3. Trije klasični problemi grške geometrije

Zgodovinski okvir

Obdobje od Talesa do Evklida (600-300 pnš.) je bilo izjemno za razvoj matematike. Poleg Mileta v Mali Aziji in Krotone v Italiji so se kmalu pojavili novi matematični centri. Potem ko so $\sim$ 1200 pnš. s severa vdrli Dorci in ustanovili Šparto, so se prvotni prebivalci umaknili na otoke v Egejskem morju in v Malo Azijo, kjer so ustanovili trgovska in kulturna središča. V 6. stoletju pnš. so se okrepili Perzijci in 546 pnš. zasedli jonska mesta in grške kolonije v Mali Aziji. Glavni jonski filozofi so se umaknili, **Pitagora** v Krotono, **Ksenofont**, **Zenon** in **Parmenid** v Eleo v Italiji. Leta 499 pnš. se jonska mesta uprejo perzijski nadvladi. Atene pošljejo vojaško pomoč, a je upor kljub temu zadušen. Perzijski kralj Darej se želi maščevati Atenam. Leta 497 pnš. organizira veliko armado in pripravi ekspedicijo nad Grčijo, a je njihova flota uničena v viharju. Leta 490 pnš. prodrejo Perzijci v Atiko, a so premagani na Maratonskem polju. Atene prevzamejo vodstvo Grčije. Leta 480 pnš. Darejev sin Kserkses nadaljuje invazijo na Grčijo. Pomorska bitka pri Salamini je zmaga za Grke, kopenska bitka pri Termopilah pa za Perzijce. Naslednje leto pri Platajah spet zmagajo Grki in iz Grčije preženejo napadalce.

Pol stoletja miru je zlata doba za Atene, njeno demokracijo in za Grčijo pod atensko hegemonijo. Nastopijo Periklej, Sokrat in drugi filozofi, razvijata se umetnost in znanost. Atene privlačijo matematike z vseh koncev Velike Grčije. Pride **Anaksagora**, zadnji jonski naravni filozof, vrnejo se mnogi pitagorejci, prideta **Zenon** in **Parmenid**, eleata, v Atene se s Kiosa preseli **Hipokrat**, geometrija cveti.

Leta 431 pnš. je konec obdobja miru, saj izbruhne peloponeška vojna. Atenci so sprva uspešni, nato kuga pomori četrtino prebivalstva. Leta 404 pnš. sprejmejo nadvlado Šparte, toda leta 371 pnš. se druga mesta uprejo tej nadvladi in zmagajo. V teh nemirnih časih je napredek geometrije odvisen od razvoja v kolonijah. V Tarentu nastane nova šola pitagorejcev. Najbolj nadarjen med njimi je **Arhit**, ki velja za začetnika matematične mehanike. Učil se je pri **Filolaju**, sicer pa se je odlikoval tudi kot general in voditelj (drugi Periklej). Njegov prijatelj **Teodor** iz Kirene v Afriki je bil Platonov učitelj matematike, tako kot je bil Sokrat njegov učitelj filozofije. **Platon** se je že prej vrnil v Atene in leta 380 pnš. ustanovil Akademijo. Tudi **Evdoks** je študiral pri Arhitu in Platonu, potem pa ustanovil svojo šolo v Kiziku na severu Male Azije. Njegov učenec je bil geometer **Menajhmos**, Platonov privrženec, ki je odkril preseke stožca. Tudi njegov brat **Dejnostrat**, prav tako Platonov učenec, je bil nadarjen geometer. Še boljši je bil **Teajtet**, ki mu pripisujejo obdelavo snovi iz X. in XIII. knjige Evklidovih *Elementov.* Tako kot Platon je bil učenec Teodorja. **Aristotel**, Platonov učenec, sicer ni bil matematik, jo je pa študiral in ima velike zasluge za razvoj formalne (deduktivne) logike.

Razvoj matematike

V obdobju 600-300 pnš. lahko sledimo vsaj trem linijam v razvoju grške matematike:
(a) Matematično tematiko, ki jo je začel proučevati Pitagora, nadaljevali pa Hipokrat, Evdoks, Teodor in Teajtet, je **Evklid** kasneje uredil, sistematiziral in zapisal v *Elemente*, ki jih bomo predstavili na koncu tega razdelka.
(b) V zvezi s problemi o neskončnosti, zveznosti in gibanju lahko v matematiki stare Grčije povežemo Zenonove paradokse in metodo izčrpavanja, ki sta jo odkrila sofist **Antifon** in **Evdoks**, kasneje pa uveljavil **Arhimed**, ter atomistično teorijo **Demokrita iz Abdere** ($\sim$ 470-360 pnš.). O tem smo nekaj že povedali, nekaj pa še bomo v zvezi z Arhimedom v naslednjem razdelku. Razvoj v tej smeri je mnogo kasneje v novem veku pripeljal do infinitezimalnega računa ter moderne teorije množic.
(c) V zvezi s klasičnimi problemi podvojitve kocke, tretjinjenja kota in kvadrature kroga, ki so centralna tema tega razdelka, so Grki že v 5. stoletju pred našim štetjem pričeli razvijati tudi višjo geometrijo (tj. kubične in kvartične krivulje ter nekatere ploskve). Mnogo tega so odkrili matematiki, ki so živeli po Evklidu.

Trije slavni klasični problemi:
(1) *Duplikacija kocke*: konstruirati rob kocke z dvakrat večjo prostornino kot dana kocka,
(2) *Trisekcija kota*: razdeliti poljuben kot na tri enake dele,
(3) *Kvadratura kroga*: konstruirati kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog.

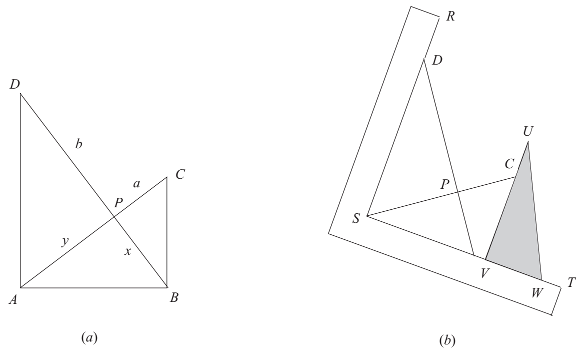
Konstrukcije so seveda mišljene geometrijsko, z uporabo ravnila in šestila. Šele pozno, v 19. stoletju, so matematiki odkrili, da to ni mogoče (glej spodaj), vendar so neutrudni grški poskusi v to smer močno vplivali na razvoj geometrije, omogočili številna odkritja (stožnice, krivulje višjega reda kot npr. *Dioklova cisoida*, *Nikodemova konhoida*, *Hipijeva kvadratrisa*), mnogo kasneje pa tudi vplivali na razvoj teorije enačb in teorije grup.

Evklidsko orodje sta seveda (neoznačeno) ravnilo in šestilo. Kljub tej omejitvi to orodje omogoča številne presenetljive in lepe konstrukcije (ne pa rešitev treh klasičnih problemov). Še več, celo samo s šestilom ali samo z ravnilom je možno marsikaj napraviti (glej spodaj). Z označenim ravnilom (z dvema zarezama) npr. brez težav tretjinimo krog. Zanimivo je tudi, da se je evklidsko šestilo razlikovalo od modernega: z njim ni bilo mogoče prenašati razdalj. Kljub temu se da pokazati, da sta obe šestili (skupaj z neoznačenim ravnilom) med seboj ekvivalentni (glej vajo 1).

Podvojitev kocke

Po eni legendi kralj Minos na Kreti ni bil zadovoljen z velikostjo groba sina Glauka in je naročil povečanje, po drugi je bilo prebivalcem otoka Delos naročeno, naj podvojijo Apolonov oltar (Platon ga je zato poimenoval deloški ali delijski problem). Problem so študirali na Platonovi Akademiji in našli rešitev bodisi z uporabo stožnic bodisi višjih krivulj. Pred tem ga je **Hipokrat** reduciral na čisto algebrajski problem: med dve števili s in $2s$ je treba vstaviti dve števili x in y, tako da velja dvojno razmerje $s/x = x/y = y/2s$ (se pravi $x = \sqrt{sy}$, $y = \sqrt{2sx}$). Potem je $x^2 = sy$ in $y^2 = 2sx$ in zato $x^2y^2 = 2s^2xy$ oziroma $xy = 2s^2$, zato dobimo $x^3 = sxy = 2s^3$. Kocka s stranico x ima torej dvakrat večjo prostornino kot kocka s stranico s. Odtlej so iskali način, kako bi (z evklidskim orodjem) konstruirali dvojno geometrijsko sredino x, y med dvema količinama a, b.

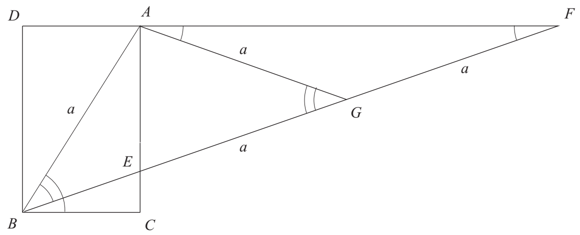
Prve uspehe v tej smeri je menda imel **Arhit** ($\sim$ 400 pnš.), ko je delal eksperimente s preseki pokončnega valja, pokočnega stožca in svitka. **Evdoksova** rešitev iz $\sim$ 370 pnš. je izgubljena, **Menajhmos** je $\sim$ 350 pnš. podal dve rešitvi z uporabo stožnic, ki jih je izumil prav v ta namen (glej vajo 2). Kasnejšo mehansko napravo za duplikacijo kocke (glej vajo 4) pripisujejo **Eratostenu iz Aleksandrije** ($\sim$ 230 pnš.), drugo pa **Nikomedu** (iz istega obdobja). Še eno rešitev je našel **Apolonij iz Perge** $\sim$ 225 pnš. (vaja 3), **Diokles** pa je $\sim$ 180 pnš. v isti namen izumil svojo *cisoido* (glej vajo 6). Kasneje so odkrili še druge rešitve, vse temelječe na krivuljah višjega reda. Naslednjo rešitev z uporabo *čevljarskega kotnika* (glej sliko 1b) pripisujejo **Platonu** (kar pa ni zelo verjetno, ker je Platon mehanskim rešitvam nasprotoval). Na sliki 1a se daljici AC in BD sekata pravokotno, zato je $PC/PB = PB/PA = PA/PD$, na sliki 1b pa se mora točka V, oglišče pravokotnega trikotnika, znajti na premici skozi D in P.



SLIKA 1. Podvojitev kocke po Platonu

Tretjinjenje kota

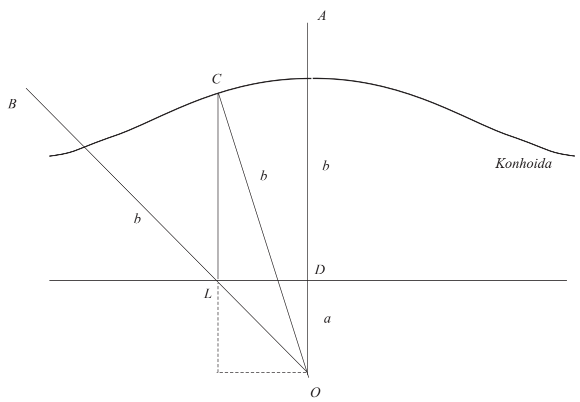
Ta problem je morda najlažje razumeti, zato je bilo v vsej zgodovini ogromno bolj ali manj domiselnih poskusov, da bi ga rešili. Prevede se na konstrukcijo daljice EF dolžine $EF = 2(AB)$, ki kaže proti točki B (glej sliko 2). Z ravnilom z dvema zarezama je to možno storiti zelo preprosto.



Slika 2. Tretjinjenje kota z vstavljanjem

Nikomed je ~ 240 pnš. isto izvedel s uporabo krivulje *konhoide*, ki nastane, če od dane premice v radialni smeri od pola O, ki je od nje oddaljen za a, odmerimo fiksno razdaljo b (slika 3a). Polarna enačba je torej $r = b + a/\sin\theta$, kartezična pa $(y-a)^2 = b^2y^2/(x^2+y^2)$.

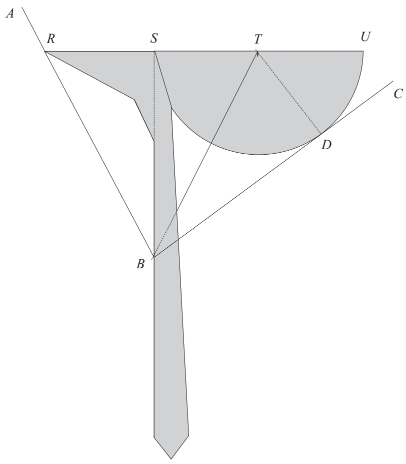
Tretjinjenje kota lahko z Nikomedovo konhoido izvedemo po naslednjem postopku: Za kot AOB potegnemo poljubno pravokotnico na krak AO, ki seka ta krak v točki D, drugega pa v točki L. Nato konstruiramo konhoido glede na O in pravokotnico s konstanto $b = 2(OL)$. Če seka vzporednica z AO skozi L konhoido v točki C, je kot AOB trikrat večji od kota AOC (glej sliko 3).



Slika 3. Tretjinjenje kota z Nikomedovo konhoido

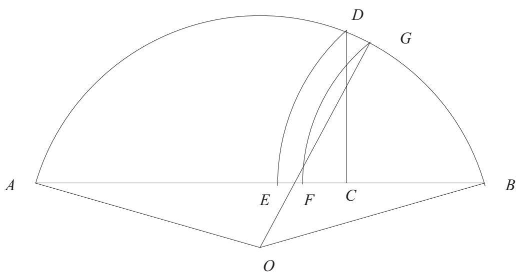
Obstajajo še nekatere (transcendentne) krivulje, s katerimi je mogoče tretjiniti kote. Ena med njimi je npr. *Arhimedova spirala* (~ 225 pnš.), ki je pomembna tudi za kvadraturo kroga (glej sliko 6 spodaj). Druga pa je *Hipijeva trisektrisa* ali kvadratrisa (glej vajo 10), ki jo je **Dejnostrat** uporabil tudi za kvadraturo kroga.

Sčasoma so iznašli tudi veliko mehanskih naprav za trisekcijo, ena med njimi, opisana v neki knjigi leta 1835, spominja na obliko tomahawka (slika 4). Postopek je naslednji: Daljico RU razdelimo na tri enake dele s točkama S in T ter potegnemo pravokotnico SV nanjo v točki S. Načrtamo polkrog s središčem v točki T in premerom SU. Poljuben kot ABC namestimo tako, da bo imel vrh B na pravokotnici SV, da bo njegov krak AB potekal skozi R in da se bo drugi krak BC dotikal polkroga, npr. v točki D. Potem je zaradi skladnosti trikotnikov RBS, BTS in BDT jasno, da daljici BS in BT tretjinita kot ABC.



Slika 4. Tretjinjenje kota s tomahawkom

Poleg tega so odkrili vrsto postopkov za približno tretjinjenje kota. Enega od njih je leta 1525 opisal *Albrecht Dürer* (glej sliko 5): kot pri vrhu O v enakokrakem trikotniku AOB tretjinimo tako, da stranico AB razdelimo na tri enake dele, na dveh tretjinah razdalje AB postavimo v točki C pravokotnico, ki seka krog s središčem v O in polmerom OA v točki D. Razdaljo BD prenesemo na AB do točke E, na tretjini daljice EC naj bo točka F, razdaljo BF prenesemo spet na krožnico v točko G. Potem je kot BOG približno tretjina kota AOB.



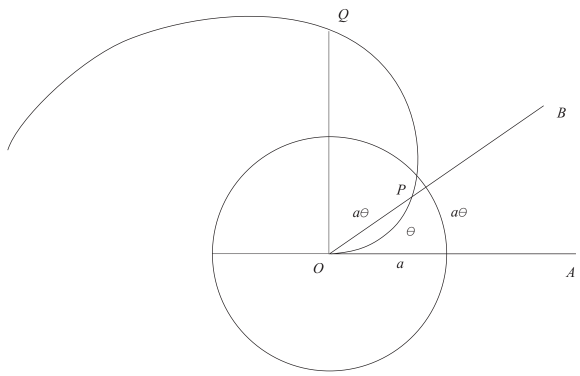
Slika 5. Približno tretjinjenje kota po Dürerju

Kvadratura kroga

Egipčani so ta problem rešili le približno, ko so postavili za stranico ustreznega kvadrata $a = 8d/9$, kjer je d premer kroga. Tudi za pravo kvadraturo kroga se je v celotni zgodovini nabralo več tisoč predlogov rešitev. Prvega je menda prispeval **Anaksagora** ($\sim$ 499-427 pnš.), ki pa se ni ohranil. Kot je bilo že omenjeno, je **Dejnostrat** ($\sim$ 390-320 pnš.) za kvadraturo uporabil *Hipijevo kvadratriso*, s katero je **Hipija iz Elide** $\sim$ 425 pnš. tretjinil kot.

Hipokrat s Hiosa je bil prvi, ki je $\sim$ 440 pnš. eksaktno izračunal ploščino krivočrtnega lika (lune), upajoč, da mu bo podobno uspelo kvadrirati tudi krog (glej vajo 12).

Kvadratura je možna tudi z uporabo *Arhimedove spirale* z enačbo $r = a\theta$. Le-ta nastane tako, da se točka P enakomerno giblje vzdolž radija vektorja, ki se enakomerno vrti okrog izhodišča O. Potemtakem je razdalja od O do P v vsakem trenutku enaka loku $a\theta$, ki ga radij vektor odreže od krožnice s središčem v O in s polmerom a. Ker je ploščina kroga enaka produktu polovice polmera in obsega, je v primeru, ko je $P = Q$ na četrtini obsega, ploščina enaka $(a/2)(4OP) = 2a(OP)$, torej je stranica ploščinsko enakega kvadrata enaka geometrijski sredini med premerom kroga s polmerom a in dolžino pravokotne daljice od izhodišča do spirale (glej sliko 6).



Slika 6. Tretjinjenje kota z Arhimedovo spiralo

Nekoliko preskočimo naravni potek dogodkov in skušajmo v zvezi s temi in podobnimi konstrukcijami odgovoriti na nekaj vprašanj, ki so skozi celo zgodovino geometrije imela pomembno vlogo.

Zakaj se ne da rešiti treh klasičnih grških problemov z evklidskim orodjem

(1) *Duplikacija kocke* (s stranico 1). Morali bi konstruirati število $x = \sqrt[3]{2}$, ki reši enačbo $x^3 - 2 = 0$. Koren algebraične enačbe lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom samo, če se izraža s samimi kvadratnimi koreni. Da pa se pokazati, da mora enačba *tretje stopnje* z racionalnimi koeficienti v tem primeru imeti vsaj en racionalen koren (glej [26]), kar za našo enačbo ne velja, torej (evklidska) duplikacija ni možna.
(2) *Trisekcija kota.* Trigonometrična formula $\cos\theta = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3)$ pove, da bi morali konstruirati $x = \cos(\theta/3)$. Če je npr. $\theta = 60$ stopinj, bi tak x zadoščal kubični enačbi $8x^3 - 6x - 1 = 0$, ki nima racionalnih korenov, zato se ga iz istega razloga kot prej ne da konstruirati.
(3) *Kvadratura kroga.* Stranica kvadrata z isto ploščino kot krog s polmerom 1 meri $\sqrt{\pi}$. Ker je to število transcendentno (**Lindemann** 1882), se ga ne da konstruirati samo z ravnilom in šestilom.

Konstrukcija samo s šestilom ali samo z ravnilom

Lorenzo Mascheroni (1750-1800) je presenetljivo odkril, da je možno vse evklidske konstrukcije izvesti samo s šestilom, in to objavil v knjigi *Geometria del compasso* leta 1797. Dovolj je seveda videti, kako samo s šestilom konstruiramo presečišče dveh premic ali premice in krožnice. Leta 1928 je danski matematik *J. Hjemslev* odkril staro knjigo **Georga Mohra**, *Euclidus Danicus*, iz leta 1672, ki je že vsebovala Mascheronijeva konstrukcije s šestilom (125 let prej).

Po Mascheronijevem navdihu je francoski matematik **Jean Victor Poncelet** (1788-1867) obravnaval še konstrukcije samo z ravnilom. Z njim ne moremo konstruirati vsega, kar je zmogel Evklid. Toda zanimivost: če imamo v ravnini fiksiran poljuben krog z označenim središčem, lahko izvedemo vse ostale evklidske konstrukcije samo z ravnilom (1822). V popolnosti je to dokazal švicarski geometer **Jakob Steiner** (1796-1863) leta 1833. Včasih rečemo, da so evklidske konstrukcije možne tudi z *zarjavelim šestilom* (z eno samo odprtino). Pravzaprav je tak način predlagal že leta 980 arabski matematik **Abul Wafa**. Še več, leta 1904 je italijanski matematik **Francesco Severi** (1879-1961) pokazal, da poleg ravnila potrebujemo namesto fiksnega kroga le poljubno majhen del krožnega loka z označenim središčem. Lahko pa niti tega, vendar moramo potem uporabljati dvostransko ravnilo (z ne nujno vzporednima robovoma).

Leta 1907 je **Émile Lemoine** razvil posebno vedo, imenovano *geometrografija*, za kvantitativno primerjavo različnih evklidskih konstrukcij.

Kronologija dogodkov v zvezi s številom π:

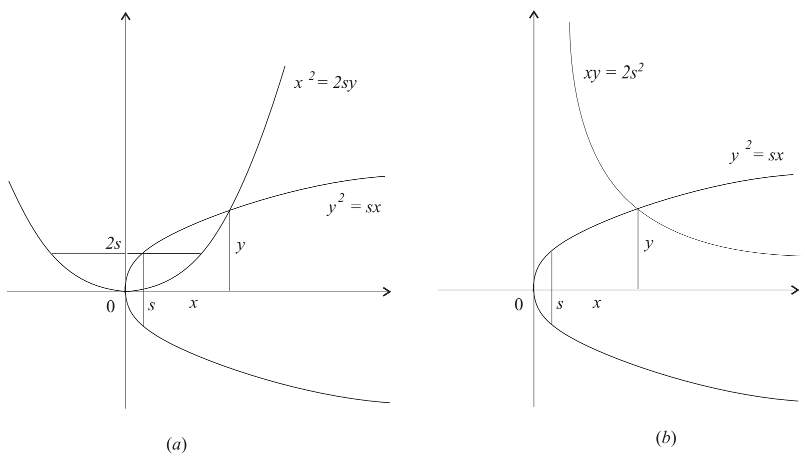
$\sim$ 1850 pnš. $\pi \sim 3$, v *Rhindovem papirusu*: $\pi = (4/3)^4 \approx 3.1604$.
$\sim$ 240 pnš. *Arhimed* računal z včrtanim in očrtanim pravilnim večkotnikom (klasična metoda) z 12, 24, 48, 96 stranicami, ocena $223/71 < \pi < 22/7$ oziroma $\pi \approx 3.14$.
$\sim$ 150 nš. *Klavdij Ptolemaj* iz Aleksandrije je v Almagestu zapisal π v šestdesetiškem sistemu kot 3;08,30 oziroma $377/120 \approx 3.1416$, kar je našel iz svojih tabel za tetive.
$\sim$ 480 Kitajec *Tsu Chiung Chich*: $355/113 \approx 3.1415929$ (na šest decimalk natančno).
$\sim$ 530 Indijec *Aryabhata*: $62822/20000 \approx 3.1416$.
$\sim$ 1150 Indijec *Bhaskara*: približki 3927/1250, 22/7, $\sqrt{10}$, $754/240 \approx 3.1416$.
1579 *François Viète* izračunal π na 9 decimalk natančno s klasično metodo (uporabil je večkotnike z 393,210 stranicami); hkrati je izrazil število π z neskončnim produktom: $2/\pi = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}/2 \cdots$.
1585 *Adriaen Anthoniszoon* je dal približek: 355/113 (kitajski ulomek) in oceno $377/120 > \pi > 333/106$; nekoliko prej (1573) je isto naredil *Valentin Otho*, učenec *Rhaeticusa*.
1593 *Adriaen van Roomen* (*Adrianus Romanus*) iz Nizozemske je izračunal π na 15 decimalk natančno po klasični metodi (2^{30} stranic).
1610 *Ludolph van Ceulen* je na Nizozemskem določil π na 35 decimalk natančno po klasični metodi (2^{62} stranic). Temu izračunu je posvetil velik del življenja, od takrat število π imenujejo tudi *Ludolfovo število*.
1621 *Willeboord Snell*, nizozemski fizik (zanan po zakonu o lomu svetlobe), je predstavil trigonometrično izboljšavo klasične metode (korekten dokaz dal *Christiaan Huygens* 1654)
1630 *Grienberger* je (z uporabo Snellove izboljšave) izračunal π na 39 decimalk natančno.
1650 *John Wallis* je predstavil neskončni produkt $\pi/2 = (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots)/(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots)$, *Lord Brouncker* pa verižni ulomek $4/\pi = 1 + 1^2/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + ...$
1671 *James Gregory* je predstavil vrsto $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ $(-1 \leq x \leq 1)$, odkoder dobimo pri $x = 1$ formulo $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$, kar pa zelo počasi konvergira. Zadnjo vrsto je neodvisno izpeljal tudi *Leibniz* 1674.
1699 *Abraham Sharp* je izračunal π na 71 decimalk.
1706 *John Machin* je izračunal π na 100 decimalk z uporabo Gregoryjeve vrste in formule $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$.
1719 *De Lagny* je z uporabo Gregoryjeve vrste za $x = 1/\sqrt{3}$ izračunal 119 decimalk za π.
1737 *William Oughtred*, *Isaac Barrow* in *David Gregory*, angleški matematiki, uporabijo simbol π v pomenu obseg (perimeter) kroga. Kot razmerje med obsegom in premerom kroga je π prvi uporabil angleški pisatelj *William Jones* leta 1706, privzel in promoviral pa *Leonhard Euler* 1737.
1754 *Jean Étienne Montucla*, francoski zgodovinar matematike, je napisal zgodovino kvadrature kroga.
1755 Francoska *Akademija znanosti* odkloni nadaljnje obravnave rešitev kvadrature kroga.
1760 Grof *de Buffon* je odkril svoj problem igle (verjetnost, da igla dolžine b seka črte z medsebojno oddaljenostjo $a > b$ znaša $2b/a\pi$). Na ta način so dejansko izvajali poskuse. Leta 1904 je *R. Chartres* uporabil podobno verjetnostno idejo (da sta dve slučajno izbrani naravni števili med seboj tuji, znaša verjetnost $6/\pi^2$).
1767 *Johann Heinrich Lambert* pokaže, da je število π iracionalno.
1794 *Adrien-Marie Legendre* pokaže, da je celo število π^2 iracionalno.
1841 *William Rutherford* izračuna π na 208 decimalk, od katerih je pravilnih 152, uporabil je Gregoryjevo vrsto in formulo $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/70) + \operatorname{arctg}(1/99)$.
1844 *Zacharias Dase* izračuna π na 200 decimalk z uporabo Gregoryjeve vrste in formule $\pi/4 = \operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/5) + \operatorname{arctg}(1/8)$. Dase, rojen 1824 v Hamburgu, umrl star 37 let 1861, je bil pravi fenomen. Na pamet je zmnožil dve 8 mestni števili v 54 sekundah, 20 mestni v 6 minutah, 40 mestni v 40 minutah. Za računanje decimalk števila π ga je nagovoril *Leopold Schulz von Strassnitzky*, ki je prej učil na liceju v Ljubljani.
1853 *Rutherford* izračuna korektno π na 400 decimalk.
1873 *William Shanks* je 15 let računal po Machinovi formuli decimalke števila π in dosegel rekord 707 decimalnih mest.

1882 *Ferdinand Lindemann* je dokazal, da je število π transcendentno in s tem nezmožnost klasične kvadrature kroga (z evklidskim orodjem).
1906 Pojavile so se različne mnemotehnične metode, kako si zapomniti čim več decimalk števila π. Eno takih je objavil *A.C. Orr* v *Literary Digest* (o 30 decimalkah za π). Danes prirejajo po svetu, v Ameriki in tudi pri nas dne 14. marca tekmovanja v citiranju decimalk. To je ti. *Dan števila pi* ($Pi - day$).
1947 - Po drugi svetovni vojni računajo decimalke za π z računalniki in postavljajo nove in nove rekorde.

Vaje:

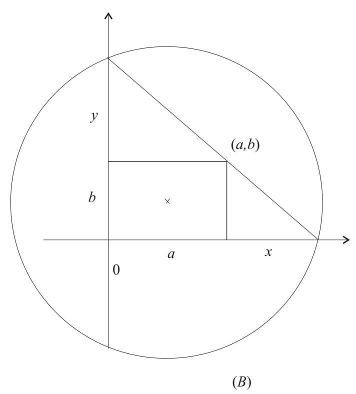
(1) Pokaži, da lahko z evklidovim šestilom, ki ne ohranja razkoraka, iz poljubne točke načrtamo enako dolgo vzporedno daljico dane dolžine AB. To pomeni, da je zgodovinsko evklidsko orodje ekvivalentno modernemu.

(2) Izpelji *Menajhmovi konstrukciji* za podvojitev kocke iz leta $\sim$ 350 pnš.: Če ima kocka stranico s, je stranica podvojene kocke enaka ordinati presečišča
(a) parabol $y^2 = sx$ (*latus rectum* s) in $x^2 = 2sy$ (*latus rectum* $2s$), slika 7a,
(b) parabole $y^2 = sx$ (*latus rectum* s) in hiperbole $xy = 2s^2$ (velika os $4s$), slika 7b.



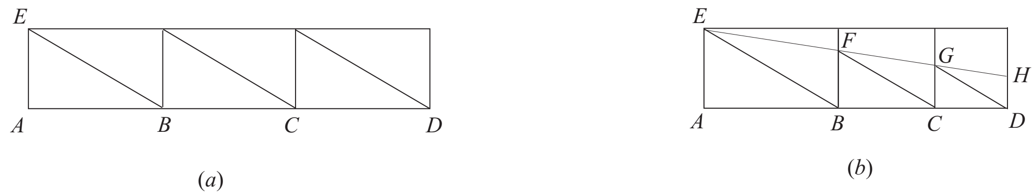
Slika 7. Podvojitev kocke s stožnicami

(3) **Apolonij** je $\sim$ 225 pnš. predlagal naslednjo konstrukcijo dvojnega geometrijskega razmerja med a in b: pravokotnik $OACB$ s stranicama $a = OA$ in $b = OB$ naj bo z ogliščem O včrtan v prvi kvadrant. Načrtajmo krožnico s središčem v točki $(a/2, b/2)$, katere presečišči $(a+x, 0)$ in $(0, b+y)$ z osema ležita na skupni premici skozi točko (a, b) (slika 8). Dokaži, da potem velja $a/y = y/x = x/b = (a+x)/(b+y)$.



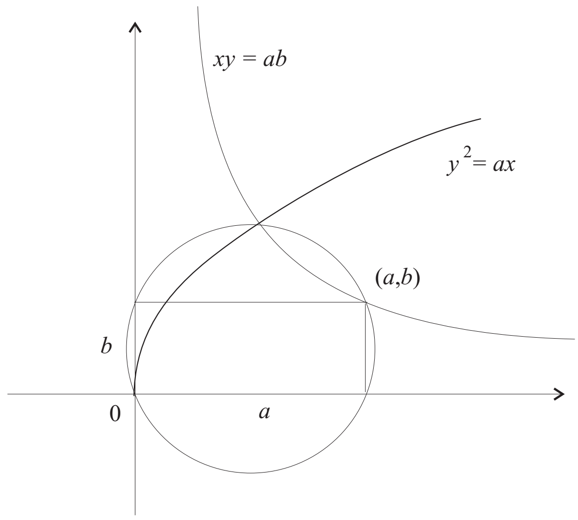
Slika 8. Konstrukcija dvojnega razmerja po Apoloniju

(4) **Eratosten** je $\sim$ 230 pnš. rešil problem dvojnega geometrijskega zaporedja oziroma duplikacije kocke s tremi enakimi pravokotniki z diagonalami (slika 9a), ki jih porinemo enega pod drugega tako da so točke E, F, G in H kolinearne (slika 9b). Pokaži, da sta potem daljici BF in CG v dvojnem geometrijskem razmerju z AE in DH.



Slika 9. Konstrukcija dvojnega razmerja po Eratostenu

(5) **Gregoire de Saint-Vincent** je leta 1647 dvojno geometrijsko razmerje med a, b poiskal tako, da je presekal pravokotniku $[0, a] \times [0, b]$ očrtano krožnico s hiperbolo $xy = ab$. Za presečišče (x, y) potem velja $a/y = y/x = x/b$. **Rene Descartes** je leta 1659 ravnal enako, le da je namesto hiperbole uporabil parabolo $y^2 = ax$ (slika 10). Pokaži, da obe ideji delujeta.

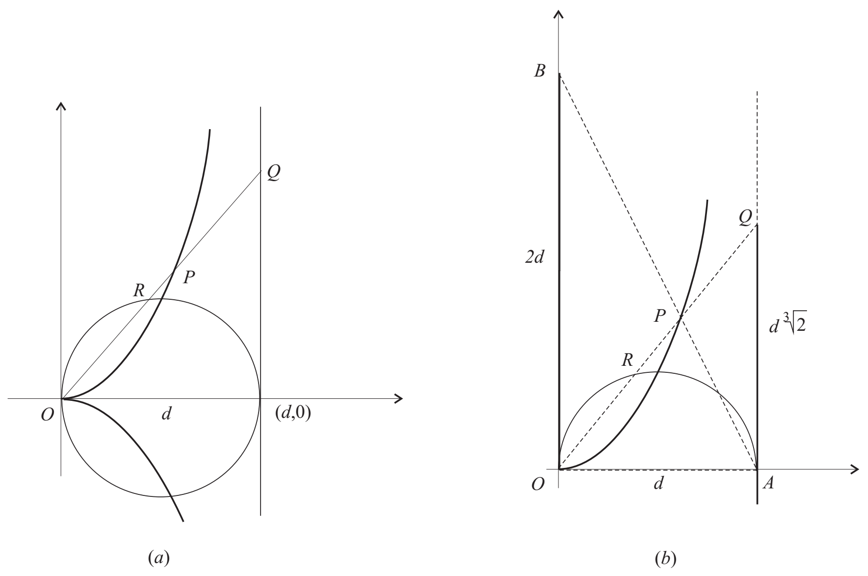


Slika 10. Konstrukcija dvojnega razmerja po Saint-Vincentu in Descartesu

(6) *Dioklova cisoida* je krivulja, ki nastane, če na poljubnem žarku iz dane točke O na krožnici s premerom d odmerimo razdaljo $OP = QR$ med presečiščema R in Q tega žarka s krožnico in s tangento nanjo v antipodni točki (slika 11a). Če je O koordinatno izhodišče in antipodna točka $(d, 0)$ na abscisni osi, je njena enačba $x^3 = (d - x)y^2$. **Diokles** je $\sim$ 180 pnš. s to krivuljo podvojil kocko tako, da je na pravokotnici na daljico OA z dolžino d v točki O odmeril razdaljo $OB = 2d$ in skozi presečišče P zveznice AB s cisoido iz O potegnil premico, ki seka pravokotnico na OA v krajišču A v točki Q (slika 11b). Pokaži, da je potem $AQ^3 = 2(OA)^3 = 2d^3$.

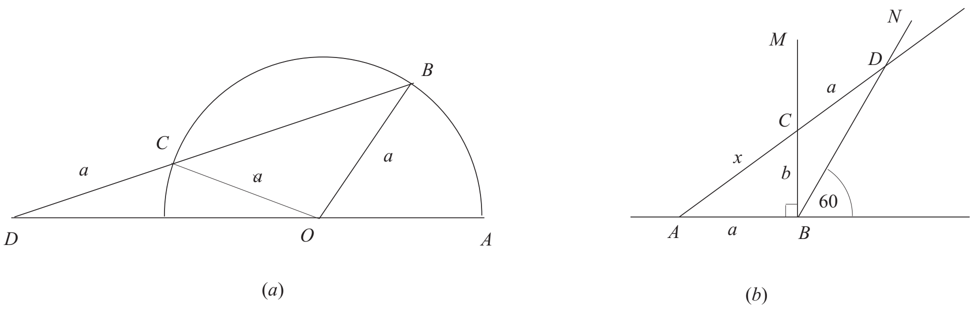
(7) Kadar (z dvema zarezama) označeno ravnilo namestimo tako, da se zarezi ujameta z dvema krivuljama (npr. premicama, krožnicama ali premico in krožnico), rečemo, da smo uporabili *princip vstavljanja*. Na ta način lahko npr. tretjinimo dani kot, ali podvojimo kocko. Dokaži naslednje:

(a) (**Arhimed** $\sim$ 240 pnš.) Narišemo polkrog s središčem v vrhu enakokrakega kota AOB s polmerom a, kot znaša označena razdalja na ravnilu, in iz točke B z vstavljanjem določimo točki C na krožnici in D na podaljšku kraka AO tako, da je razdalja CD enaka a (glej sliko 12a). Potem je kot ADB enak tretjini kota AOB.



SLIKA 11. Dioklova cisoida in podvojitev kocke

(b) (**Viète** 1646 in **Newton** 1728) Narišemo kot ABM, ki meri 90 stopinj, in kot ABN, ki meri 120 stopinj, pri čemer naj bo $AB = a$ označena razdalja na ravnilu. Nato z vstavljanjem narišemo skozi točko A premico, ki preseka preostala kraka v točkah C in D tako, da je razdalje $CD = a$ (glej sliko 12b). Potem velja $(AC)^3 = 2a^3$.

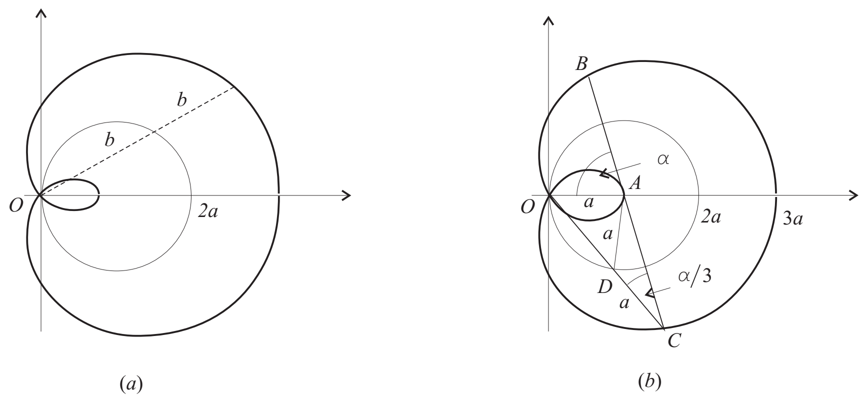


SLIKA 12. Tretjinjenje kota po Arhimedu in podvojitev kocke po Viètu in Newtonu

(8) Pokaži, da lahko namesto z vstavljanjem kot pri vaji 7b podvojimo kocko tudi z uporabo *Nikomedove konhoide* glede na premico c in pol O v razdalji a (spomnimo se, da nastane konhoida tako, da na žarku iz O odmerimo od njegovega presečišča s premico c fiksno razdaljo b kot na sliki 3), če vzamemo $b = a$. Prepričaj se, da je konhoida je pravzaprav posebna cisoida glede na krožnico s središčem v O in polmerom b ter premico c v razdalji a od središča krožnice O.

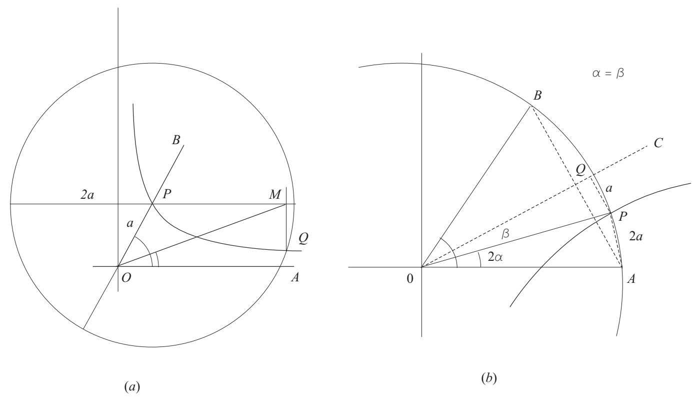
Opomba. Če pa namesto premice vzamemo krožnico s polmerom a in za O točko na njej, se ustrezna konhoida imenuje *Pascalov polž* (*limaçon de Pascal*) po **Étiennu Pascalu** (1588-1640), očetu **Blaisa Pascala** (1623-1662) (slika 13a). V posebnem primeru $b = a$ dobimo *trisektriso*, saj se da pokazati, da je kot ACO enak tretjini središčnega kota OAB; tu je točka C presečišče premice skozi A in B z limaçonom (slika 13b).

(9) Trisekcijo kota lahko izvedemo tudi s stožnicami (glej [13]). Pokaži:
(a) Za dani kot AOB načrtajmo hiperbolo, ki ima za asimptoti premico AO in pravokotnico v O in naj hiperbola seka krak OB v točki P, ki je od O oddaljena za a. Krožnica s središčem v P in polmerom $2a$ naj seka hiperbolo v točki Q. Vzporednica z AO skozi P in pravokotnica nanjo skozi Q naj se sekata v točki M. Potem je kot AOM enak tretjini kota AOB (slika 14a).



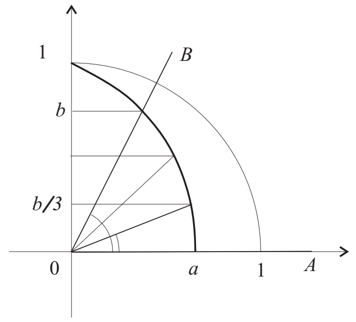
Slika 13. Tretjinjenje kota s Pascalovim polžem

(b) (**Papos** $\sim$ 300 nš.) V središčnem kotu AOB naj bo njegova simetrala OC direktrisa hiperbole z ekscentičnostjo 2 in goriščem A. Če seka hiperbola krožnico v točki P, je kot AOP enak tretjini kota AOB (slika 14b).



Slika 14. Tretjinjenje kota s hiperbolo

(10) *Hipijeva kvadratrisa* ($\sim$ 425 pnš.) nastane tako, da se polmer kroga z dolžino 1 enakomerno vrti okrog krajišča od navpične do vodoravne lege, hkrati pa se enako dolga vodoravna daljica enakomerno giblje navzdol. Presečišče te daljice s polmerom opiše krivuljo kvadratriso (slika 15). Njena enačba v kartezičnih koordinatah je $y = x\mathrm{tg}(\pi y/2)$. **Hipija iz Elide** jo je uporabil za preprosto trisekcijo (in splošno n-sekcijo) kota, **Dejnostrat** (morda že Hipija) pa za kvadraturo kroga (odtod ime). Kvadraturo kroga najdemo iz abscise presečišča kvadratise z osjo x, tj. $a = \lim_{y\to 0} y/\mathrm{tg}(\pi y/2) = 2/\pi$; stranica kvadrata z enako ploščino kot krog s polmerom 1 je potem $\sqrt{2/a}$.



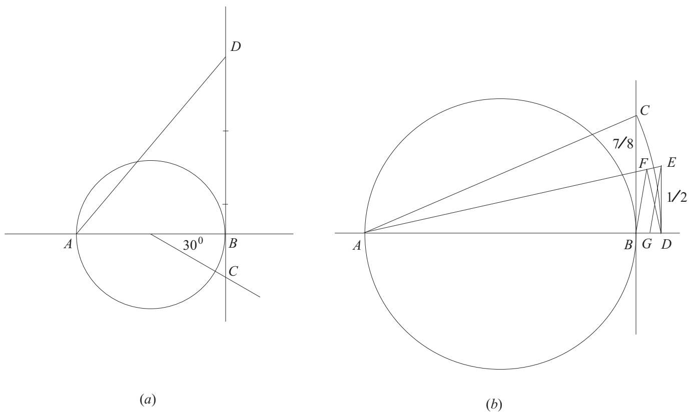
Slika 15. Hipijeva oziroma Dejnostratova kvadratrisa

(11) Klasični problem je tudi *rektifikacija krožnice*, se pravi, določiti daljico, ki je enako dolga kot obseg πd krožnice. Znanih je več zgodovinski postopkov:

(a) Pogosto vzamemo $\pi d \approx 3d + d\sqrt{2}/10$, torej $\pi \approx 3 + \sqrt{2}/10 \approx 3.141$

(b) Poljski jezuit **Adam Kochanski** (1631-1700) je predlagal naslednje. V krajišču premera AB kroga s polmerom a načrtamo tangento, na eni strani odmerimo kot 30 stopinj in od presečišča C kraka s tangento na drugo stran odmerimo tri polmere do točke D (slika 16a). Potem je obseg kroga približno enak $2(AD)$.

(c) Še en postopek: Če je AB premer danega kroga s premerom 1, naj bo BC daljica, pravokotna na premer AB in dolga $7/8$. Razdaljo AC prenesemo na podaljšek AB, da dobimo točko D. Na pravokotnici v D odmerimo $1/2$ do točke E in spustimo pravokotnico iz D na zveznico AE, ki jo seka v točki F. Vzporednica z BF skozi E naj seka AD v točki G (slika 16b). Potem je $\pi \approx 3 + BG$.

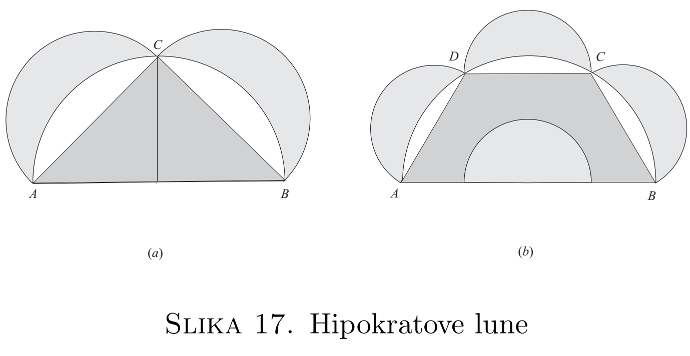


Slika 16. Približna rektifikacija

(12) *Hipokratove lune* so prvi primer krivočrtnih likov, ki se jih da kvadrirati (tj. določiti ploščinsko enak kvadrat). **Hipokrat s Hiosa** je ~ 440 pnš. upal, da mu bo to pomagalo pri kvadraturi kroga. Znal je kvadrirati tri lune, najpreprostejši dve sta naslednji:

(a) Četrtini kroga vrišemo tetivo in nad njo polkrožnico. Algebraično ali s Pitagorovim izrekom pokaži, da ima dobljena luna isto ploščino kot enakokrak pravokotni trikotnik (slika 17a).

(b) Polovici pravilnega šestkotnika očrtajmo polkrog, nad tremi enako dolgimi tetivami pa tri polkrožnice (slika 17b). Pokaži, da je vsota ploščin treh dobljenih lun in polkrožnice nad eno tetivo enaka ploščini polovice šestkotnika.



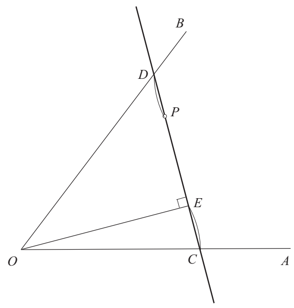
Slika 17. Hipokratove lune

(13) Pokaži, da je z evklidskim orodjem nemogoče konstruirati:

(a) pravilen 9-kotnik ali pravilen 7-kotnik,

(b) kot 1 stopinje,

(c) *Filonovo premico* za točko P v danem (splošnem) kotu AOB. **Filon iz Bizanca** (1. in 2. stol. pnš.) je ugotovil, da je daljica CD skozi P z lastnostjo $EC = DP$ za pravokotno projekcijo E vrha O nanjo najkrajša tetiva danega kota skozi P (glej sliko 18).



SLIKA 18. Filonova premica

(14) Naj pomeni $C(A)$ krožnico skozi A s središčem v C in $C(AB)$ krožnico s središčem v C in polmerom AB. Prepričaj se, da naslednja shema pravilno opisuje postopek konstrukcije (z zgodovinskim evklidskim orodjem) kroga s središčem v točki C in polmerom AB, kar dokazuje ekvivalentnost Evklidovega in modernega šestila:

$A(C)$, $C(A)$	$M(B)$, $N(B)$	$C(X)$
M, N	X	

(15) Utemelji naslednji *Mascheronijevi konstrukciji* samo z modernim šestilom (a) preseka krožnice $C(D)$ in premice skozi A in B, (b) preseka dveh premic, skozi A, B in C, D

(a) *primer* 1 ($C \notin AB$):

$A(C)$, $B(C)$	$C(D)$, $C_1(CD)$
C_1	X, Y

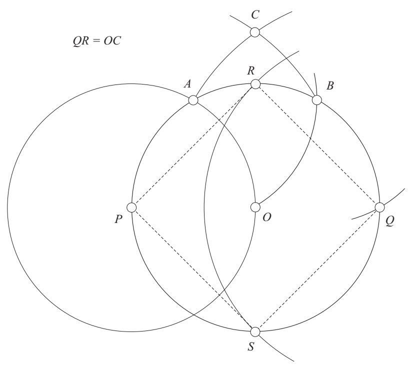
primer 2 ($C \in AB$):

$A(D)$, $C(D)$	$C(DD_1)$, $D(C)$	$C(DD_1)$, $D_1(C)$	$F(D_1)$, $F_1(D)$	$F(CM)$, $C(D)$
D_1	F	F_1	M	X, Y

(b)

$A(C)$, $B(C)$	$A(D)$, $B(C)$	$C(DD_1)$, $D_1(CD)$	$C_1(G)$ $G(D_1)$	$C_1(C)$, $G(CE)$	$C(F)$, $C_1(CF)$
C_1	D_1	G	E	F	X

(16) **Napoleon** je francoskim matematikom predlagal problem razdeliti krožnico na štiri enake dele samo s šestilom [26]. Po Mascheroniju lahko trikrat uporabimo polmer krožnice, PA, AB, BQ, da dobimo premer PQ. Poiščemo C in odmerimo $QR = OC$ (slika 19). Pokaži, da je potem $PC = PB = PO\sqrt{3}$ in $PR = OC = \sqrt{PC^2 - PO^2} = PO\sqrt{2}$.



SLIKA 19. Napoleonov problem včrtanja kvadrata v krog

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.