveril denar, vendar zapravil 72 dukatov. Ostalo mu je 48 dukatov. Koliko denarja je imel na začetku?
- (b) (**Tartaglia**) Trgovec je na Portugalskem kupil 50,000 funtov popra in zanj plačal 10,000 skudov in še 500 skudov takse. Prevoz po morju do italijanske obale ga je stal 300 skudov in še 200 dajatev, prevoz od obale do Firenc pa še 100 skudov, 100 skudov pa ga je stalo dovoljenje za vstop v mesto. Nazadnje je moral vladi plačati še 1000 skudov, da je dobil dovoljenje za prodajo popra. Kakšno ceno naj postavi za en funt popra, da bo imel na koncu ob vseh stroških dobiček $1/10$ skuda pri vsakem funtu?
- (c) (**Humphrey Baker** 1568) Poslovneža sta ustanovila skupno podjetje. Prvi je vložil vanj 1. januarja 640 liber, drugi pa nič do 1. aprila. Koliko naj vloži tedaj, da bo na koncu lahko razpolagal s polovico dobička, če naj po dogovoru njuno partnerstvo traja do konca leta?
- (7) Imejmo splošno enačbo tretje stopnje $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, $a \neq 0$.
- (a) Pokaži, da transformacija $z = x - b/3a$ prevede zgornjo enačbo v enačbo oblike $x^3 + 3hx = 2g$. Poišči g in h .
- (b) Izpelji odtod **Cardanovo formulo**: $x = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 + h^3}} - \sqrt[3]{-g + \sqrt{g^2 + h^3}}$.
- (c) Reši enačbo $x^3 + 63x = 316$ po Cardanovi in po Viètovi metodi.
- (d) Reši enačbo $x^3 - 63x = 162$, ki spada v primer *casus irreducibilis*, po Cardanovi poti. Nato pokaži, da je $81 \pm 30\sqrt{-3} = (-3 \pm 2\sqrt{-3})^3$ in se prepričaj, da je eden od korenov enak -6 . Poišči še druge korene.
- (8) Še dve zgodovinski enačbi 4. stopnje:
- (a) **Cardano** je rešil enačbo $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ tako, da je na obeh straneh prištel člen $3x^2$. Poišči na ta način vse štiri korene.
- (b) Problem, ki ga je **Da Coi** leta 1540 predložil Cardanu se glasi: Razdeli 10 na tri dele tako, da bo srednji del geometrijska sredina ostalih dveh in da bo produkt prvih dveh enak 6 (torej $x + y + z = 10$, $xz = y^2$, $xy = 6$). Pokaži, da odtod dobimo za y enačbo 4. stopnje: $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Reduciraj to enačbo na enačbo 3. stopnje po Ferrarijevi in po Viètovi poti.

LITERATURA

- [1] A. Aaboe, *Episodes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
- [2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
- [3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
- [4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
- [5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
- [6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
- [7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
- [8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
- [9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
- [10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
- [11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
- [12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
- [13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- [15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
- [16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
- [17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
- [18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
- [19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
- [20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
- [21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- [22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
- [23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
- [24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
- [25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
- [26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
- [27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [28] E. Maor, *The Story of e*, Princeton University press, 1994.
- [29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
- [30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [31] A.S. Posamentier, *The Pythagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
- [32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
- [33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- [34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- [35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- [36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
- [37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
- [38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
- [39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
- [40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
- [41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
- [42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.