ZGODOVINA MATEMATIKE

Zapiski predavanj

Milan Hladnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Ljubljana 2013

KAZALO

ZGODOVINA MATEMATIKE
Zapiski predavanj 2012/13 - prvi del

Milan Hladnik

Uvod: O zgodovini matematike in o istoimenskem predmetu

Za redke navdušence ima matematika vrednost sama zase, njenega smisla in pomena jim ni treba posebej dokazovati. Za ostale, ki matematiko samo uporabljajo ali pa nanjo gledajo kot del širše kulture, pa je pomembno tudi mesto matematike v družbi in spreminjanje njene vloge skozi različna obdobja. Zavedati se moramo, da je tudi današnja mogočna matematična teoretična zgradba postopoma nastala iz reševanja čisto konkretnih problemov, ki jih je od sposobnih pripadnikov določene skupnosti terjal čas, pritiski okolja in notranje razumevanje dotedanjega razvoja matematike, znanosti in tehnike ter celotne družbe. Spoznavanje preteklih tovrstnih človeških prizadevanj je lahko stimulacija tudi za študij moderne matematike in proučevanje starih mojstrov je lahko inspiracija tudi za današnje matematično raziskovanje. Zgodovina je v vsakem (tudi matematičnem) pogledu naša učiteljica, če smo le odprti do nje.

Pogovor s študenti

Predmet *Zgodovina matematike* je torej namenjen vsem, ki jim ni dovolj matematika kot abstraktna formalna teorija z večnimi in nespremenljivimi resnicami, ampak hočejo spoznati tudi izvor matematičnih pojmov in idej, ki jih danes uporabljamo. Ima dve uri predavanj, ki prinašajo splošni pregled obdobja, značilnosti tedanje matematike in opis prispevkov vodilnih matematikov, ter eno uro vaj, kjer se skozi reševanje tipičnih nalog in problemov seznanimo z bistvenimi matematičnimi pristopi določenega časa oziroma določenega matematika. Poudarek je na razvoju elementarne matematike od antike do konca 18. stoletja.

I. MATEMATIKA STAREGA IN SREDNJEGA VEKA

Med starimi kulturami, ki so imele do določene mere razvito matematiko, si bomo na kratko ogledali le egipčansko in babilonsko civilizacijo. Kitajsko, ki se po starosti lahko primerja z njima, bomo pustili ob strani; le sem in tja bomo opozorili na kakšen starejši ali novejši neodvisen prispevek starejših kitajskih matematikov. Bolj podrobno bomo obravnavali starogrško matematiko, njene začetke, klasične geometrijske probleme, Evklidovo sistemizacijo in velike dosežke helenističnega obdobja. Dolžno pozornost bomo posvetili indijski matematiki starega in srednjega veka ter dosežkom islamskega kulturnega sveta od 8. do 13. stoletja. Pregledali bomo matematično dogajanje v srednjem veku in zaključili prvi del zgodovine matematike z renesanso in 16. stoletjem.

1. Stari Egipt in Mezopotamija

(A) Egiptovska matematika

Zgodovinski okvir

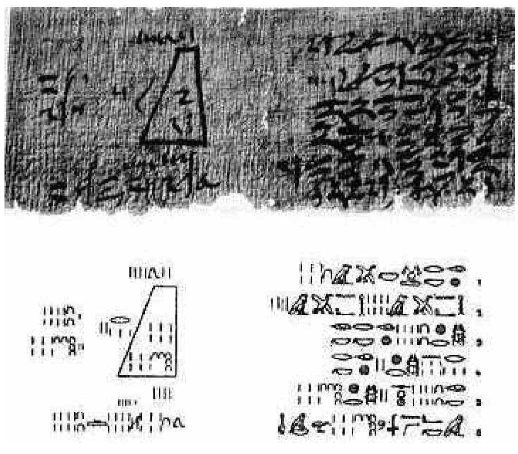
Ugodna lega in relativna izoliranost (zaradi puščave) sta omogočili dolgotrajni mirni razvoj. Okrog leta 3000 pnš. sta bila oba naroda ob Nilu združena v enotno kraljestvo, ki so mu vladali faraoni. Nil je s poplavami omogočal ugoden razvoj poljedelstva, za kar so potrebovali razvito astronomijo (dober koledar zaradi napovedi poplav), ter geometrijo (merjenja parcel); kompleksna administracija (pobiranje davkov, delitev hrane) je zahtevala razvito aritmetiko. Že zgodaj, vsekakor še v starem kraljestvu ($\sim$ 2690 do $\sim$ 2180), so že poznali hieroglifsko pisavo, iz katere se je kasneje v srednjem kraljestvu ($\sim$ 1990 do $\sim$ 1800) razvila hieratska pisava (npr. na papirusih iz 12. dinastije). Novo kraljestvo je trajalo od $\sim$ 1550 do $\sim$ 1070.

Zgodovinski viri:

(1) Najstarejši hieroglifi s števili iz $\sim$ 3100 pnš. so shranjeni v muzeju v Oxfordu.

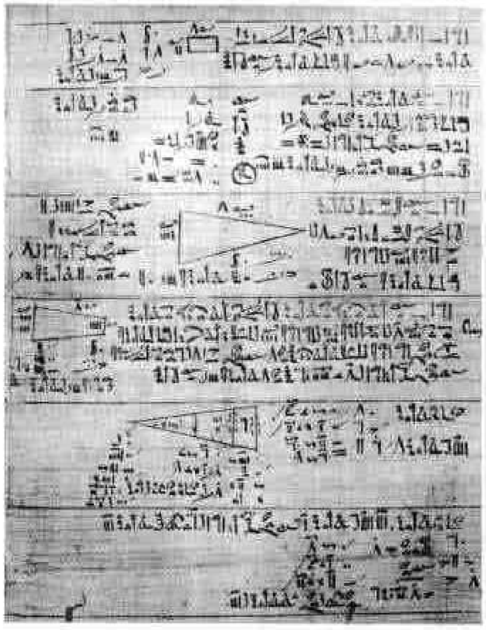
(2) *Velika* (*Kufujeva* ali *Keopsova*) piramida v Gizi je bila zgrajena okrog $\sim$ 2590-2570 pnš. (nasploh so problemi s točnim datiranjem starodobnih egiptovskih ostankov). Sestavljena je iz 2,300,000 kamnitih blokov, v povprečju težkih 2,5 tone (nekateri so bili pripeljani od daleč), 20 let jo je gradilo okrog 100,000 delavcev. Nedvomno je zahtevala veliko matematike in inženirskega znanja. Da je razmerje med polovico stranice in višino (tj. kotangens kota 51 stopinj 50 minut nagiba stranske ploskve) približno $\pi/4$, kakor tudi, da je 1/cos tega kota 1.61806 (približno zlati rez), pa je najbrž golo naključje.

(3) *Moskovski papirus* iz $\sim$ 1850 pnš. (slika 1), velikosti 5,4 m $\times$ 6 cm, je leta 1893 pridobil *Vladimir Semjonovič Goleniščev* (1856-1947), prvi ruski egiptolog, in ga prinesel v Rusijo. Vsebuje 25 besednih problemov (npr. o prostornini prisekane štiristrane piramide), shranjen pa je v Puškinovem državnem muzeju v Moskvi.



Slika 1. Moskovski papirus $\sim$ 1850 pnš.

(4) *Rhindov* (*Ahmesov*) *papirus* $\sim$ 1650 pnš. (slika 2), je okrog 5,4 metrov dolg in 1/3 metra širok zvitek iz papirusa. Leta 1858 ga je škotski pravnik in egiptolog *Alexander Henry Rhind* (1833-1863) pridobil v Luxorju, predstavlja pa učbenik za študente iz aritmetike in geometrije s 85 preprostimi problemi. Napisal ga je egiptovski pisar **Ahmes** in je v resnici prepis 200 let starejšega teksta. Vsebuje množenje in deljenje s podvojitvijo, egipčanske ulomke, ploščino kroga, znake za $+, -, =$ in neznanko, shranjen pa je v Britanskem Muzeju.



SLIKA 2. Rhindov papirus $\sim$ 1650 pnš.

(5) Najstarejši astronomski instrument $\sim$ 1850 pnš. (kombinacija svinčnice in opazovalne palice) je shranjen v Berlinskem muzeju.

(6) Največji obelisk, postavljen pred sončnim svetiščem v Tebah $\sim$ 1500 pnš., je visok 105 čevljev (32 metrov) in ima kvadratno osnovno ploskev s stranico 10 čevljev (3 metre), tehta pa 430 ton.

(7) Berlinski muzej hrani tudi najstarejšo znano egiptovsko sončno uro iz leta $\sim$ 1500 pnš.

(8) *Rollinov papirus* v Louvru je iz $\sim$ 1350 pnš. in vsebuje primere uporabe velikih števil.

(9) *Harrisov papirus* iz $\sim$ 1167 pnš. pripoveduje o vojaških uspehih Ramzesa III.

(10) Iz srednje dobe so še *Egiptovski matematični usnjeni svitek*, *matematični papirus iz Lahuna*, *Berlinski papirus*, *lesene tablice iz Ahmima*, *Reisnerjev papirus* iz Nag el-Deira, iz novejše dobe pa so npr. papirus *Anastasi I*; precej matematičnih zapisov je tudi na keramiki (ostrakon), npr. iz oklice Deir el-Medine z računi prostornin (v zvezi z grobovi v Dolini kraljev).

Opomba. V zvezi z historiografijo egiptovske matematike so določeni problemi, predvsem zato, ker je o njej premalo pisanih virov. V nasprotju z bolj trajnimi glinastimi ploščicami iz Mezopotamije se egiptovski zapisi na papirusih zaradi vlage v centrih ob Nilu večinoma niso ohranili (razen tistih, ki so bili shranjeni v suhih puščavskih predelih). Na osnovi redkih najdb (predvsem Rhindovega in Moskovskega papirusa) so že v dvajsetih in tridesetih letih 20. stoletja eksperti za egiptovsko matematiko, kot npr. *Otto Neugebauer* (1899-1990), ki je leta 1927 doktoriral iz egipčanskih ulomkov, postavili osnovne ugotovitve o dosegu egiptovske matematike. Od takrat dalje se ta spoznanja niso spreminjala, ker enostavno ni bilo novih pomembnih odkritij.

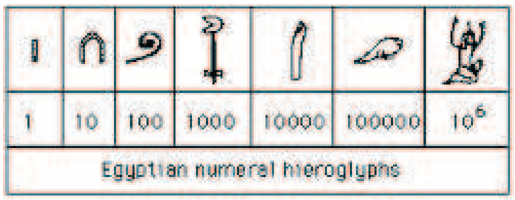
Egiptovska astronomija

Pomembno vlogo pri napovedi vsakoletnih poplav je igrala najsvetlejša zvezda Sirius (grško Sothis), odtod sotični cikel 1461 egiptovskih let, ko se Sirius spet pojavi tik pred sončnim vzhodom. Začetek egiptovskega leta je bil 20. julija, leto je imelo 365 dni, razdeljeno na 12 mesecev, vsak po 30 dni in še pet dodatnih dni na koncu leta. Dober egiptovski koledar je bil osnova kasnejšemu julijanskemu koledarju.

Egiptovska matematika

V starem Egiptu so (poleg astronomije) gojili tako aritmetiko (s primitivno algebro) kot geometrijo. Nasploh so bili vsi matematični problemi numerični, namesto splošnih formul so bili podani le napotki (naredi to in to, dobiš to). Tudi ni sledu o kakršnih koli dokazih. Vsa matematika je bila na bolj primitivni stopnji (z današnjega stališča).

Egipčani so uporabljali desetiški številski sistem s posebnimi znaki za potence števila 10 (1 navpična črta, 10 volovski jarem (presek), 100 zvitek, 1000 lotosov cvet itd.). Poleg tega je bil sistem aditiven, isti znak so zapisali večkrat, npr.: 276 = 2 zvitka, 7 presekov in 6 navpičnih črt, 4622 = 4 lotosovi cvetovi, 6 zvitkov, 2 preseka in 2 črti (iz Karnaka $\sim$ 1500 pnš.). Pomembno vlogo je imel zaradi podvajanja tudi dvojiški sistem, včasih tudi sedmiški.



Slika 3. Heroglifski znaki za številke

Osnovna dolžinska enota je bil kubit ($\sim$ 52,5 cm), ki je meril 7 palm (7,5 cm), vsaka palma pa je imela 4 prste (1,9 cm). V muzeju v Torinu je spravljeno okrog 50 cm dolgo egiptovsko ravnilo, razdeljeno na palme in prste, iz časa faraona Amhotepa I ($\sim$ 1550 pnš.). Daljše razdalje so merili z vrvmi z vozli.

Aritmetika

(a) Množenje in deljenje s podvajanjem:

1. zgled: 26 krat 33; ker je $26 = 2 + 8 + 16$, je produkt enak $(33 +)\ 66 + (132 +)\ 264 + 528 = 858$.

2. zgled: deljenje 753 s 26; podvojimo 26 tolikokrat, da ravno še presežemo 753, torej 26, 52, 104, 208, 416 (naslednja podvojitev bi dala večji rezultat); ker je $753 = 416 + 337 = 416 + 208 + 129 = 416 + 208 + 104 + 25$, dobimo $(1 + 2 +)\ 4 + 8 + 16 = 28$, torej rezultat 28 in ostanek 25.

(b) Izražanje števila z vsoto egipčanskih ulomkov:

Vsak ulomek razen 2/3 so zapisali kot vsoto *različnih* ulomkov s števcem 1, npr. $2/9 = 1/6 + 1/18$ ali $2/9 = 1/5 + 1/45$, $5/13 = 1/4 + 1/26 + 1/52 + 1/13$ (to je dokazal Fibonacci leta 1202 v svoji znameniti knjigi *Liber Abbaci*, glej tudi vajo 4). Tako so lažje delili, npr. $(5/13)/12 = 1/48 + 1/312 + 1/624 + 1/156$. V *Rhindovem papirusu* so dane take reprezentacije za vse ulomke oblike $2/n$ za lihe n med 5 in 101.

Algebra

Nekateri problemi iz *Moskovskega* in *Rhindovega papirusa* zahtevajo reševanje preprostih enačb z eno neznanko (ki je označena z *Aha* - to so t.i. *Aha* - problemi), največkrat linearne enačbe, npr. $3/2 \times x + 4 = 10$ oziroma $3/2 \times x = 6$. Reševali so jih z metodo preskušanja oziroma metodo napačne predpostavke (kasneje so ji rekli metoda *regula falsi*), npr. za $x = 2$ dobimo v zadnjem zgledu $3/2 \times 2 = 3$, kar je dvakrat premalo, torej je rešitev $x = 2 \times 2 = 4$.

Več teoretičnega zanimanja so bili deležni problemi z aritmetičnim zaporedjem (glej vajo 7) ali geometričnim zaporedjem (naloga o sedmih hišah s sedmimi mačkami, ki prežijo na sedem miši itd.)

Včasih so prišle na vrsto tudi kvadratne enačbe. Na *papirusu iz Lahuna* je npr. taka naloga: "Površina 100 enot je sestavljena iz dveh kvadratov, katerih razmerje je 3:4". Torej $x^2 + y^2 = 100$, $x = 3y/4$; po metodi napačne predpostavke $x = 3$, $y = 4$, dobimo $3^2 + 4^2 = 25$, štirikrat premajhen kvadrat, tako da je prava rešitev dvakrat večja: $x = 6$, $y = 8$.

Geometrija

Šestindvajset problemov iz *Moskovskega* in *Rhindovega papirusa* obravnava geometrijo (računanje ploščin in prostornin). Vedeli so, da je ploščina trikotnika osnovnica krat polovica višine nanjo. Pitagorovega izreka niso poznali (le vrv z vozli 3+4+5 = 12, ki omogoča pravi kot). Ploščino kroga so izračunali približno kot $(8/9)^2 \times (2r)^2$ oziroma $(4/3)^4 \times r^2$, kar za π da vrednost $256/81 = 3.1605$. Za ploščino splošnega štirikotnika s stranicami a, b, c, d so dali (napačno) formulo: $P = (a + c)(b + d)/4$ (ki da preveliko vrednost).

V treh dimenzijah so znali izračunati prostornino kocke, paralelepipeda in krožnega valja (posode za žito). *Moskovski papirus* vsebuje celo zanimiv napotek za izračun prostornine prisekane štiristrane piramide, iz katerega izhaja, da so poznali točno formulo za prostornino: $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$ (glej vajo 10).

Posebna literatura:

- Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
- A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
- *R. Knott's Egyptian Mathematics Site*, internet.

(B) Babilonska matematika

Zgodovinski okvir

Mezopotamija, dežela med Evfratom in Tigrisom, je imela podobno ugodne razmere kot Egipt za razvoj poljedeljstva in posledično civilizacije z razvito administracijo in zato tudi znanostjo (astronomijo, matematiko). Dežela (kot križišče številnih trgovskih poti) ni bila toliko izolirana, zato je bila potrebna še večja vojaška in administrativna spretnost pri upravljanju dežele. Tudi reka Tigris je bila bolj divja kot Nil.

Zgodovinski viri

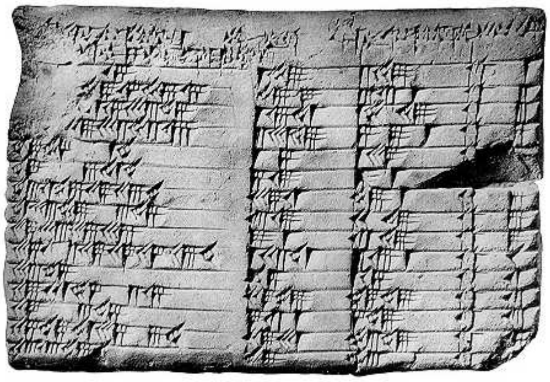
Do polovice 19. stoletja so odkopali okrog pol milijona glinastih ploščic s klinopisnimi znaki, 50.000 samo v bližini Nippurja. Med njimi jih okrog 300 vsebuje matematične tabele in zbirke matematičnih problemov. Klinopise je leta 1847 razvozlal angleški častnik in orientalist *Henry Cheswicke Rawlinson* (1810-1895), ko je izpopolnil *Grotefendovo metodo* in jo uporabil na *Behistunskem zapisu* v treh jezikih (perzijskem, aramejskem in elamitskem), babilonski verziji kamna iz Rosette, ki je omogočil moderno razumevanje stare egiptovske literature in civilizacije (*Thomas Young* 1814, *Jean François Champollion* 1822). Danes poznamo okrog 400 matematičnih ploščic.

Najstarejši matematični zapisi so iz drugega sumerskega obdobja (od $\sim$ 2100 do $\sim$ 2000 pnš.), naslednja skupina klinopisnih tekstov izvira iz časa prve babilonske dinastije (Hamurabi 1792-1750 pnš. in kasneje). Iz zadnje skupine sta matematično najpomembnejša dokumenta:

(1) *Tablica YBC 7289* (Babilonska zbirka na Univerzi Yale), ki predstavlja kvadrat z obema diagonalama in vpisano vrednostjo korena iz 2 v šestdesetiškem sistemu (na skoraj 5 decimalk natančno): $1; 24, 51, 10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1.41421296$.

Slika 4. Tablica YBC.7289

(2) *Tablica Plimpton 322* (iz Plimptonove zbirke na Univerzi Columbia), ki prinaša 15 vrstic števil v šestdesetiškem sistemu v 4 stolpcih. Publicist in zbiralec *George Arthur Plimpton* (1855-1936) je tablico velikosti 13 krat 9 krat 2 cm pridobil leta 1922. Uveljavljena interpretacija tablico predstavlja kot seznam pitagorejskih trojic, generiranih na moderen način kot $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, $c = u^2 + v^2$ ($u > v$ tuji si celi števili, različne parnosti), skupaj z $(c/a)^2$ (in nekaj lahko razložljivimi napakami). To bi pomenilo, da je babilonska matematika vsaj 1500 let pred Evklidom poznala tovrstno teorijo števil. Problem je, ker so trojice na tablici zelo velike, neurejene in ni jasno, kako so bile generirane. Pred dvajsetimi leti je ponovno oživela šestdeset let stara razlaga, da so trojice urejene po padajočih (oziroma naraščajočih) recipročnih vrednosti (glej [33], [35]).



Slika 5. Tablica Plimpton 322

Tretja skupina klinopisnih dokumentov pa je iz časa novega babilonskega kraljestva in perzijske nadvlade ($\sim$ 600 do $\sim$ 300 pnš.) ter iz časa Selevkidov (3. in 2. stoletje pnš.).

Babilonska astronomija

Babilonci so bili odlični astronomi, razvili so prvi *empirični* pristop z opazovanjem naravnih pojavov na nebu in tudi prvo filozofijo vesolja, kar je imelo velik vpliv na helenistično astronomijo. Njihov lunarno-solarni koledar z 12 meseci s po 29 in 30 dnevi je temeljil na starejšem sumerskem koledarju. Opazovali in beležili so tako lunine mene kot lunine mrke, sestavili so kataloge zvezd (našli so klinopisne tablice z efemeridami), poznali so zametke heliocentričnega planetarnega modela, kot ga je kasneje razvil Aristarh. Kaldejske podatke (Grki so babilonskim astronomom rekli Kaldejci) je uporabil in dopolnil Hiparh v 2. stoletju pnš., na njih je gradil Ptolemaj. Nasploh velja babilonska astronomija danes za temelj vse zahodne astronomije.

Babilonska matematika

Pod tem izrazom razumemo matematiko Sumercev, Akadijcev, Elamitov, Amoritov, Kasitov, Hetitov, Asircev, Aramejcev, Medijcev in drugih narodov, ki so v starem veku naseljevali Mezopotamijo in so svoja odkritja zapisovali v glavnem na glinaste ploščice (klinopis). Mišljena je stara babilonska matematika (iz časa Hamurabija), matematika iz novega kraljestva je precej drugačna [20]. Ta matematika (zlasti algebra) je bila na višji ravni kot egiptovska, naše vedenje o njej pa se je močno poglobilo v dvajsetih in tridesetih letih 20. stoletja z raziskavami arheologa *Françoisa Thureau-Dangina* (1872-1944) ter matematika in zgodovinarja znanosti *Otta Neugebauerja* (1899-1990). Neugebauer in Sachs sta npr. prva opisala *Plimpton 322* leta 1945 (glej sliko 6).

TABLE 1
The Extant Contents of Plimpton 322, with Errors Corrected and the Third Element of the Triple Added

I. (damaged), d^2/l^2 or b^2/l^2	II. Square-side of the width, b	III. Square-side of the diagonal, d	IV. Its name	(Square-side of the length, l)
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 20
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45
(1) 41 33 45 14 3 45	13 19	20 49	8	16
(1) 38 33 36 36	8 01	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 54
(1) 33 45	45	1 15	11	1
(1) 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12	40
(1) 27 00 03 45	2 41	4 49	13	4
(1) 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14	45
(1) 23 13 46 40	28	53	15	45

Slika 6. Vsebina tablice Plimpton 322 v šestdesetiškem sistemu

Aritmetika

Nasploh so že Sumerci imeli dobro razvito trgovsko knjigovodstvo in računstvo, vključno s pogodbami, obračuni, recepti, celo z obrestmi in garancijami [13]. Poleg klinopisne pisave so izumili abacus, imeli so tudi dobro razvit sistem uteži in mer. Posledično so Babilonci še v zgodnji dobi ($\sim$ 2100 pnš.) imeli dobro razvito poštevanko, temelječo na šestdesetiškem sistemu z mestnim zapisom (npr. $11 = 1 \cdot 60 + 1 = 61$, $563 = 5 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 3 = 18.363$). To je imelo jasne prednosti pri računanju pred egiptovskim sistemom, a je imelo tudi nekatere pomanjkljivosti: premik za faktor 60 (npr. $563 = 5 \cdot 60 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 60^{-1} = 306 + 1/20$) ali vmesno ničlo (npr. $11 = 1 \cdot 60^2 + 1 = 361$). Poseben znak za ničlo se je pojavil šele mnogo kasneje, okrog leta 300 pnš. Šestdesetiški mestni sistem z ničlo poznamo še danes pri merjenju časa in kotov.

Razlago šestdesetiškega sistema je dal Neugebauer: babilonska milja je tudi časovna enota (čas hoje), cel dan je 12 časovnih milj (en zasuk neba), torej razdeljen na 12 enakih delov, zaradi praktičnih potreb še naprej razdeljenih na 30 delov, skupaj na 30 krat 12, torej 360 delov.

Praktično računanje. Dve tretjini vseh izkopanih matematičnih glinenih ploščic predstavljajo različne tabele za praktično računanje in utrjevanje računske spretnosti (tablice množenja, recipročnih vrednosti, kvadratov in kubov). Pri množenju so si pomagali s tabelami kvadratov in formulama $ab = [(a+b)^2 - a^2 - b^2]/2$ ter $ab = [(a+b)^2 - (a-b)^2]/4$, pri deljenju pa s tabelami recipročnih vredosti in identiteto $a/b = a \cdot (1/b)$. Že okrog leta 1600 pnš. so, kot se vidi iz tablice YBC 7289, poznali zelo dober približek za $\sqrt{2}$, namreč

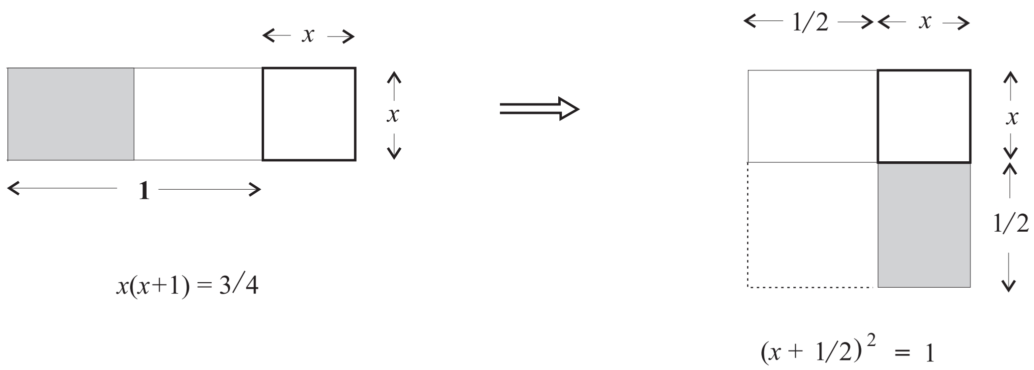
$1;24,51,10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.414213$. Korene so računali z iteracijo, kot kasneje Heron (glej vajo 14). Domnevajo, da so uporabljali tudi aproksimativno formulo $(a^2+h)^{1/2} \approx a + h/2a$ [13]. Poznali so formulo za vsoto kvadratov prvih n naravnih števil [3]. Število π so ocenili na 3 oziroma bolj natančno na $3 + 1/8 = 3{,}125$. Vmesne vrednosti, ki niso bile v tabeli, so določali z linearno interpolacijo.

Algebra

Kot nadgradnjo aritmetike so razvili t.i. *verbalno algebro*, metodo za reševanje z besedami zastavljenih problemov (npr. "reči dodaj 1, da dobiš 3"). Poleg preprostih linearnih, so znali reševati tudi različne bolj zahtevne tipe enačb, npr. *kvadratne enačbe* z dopolnitvijo do kvadrata; imeli so splošno metodo reševanja (v bistvu formulo), a prepoznali so le eno rešitev in še ta je morala biti pozitivna (negativnih števil niso poznali), ločili pa nekaj tipov enačb (v modernih oznakah): $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$.

Opozorilo. Ker so bili problemi zastavljeni z besedami, je ta interpretacija morda pretirana posodobitev (glej [20]);

Zgled: Reševanje kvadratne enačbe $x^2 + x = 3/4$.
Prevod originalnega besedila:
(i) (iskana) ploščina in stranica je 45' (minut, tj. 3/4), podaljšek za 1,
(ii) razdeli na polovico 1, dobiš 30' in 30',
(iii) dodaj 15' k (ploščini) 45', skupaj (ploščina kvadrata) 1, torej (stranica 1),
(iv) odvzemi 30' (polovico) stranice podaljška, rezultat je 30'.



Slika 7. Reševanje kvadratne enačbe

Geometrijska interpretacija: kvadratu s stranico x prilepimo pravokotnik s stranico 1; pol tega dodanega pravokotnika z zasukom za 90 stopinj dodamo pravokotni stranici prvotnega kvadrata, z manjkajočim kvadratom velikosti $(1/2)^2 = 1/4$ tvori velik kvadrat s stranico 1 (glej sliko 7); če zmanjšamo njegovo stranico za 1/2 (kar smo dodali), ostane $1 - 1/2 = 1/2$; to je rešitev enačbe.

Reševali so tudi *nekatere kubične enačbe*, *nekatere enačbe višje stopnje*, ki se prevedejo na reševanje kvadratne enačbe, ter *sisteme dveh enačb* z dvema neznankama (glej vaje 16-20).

Geometrija

Stari Babilonci so znali meriti dolžine (babilonska milja je merila okrog 7 današnjih milj, tj. okrog 11 km), ploščine in prostornine. Poznali so celo ploščino splošnega trikotnika, trapezoida z dvema pravima kotoma, prostornino kvadra. Vedeli so, da ima v polkrog včrtan trikotnik pravi kot. Obseg kroga so ocenili na 3 premere, ploščino pa na 1/12 kvadrata obsega (torej $\pi = 3$). Prostornina valja je bila osnovnica krat višina, prostornina stožca oziroma kvadratne piramide pa (napačno) osnovna ploskev krat *polovica* višine. Poznali so Pitagorov izrek, kar je razvidno iz mnogih najdenih ploščic oziroma zapisov na njih (glej *tablico YBC 7289* in standardno razlago *Plimptona 322*).

Posebna literatura:

- Eleanor Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
- Eleanor Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
- Eleanor Robson, *Words and pictures: new light on plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
- Jens Hoyrup, *Old Baylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010.

Vaje:

(1) Izvedi nekaj primerov egiptovskega množenja in deljenja, npr. $235 \cdot 71$, $235/71$.

(2) Egipčani so za recipročno vrednost naravnega števila n imeli posebno oznako, ki jo je Neugebauer približno ponazoril s črtico nad n, torej $\overline{n} = 1/n$ [21]. Izjema je bilo število $2/3$, ki so ga zapisali z dvema črticama nad 3, torej $\overline{\overline{3}} = 2/3$.
(a) Ugotovi, kateri ulomek se skriva v egipčanskem zapisu števil: $1\ \overline{3}$, $\overline{2}\ \overline{4}$, $\overline{3}\ \overline{4}\,\overline{5}$.
(b) Zapiši naslednje ulomke v obliki vsote različnih egipčanskih ulomkov: $3/4$, $2/7$, $6/7$.

(3) Napiši tabelo razčlenitev na različne egipčanske ulomke za vse prave ulomke z imenovalcem manj kot 8 z
(a) najmanj členi,
(b) z najmanjšimi imenovalci.
Poskusi tudi ugotoviti, na koliko načinov se da zapisati vsak ulomek (glej npr. [24]).

(4) **James Joseph Sylvester** (1814-1897) je leta 1880 dokazal, da lahko vsak pravi ulomek a/b, $0 < a < b$, zapišemo v obliki vsote različnih egipčanskih ulomkov. Dokaz poteka z indukcijo: za $a = 1$ je trditev očitno res; pri predpostavki, da velja za vse ulomke s števcem manj kot a, poišči največje naravno število $q \geq 2$, tako da bo $1/q < a/b < 1/(q-1)$ in se prepričaj, da je potem $0 < aq - b < a$, $(aq-b)/bq \neq 1/q$ in $a/b = 1/q + (aq-b)/bq$ (glej [2]).

(5) Prepričaj se, da lahko vsak ulomek oblike $2/n$ z lihim n zapišemo v obliki vsote dveh različnih egipčanskih ulomkov z imenovalcema $(n+1)/2$ in $n(n+1)/2$ (glej [3]).
Paul Erdös (1913-1996) pa je postavil naslednji problem, ki je še vedno nerešen [3]: Dokaži, da je za vsako liho število $n > 4$ ulomek $4/n$ vsota treh različnih egipčanskih ulomkov.

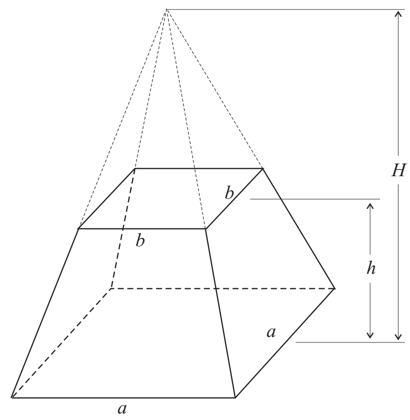
(6) Brez uporabe Pitagorovega izreka, ki ga Egipčani niso poznali, ali njegovega obrata dokaži, da je trikotnik s stranicami 3,4,5 pravokotni [13].

(7) Reši nalogo z aritmetičnim zaporedjem: 100 razdeliti na 5 delov v aritmetičnem zaporedju, vsota treh največjih naj bo 7 krat večja od vsote dveh najmanjših [38].

(8) Pokaži, da za ploščino P poljubnega štirikotnika s stranicami a, b, c, d velja
(a) $P \leq (ad + bc)/2$ z enakostjo natanko takrat, ko sta dva nasprotna kota prava,
(b) $P \leq (a+c)(b+d)/4$ z enakostjo natanko takrat, ko je lik pravokotnik [13].

(9) Definirajmo naslednje sredine dveh pozitivnih realnih števil x, y (glej [13]):
aritmetično $A = (x+y)/2$,
heronsko $R = (x + \sqrt{xy} + y)/3$,
gemetrijsko $G = \sqrt{xy}$,
harmonično $H = 2/(1/x + 1/y)$.
Pokaži, da velja $H \leq G \leq R \leq A$ z enakostjo natanko takrat, ko je $x = y$.

(10) Egipčani formule $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$ za prostornino prisekane kvadratne piramide niso zares izpeljali. Dokaži njeno veljavnost z modernimi metodami, tako da upoštevaš sorazmerje: $H/a = (H-h)/b = h/(a-b)$ (glej sliko 8).



SLIKA 8. Prisekana kvadratna piramida

(11) Katero desetiško številko predstavlja šestdesetiški zapis: (a) 123, (b) 42;25,35, (c) 0;02,31?

(12) Zapiši v šestdesetiškem sistemu naslednja desetiška števila: (a) 15, (b) 1/2, (c) 3/4, (d) 2/3, (e) 1/7.

(13) Naravno število n je regularno, če ima njegova recipročna vrednost končen šestdesetiški razvoj.
(a) Pokaži, da je to natanko takrat, ko je število n deljivo le z 2, 3 in 5.
(b) Poišči (v šestdesetiškem zapisu) recipročne vrednosti naravnih števil 20 in 30.
(c) Aproksimiraj recipročni vrednosti neregularnih števil 7 in 13 s končnim šestdesetiškim zapisom (upoštevaj npr. $1/7 = 7/49 \approx 7/50$ in $1/13 = 7/91 \approx 1/90$).

(14) Kvadratni koren iz a so Babilonci računali rekurzivno: pri poljubnem $x_0 > 0$ naj bo $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ za vsak $n \geq 1$.
(a) Pokaži, da zaporedje konvergira proti $\sqrt{a}$.
(b) Prepričaj se, da za $y_n = (x_n - \sqrt{a})/2\sqrt{a}$ velja za vsak $n \geq 0$ ocena $0 < y_{n+1} < y_n^2$ oziroma $y_{n+1} < y_0^{2^{n+1}}$.

(15) Reciproična vrednost števila x je pomenila ne samo $1/x$, lahko tudi $60/x$ ali $3600/x$ ... Poišči pozitivno celo rešitev naslednjega babilonskega problema: količina x presega njeno reciproično vrednost za 7; koliko je x?

(16) Reši naslednji sistem enačb, ki se je pojavil na stari tablici iz Suse:
$x^3\sqrt{x^2 + y^2} = 3,200,000$; $xy = 1200$ [3].

(17) Poišči rešitev naslednjega problema na tablici iz $\sim$ 1800 pnš., shranjeni v Strasbourgu: Površina dveh kvadratov je 1000. Stranica enega kvadrata je za 10 enot manjša od 2/3 stranice drugega kvadrata. Koliko merita kvadrata?

(18) Na tablici iz $\sim$ 300 pnš., shranjeni v Louvru, je podan pravokotnik s ploščino 1 in obsegom $2a$. Poišči njegove dimenzije
(a) z eliminiranjem ene neznanke,
(b) s formulo, ki so jo poznali Babilonci: $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$.

(19) Sestavi tabelo za količino $n^3 + n^2$ za $n = 1, 2, ..., 10$. Z uporabo te tabele reši naslednji problem z babilonske tablice iz $\sim$ 1800 (izražen v današnji obliki s sistemom treh enačb s tremi neznankami): $xyz + xy = 7/6$, $y = 2x/3$, $z = 12x$.

(20) Reši naslednje sisteme enačb:
(a) $x \pm y = a$, $xy = b$,
(b) $x \pm y = a$, $x^2 + y^2 = b$),
(c) $xy = a$, $bx^2/y + cy^2/x + d = 0$ (iz neke tablice $\sim$ 1600 pnš. [13]).

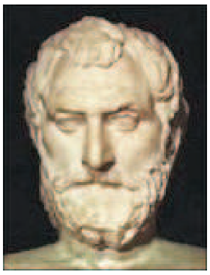
2. Pitagorejska matematika

Zgodovinski okvir

Konec drugega tisočletja pred našim štetjem so se ob vzhodnem Mediteranu zgodile velike politične spremembe. Moč Egipta in Babilonije je venela, pojavila so se nova ljudstva, Židje, Feničani, Grki. Nastopila je železna doba, ki je prinesla novo orožje in novo orodje; izumili so abecedo in uvedli kovani denar. Vrstila so se nova geografska odkritja, trgovina je naraščala, pri čemer so prednjačila mesta ob Sredozemlju, v Mali Aziji, Grčiji in južni Italiji.

V tem času so začeli opuščati mitološko razlago sveta. Prevladoval je duh racionalizma, ki mu ni več zadoščal odgovor na vprašanje *kako*, ampak je hotel vedeti tudi *zakaj*. Pojavila se je potreba po *dokazovanju* in z njo se je v Mali Aziji rodila prava matematika.

Prvi znani predstavnik jonske naravne filozofije je bil **Tales iz Mileta** ($\sim$ 624-546 pnš.) (slika 9), trgovec in popotnik (obiskal je Egipt), hkrati prvi, ki je življenje posvetil študiju matematike. Ko se je vrnil s potovanja, je v svojem mestu postal svetnik, inženir, poslovnež, filozof, matematik in astronom (pravilno napovedal sončni mrk). Pripisujejo mu naslednje rezultate, do katerih se je dokopal z logičnim razmišljanjem:
(1) premer razpolavlja krog,
(2) v enakokrakem trikotniku sta kota ob osnovnici enaka,
(3) trikotnika sta skladna, če imata enaka dva kota in eno stranico,
(4) v polkrog včrtan kot je pravi.



SLIKA 9. Tales iz Mileta

Zgodovinski viri

Zgodnje grške matematike poznamo le po mnogo kasnejših zapisih in komentarjih (krščanskih, arabskih).

Prvi zgodovinar matematike je bil **Evdem z Rodosa** ($\sim$ 350-290 pnš.), Aristotelov učenec, ki je opisal čas nekako do leta 335 pnš., a se je na žalost njegov spis izgubil. Zanj vemo le po mnogo kasnejšem povzetku, ki ga je v sklopu svojega *Komentarja o Evklidu* okrog leta 450 nš. sestavil neoplatonist **Proklos** (410-485 nš.). To je najbolj zanesljiv vir za starejšo grško matematiko, vsebuje tudi podatke o Pitagori in pitagorejcih.

Moderne raziskave so opravili zgodovinarji matematike, kot so bili npr. *Hieronymus Georg Zeuthen* (1839-1920), *Paul Tannery* (1843-1904), *Johan Ludvig Heiberg* (1854-1928), *Thomas Little Heath* (1861-1940) in drugi.

Pitagorejska matematika

Pitagora (slika 10) je bil rojen $\sim$ 572 pnš. na Samosu in je okrog petdeset let mlajši od Talesa. Najbrž je bil njegov učenec. Tudi on je potoval v Perzijo in v Egipt. Po vrnitvi je na Samosu našel Polikratovo tiranijo in se je pred njo umaknil v Krotono v južni Italiji, kjer je ustanovil svojo (filozofsko, znanstveno, matematično in versko) šolo. V tej šoli so na tajnih sestankih svoje vedenje in znanje širili samo ustno. Gojili so vero v moč števil (ki sestavljajo svet), njihove znanosti so bile aritmetika, geometrija, glasba in astronomija (v srednjem veku so to imenovali *kvadrivium*, ki se mu je pridružil z gramatiko, logiko in retoriko še *trivium*; skupaj torej t.i. *sedem liberalnih umetnosti*). Pitagora je odkril harmonijo tonov; zaradi svojega eksperimentiranja s strunami velja za prvega matematičnega fizika. Prvi je uporabljal besedo "filozof". Notranji krog približno 600 študentov so bili ti. *matematiki*, zunanji, okrog 2000 študentov, pa *akuzmatiki*. Njegova žena *Teona* je pripadala prvemu krogu in bi lahko bila prva po imenu znana matematičarka. Ko so zaradi aristokratske zaprtosti in misticizma pitagorejce pregnali iz Krotone, se je Pitagora zatekel v Metapont, kjer je umrl (morda je bil celo umorjen) v starosti 75 do 80 let. Njegovi pripadniki so se potem razkropili, a so delovali vsaj še dve sto let.

SLIKA 10. Pitagora s Samosa

Zanimanje pitagorejcev na matematičnem področju je bilo usmerjeno v aritmetiko, povezano z geometrijo (osnove teorije števil, npr. popolna, prijateljska, figurativna števila, pitagorejske trojice), začetke algebre v povezavi z geometrijo (Pitagorov izrek, geometrijski dokazi algebraičnih identitet, geometrijska rešitev kvadratne enačbe) in geometrijo (transformacija likov z isto ploščino, pravilna telesa).

Prijateljska števila

Dve naravni števili sta prijateljski, če je vsako od njiju vsota pravih deliteljev drugega. Kot pravi neoplatonist **Jamblih iz Apameje** ($\sim$ 245-325 nš.), naj bi prvi par prijateljskih števil (284, 220) odkril **Pitagora**, drugi par (2620,2924) je našel **Euler**, ki je leta 1747 podal seznam 30 prijateljskih parov, kasneje pa jih je našel vsaj še toliko. Euler je posplošil neko formulo za generiranje prijateljskih parov, ki jo je našel **Tabit Ibn Qurra** iz 9. stoletja (glej vajo 5). Zanimivo je, da je leta 1866 šestnajstletni fant s slavnim imenom **Nicolo I. Paganini** odkril spregledani drugi najmanjši par prijateljskih števil (1184, 1210) (glej vajo 4a). Do leta 1946 so odkrili 390 parov, kasneje so si pomagali z računalniki pri iskanju vseh prijateljskih parov do neke (visoke) meje, npr. do 10^{12}. Leta 2007 je bilo znanih skoraj 12.000.000 prijateljskih parov. V zvezi s prijateljskimi števili so še vedno odprti problemi. Ni znano npr. ali obstaja par prijateljskih števil, katerih komponenti sta nasprotne parnosti (eno sodo, eno liho); prav tako ni znano, ali obstaja prijateljski par tujih si števil (brez skupnega faktorja); in še mnogo drugih nerešenih vprašanj.

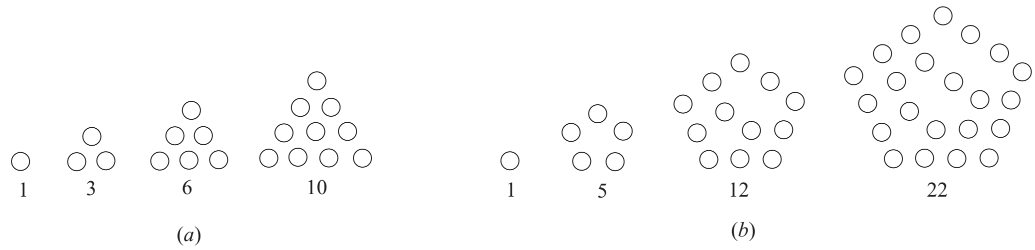
Popolna (perfektna) števila

To so taka, ki so enaka vsoti vseh svojih pravih deliteljev. Grki so poznali prva štiri: 6, 28, 496, 8128, peto (33.550.336) je našel leta 1456 neznani matematik. Do leta 1952 je bilo znanih samo 12 popolnih števil, do junija 2010 pa 47; vsa znana popolna števila so soda. Ni znano, ali je popolnih števil neskončno mnogo. Prav tako ni znano, ali obstaja liho popolno število; če je, je gotovo zelo veliko, večje od 10^{1500}. Metodo, kako poiskati soda popolna števila, je poznal že **Evklid** (v IX. knjigi *Elementov*): Če je $2^n - 1$ praštevilo (tako število danes imenujemo *Mersennovo praštevilo*, glej vajo 2 in opombo k njej), je $2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število (vaja 3). Kot je dokazal **Euler** (glej vaji 6 in 7), velja v resnici tudi obratno, tako da imamo bijekcijo med popolnimi števili in Mersennovimi praštevili. Npr. $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ ni praštevilo, torej $2^{10}(2^{11} - 1)$ ni popolno število. Na vzporednih računalnikih teče danes mednarodni projekt za iskanje novih Mersennovih praštevil.

Naslednji, ki je temeljiteje študiral popolna števila, je bil **Nikomah iz Gerase** $\sim$ 100 nš., ki je definiral *presežna* (*obilna*) in *pomanjkljiva števila*. Prva so taka, da vsota njihovih deliteljev preseže vrednost števila, pri drugih pa je ta vsota manjša od samega števila. Kasneje so o tem pisali **Sv. Avguštin** (354-430), **Tabit ibn Qurra** (826-901), **Alhazen** ali **Ibn al-Haitham** (965-1040), ki je podal delni obrat Evklidove trditve, in drugi, manj in bolj znani matematiki, med slednjimi npr. **Fermat**, **Mersenne**, **Euler** in drugi.

Figurativna števila

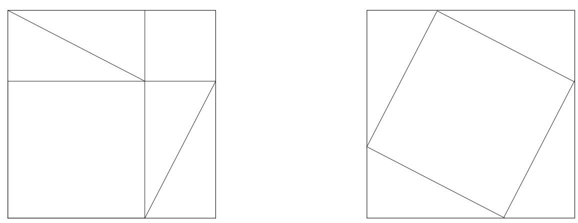
Tako se imenujejo števila točk v neki gemetrijski konfiguraciji, npr. *trikotna*, *kvadratna*, *petkotna števila* (slika 11). Med njimi so različne zveze, ki jih lahko dokažemo algebrajsko (z indukcijo) ali geometrijsko. Zgled: $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$, $S_n = T_n + T_{n-1}$, $P_n = n + 3T_{n-1}$ itd. (glej vaji 8 in 9). Odkritje figurativnih števil nedvomno pripada pitagorejski šoli.



SLIKA 11. Trikotna in petkotna števila

Pitagorov izrek in pitagorejske trojice

Čeprav so izrek morda poznali že stari Babilonci več kot tisoč let prej, zagotovo pa indijski matematik **Baudhayana** $\sim$ 800 pnš., prvi dokaz (z dopolnitvijo do kvadrata) pripisujejo Pitagori (slika 12). V dokazu, da na sredi res dobimo kvadrat, potrebujemo, da je vsota kotov v trikotniku 180 stopinj (za to pa lemo o kotih ob vzporednicah).



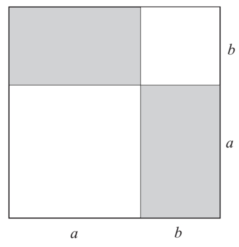
SLIKA 12. Pitagorov dokaz Pitagorovega izreka

Po tem prvem dokazu je znanih več kot 400 različnih dokazov, zelo zanimivih in iznajdljivih (glej vajo 11). Samo *E.S. Loomis* jih je zbral 371 in objavil leta 1927 (številne dokaze glej npr. v [27] ali [31]). S Pitagorovim izrekom je tesno povezan pojem *pitagorejskih trojic*: celih števil a, b, c, za katera velja $a^2 + b^2 = c^2$. Pitagora jih je znal generirati s formulo $(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$, kjer je m lih, tako da je $a = m$, $b = (m^2-1)/2$ in $c = (m^2+1)/2$. To je poseben primer današnje reprezentacije $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$. Če sta u, v tuji si števili različne parnosti, dobimo na ta način vse primitivne pitagorejske trojice, tj. pitagorejske trojice brez skupnega faktorja.

Algebraične identitete

Stari Grki niso poznali algebraične notacije, zato so npr. pitagorejci različne algebraične identitete odkrili in dokazovali geometrijsko, npr. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (glej sliko 13).

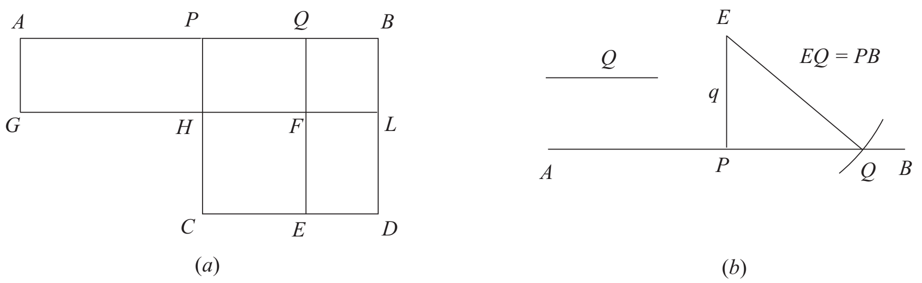
V II. knjigi *Elementov* najdemo npr.:



Slika 13. Geometrijsko dokazovanje algebraične identitete

Trditev 1. *Na daljici AB z razpoloviščem P naj bo Q nadaljna točka. Potem velja enakost $(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$.*

Dokaz: Pol pravokotnika z osnovnico AB in višino QB, prenesemo zasukanega za 90 stopinj pod daljico QB in dobljeni gnomon dopolnimo do kvadrata (glej sliko 14a).



Slika 14. Evklidovo reševanje kvadratne enačbe

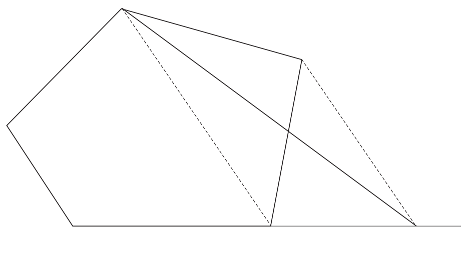
Geometrijska rešitev kvadratne enačbe

Če izberemo $AQ = 2a$ in $QB = 2b$, dobimo identiteto $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$, pri izbiri $AB = 2a$ in $PQ = b$ pa $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Če leži točka Q zunaj daljice AB, dobimo podobno $(AQ)(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$. S tem v zvezi lahko geometrijsko poiščemo (pozitivno) rešitev kvadratne enačbe $x^2 - px + q^2 = 0$, $q \leq p/2$, saj iz trditve 1 pri $AB = p$ in $AQ = x$, dobimo omenjeno enačbo zaradi $AQ + QB = p$ in $(AQ)(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2$ (Pitagorov izrek) $= q^2$ (glej sliko 14b).

Podobno iz analogne trditve (ko je Q zunaj daljice AB) izpeljemo rešitev za malo drugačno enačbo $x^2 - px - q^2 = 0$. Nasprotni števili potem rešita enačbo $x^2 + px = \pm q^2$.

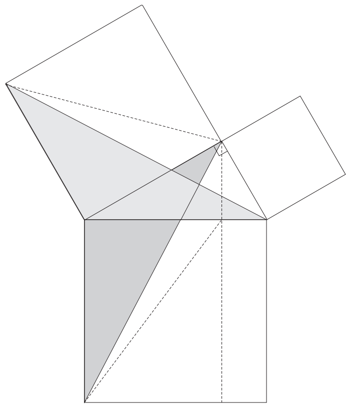
Geometrijske transformacije, ki ohranjajo ploščino

Pitagorejci so znali zmanjšati število stranic večkotnika, pri čemer so ohranili ploščino. Iz konveksnega oglišča potegnemo vzporednico zadnji diagonali, da seka podaljšek osnovnice (slika 15). Trikotnika z isto osnovnico in višino imata isto ploščino.



Slika 15. Transformacija večkotnika, ki ohranja ploščino

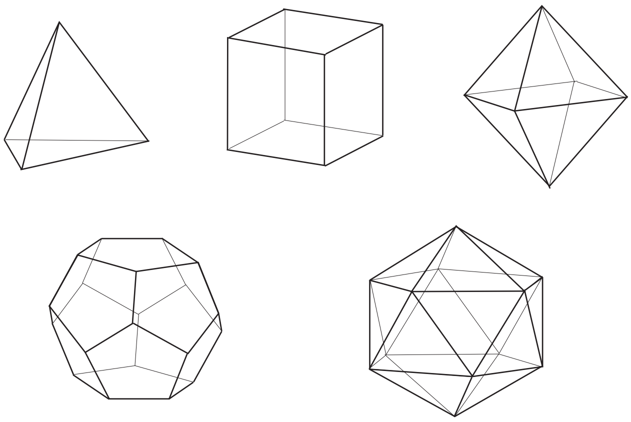
Evklid je to dejstvo izkoristil pri svojem znanem dokazu Pitagorovega izreka (slika 16).



Slika 16. Evklidov dokaz Pitagorovega izreka

Platonska telesa

Pitagorejci so tudi poznali nekatera pravilna telesa: *tetraeder*, *kocko* in *dodekaeder*, *oktaeder* in *ikozaeder* pa je odkril **Teajtet** $\sim$ 375 pnš. (slika 17). Opise vseh je podal **Platon** (430-349 pnš.), zato jih imenujemo tudi *platonska telesa*. Platon jih je povezal s štirimi *klasičnimi elementi* (zemlja - kocka, zrak - oktaeder, voda - ikozaeder, ogenj - tetraeder). Teajtet je dokazal, da drugih pravilnih teles ni. Leta 1885 so pri Padovi izkopali igračo v obliki dodekaedra iz časa $\sim$ 500 pnš.



Slika 17. Platonska telesa

Odkritje iracionalnih števil

Najverjetneje so najprej odkrili, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, morda pa se je to zgodilo s $\sqrt{5}$. Algebraičen dokaz je standarden, geometrijski malce bolj zapleten, s protislovjem (glej vajo 12). Odkritje je pomenilo velik logični škandal, saj je vsa pitagorejska filozofija temeljila na racionalnih razmerjih daljic (in števil). Pitagorejci so odkritje hoteli obdržati v tajnosti. Legenda pa pravi, da je **Hipasus** skrivnost izdal in bil zato kaznovan. Po Platonovem pripovedovanju je kasneje **Teodor iz Kirene** dokazal tudi iracionalnost drugih korenov ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$,$\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$). Njegovo delo je nadaljeval **Teajtet**, škandal pa je leta 370 pnš. dokončno razrešil **Evdoks iz Knida**, učenec **Platona** in pitagorejca **Arhita** z novo definicijo proporcionalnosti (glej spodaj).

Zenonovi paradoksi

Odkritje iracionalnosti, ki smo ga omenili, je povzročilo prvo veliko krizo v zgodovini matematike. Obstoj količin (dolžin, ploščin, prostornin), ki se jih ne da dobiti drugače kot z nekim neskončnim procesom (kot npr. diagonalo v enotskem kvadratu, ploščino kroga s polmerom 1 ali prostornino piramide), je dodobra zamajal dotedanje pitagorejsko prepričanje o harmonično zgrajenem svetu, temelječem na razmerju med celimi števili. Grški strah pred neskončnostjo so še povečali čisto filozofki premisliki o osnovah tedanjega dojemanja sveta.

Grški filozof **Zenon iz Eleje**, Parmenidov učenec, jih je formuliral $\sim$ 450 pnš. Znani so štirje paradoksi:
(1) *Dihotomija*: če hočemo priti do konca odseka, moramo najprej doseči polovico, še prej četrtino itd. ad infinitum; ali sploh lahko začnemo?
(2) *Puščica*: v vsakem trenutku puščica miruje, ker ima fiksno pozicijo; ali se sploh lahko začne gibati?
(3) *Ahil in želva*: Ahil je dvakrat hitrejši od želve, ki ima pred njim določeno prednost; ko pride Ahil do mesta, kjer je bila želva v začetku, je le-ta že pol poti naprej itd; ali jo sploh kdaj ujame?
(4) *Stadion*: V treh vrstah so ljudje A v prvi pri miru, v drugi se B gibljejo z določeno hitrostjo v desno, v tretji C z isto hitrostjo v levo; če potrebuje B do naslednjega A enoto časa, potrebuje do naslednjega C le pol enote časa; ali potem lahko obstaja najmanjši nedeljiv del časa?

Ti paradoksi dokazujejo, da gibanje ni možno, če predpostavimo, da je
(a) dolžina neomejeno deljiva (dihotomija, Ahil in želva), ali da je
(b) čas sestavljen iz nedeljivih (atomarnih) enot (puščica, stadion).

Na sploh so Grki verjeli, da je neskončna vsota pozitivnih količin neskončno velika ter da je končna ali neskončna vsota ničelnih količin ničelna.

Evdoksova teorija sorazmernosti

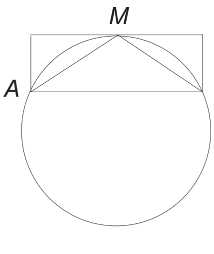
Arhitov in Platonov učenec **Evdoks iz Knida** je $\sim$ 370 pnš. formuliral novo teorijo proporcionalnosti, da bi lahko vse geometrijske količine (tudi nesoizmerljive) obravnaval precizno in enotno. Vsaka taka količina (npr. λ) je določena, če poznamo njeno pozicijo med količinami (npr. a), ki so v racionalnem razmerju z dano količino. Torej $\lambda = \mu$, če iz $a < \lambda$ sledi $a < \mu$ in obratno. To je zelo moderno gledanje (iracionalno število poznamo, če poznamo vsa manjša in vsa večja racionalna števila). Evdoksovo teorijo sorazmernosti je vključil Evklid v V. knjigo, Teodorovo in Teajtetovo obravnavo nesoizmerljivih količin pa v X. knjigo *Elementov*. Iz Teajtetovih in Evdoksovih idej je črpal tudi nemški matematik **Richard Dedekind**, ko je leta 1872 predstavil moderno teorijo realnih števil (Dedekindovi rezi).

Evdoksova metoda izčrpavanja

Ta metoda je posplošitev teorije sorazmernosti. Kot vsaka (iracionalna) količina je tudi ploščina poljubnega lika ali prostornina poljubnega telesa določena z aproksimacijami. Krog npr. aproksimiramo z včrtanimi ali očrtanimi večkotniki, piramido s stopničasto naloženimi prizmami ipd.

V resnici pripisujejo enega od zgodnejših poskusov kvadrature kroga že sofistu **Antifonu** ($\sim$ 430 pnš.), Sokratovemu sodobniku. V krog je včrtaval pravilne večkotnike z vedno večjim (podvojenim) številom stranic. Sklepal je takole: ker se vsak večkotnik da kvadrirati, lahko v limiti kvadriramo tudi krog. Kritiki so mu odgovarjali: zaradi neskončne deljivosti količin kroga nikoli ne napolnimo v končno korakih. To je res, toda pri marsikateri izpeljavi zadošča le končno mnogo približkov.

Zgled: Uporabimo teorijo sorazmernosti za dokaz, da za krog s premeroma d_1, d_2 velja za razmerje ploščin $A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2$. Ploščina trikotnika ABM nad tetivo AB z ekstremno točko M na loku je enaka polovici ploščine pravokotnika $ABCD$ nad isto tetivo, zato večja od polovice krožnega odseka (glej sliko 18). Če bi veljalo $A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$, bi lahko včrtali večkotnik P_1 tako, da bi se njegova ploščina poljubno malo razlikovala od A_1 in bi zato veljalo $P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$. Če je P_2 podoben večkotnik, včrtan v drugi krog, bi zaradi



SLIKA 18. Včrtavanje večkotnikov v krog

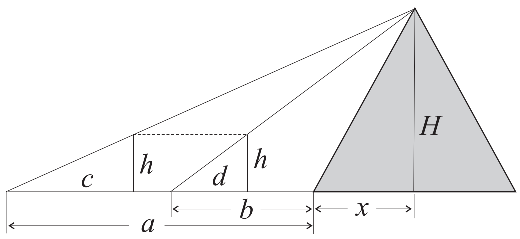
$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$ imeli $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$ oziroma $P_2 > A_2$, kar je protislovje. Podobno zavrnemo neenakost $A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2$. Če je torej A ploščina in d premer kroga, mora veljati $A = kd^2$, kjer je k konstanta (enaka $\pi/4$) za vse kroge.

Evdoksovo teorijo sorazmernosti in metodo izčrpavanja lahko imamo za odgovor platonske matematične šole na krizo iracionalnosti in na Zenonove paradokse. Kasneje jo je uporabljal in izpopolnil **Arhimed**. Za praktično uporabo je pomembna naslednja trditev: *Če od količine odštejemo vsaj pol, od ostanka vsaj pol itd., lahko dosežemo, da je po določenem številu korakov ostanek poljubno majhen* (*manjši od vsake vnaprej predpisane količine*).

Ta princip, ki v bistvu pomeni *Arhimedovo lastnost* realnih števil, pogosto zadošča za dokaz (s protislovjem) in ni treba napraviti neskončno mnogo korakov.

Vaje:

(1) **Tales** je v Egiptu računal višino piramide s podobnimi trikotniki [13]. Izpelji, kako je z dvema merjenima lahko zaobšel problem, da ni mogel izmeriti razdalje znotraj piramide (glej sliko 19).



SLIKA 19. Računanje višine piramide po Talesu

(2) Pokaži, da mora biti tudi n praštevilo, če je tako število $2^n - 1$. Obratno pa ne velja, prepričaj se, da je npr. število $2^{11} - 1$ deljivo s 23 (glej npr. [2]).

Opomba. Praštevila oblike $2^n - 1$ se imenujejo *Mersennova praštevila*. Ime so dobila po francoskem duhovniku in matematiku, Descartesovem sodobniku, **Marinu Mersennu** (1588-1648), ki je poznal prvih osem takih praštevil (za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ in 31). Menil je, da je tudi $2^{67} - 1$ praštevilo, kar pa je leta 1876 ovrgel **Édouard Lucas** (1842-1891), vendar brez faktorizacije. Pač pa je leta 1903 ameriški matematik **Frank Nelson Cole** (1861-1926) na srečanju Ameriškega matematičnega društva (AMS) "predaval" o tem številu. Brez besed je na tablo napisal vrednost $2^{67} - 1 = 147, 573, 952, 589, 676, 412, 927$ in nato zmnožil števili 761,838,257,287 in 193,707,721. Dobil je isti rezultat in - velik aplavz. Po Coleu, ki je bil v zadnjih letih 19. stoletja tudi tajnik AMS in urednik *Bulletina AMS*, se danes imenujeta dve prestižni nagradi Ameriškega matematičnega društva (za algebro in za teorijo števil).

(3) **Evklid** je dokazal, da je $2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število, če je $2^n - 1$ praštevilo.
(a) Napiši prvih pet popolnih števil, ki jih dobimo po tej poti.
(b) Dokaži Evklidovo trditev. (Navodilo [12]: poišči vse prave delitelje števila $N = 2^{n-1}p$, kjer je $p = 2^n - 1$ praštevilo, in jih seštej.)

(4) Pokaži:
(a) Števili 1184 in 1210 sta prijateljski.
(b) Vsak večkratnik presežnega (obilnega) ali popolnega števila je presežno število.
(c) Napiši vsa presežna števila manjša od 100 in ugotovi, da so vsa soda.
(d) Pokaži, da je $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ presežno število (to je najmanjše liho presežno število).

(5) Znani sta naslednji pravili za generiranje prijateljskih števil (glej splet):
(a) (**Tabit ibn Qurra**) Če za praštevila p, q, r velja $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ in $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, kjer je $n > 1$, sta $2^n pq$ in $2^n r$ prijateljski števili.
(b) (**Euler**) Če za praštevila p, q, r velja $p = 2^m(2^{n-m} + 1) - 1$, $q = 2^n(2^{n-m} + 1) - 1$ in $r = 2^{m+n}(2^{n-m} + 1)^2 - 1$, kjer je $n > m > 0$, sta $2^n pq$ in $2^n r$ prijateljski števili (posplošitev pravila (a) pri $m = n - 1$).
Poišči vse prijateljske pare po pravilu (a) za $n \leq 3$ in po pravilu (b) za $m, n \leq 3$.

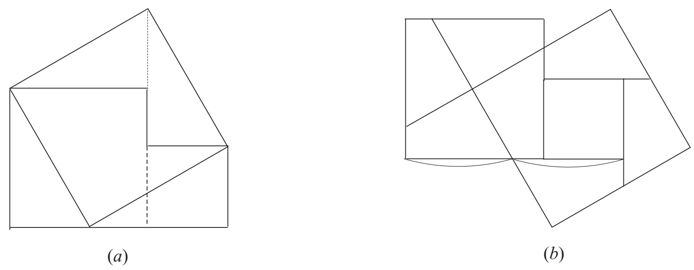
(6) **Euler** je vsoto *vseh* deliteljev naravnega števila n označil s $\sigma(n)$; tako je npr. $\sigma(p) = p + 1$ natanko takrat, ko je p praštevilo. Splošneje velja $\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + ... + p^k = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$ in v posebnem primeru $\sigma(N) = 2N - 1$, če je $N = 2^k$. Da se pokazati, da ima funkcija σ multiplikativno lastnost: $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Pokaži:
(a) Število n je popolno natanko takrat, ko je $\sigma(n) = 2n$.
(a) Par števil (m, n) je prijateljski natanko takrat, ko je $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$.
(c) Vsota recipročnih vrednosti vseh deliteljev popolnega števila je enaka 2.

(7) Dokaži **Eulerjevo** trditev, da je *vsako sodo* popolno število N oblike $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ (glej [12]), tako da najprej zapišeš N v obliki $N = 2^{n-1}b$, kjer je $n > 1$ in b liho število. Zaradi popolnosti je $\sigma(N) = 2N = 2^n b$, po drugi strani pa zaradi multiplikativnosti funkcije σ velja $\sigma(N) = (2^n - 1)\sigma(b)$. Izenačimo in odtod izpeljemo obstoj takega števila $c \geq 1$, da je $\sigma(b) = 2^n c$ in $b = c(2^n - 1)$. Predpostavi $c > 1$.
(a) Pokaži, da so števila $1, b, c$ in $2^n - 1$ *različni* delitelji števila b (glej [12]).
(b) Odtod izpelji $\sigma(b) \geq 1 + b + c + (2^n - 1) = 2^n(c + 1)$, kar je v nasprotju z $\sigma(b) = 2^n c$.
(c) Prepričaj se, da preostala možnost $c = 1$ pomeni, da je $b = 2^n - 1$ in $\sigma(b) = b + 1$, tako da je b tudi praštevilo.

(8) Algebrajsko in geometrijsko dokaži naslednje trditve:
(a) Vsako kvadratno število je vsota dveh zaporednih trikotnih števil: $S_n = T_n + T_{n-1}$.
(b) Osemkratnik trikotnega števila, povečan za 1, je kvadratno število: $8T_n + 1 = S_{2n+1}$.
(c) Vsako petkotno število je vsota aritmetičnega zaporedja s prvim členom 1 in diferenco 3: $P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)$. Izraunaj eksplicitno, koliko je P_n.
(d) Petkotno število P_n je za n povečan trikratnik trikotnega števila T_{n-1}, torej $P_n = n + 3T_{n-1}$.

(9) Pravokotna števila so števila oblike $R_n = n(n + 1)$. Prepričaj se, da je
(a) vsota prvih n sodih števil pravokotno število R_n in vsota prvih n lihih števil kvadratno število S_n,
(b) vsako pravokotno število vsota dveh enakih trikotnih števil,
(c) pravokotno število R_{3n-1} enako šestkratniku petkotnega števila P_n.

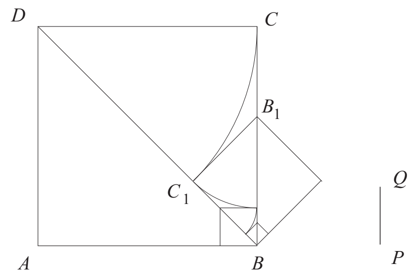
(10) Proklov *Evdemski povzetek* pozna tri klasične sredine dveh pozitivnih števil a in b, $a > b$: *aritmetično* $A = (a + b)/2$, *geometrijsko* $G = \sqrt{ab}$ in *harmonično* $H = 2ab/(a + b)$. Pokaži:
(a) $H \leq G \leq A$ z enakostjo natanko takrat, ko je $a = b$,
(b) $a/A = H/b$,
(c) H je harmonična sredina natanko takrat, ko obstaja tako pozitivno število c, da je $a = H + a/c$ in $H = b + b/c$,
(d) $1/(H - a) + 1/(H - b) = 1/a + 1/b = 2/H$,
(e) če je b harmonična sredina za a in c, je $b/(a + c)$ harmonična sredina za $a/(b + c)$ in $c/(a + b)$.



SLIKA 20. Ibn Qurrov in Dudeneyev dokaz Pitagorovega izreka

(11) Dva večkotnika sta *kongruentna* (*enaka*) *po razdelitvi* (*po seštevanju*), če lahko vsakega razdelimo na enako mnogo delov tako, da je vsak del enega lika skladen z enim od delov drugega lika, in *po dopolnitvi* (*po odštevanju*), če ju lahko s paroma skladnimi deli dopolnimo do dveh likov, ki sta kongruentna po razdelitvi. Dokazati se da, da sta poljubna večkotnika z isto ploščino enaka po razdelitvi ali po dopolnitvi (*Bolyai-Gerwienov izrek*). Prepričaj se, da uporablja
(a) Pitagorov dokaz Pitagorovega izreka (slika 12) kongruentnost po dopolnitvi,
(b) Tabit ibn Qurrov dokaz iz 9. stoletja (Perigalov iz 1873) na sliki 20a in Dudeneyev dokaz iz 1917 na sliki 20b pa kongruentnost po razdelitvi.

(12) Predpostavimo, da sta tako diagonala BD kot stranica AB kvadrata na sliki 21 celi večkratnik neke majhne daljice PQ. Pokaži,
(a) da sta potem tudi diagonala BB_1 in stranica BC_1 manjšega kvadrata cela večkratnika iste količine PQ,
(b) da merita BB_1 in BC_1 manj kot polovica količin BD oziroma AB in
(c) da po dovolj velikem številu korakov lahko s ponavljanjem istega postopka zmanjšamo dimenzije kvadrata pod PQ, kar je protislovje in pomeni, da razmerje $BD : AB$ ni racionalno.



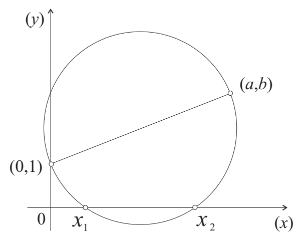
SLIKA 21. Geometrijski dokaz iracionalnosti kvadratnega korena iz 2

(13) Načrtaj tri različno dolge daljice, najdaljša naj meri a enot, srednja b enot, najkrajša pa naj meri 1 enoto. Z ravnilom in šestilom načrtaj daljice dolžine:
(a) $a + b$ in $a - b$,
(b) a^2 in $\sqrt{a}$,
(c) ab in a/b.

(14) Če je dana daljica dolžine 1, konstruiraj z ravnilom in šestilom (pozitivno) rešitev kvadratne enačbe
(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$,
(b) $x^2 + 4x - 21 = 0$.

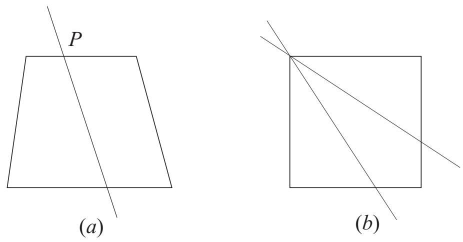
(15) Z ravnilom in šestilom razdeli daljico a v dva dela tako, da bo razlika njunih kvadratov enaka njunemu produktu. Pokaži, da je tedaj večji od delov geometrijska sredina daljice in drugega dela (pravimo, da smo daljico razdelili v razmerju *zlatega reza*). (Navodilo: geometrijsko reši ustrezno kvadratno enačbo.)

(16) Škotski pisec in učitelj matematike **Thomas Carlyle** (1795-1881) je predlagal naslednjo metodo za geometrijsko reševanje kvadratne enačbe oblike $x^2 - ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ (glej [13]): če krožnica s premerom od $(0,1)$ do (a,b) seka abscisno os, sta abscisi presečišča korena kvadratne enačbe (glej sliko 22).
(a) Utemelji postopek.
(b) S to metodo reši kvadratne enačbe iz (14) in (15).



Slika 22. Carlyleova geometrijska metoda reševanja kvadratne enačbe

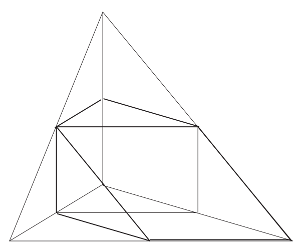
(17) Z ravnilom in šestilom razdeli [13]:
(a) trapezoid s premico skozi poljubno točko P na krajši osnovnici na dva ploščinsko enaka dela (slika 23a),
(b) kvadrat z dvema premicama skozi eno oglišče na tri ploščinsko enake dele (slika 23b).



Slika 23. Delitev večkotnika na ploščinsko enake dele

(18) Z ravnilom in šestilom določi kvadrat z isto ploščino
(a) pravilnemu šestkotniku,
(b) poljubnemu petkotniku.

(19) Razpolovi stranico tetraedra in vanj včrtaj dve prizmi kot na sliki 24. Ponovi Evklidovo izpeljavo formule za prostornino tetraedra $V = (O \cdot h)/3$ (glej sliko 24), tj. pokaži, da je:
(a) skupna prostornina obeh včrtanih prizem enaka $(O \cdot h)/4$, kar je več kot polovica prostornine, tako da lahko z iteracijo prostornino tetraedra aproksimiramo s prostorninami prizem tako dobro, kot želimo;
(b) prostornina tetraedra potem (v današnji obliki) enaka $(1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + ...)O \cdot h = (O \cdot h)/3$.



Slika 24. Evklidova izpeljava prostornine piramide

3. Trije klasični problemi grške geometrije

Zgodovinski okvir

Obdobje od Talesa do Evklida (600-300 pnš.) je bilo izjemno za razvoj matematike. Poleg Mileta v Mali Aziji in Krotone v Italiji so se kmalu pojavili novi matematični centri. Potem ko so $\sim$ 1200 pnš. s severa vdrli Dorci in ustanovili Šparto, so se prvotni prebivalci umaknili na otoke v Egejskem morju in v Malo Azijo, kjer so ustanovili trgovska in kulturna središča. V 6. stoletju pnš. so se okrepili Perzijci in 546 pnš. zasedli jonska mesta in grške kolonije v Mali Aziji. Glavni jonski filozofi so se umaknili, **Pitagora** v Krotono, **Ksenofont**, **Zenon** in **Parmenid** v Eleo v Italiji. Leta 499 pnš. se jonska mesta uprejo perzijski nadvladi. Atene pošljejo vojaško pomoč, a je upor kljub temu zadušen. Perzijski kralj Darej se želi maščevati Atenam. Leta 497 pnš. organizira veliko armado in pripravi ekspedicijo nad Grčijo, a je njihova flota uničena v viharju. Leta 490 pnš. prodrejo Perzijci v Atiko, a so premagani na Maratonskem polju. Atene prevzamejo vodstvo Grčije. Leta 480 pnš. Darejev sin Kserkses nadaljuje invazijo na Grčijo. Pomorska bitka pri Salamini je zmaga za Grke, kopenska bitka pri Termopilah pa za Perzijce. Naslednje leto pri Platajah spet zmagajo Grki in iz Grčije preženejo napadalce.

Pol stoletja miru je zlata doba za Atene, njeno demokracijo in za Grčijo pod atensko hegemonijo. Nastopijo Periklej, Sokrat in drugi filozofi, razvijata se umetnost in znanost. Atene privlačijo matematike z vseh koncev Velike Grčije. Pride **Anaksagora**, zadnji jonski naravni filozof, vrnejo se mnogi pitagorejci, prideta **Zenon** in **Parmenid**, eleata, v Atene se s Kiosa preseli **Hipokrat**, geometrija cveti.

Leta 431 pnš. je konec obdobja miru, saj izbruhne peloponeška vojna. Atenci so sprva uspešni, nato kuga pomori četrtino prebivalstva. Leta 404 pnš. sprejmejo nadvlado Šparte, toda leta 371 pnš. se druga mesta uprejo tej nadvladi in zmagajo. V teh nemirnih časih je napredek geometrije odvisen od razvoja v kolonijah. V Tarentu nastane nova šola pitagorejcev. Najbolj nadarjen med njimi je **Arhit**, ki velja za začetnika matematične mehanike. Učil se je pri **Filolaju**, sicer pa se je odlikoval tudi kot general in voditelj (drugi Periklej). Njegov prijatelj **Teodor** iz Kirene v Afriki je bil Platonov učitelj matematike, tako kot je bil Sokrat njegov učitelj filozofije. **Platon** se je že prej vrnil v Atene in leta 380 pnš. ustanovil Akademijo. Tudi **Evdoks** je študiral pri Arhitu in Platonu, potem pa ustanovil svojo šolo v Kiziku na severu Male Azije. Njegov učenec je bil geometer **Menajhmos**, Platonov privrženec, ki je odkril preseke stožca. Tudi njegov brat **Dejnostrat**, prav tako Platonov učenec, je bil nadarjen geometer. Še boljši je bil **Teajtet**, ki mu pripisujejo obdelavo snovi iz X. in XIII. knjige Evklidovih *Elementov.* Tako kot Platon je bil učenec Teodorja. **Aristotel**, Platonov učenec, sicer ni bil matematik, jo je pa študiral in ima velike zasluge za razvoj formalne (deduktivne) logike.

Razvoj matematike

V obdobju 600-300 pnš. lahko sledimo vsaj trem linijam v razvoju grške matematike:
(a) Matematično tematiko, ki jo je začel proučevati Pitagora, nadaljevali pa Hipokrat, Evdoks, Teodor in Teajtet, je **Evklid** kasneje uredil, sistematiziral in zapisal v *Elemente*, ki jih bomo predstavili na koncu tega razdelka.
(b) V zvezi s problemi o neskončnosti, zveznosti in gibanju lahko v matematiki stare Grčije povežemo Zenonove paradokse in metodo izčrpavanja, ki sta jo odkrila sofist **Antifon** in **Evdoks**, kasneje pa uveljavil **Arhimed**, ter atomistično teorijo **Demokrita iz Abdere** ($\sim$ 470-360 pnš.). O tem smo nekaj že povedali, nekaj pa še bomo v zvezi z Arhimedom v naslednjem razdelku. Razvoj v tej smeri je mnogo kasneje v novem veku pripeljal do infinitezimalnega računa ter moderne teorije množic.
(c) V zvezi s klasičnimi problemi podvojitve kocke, tretjinjenja kota in kvadrature kroga, ki so centralna tema tega razdelka, so Grki že v 5. stoletju pred našim štetjem pričeli razvijati tudi višjo geometrijo (tj. kubične in kvartične krivulje ter nekatere ploskve). Mnogo tega so odkrili matematiki, ki so živeli po Evklidu.

Trije slavni klasični problemi:
(1) *Duplikacija kocke*: konstruirati rob kocke z dvakrat večjo prostornino kot dana kocka,
(2) *Trisekcija kota*: razdeliti poljuben kot na tri enake dele,
(3) *Kvadratura kroga*: konstruirati kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog.

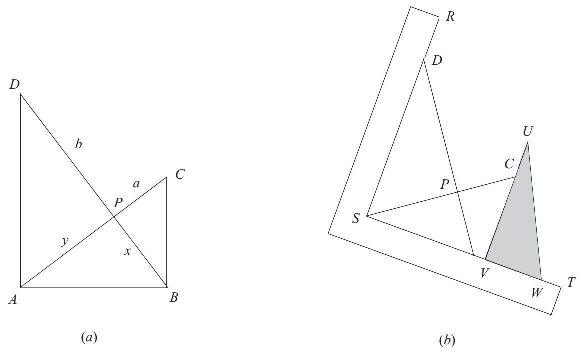
Konstrukcije so seveda mišljene geometrijsko, z uporabo ravnila in šestila. Šele pozno, v 19. stoletju, so matematiki odkrili, da to ni mogoče (glej spodaj), vendar so neutrudni grški poskusi v to smer močno vplivali na razvoj geometrije, omogočili številna odkritja (stožnice, krivulje višjega reda kot npr. *Dioklova cisoida*, *Nikodemova konhoida*, *Hipijeva kvadratrisa*), mnogo kasneje pa tudi vplivali na razvoj teorije enačb in teorije grup.

Evklidsko orodje sta seveda (neoznačeno) ravnilo in šestilo. Kljub tej omejitvi to orodje omogoča številne presenetljive in lepe konstrukcije (ne pa rešitev treh klasičnih problemov). Še več, celo samo s šestilom ali samo z ravnilom je možno marsikaj napraviti (glej spodaj). Z označenim ravnilom (z dvema zarezama) npr. brez težav tretjinimo krog. Zanimivo je tudi, da se je evklidsko šestilo razlikovalo od modernega: z njim ni bilo mogoče prenašati razdalj. Kljub temu se da pokazati, da sta obe šestili (skupaj z neoznačenim ravnilom) med seboj ekvivalentni (glej vajo 1).

Podvojitev kocke

Po eni legendi kralj Minos na Kreti ni bil zadovoljen z velikostjo groba sina Glauka in je naročil povečanje, po drugi je bilo prebivalcem otoka Delos naročeno, naj podvojijo Apolonov oltar (Platon ga je zato poimenoval deloški ali delijski problem). Problem so študirali na Platonovi Akademiji in našli rešitev bodisi z uporabo stožnic bodisi višjih krivulj. Pred tem ga je **Hipokrat** reduciral na čisto algebrajski problem: med dve števili s in $2s$ je treba vstaviti dve števili x in y, tako da velja dvojno razmerje $s/x = x/y = y/2s$ (se pravi $x = \sqrt{sy}$, $y = \sqrt{2sx}$). Potem je $x^2 = sy$ in $y^2 = 2sx$ in zato $x^2y^2 = 2s^2xy$ oziroma $xy = 2s^2$, zato dobimo $x^3 = sxy = 2s^3$. Kocka s stranico x ima torej dvakrat večjo prostornino kot kocka s stranico s. Odtlej so iskali način, kako bi (z evklidskim orodjem) konstruirali dvojno geometrijsko sredino x, y med dvema količinama a, b.

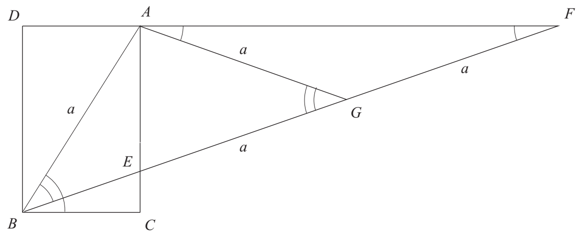
Prve uspehe v tej smeri je menda imel **Arhit** ($\sim$ 400 pnš.), ko je delal eksperimente s preseki pokončnega valja, pokočnega stožca in svitka. **Evdoksova** rešitev iz $\sim$ 370 pnš. je izgubljena, **Menajhmos** je $\sim$ 350 pnš. podal dve rešitvi z uporabo stožnic, ki jih je izumil prav v ta namen (glej vajo 2). Kasnejšo mehansko napravo za duplikacijo kocke (glej vajo 4) pripisujejo **Eratostenu iz Aleksandrije** ($\sim$ 230 pnš.), drugo pa **Nikomedu** (iz istega obdobja). Še eno rešitev je našel **Apolonij iz Perge** $\sim$ 225 pnš. (vaja 3), **Diokles** pa je $\sim$ 180 pnš. v isti namen izumil svojo *cisoido* (glej vajo 6). Kasneje so odkrili še druge rešitve, vse temelječe na krivuljah višjega reda. Naslednjo rešitev z uporabo *čevljarskega kotnika* (glej sliko 25b) pripisujejo **Platonu** (kar pa ni zelo verjetno, ker je Platon mehanskim rešitvam nasprotoval). Na sliki 25a se daljici AC in BD sekata pravokotno, zato je $PC/PB = PB/PA = PA/PD$, na sliki 25b pa se mora točka V, oglišče pravokotnega trikotnika, znajti na premici skozi D in P.



Slika 25. Podvojitev kocke po Platonu

Tretjinjenje kota

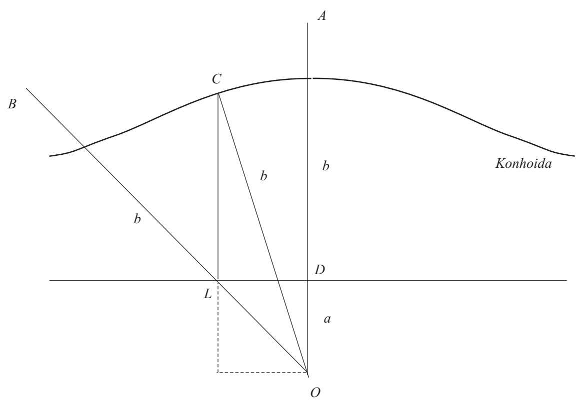
Ta problem je morda najlažje razumeti, zato je bilo v vsej zgodovini ogromno bolj ali manj domiselnih poskusov, da bi ga rešili. Prevede se na konstrukcijo daljice EF dolžine $EF = 2(AB)$, ki kaže proti točki B (glej sliko 26). Z ravnilom z dvema zarezama je to možno storiti zelo preprosto.



Slika 26. Tretjinjenje kota z vstavljanjem

Nikomed je $\sim$ 240 pnš. isto izvedel s uporabo krivulje *konhoide*, ki nastane, če od dane premice v radialni smeri od pola O, ki je od nje oddaljen za a, odmerimo fiksno razdaljo b (slika 27a). Polarna enačba je torej $r = b + a/\sin\theta$, kartezična pa $(y-a)^2 = b^2y^2/(x^2+y^2)$.

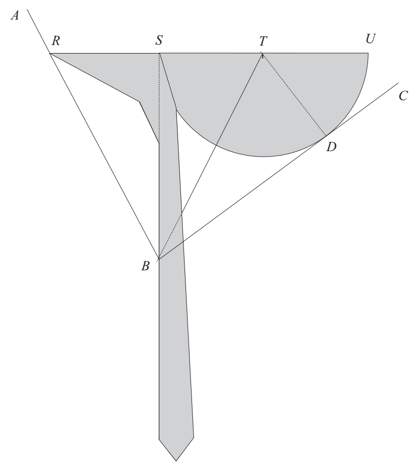
Tretjinjenje kota lahko z Nikomedovo konhoido izvedemo po naslednjem postopku: Za kot AOB potegnemo poljubno pravokotnico na krak AO, ki seka ta krak v točki D, drugega pa v točki L. Nato konstruiramo konhoido glede na O in pravokotnico s konstanto $b = 2(OL)$. Če seka vzporednica z AO skozi L konhoido v točki C, je kot AOB trikrat večji od kota AOC (glej sliko 27).



Slika 27. Tretjinjenje kota z Nikomedovo konhoido

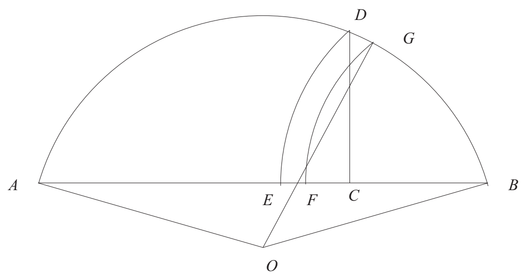
Obstajajo še nekatere (transcendentne) krivulje, s katerimi je mogoče tretjiniti kote. Ena med njimi je npr. *Arhimedova spirala* ($\sim$ 225 pnš.), ki je pomembna tudi za kvadraturo kroga (glej sliko 30 spodaj). Druga pa je *Hipijeva trisektrisa* ali kvadratrisa (glej vajo 10), ki jo je **Dejnostrat** uporabil tudi za kvadraturo kroga.

Sčasoma so iznašli tudi veliko mehanskih naprav za trisekcijo, ena med njimi, opisana v neki knjigi leta 1835, spominja na obliko tomahawka (slika 28). Postopek je naslednji: Daljico RU razdelimo na tri enake dele s točkama S in T ter potegnemo pravokotnico SV nanjo v točki S. Načrtamo polkrog s središčem v točki T in premerom SU. Poljuben kot ABC namestimo tako, da bo imel vrh B na pravokotnici SV, da bo njegov krak AB potekal skozi R in da se bo drugi krak BC dotikal polkroga, npr. v točki D. Potem je zaradi skladnosti trikotnikov RBS, BTS in BDT jasno, da daljici BS in BT tretjinita kot ABC.



Slika 28. Tretjinjenje kota s tomahawkom

Poleg tega so odkrili vrsto postopkov za približno tretjinjenje kota. Enega od njih je leta 1525 opisal *Albrecht Dürer* (glej sliko 29): kot pri vrhu O v enakokrakem trikotniku AOB tretjinimo tako, da stranico AB razdelimo na tri enake dele, na dveh tretjinah razdalje AB postavimo v točki C pravokotnico, ki seka krog s središčem v O in polmerom OA v točki D. Razdaljo BD prenesemo na AB do točke E, na tretjini daljice EC naj bo točka F, razdaljo BF prenesemo spet na krožnico v točko G. Potem je kot BOG približno tretjina kota AOB.



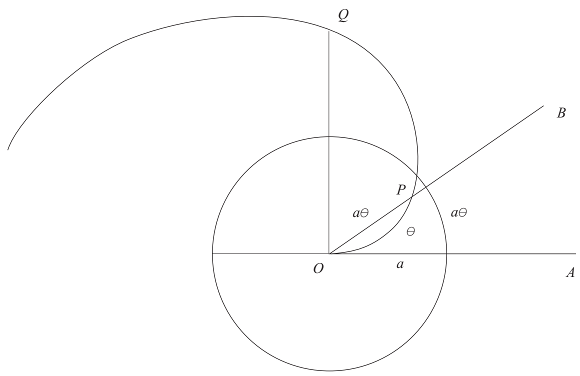
Slika 29. Približno tretjinjenje kota po Dürerju

Kvadratura kroga

Egipčani so ta problem rešili le približno, ko so postavili za stranico ustreznega kvadrata $a = 8d/9$, kjer je d premer kroga. Tudi za pravo kvadraturo kroga se je v celotni zgodovini nabralo več tisoč predlogov rešitev. Prvega je menda prispeval **Anaksagora** ($\sim$ 499-427 pnš.), ki pa se ni ohranil. Kot je bilo že omenjeno, je **Dejnostrat** ($\sim$ 390-320 pnš.) za kvadraturo uporabil *Hipijevo kvadratriso*, s katero je **Hipija iz Elide** $\sim$ 425 pnš. tretjinil kot.

Hipokrat s Hiosa je bil prvi, ki je $\sim$ 440 pnš. eksaktno izračunal ploščino krivočrtnega lika (lune), upajoč, da mu bo podobno uspelo kvadrirati tudi krog (glej vajo 12).

Kvadratura je možna tudi z uporabo *Arhimedove spirale* z enačbo $r = a\theta$. Le-ta nastane tako, da se točka P enakomerno giblje vzdolž radija vektorja, ki se enakomerno vrti okrog izhodišča O. Potemtakem je razdalja od O do P v vsakem trenutku enaka loku $a\theta$, ki ga radij vektor odreže od krožnice s središčem v O in s polmerom a. Ker je ploščina kroga enaka produktu polovice polmera in obsega, je v primeru, ko je $P = Q$ na četrtini obsega, ploščina enaka $(a/2)(4OP) = 2a(OP)$, torej je stranica ploščinsko enakega kvadrata enaka geometrijski sredini med premerom kroga s polmerom a in dolžino pravokotne daljice od izhodišča do spirale (glej sliko 30).



Slika 30. Tretjinjenje kota z Arhimedovo spiralo

Nekoliko preskočimo naravni potek dogodkov in skušajmo v zvezi s temi in podobnimi konstrukcijami odgovoriti na nekaj vprašanj, ki so skozi celo zgodovino geometrije imela pomembno vlogo.

Zakaj se ne da rešiti treh klasičnih grških problemov z evklidskim orodjem

(1) *Duplikacija kocke* (s stranico 1). Morali bi konstruirati število $x = \sqrt[3]{2}$, ki reši enačbo $x^3 - 2 = 0$. Koren algebraične enačbe lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom samo, če se izraža s samimi kvadratnimi koreni. Da pa se pokazati, da mora enačba *tretje stopnje* z racionalnimi koeficienti v tem primeru imeti vsaj en racionalen koren (glej [26]), kar za našo enačbo ne velja, torej (evklidska) duplikacija ni možna.
(2) *Trisekcija kota.* Trigonometrična formula $\cos\theta = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3)$ pove, da bi morali konstruirati $x = \cos(\theta/3)$. Če je npr. $\theta = 60$ stopinj, bi tak x zadoščal kubični enačbi $8x^3 - 6x - 1 = 0$, ki nima racionalnih korenov, zato se ga iz istega razloga kot prej ne da konstruirati.
(3) *Kvadratura kroga.* Stranica kvadrata z isto ploščino kot krog s polmerom 1 meri $\sqrt{\pi}$. Ker je to število transcendentno (**Lindemann** 1882), se ga ne da konstruirati samo z ravnilom in šestilom.

Konstrukcija samo s šestilom ali samo z ravnilom

Lorenzo Mascheroni (1750-1800) je presenetljivo odkril, da je možno vse evklidske konstrukcije izvesti samo s šestilom, in to objavil v knjigi *Geometria del compasso* leta 1797. Dovolj je seveda videti, kako samo s šestilom konstruiramo presečišče dveh premic ali premice in krožnice. Leta 1928 je danski matematik *J. Hjemslev* odkril staro knjigo **Georga Mohra**, *Euclidus Danicus*, iz leta 1672, ki je že vsebovala Mascheronijeva konstrukcije s šestilom (125 let prej).

Po Mascheronijevem navdihu je francoski matematik **Jean Victor Poncelet** (1788-1867) obravnaval še konstrukcije samo z ravnilom. Z njim ne moremo konstruirati vsega, kar je zmogel Evklid. Toda zanimivost: če imamo v ravnini fiksiran poljuben krog z označenim središčem, lahko izvedemo vse ostale evklidske konstrukcije samo z ravnilom (1822). V popolnosti je to dokazal švicarski geometer **Jakob Steiner** (1796-1863) leta 1833. Včasih rečemo, da so evklidske konstrukcije možne tudi z *zarjavelim šestilom* (z eno samo odprtino). Pravzaprav je tak način predlagal že leta 980 arabski matematik **Abul Wafa**. Še več, leta 1904 je italijanski matematik **Francesco Severi** (1879-1961) pokazal, da poleg ravnila potrebujemo namesto fiksnega kroga le poljubno majhen del krožnega loka z označenim središčem. Lahko pa niti tega, vendar moramo potem uporabljati dvostransko ravnilo (z ne nujno vzporednima robovoma).

Leta 1907 je **Émile Lemoine** razvil posebno vedo, imenovano *geometrografija*, za kvantitativno primerjavo različnih evklidskih konstrukcij.

Kronologija dogodkov v zvezi s številom π:

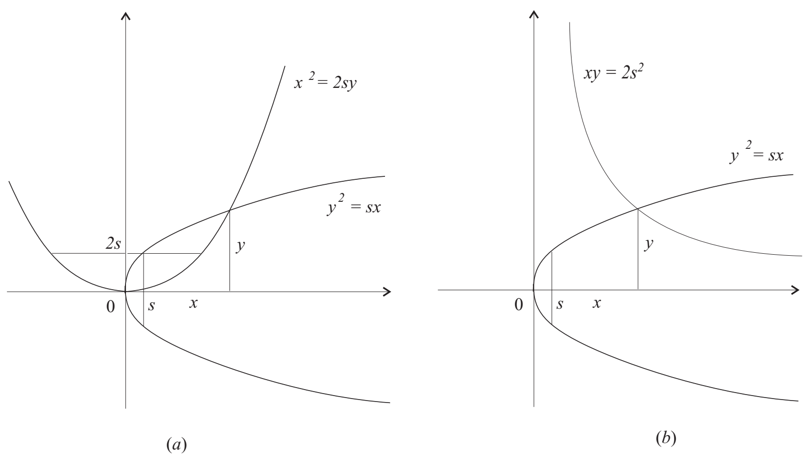
$\sim$ 1850 pnš. $\pi \sim 3$, v *Rhindovem papirusu*: $\pi = (4/3)^4 \approx 3.1604$.
$\sim$ 240 pnš. *Arhimed* računal z včrtanim in očrtanim pravilnim večkotnikom (klasična metoda) z 12, 24, 48, 96 stranicami, ocena $223/71 < \pi < 22/7$ oziroma $\pi \approx 3.14$.
$\sim$ 150 nš. *Klavdij Ptolemaj* iz Aleksandrije je v Almagestu zapisal π v šestdesetiškem sistemu kot 3;08,30 oziroma $377/120 \approx 3.1416$, kar je našel iz svojih tabel za tetive.
$\sim$ 480 Kitajec *Tsu Chiung Chich*: $355/113 \approx 3.1415929$ (na šest decimalk natančno).
$\sim$ 530 Indijec *Aryabhata*: $62822/20000 \approx 3.1416$.
$\sim$ 1150 Indijec *Bhaskara*: približki 3927/1250, 22/7, $\sqrt{10}$, $754/240 \approx 3.1416$.
1579 *François Viète* izračunal π na 9 decimalk natančno s klasično metodo (uporabil je večkotnike z 393,210 stranicami); hkrati je izrazil število π z neskončnim produktom: $2/\pi = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}/2 \cdots$.
1585 *Adriaen Anthoniszoon* je dal približek: 355/113 (kitajski ulomek) in oceno $377/120 > \pi > 333/106$; nekoliko prej (1573) je isto naredil *Valentin Otho*, učenec *Rhaeticusa*.
1593 *Adriaen van Roomen* (*Adrianus Romanus*) iz Nizozemske je izračunal π na 15 decimalk natančno po klasični metodi (2^{30} stranic).
1610 *Ludolph van Ceulen* je na Nizozemskem določil π na 35 decimalk natančno po klasični metodi (2^{62} stranic). Temu izračunu je posvetil velik del življenja, od takrat število π imenujejo tudi *Ludolfovo število*.
1621 *Willeboord Snell*, nizozemski fizik (zanan po zakonu o lomu svetlobe), je predstavil trigonometrično izboljšavo klasične metode (korekten dokaz dal *Christiaan Huygens* 1654)
1630 *Grienberger* je (z uporabo Snellove izboljšave) izračunal π na 39 decimalk natančno.
1650 *John Wallis* je predstavil neskončni produkt $\pi/2 = (2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots)/(1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots)$, *Lord Brouncker* pa verižni ulomek $4/\pi = 1 + 1^2/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + ...$
1671 *James Gregory* je predstavil vrsto $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ $(-1 \le x \le 1)$, odkoder dobimo pri $x = 1$ formulo $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$, kar pa zelo počasi konvergira. Zadnjo vrsto je neodvisno izpeljal tudi *Leibniz* 1674.
1699 *Abraham Sharp* je izračunal π na 71 decimalk.
1706 *John Machin* je izračunal π na 100 decimalk z uporabo Gregoryjeve vrste in formule $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$.
1719 *De Lagny* je z uporabo Gregoryjeve vrste za $x = 1/\sqrt{3}$ izračunal 119 decimalk za π.
1737 *William Oughtred*, *Isaac Barrow* in *David Gregory*, angleški matematiki, uporabijo simbol π v pomenu obseg (perimeter) kroga. Kot razmerje med obsegom in premerom kroga je π prvi uporabil angleški pisatelj *William Jones* leta 1706, privzel in promoviral pa *Leonhard Euler* 1737.
1754 *Jean Étienne Montucla*, francoski zgodovinar matematike, je napisal zgodovino kvadrature kroga.
1755 Francoska *Akademija znanosti* odkloni nadaljnje obravnave rešitev kvadrature kroga.
1760 Grof *de Buffon* je odkril svoj problem igle (verjetnost, da igla dolžine b seka črte z medsebojno oddaljenostjo $a > b$ znaša $2b/a\pi$). Na ta način so dejansko izvajali poskuse. Leta 1904 je *R. Chartres* uporabil podobno verjetnostno idejo (da sta dve slučajno izbrani naravni števili med seboj tuji, znaša verjetnost $6/\pi^2$).
1767 *Johann Heinrich Lambert* pokaže, da je število π iracionalno.
1794 *Adrien-Marie Legendre* pokaže, da je celo število π^2 iracionalno.
1841 *William Rutherford* izračuna π na 208 decimalk, od katerih je pravilnih 152, uporabil je Gregoryjevo vrsto in formulo $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/70) + \operatorname{arctg}(1/99)$.
1844 *Zacharias Dase* izračuna π na 200 decimalk z uporabo Gregoryjeve vrste in formule $\pi/4 = \operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/5) + \operatorname{arctg}(1/8)$. Dase, rojen 1824 v Hamburgu, umrl star 37 let 1861, je bil pravi fenomen. Na pamet je zmnožil dve 8 mestni števili v 54 sekundah, 20 mestni v 6 minutah, 40 mestni v 40 minutah. Za računanje decimalk števila π ga je nagovoril *Leopold Schulz von Strassnitzky*, ki je prej učil na liceju v Ljubljani.
1853 *Rutherford* izračuna korektno π na 400 decimalk.
1873 *William Shanks* je 15 let računal po Machinovi formuli decimalke števila π in dosegel rekord 707 decimalnih mest.

1882 *Ferdinand Lindemann* je dokazal, da je število π transcendentno in s tem nezmožnost klasične kvadrature kroga (z evklidskim orodjem).
1906 Pojavile so se različne mnemotehnične metode, kako si zapomniti čim več decimalk števila π. Eno takih je objavil *A.C. Orr* v *Literary Digest* (o 30 decimalkah za π). Danes prirejajo po svetu, v Ameriki in tudi pri nas dne 14. marca tekmovanja v citiranju decimalk. To je ti. *Dan števila pi* (*Pi* − *day*).
1947 - Po drugi svetovni vojni računajo decimalke za π z računalniki in postavljajo nove in nove rekorde.

Vaje:

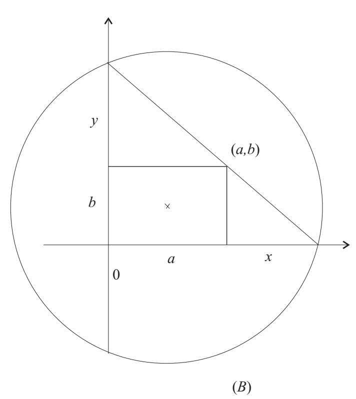
(1) Pokaži, da lahko z evklidovim šestilom, ki ne ohranja razkoraka, iz poljubne točke načrtamo enako dolgo vzporedno daljico dane dolžine AB. To pomeni, da je zgodovinsko evklidsko orodje ekvivalentno modernemu.

(2) Izpelji *Menajhmovi konstrukciji* za podvojitev kocke iz leta ~ 350 pnš.: Če ima kocka stranico s, je stranica podvojene kocke enaka ordinati presečišča
(a) parabol $y^2 = sx$ (*latus rectum* s) in $x^2 = 2sy$ (*latus rectum* $2s$), slika 31a,
(b) parabole $y^2 = sx$ (*latus rectum* s) in hiperbole $xy = 2s^2$ (velika os $4s$), slika 31b.



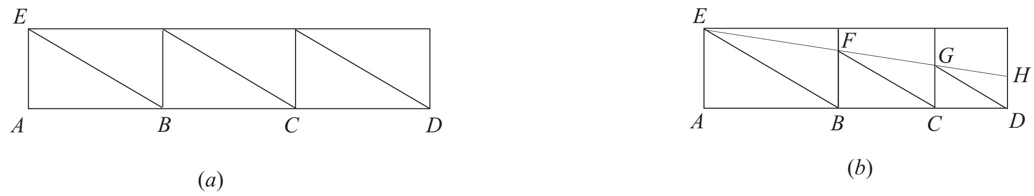
Slika 31. Podvojitev kocke s stožnicami

(3) **Apolonij** je ~ 225 pnš. predlagal naslednjo konstrukcijo dvojnega geometrijskega razmerja med a in b: pravokotnik $OACB$ s stranicama $a = OA$ in $b = OB$ naj bo z ogliščem O včrtan v prvi kvadrant. Načrtajmo krožnico s središčem v točki $(a/2, b/2)$, katere presečišči $(a + x, 0)$ in $(0, b + y)$ z osema ležita na skupni premici skozi točko (a, b) (slika 32). Dokaži, da potem velja $a/y = y/x = x/b = (a + x)/(b + y)$.



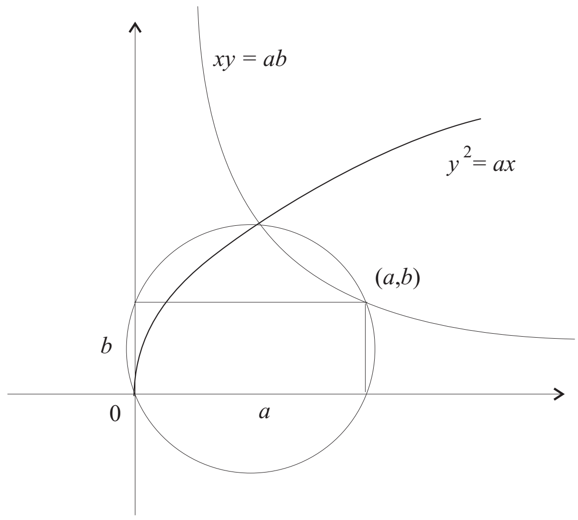
Slika 32. Konstrukcija dvojnega razmerja po Apoloniju

(4) **Eratosten** je $\sim$ 230 pnš. rešil problem dvojnega geometrijskega zaporedja oziroma duplikacije kocke s tremi enakimi pravokotniki z diagonalami (slika 33a), ki jih porinemo enega pod drugega tako da so točke E, F, G in H kolinearne (slika 33b). Pokaži, da sta potem daljici BF in CG v dvojnem geometrijskem razmerju z AE in DH.



Slika 33. Konstrukcija dvojnega razmerja po Eratostenu

(5) **Gregoire de Saint-Vincent** je leta 1647 dvojno geometrijsko razmerje med a, b poiskal tako, da je presekal pravokotniku $[0, a] \times [0, b]$ očrtano krožnico s hiperbolo $xy = ab$. Za presečišče (x, y) potem velja $a/y = y/x = x/b$. **Rene Descartes** je leta 1659 ravnal enako, le da je namesto hiperbole uporabil parabolo $y^2 = ax$ (slika 34). Pokaži, da obe ideji delujeta.

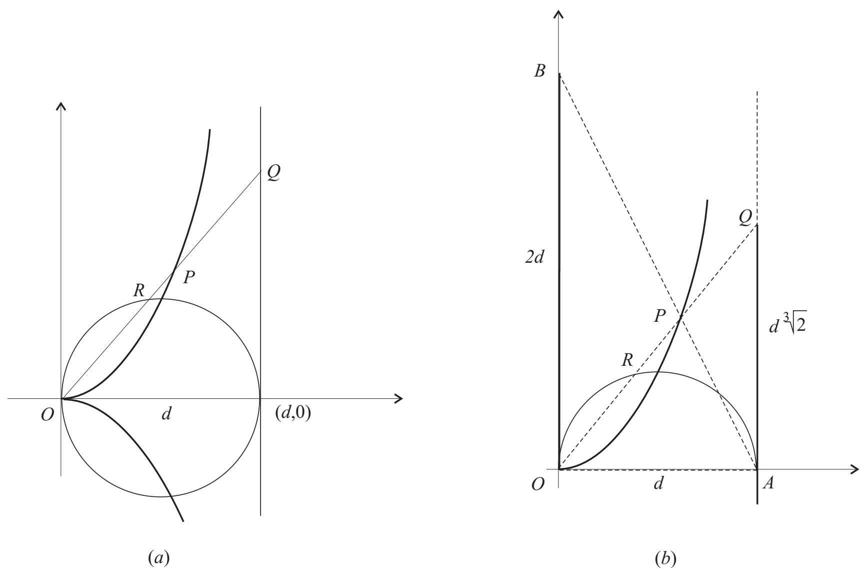


Slika 34. Konstrukcija dvojnega razmerja po Saint-Vincentu in Descartesu

(6) *Dioklova cisoida* je krivulja, ki nastane, če na poljubnem žarku iz dane točke O na krožnici s premerom d odmerimo razdaljo $OP = QR$ med presečiščema R in Q tega žarka s krožnico in s tangento nanjo v antipodni točki (slika 35a). Če je O koordinatno izhodišče in antipodna točka $(d, 0)$ na abscisni osi, je njena enačba $x^3 = (d - x)y^2$. **Diokles** je $\sim$ 180 pnš. s to krivuljo podvojil kocko tako, da je na pravokotnici na daljico OA z dolžino d v točki O odmeril razdaljo $OB = 2d$ in skozi presečišče P zveznice AB s cisoido iz O potegnil premico, ki seka pravokotnico na OA v krajišču A v točki Q (slika 35b). Pokaži, da je potem $AQ^3 = 2(OA)^3 = 2d^3$.

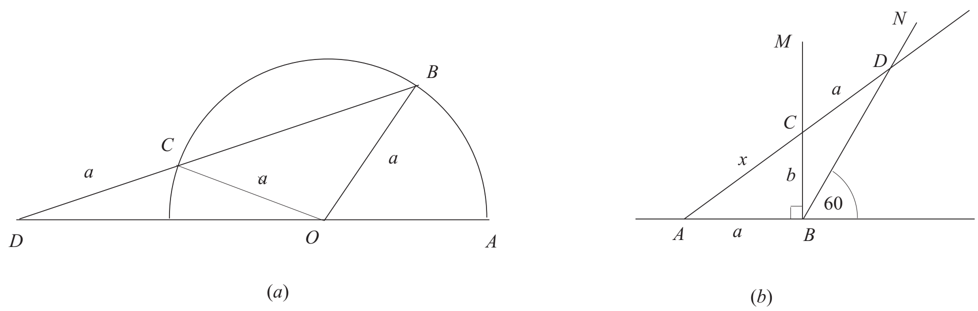
(7) Kadar (z dvema zarezama) označeno ravnilo namestimo tako, da se zarezi ujameta z dvema krivuljama (npr. premicama, krožnicama ali premico in krožnico), rečemo, da smo uporabili *princip vstavljanja*. Na ta način lahko npr. tretjinimo dani kot, ali podvojimo kocko. Dokaži naslednje:

(a) (**Arhimed** $\sim$ 240 pnš.) Narišemo polkrog s središčem v vrhu enakokrakega kota AOB s polmerom a, kot znaša označena razdalja na ravnilu, in iz točke B z vstavljanjem določimo točki C na krožnici in D na podaljšku kraka AO tako, da je razdalja CD enaka a (glej sliko 36a). Potem je kot ADB enak tretjini kota AOB.



Slika 35. Dioklova cisoida in podvojitev kocke

(b) (**Viète** 1646 in **Newton** 1728) Narišemo kot ABM, ki meri 90 stopinj, in kot ABN, ki meri 120 stopinj, pri čemer naj bo $AB = a$ označena razdalja na ravnilu. Nato z vstavljanjem narišemo skozi točko A premico, ki preseka preostala kraka v točkah C in D tako, da je razdalje $CD = a$ (glej sliko 36b). Potem velja $(AC)^3 = 2a^3$.

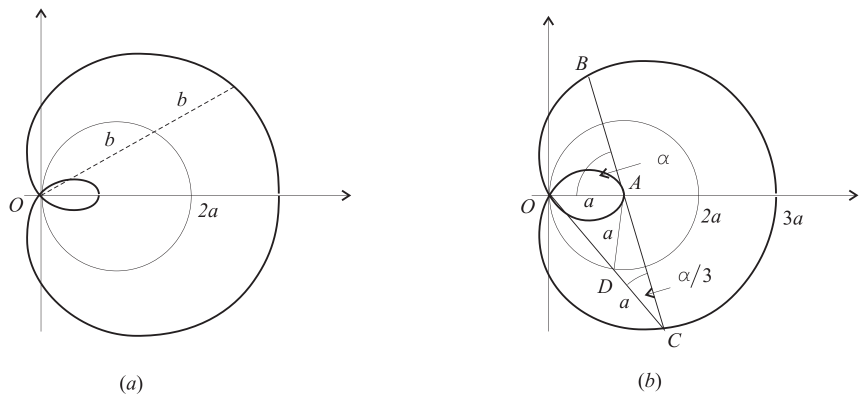


Slika 36. Tretjinjenje kota po Arhimedu in podvojitev kocke po Viètu in Newtonu

(8) Pokaži, da lahko namesto z vstavljanjem kot pri vaji 7b podvojimo kocko tudi z uporabo *Nikomedove konhoide* glede na premico c in pol O v razdalji a (spomnimo se, da nastane konhoida tako, da na žarku iz O odmerimo od njegovega presečišča s premico c fiksno razdaljo b kot na sliki 27), če vzamemo $b = a$. Prepričaj se, da je konhoida je pravzaprav posebna cisoida glede na krožnico s središčem v O in polmerom b ter premico c v razdalji a od središča krožnice O.

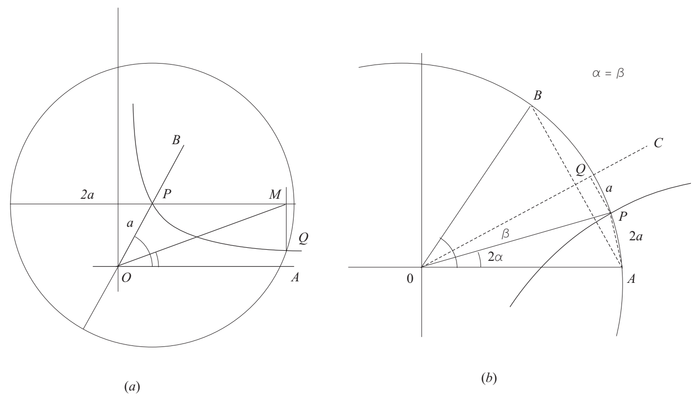
Opomba. Če pa namesto premice vzamemo krožnico s polmerom a in za O točko na njej, se ustrezna konhoida imenuje *Pascalov polž* (*limaçon de Pascal*) po **Étiennu Pascalu** (1588-1640), očetu **Blaisa Pascala** (1623-1662) (slika 37a). V posebnem primeru $b = a$ dobimo *trisektriso*, saj se da pokazati, da je kot ACO enak tretjini središčnega kota OAB; tu je točka C presečišče premice skozi A in B z limaçonom (slika 37b).

(9) Trisekcijo kota lahko izvedemo tudi s stožnicami (glej [13]). Pokaži:
(a) Za dani kot AOB načrtajmo hiperbolo, ki ima za asimptoti premico AO in pravokotnico v O in naj hiperbola seka krak OB v točki P, ki je od O oddaljena za a. Krožnica s središčem v P in polmerom $2a$ naj seka hiperbolo v točki Q. Vzporednica z AO skozi P in pravokotnica nanjo skozi Q naj se sekata v točki M. Potem je kot AOM enak tretjini kota AOB (slika 38a).



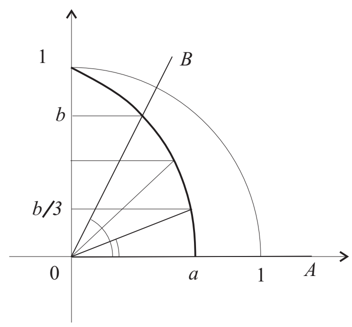
SLIKA 37. Tretjinjenje kota s Pascalovim polžem

(b) (**Papos** $\sim$ 300 nš.) V središčnem kotu AOB naj bo njegova simetrala OC direktrisa hiperbole z ekscentičnostjo 2 in goriščem A. Če seka hiperbola krožnico v točki P, je kot AOP enak tretjini kota AOB (slika 38b).



SLIKA 38. Tretjinjenje kota s hiperbolo

(10) *Hipijeva kvadratrisa* ($\sim$ 425 pnš.) nastane tako, da se polmer kroga z dolžino 1 enakomerno vrti okrog krajišča od navpične do vodoravne lege, hkrati pa se enako dolga vodoravna daljica enakomerno giblje navzdol. Presečišče te daljice s polmerom opiše krivuljo kvadratriso (slika 39). Njena enačba v kartezičnih koordinatah je $y = x\mathrm{tg}(\pi y/2)$. **Hipija iz Elide** jo je uporabil za preprosto trisekcijo (in splošno n-sekcijo) kota, **Dejnostrat** (morda že Hipija) pa za kvadraturo kroga (odtod ime). Kvadraturo kroga najdemo iz abscise presečišča kvadratise z osjo x, tj. $a = \lim_{y\to 0} y/\mathrm{tg}(\pi y/2) = 2/\pi$; stranica kvadrata z enako ploščino kot krog s polmerom 1 je potem $\sqrt{2/a}$.



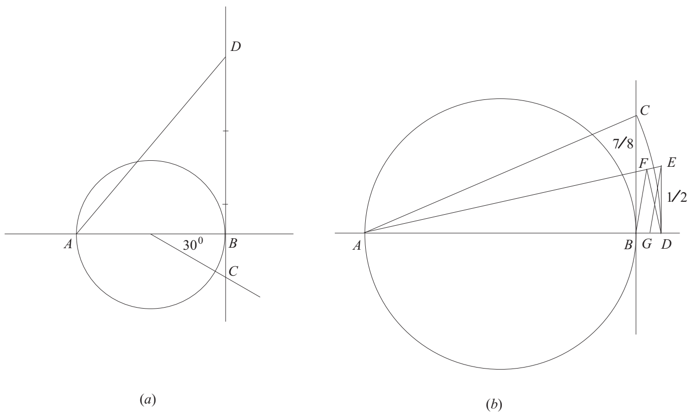
SLIKA 39. Hipijeva oziroma Dejnostratova kvadratrisa

(11) Klasični problem je tudi *rektifikacija krožnice*, se pravi, določiti daljico, ki je enako dolga kot obseg πd krožnice. Znanih je več zgodovinski postopkov:

(a) Pogosto vzamemo $\pi d \approx 3d + d\sqrt{2}/10$, torej $\pi \approx 3 + \sqrt{2}/10 \approx 3.141$

(b) Poljski jezuit **Adam Kochanski** (1631-1700) je predlagal naslednje. V krajišču premera AB kroga s polmerom a načrtamo tangento, na eni strani odmerimo kot 30 stopinj in od presečišča C kraka s tangento na drugo stran odmerimo tri polmere do točke D (slika 40a). Potem je obseg kroga približno enak $2(AD)$.

(c) Še en postopek: Če je AB premer danega kroga s premerom 1, naj bo BC daljica, pravokotna na premer AB in dolga 7/8. Razdaljo AC prenesemo na podaljšek AB, da dobimo točko D. Na pravokotnici v D odmerimo 1/2 do točke E in spustimo pravokotnico iz D na zveznico AE, ki jo seka v točki F. Vzporednica z BF skozi E naj seka AD v točki G (slika 40b). Potem je $\pi \approx 3 + BG$.

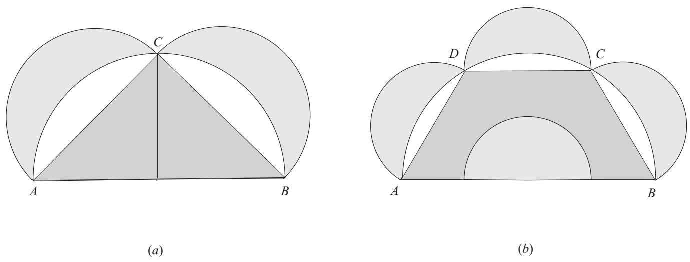


Slika 40. Približna rektifikacija

(12) *Hipokratove lune* so prvi primer krivočrtnih likov, ki se jih da kvadrirati (tj. določiti ploščinsko enak kvadrat). **Hipokrat s Hiosa** je ~ 440 pnš. upal, da mu bo to pomagalo pri kvadraturi kroga. Znal je kvadrirati tri lune, najpreprostejši dve sta naslednji:

(a) Četrtini kroga vrišemo tetivo in nad njo polkrožnico. Algebraično ali s Pitagorovim izrekom pokaži, da ima dobljena luna isto ploščino kot enakokrak pravokotni trikotnik (slika 41a).

(b) Polovici pravilnega šestkotnika očrtajmo polkrog, nad tremi enako dolgimi tetivami pa tri polkrožnice (slika 41b). Pokaži, da je vsota ploščin treh dobljenih lun in polkrožnice nad eno tetivo enaka ploščini polovice šestkotnika.



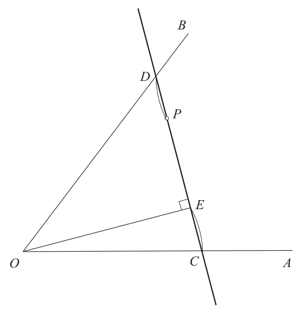
Slika 41. Hipokratove lune

(13) Pokaži, da je z evklidskim orodjem nemogoče konstruirati:

(a) pravilen 9-kotnik ali pravilen 7-kotnik,

(b) kot 1 stopinje,

(c) *Filonovo premico* za točko P v danem (splošnem) kotu AOB. **Filon iz Bizanca** (1. in 2. stol. pnš.) je ugotovil, da je daljica CD skozi P z lastnostjo $EC = DP$ za pravokotno projekcijo E vrha O nanjo najkrajša tetiva danega kota skozi P (glej sliko 42).



SLIKA 42. Filonova premica

(14) Naj pomeni $C(A)$ krožnico skozi A s središčem v C in $C(AB)$ krožnico s središčem v C in polmerom AB. Prepričaj se, da naslednja shema pravilno opisuje postopek konstrukcije (z zgodovinskim evklidskim orodjem) kroga s središčem v točki C in polmerom AB, kar dokazuje ekvivalentnost Evklidovega in modernega šestila:

$A(C)$, $C(A)$	$M(B)$, $N(B)$	$C(X)$
M, N	X	

(15) Utemelji naslednji *Mascheronijevi konstrukciji* samo z modernim šestilom (a) preseka krožnice $C(D)$ in premice skozi A in B, (b) preseka dveh premic, skozi A, B in C, D
(a) *primer* 1 ($C \notin AB$):

$A(C)$, $B(C)$	$C(D)$, $C_1(CD)$
C_1	X, Y

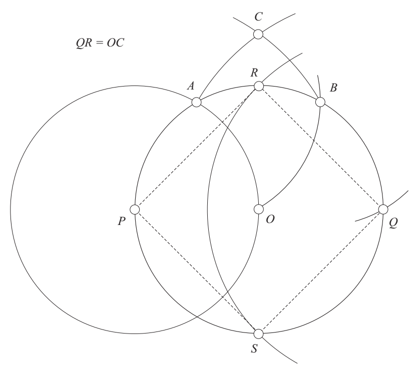
primer 2 ($C \in AB$):

$A(D)$, $C(D)$	$C(DD_1)$, $D(C)$	$C(DD_1)$, $D_1(C)$	$F(D_1)$, $F_1(D)$	$F(CM)$, $C(D)$
D_1	F	F_1	M	X, Y

(b)

$A(C)$, $B(C)$	$A(D)$, $B(C)$	$C(DD_1)$, $D_1(CD)$	$C_1(G)$ $G(D_1)$	$C_1(C)$, $G(CE)$	$C(F)$, $C_1(CF)$
C_1	D_1	G	E	F	X

(16) **Napoleon** je francoskim matematikom predlagal problem razdeliti krožnico na štiri enake dele samo s šestilom [26]. Po Mascheroniju lahko trikrat uporabimo polmer krožnice, PA, AB, BQ, da dobimo premer PQ. Poiščemo C in odmerimo $QR = OC$ (slika 43). Pokaži, da je potem $PC = PB = PO\sqrt{3}$ in $PR = OC = \sqrt{PC^2 - PO^2} = PO\sqrt{2}$.



SLIKA 43. Napoleonov problem včrtanja kvadrata v krog

4. Evklidovi Elementi

Zgodovinski okvir

Leta 338 pnš. je Filip Makedonski premagal Atence pri Hajroneji in Grčija je postala del Makedonskega kraljestva. Dve leti kasneje je nastopil ambiciozni Filipov sin Aleksander (njegov matematični učitelj je bil **Menajhmos**) in razširil imperij do konca znanega sveta. Ustanavljal je nova mesta, npr. Aleksandrijo leta 332 pnš., ki jo je pozidal izvrstni arhitekt *Dejnokrat*. Ko je Aleksander leta 323 pnš. umrl, se je imperij razdelil med naslednike, helenistični duh pa se je ohranil. Aleksandriji in Egiptu je vladal Ptolemaj I., ki si je mesto izbral za prestolnico.

Slika 44. Mapa antične Aleksandrije

Vanjo je privabil učenjake z vseh koncev grškega sveta in zanje zgradil okrog leta 300 pnš. univerzo (imenovano Muzej) v zelo modernem smislu, s predavalnicami, laboratoriji, veliko knjižnico (z več kot 600,000 zvitki papirusa), vrtovi in celo prostori za spanje. Za vodenje knjižnice je iz Aten pridobil učenega *Demetra Falera*. Knjižnica se je ponašala z okrog 600.000 zvitki papirusa, odprli so jo $\sim$ 300 pnš. in Aleksandrija je skoraj za 1000 let postala središče grške omike.

Slika 45. Rekonstrukcija knjižnice v Aleksandriji

Evklid

O njegovem življenju je nasploh malo znanega. Živel je v Aleksandriji v 4. in 3. stoletju pnš. Tja je najbrž prišel iz Aten, kjer se je verjetno izobraževal v Platonovi akademiji. Postal je prvi profesor matematike na aleksandrijski univerzi in ustanovitelj najpomembnejše matematične šole. Pet sto let kasneje ga **Papos** ($\sim$ 300 nš.) opisuje kot skromnega človeka, ki je upošteval mnenja drugih.

Evklid ($\sim$ 300 pnš.) je najbolj slaven zaradi *Elementov*, čeprav je napisal še najmanj deset del, od katerih se jih je pet ohranilo v celoti. Druga njegova dela so: *Podatki* (za konstruiranje trikotnika), *Delitve* (ploščin v danem razmerju), *Psevdaria* (o geometrijskih napakah), *Porizmi*, *Stožnice* (kasneje dopolnil *Apolonij iz Perge*), *Mesta ploskev*, *Fenomena* (sferna geometrija in astronomija), *Optika* (problem perspektive) ter *Elementi glasbe*.

Slika 46. Evklid iz Aleksandrije

Prvi prevodi in natisi Elementov

Elementi so izjemna knjiga, študirana in občudovana od vsega začetka in poleg biblije na Zahodu najbolj citirana knjiga. Nobena druga ni imela takega znanstvenega vpliva, saj je celih dva tisoč let prevladovala pri pouku geometrije. Od leta 1482, ko je bila prvič natisnjena, je izšlo preko 1000 modernih izdaj, vendar temelječih na kasnejših predelavah. Nobenega originala Evklidovih *Elementov* namreč niso našli. Dolgo časa je za najstarejšo ohranjeno verzijo veljala *Teonova kopija* (po **Teonu iz Aleksandrije** s konca 4. stoletja našega štetja), napisna skoraj 700 let po mojstru Evklidu. V začetku 19. stoletja pa so v vatikanski knjižnici našli še starejši tekst, ki pa se skoraj ne razlikuje od Teonovega.

Prvi, ki so iz grščine prevajali Evklida, so bili arabski matematiki v 8. stoletju. Njihova besedila so v 12. stoletju v Španiji prevajali v latinščino. Avtor prvega latinskega prevoda je bil leta 1120 angleški matematik **Adelard iz Batha** ($\sim$ 1080-1150).

Slika 47. Naslovna stran najstarejše ohranjene izdaje latinskega (Adelardovega) prevoda *Elementov* iz 1309-1316

Kasnejši prevod je priskrbel **Gerardo iz Cremone** (1114-1187), leta 1260 pa **Johannes Campanus** (1220-1296), katerega besedilo je bilo tudi podlaga prvemu natisu (tj. tiskani knjigi) Evklidovih *Elementov* leta 1482. Prvi direktni latinski prevod iz grščine je opravil **Federico Commandino** (1509-1575) leta 1572; to knjigo so potem veliko prevajali v angleščino in druge moderne jezike.

Opis vsebine

Evklidovi *Elementi* ne vsebujejo le geometrije, ampak tudi kar precej teorije števil in elementarno geometrijsko algebro. V glavnem gre za kompilacije in sistematične predstavitve dosežkov različnih starejših grških matematikov (pitagorejcev, Hipokrata, Evdoksa, Teajteta). Nekatere dokaze je iznašel in dodal sam Evklid, ki je spretno uredil snov v 13 knjig in 465 trditev (oziroma propozicij):

SLIKA 48. Stran iz prve tiskane izdaje *Elementov*, Benetke 1482

I. *knjiga*: 23 definicij, 5 postulatov, 26 trditev o trikotniku, 7 o vzporednicah itd., skupaj 48 trditev oziroma propozicij; trditev I47 je znameniti Pitagorov izrek, trditev I48 njegov obrat.

II. *knjiga*: transformacije površin in geometrijska algebra, npr. distributivnostni zakon, kosinusni izrek kot posplošitev Pitagorovega izreka itd.

III. *knjiga*: osnovne lastnosti krogov (po Hipokratu), trditve o tetivah, kotih, tangentah itd. ter njihovi rigorozni dokazi.

IV. *knjiga*: konstrukcije z ravnilom in šestilom (po Hipokratu), konstrukcija pravilnih večkotnikov (npr. petkotnika in 15-kotnika).

Opomba. Zanimivo, da novih konstrukcij pravilnih večkotnikov potem več kot 2000 let niso odkrili. Šele leta 1796 je devetnajstletni **Gauss** konstruiral pravilni 17-kotnik, za njim leta 1832 **Julius Richelot** pravilni 257 kotnik. Nemški učitelj matematike **Oswald Hermes** (1826-1909) je porabil 10 let za konstrukcijo pravilnega 65537-kotnika. **Gauss** in **Wantzel** sta natanko ugotovila, kdaj se da (z ravnilom in šestilom) konstruirati pravilen večkotnik (glej vajo 2). Ni pa znano, ali je poleg naštetih možno konstruirati še kakšen pravilni p-kotnik s praštevilskim številom stranic.

V. *knjiga*: Eudoksova teorija sorazmernosti ($A : B = C : D$ natanko takrat, ko obstajata naravni števili m, n, da je $mC \geq nD \iff mA \geq nB$ ali $mC \leq nD \iff mA \leq nB$), "Arhimedov aksiom", osnovne aritmetične operacije (komutativnost množenja je npr. dokazana v trditvi V16).

VI. *knjiga*: izreki o podobnih trikotnikih, geometrijske rešitve kvadratnih enačb, Pitagorov izrek za podobne like, podobnost v zvezi s simetralo kota.

VII., VIII., IX. *knjiga*: 102 trditvi o elementarni teoriji števil, Evklidov algoritem (trditev VII2), dvojno geometrijsko razmerje $a/b = b/c = c/d$, osnovni izrek aritmetike o razcepu na praštevila (trditev IX14), dokaz, da je praštevil neskončno mnogo (trditev IX20) ter formulo za soda popolna števila (trditev IX36), ki smo j spoznali v 2. razdelku.

X. *knjiga*: iracionalna števila (po Teajtetu), osnove metode izčrpavanja, najzahtevneša knjiga *Elementov*, upoštevajoč, da še ni obstajala algebrajska notacija; knjiga prinaša tudi primitivne pitagorejske trojice.

XI., XII., XIII. *knjiga*: osnove stereometrije; v XI. knjigi je govor o pravokotnosti in vzporednosti, izračunana je prostornina paralelepipeda; obravnavani so stožci in Menajhmovi preseki stožcev; XII. knjiga je povzetek Evdoksovih izračunov prostornine piramide, stožca in krogle; XII. knjiga prinaša obravnavo regularnih poliedrov (platonskih teles), skupaj z izpeljavo razmerja med stranico in polmerom očrtane krogle; Evklid v njej tudi dokaže, da poleg petih znanih ni drugih pravilnih poliedrov.

Šibke točke Elementov

Seveda so v delu tudi (velike) pomanjkljivosti. Vsebuje mnoge tihe predpostavke in privzetke, ki ne sledijo iz aksiomov (nerazlikovanje med neskončnostjo in neomejenostjo premice, potiho privzet Paschev aksiom o vstopu in izstopu premice v trikotnik, obstoj presečišča krožnice in premice ali dveh krožnic, skozi točko zunaj premice poteka le ena vzporednica) in prinaša (nepotrebne) definicije točk, daljic in drugih primitivnih pojmov.

Šele konec devetnajstega stoletja so (po odkritju neevklidskih geometrij!) te pojme razčistili in postavili nove, preciznejše sisteme geometrijskih aksiomov, npr. **Hilbert** (21 aksiomov, primitivni pojmi točke, premice, ravnine, ležati na, ležati med, skladnost), **Veblen** (19 aksiomov, točke in urejenost), **Pieri** (20 aksiomov, točke in gibanja), **Huntington** (23 aksiomov, sfere, vsebovati).

Pomen Evklidovih Elementov

Bolj kot po vsebini so *Elementi* pomembni po formalnih vidikih, po načinu, kako je snov predstavljena (vzorec za vsa nadaljnja matematična dela, model moderne rigoroznosti). Prvič je uporabljena *aksiomatska metoda*, narejen je zgodovinsko prvi resen poskus, kako iz postulatov samo z logičnim sklepanjem izpeljati njihove posledice.

Evklid je ločil aksiome (splošna pravila):

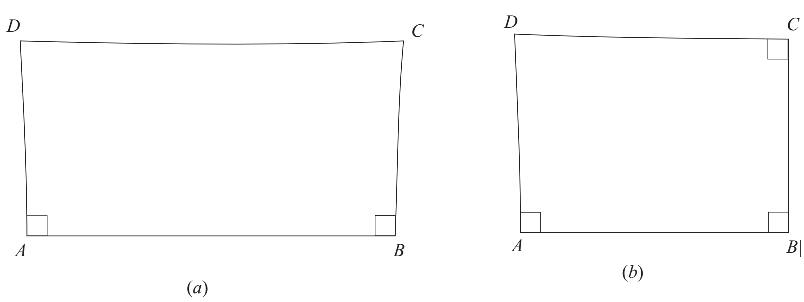
A1. *Reči, enake neki reči, so enake med seboj.*
A2. *Če enakim dodaš enako, sta celoti enaki.*
A3. *Če enakim odštevaš enako, dobiš enako.*
A4. *Identični reči sta enaki.*
A5. *Celota je večja od dela.*

in postulate (posebna pravila v zvezi s snovjo):

P1. *Mogoče je potegniti premico od ene točke do druge.*
P2. *Daljico lahko nadaljujemo do neskončne premice.*
P3. *Mogoče je konstruirati krog s središčem v dani točki in polmerom enakim dani daljici.*
P4. *Pravi koti so med seboj enaki.*
P5. *Če premica seka dve premici tako, da merita notranja kota na isti strani manj kot dva prava kota, se premici sekata na tisti strani kot kota.*

Rojstvo neevklidske geometrije

Peti postulat (o vzporednicah) se tudi Evklidu ni zdel očiten. V moderni obliki ga je formuliral šele škotski fizik in matematik **John Playfair** (1748-1817): skozi dano točko lahko potegnemo natanko eno vzporednico dani premici (podobno je sicer predlagal že **Proclus** v 5. stol.). Že prej so predlagali različne alternative, npr. italijanski jezuit **Girolamo Saccheri** (1667-1733), profesor na univerzi v Padovi: štirikotnik $ABCD$ s pravima kotoma pri A in B ter $AD = BC$ (slika 49a), ali **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777): štirikotnik $ABCD$ s tremi pravimi koti pri A, B in C ter $AD = BC$ (slika 49b). Ta štirikotnik je obravnaval tudi že **Ibn al Haitham** (965-1040).



SLIKA 49. Saccherijev in Lambertov štirikotnik

V poskusu, da bi prišli do protislovja, so, pri predpostavki ostrega kota pri C (in D), izpeljali različne izreke in lastnosti neevklidske geometrije, vendar protislovja niso odkrili. Enako se je godilo **Adrienu-Marie Legendru** (1752-1833), ki je leta 1794 izdal geometrijsko knjigo (nadomestek za Evklida) z naslovom *Elements de géométrie*.

Danes vemo, da je 5. aksiom neodvisen od ostalih in da so neevklidske geometrije prav tako legitimne. To je menda odkril **Gauss**, a ni objavil ničesar, neodvisno pa dokazala madžarski matematik **Janos Bolyai** (1802-1860) leta 1832 v dodatku k matematičnemu delu svojega očeta Farkasa in ruski matematik **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1793-1856), katerega spis iz leta 1829-30 je ostal na Zahodu neopažen.

Slika 50. Portret Janosa Bolyaia

Neoporečen dokaz konsistentnosti neevklidskee geometrije (pri predpostavki, da obstaja več vzporednic oziroma ostri kot) so kasneje dali **Eugenio Beltrami** (1835-1899), **Arthur Cayley** (1821-1865), **Felix Klein** (1849-1925), **Henri Poincaré** (1854-1912) in drugi znani matematiki. Leta 1854 je **Bernhard Riemann** (1826-1866) ugotovil konsistentnost tudi druge neevklidske predpostavke (nobene vzporednice, topi kot). Klein je geometrijo Bolyaija in Lobačevskega imenoval *hiperbolična*, Evklidovo *parabolična* in Riemannovo *eliptična*.

Slika 51. Portret Nikolaja Ivanoviča Lobačevskega (Benson)

Vaje:

(1) Znan je *Evklidov algoritem* za iskanje največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil a in b: večje število delimo (z ostankom) z manjšim, tj. $a = bc + r$, nato delitelja delimo z ostankom $b = dr + s$ itd. zadnji delitelj, ki da ostanek nič, je največji skupni delitelj števil a in b.
   (a) Poišči največji skupni delitelj števil 5913 in 7592.
   (b) Pokaži: Če je h največji skupni delitelj števil a in b, obstajata taki celi števili p in q, da je $ap + bq = h$; poišči p in q za števili iz točke (a).

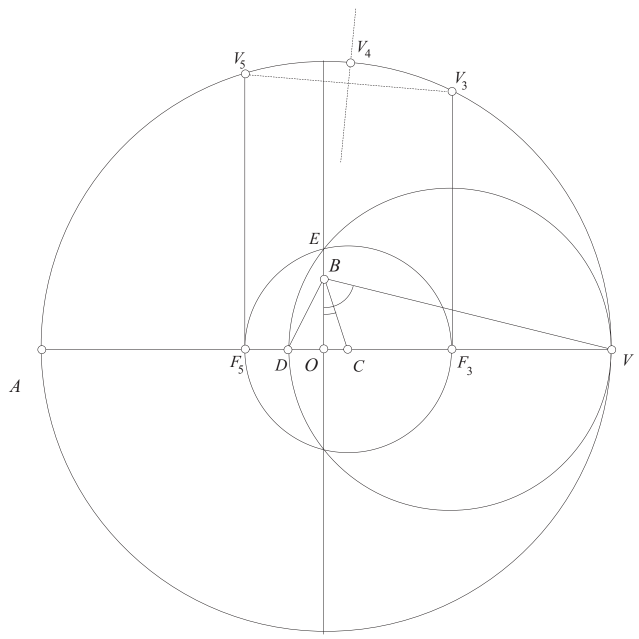
(2) *Fermatova praštevila* so praštevila oblike $F_n = 2^{2^n} + 1$, npr. $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$ itd. *Fermat* je še mislil, da je vsako število take oblike praštevilo, a je *Euler* leta 1732 pokazal, da je že naslednje število $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ sestavljeno (sploh ni znano, še poleg prvih petih obstaja še kakšno Fermatovo praštevilo).

Opomba. *Izrek Gaussa in Wantzela* pravi, da lahko z evklidskim orodjem načrtamo pravilni n-kotnik natanko takrat, ko je $n > 2$ in je največji lihi faktor v n enak 1 ali produkt samih različnih Fermatovih praštevil. Slavni nemški matematik **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) je še kot devetnajstleten študent leta 1796 dokazal zadostni pogoj, veliko manj znani francoski matematik **Pierre Laurent Wantzel** (1814-1848) pa leta 1837 (v istem članku, v katerem je pokazal nezmožnost evklidske podvojitve kocke in trisekcije kota) potrebni pogoj.

(a) Pokaži naslednje: če lahko konstruiramo pravilen $n = rs$ kotnik in sta $r, s > 2$, lahko konstruiramo tudi pravilna r in s kotnika. Obratno tudi velja, če sta si r in s tuji števili. Pokaži, da se pravilni 7, 9 in 27 kotnik ne dajo konstruirati.

(b) Konstruiraj z ravnilom in šestilom pravilne 3,4,5,6,8,10,12,15 in 16 kotnike.

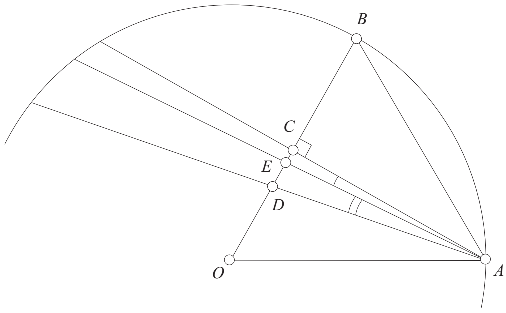
(c) *Richmondova konstrukcija* pravilnega 17-kotnika (1909) je naslednja [26]: Naj bo O(V) krožnica s središčem v O in premerom AV, kot BOV pravi in $BO = OV/4$. Naj bo C na OV taka točka, da je kot OBC četrtina kota OBV, točka D pa taka točka na OA, da meri kot CBD točno 45 stopinj. Krožnica s premerom DV naj seka premico OB v točki E, krožnica $C(E)$ pa naj seka premer AV v točkah F_3 in F_5. Pravokotnici na premer v teh dveh točkah naj sekata krožnico $C(V)$ v točkah V_3 in V_5. Razpolovimo lok V_3V_5 in najdemo točko V_4. Potem je V_3V_4 stranica pravilnega 17-kotnika (slika 52).



SLIKA 52. Richmondova konstrukcija pravilnega 17-kotnika

(3) **Josip Plemelj** (1873-1967) je leta 1892 predstavil (objavljena leta 1912) naslednjo konstrukcijo pravilnega 7-kotnika, temelječo na tretjinjenju kota: Z daljšim izračunom se da najprej pokazati (glej npr. [26]), da za $0 < t < 30^0$ velja za stranico 7-kotnika $s = (\sqrt{3}/2)\cos t$, če je $\operatorname{tg} 3t = 1/3\sqrt{3}$. V krogu s središčem v O in polmerom $OA = 1$ naj bo trikotnik OAB enakostranični, točka C naj razpolavlja stranico OB, točka D pa naj od nje odreže eno tretjino v smeri od O proti B (glej sliko 53). Načrtajmo še točko E na eni daljici CD tako, da je kot CAE (označimo ga s t) ravno tretjina kota CAD (označimo ga s $3t$). Pokaži, da je potem stranica pravilnega 7-kotnika enaka $s = AE$, tako da (a) izračunaš $\operatorname{tg} 3t = CD/AC$ in (b) izraziš AE s kosinusom kota t.

Opomba. Če namesto, da s točko E tretjinimo kot CAD, tretjinimo daljico CD (kar je zaradi majhnega kota skoraj isto), dobimo približno evklidsko konstrukcijo pravilnega 7-kotnika.

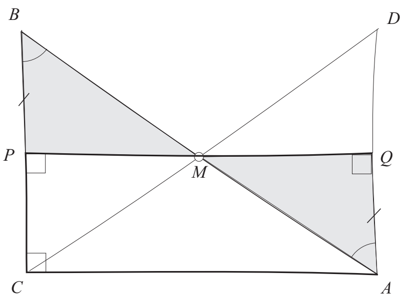


Slika 53. Plemljeva konstrukcija pravilnega 7-kotnika

(4) *Saccherijev štirikotnik* $ABCD$ ima kota pri A in B prava ter $AD = BC$, *Lambertov* ima pravi kot tudi pri C. Za Saccherijev štirikotnik dokaži naslednje:
(a) Kota pri C in D sta enaka.
(b) Zveznica, ki povezuje sredini obeh osnovnic, je nanju pravokotna.
(c) Daljica, ki spaja sredini enakih krakov, je pravokotna na zveznico iz točke (b).

(5) *Kleinov model hiperbolične geometrije*: točke hiperbolične ravnine naj bodo točke znotraj danega kroga v evklidski ravnini, premice pa deli premic znotraj kroga. Prepričaj se, da veljajo naslednje lastnosti:
(a) Dve točki določata natanko eno premico.
(b) Dve različni premici se sekata največ v eni točki.
(c) Skozi točko, ki ni na premici l, poteka neskončno mnogo premic, ki ne sekajo l.
(d) Razdaljo merimo takole: če premica skozi P in Q seka krožnico v S in T, tako da imamo po vrsti S, P, Q, T, naj bo $d_H(P, Q) = \log[(QS)(PT)/(PS)(QT)]$. Potem npr. za tri točke na premici velja $d_H(P, Q) + d_H(Q, R) = d_H(P, R)$ in $\lim_{Q \to T} d_h(P, Q) = \infty$.

(6) Hiperbolična geometrija izhaja iz predpostavke, da sta v vsakem Saccherijevem štirikotniku preostala dva kota ostra ali da je četrti kot v Lambertovem štirikotniku oster. Pokaži, da v tej geometriji velja naslednje [13]:
(a) Naj bo v pravokotnem trikotniku ABC točka M razpolovišče hipotenuze AB. V točki A konstruirajmo kot BAD, ki je enak kotu ABC in iz M potegnimo pravokotnico MP na CB, na AD pa označimo točko Q, tako da bo $AQ = PB$ in narišimo MQ (slika 54). Potem sta trikotnika AQM in BPM skladna, tako da je kot AQM pravi in točke Q, M, P kolinearne. Torej je $ACPQ$ Lambertov štirikotnik z ostrim kotom pri A. Posledica: v hiperblični geometriji je vsota kotov v poljubnem pravokotnem trikotniku manjša od π (dveh pravih kotov).

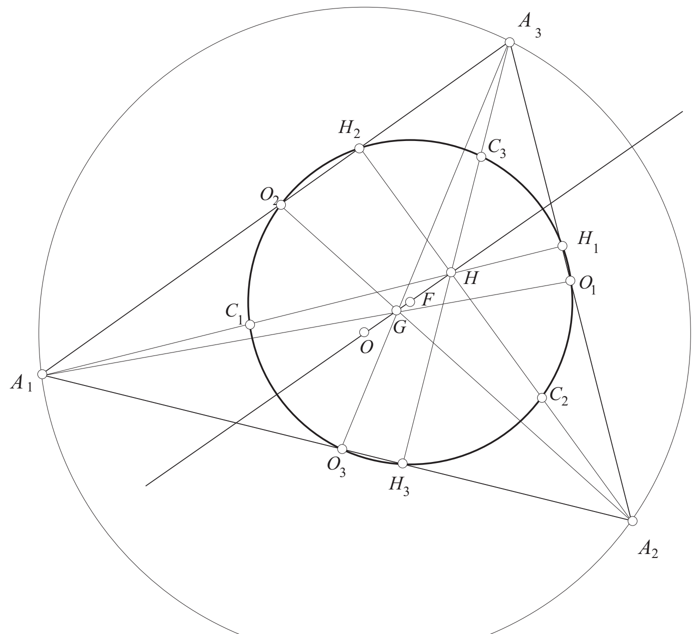


Slika 54. V hiperbolični geometriji je vsota kotov v trikotniku manjša od dveh pravih kotov

(b) V poljubnem trikotniku ABC iz oglišča, kjer je kot največji, spustimo višino in trikotnik razdelimo na dva pravokotna trikotnika. Z uprabo točke (a) potem hitro vidimo, da je vsota vseh kotov $\alpha+\beta+\gamma$ v trikotniku ABC manj od π. Količina $\delta=\pi-\alpha-\beta-\gamma$ se imenuje *defekt trikotnika.* Pri transverzalni delitvi trikotnika (s premico skozi eno oglišče) se defekti posameznih delov seštevajo.

(c) Naj bosta ABC in $A'B'C'$ trikotnika s paroma enakimi koti. Ovrzimo trditev, da je $A'B'<AB$. Odmerimo $AD=A'B'$ na AB in $AE=A'C'$ na AC. Potem sta trikotnika ADE in $A'B'C'$. Točka E ne sme pasti v C, sicer bi bil kot BCA večji od kota DEA. Prav tak E ne more pasti na podaljšek stranice AC, sicer bi daljica DE sekala stranico BC v točki F in vsota kotov v trikotniku FCE bi bila večja od π. Torej leži E med A in C. Štirikotnik $BCDE$ je konveksen, vsota kotov enaka 2π, kar pa v hiperbolični geometriji ni mogoče (točka (b)), zato tudi ne velja $A'B'<AB$. Torej mora veljati enakost. V hiperbolični geometriji sta torej dva trikotnika skladna že, če imata enake kote.

(7) Danes je (tudi zaradi računalniških programov, ki omogočajo dinamično geometrijo) močno oživljen interes za elementarno evklidsko geometrijo, tudi za geometrijo trikotnika. Eden takih sicer klasičnih pojmov je *Feuerbachov krog*: v poljubnem trikotniku $A_1A_2A_3$ naj bo O središče očrtanega kroga, H višinska točka (ortocenter), O_1, O_2, O_3 razpolovišča stranic, H_1, H_2, H_3 nožišča višin in C_1, C_2, C_3 razpolovišča daljic HA_1, HA_2, HA_3 (slika 55). Potem devet točk $O_1, O_2, O_3, H_1, H_2, H_3, C_1, C_2, C_3$ leži na *Feuerbachovi krožnici* (od tod tudi ime *krog devetih točk*). Nemški geometer **Karl Wilhelm Feuerbach** (1800-1834) je dokazal, da se tega kroga dotikajo tudi včrtani krog in trije pričrtani krogi. Dotikališča se imenujejo *Feuerbachove točke.* Središče Feuerbachovega kroga F je razpolovišče daljice OH, težišče trikotnika G pa na dveh tretjinah te daljice, tako da je $HG=2(OG)$. Točke O, F, G, H so kolinerane in ležijo na t.i. *Eulerjevi premici.* Poleg tega seka premica H_1H_2 premico A_1A_2 itd. v točkah P_1,P_2,P_3 ki so tudi kolinearne in ležijo na ti. *polarni osi*, ki je pravokotna na Eulerjevo premico. Polarna os je tudi tetiva Feuerbachovega in očrtanega kroga, če se slednja sekata, in hkrati tudi ortocentroidnega kroga (ki ima premer HG).



Slika 55. Feuerbachov krog in Eulerjeva premica

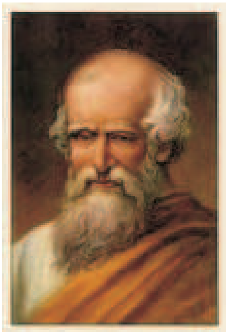
5. Grška matematika po Evklidu

Zgodovinski okvir

Aleksandrija je ostala znanstveno in matematično središče zaradi dovolj dolgega obdobja miru pod Ptolemajci in Rimljani. Leta 212 pnš. so Rimljani zasedli Sirakuze, 146 pnš. Kartagino in Korint, zadnje grško mesto, Mezopotamijo šele leta 65 pnš. in Egipt leta 30 pnš. Konstantin Veliki je leta 330 premaknil prestolnico v Bizanc (Konstantinopel), konec 4. stoletja je postalo krščanstvo državna religija. Leta 395 se je rimsko cesarstvo razdelilo na vzhodni in zahodni del. Ustvarjalnost je počasi zamirala, znanstveno delovanje se je reduciralo na prepisovanje in komentiranje. Leta 641 so Aleksandrijo osvojili Arabci.

Arhimed

Arhimed (287-212 pnš.) je eden največjih matematikov vseh časov, največji v antiki, Sirakužan, sin astronoma, ljubljenec kralja Hierona. Nekaj časa je študiral v Aleksandriji, kjer je tudi kasneje obdržal prijatelje *Kanona*, *Dositeja* in *Eratostena*, ki jim je pogosto pisal. O njem se je spletlo mnogo legend (o izumljanju vojaških naprav, o vzvodih, s katerimi bi lahko spravil svet s tečajev, o Hieronovi kroni, ki ni bila iz čistega zlata (glej vajo 4), o njegovi smrti pod mečem rimskega vojaka). Njegovi članki so mojstrski in spominjajo na moderne matematične razprave, v njih je veliko originalnosti, računske spretnosti in rigoroznosti pri dokazovanju. Njegov največji matematični prispevek so nemara začetki integralskega računa, sicer pa se je ukvarjal z različnimi matematičnimi področji.



SLIKA 56. Arhimed iz Sirakuz

Arhimedova dela

Ravninska geometrija. Znane razprave so *Merjenje kroga* (klasična metoda računanja števila π), *Kvadratura parabole* (24 trditev o računanju ploščine paraboličnega odseka, ki znaša 4/3 ploščine včrtanega trikotnika), *Spirale* (28 trditev o Arhimedovi spirali). Neki arabski pisec mu pripisuje tudi odkritje Heronove formule za ploščino trikotnika.
Prostorska geometrija. Znani sta dve ohranjeni razpravi, *O krogli in valju* (60 trditev v dveh knjigah, npr. o površinah in prostorninah v danem razmerju z reševanjem kubične enačbe in analizo, kdaj ima pozitivno rešitev), *O stožčastih in kroglastih ploskvah* (40 trditev, o prostornini vrtenin). *Papos* pripisuje Arhimedu odkritje trinajstih polregularnih (arhimedskih) teles (prisekana kocka, kubooktaeder itd.), original pa je izgubljen.
Aritmetika. Edina ohranjena razprava od dveh je *Peščeni računar* v dveh knjigah, namenjenih Golonu, Hieronovemu sinu, v katerem je dan aritmetični sistem za predstavitev velikih števil (npr. zrn peska na Zemlji). V tej razpravi najdemo informacijo, da je **Aristarh** ($\sim$ 310 do 230 pnš.) zagovarjal heliocentrični sistem in znameniti problem o govedu (*problema bovinum*), predstavljen v vaji 17.
Uporabna matematika. Ohranjeni sta dve razpravi, *O ravninskem ravnovesju* (25 trditev, računanje težišč likov, tudi paraboličnih odsekov) ter *O plavajočih telesih* (15 trditev z uporabo v hidrostatiki). Razprava *O vzvodih*, o kateri poroča *Papos*, je izgubljena, Teon pa citira še eno (*O zrcalih*).

Metoda izčrpavanja

Arhimed pripisuje **Demokritu iz Abdere** ($\sim$ 410 pnš.) ugotovitev, da je prostornina piramide enaka eni tretjini ustrezne prizme z isto osnovno ploskvijo in isto višino. Demokrit je to dokazal bolj po domače. Sešteval je ploščine posameznih plasti, na katere je razrezal piramido, in sklepal: če sta dve piramidi razrezani na plasti v istem razmerju, so ustrezne plasti ekvivalentne, zato morata biti tudi prostornini enaki. To je nekakšna antična verzija kasnejšega *Cavalierijevega načela* (glej razdelek 10).

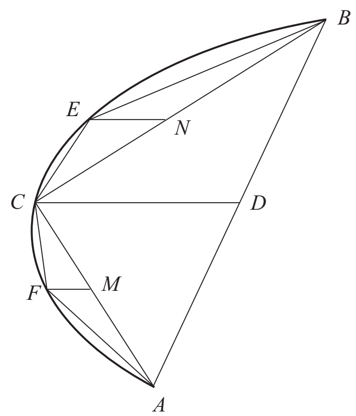
Opomba Prizmo lahko sestavimo iz trikotnih prizem, vsaka trikotna prizma pa je sestavljena iz treh piramid. Zato bi lahko Demokritovo formulo dokazali, če bi na drug način vedeli, da imata dve piramidi z isto višino in ekvivalentnima osnovnima ploskvama enako prostornino. 2300 let kasneje je **David Hilbert** (1862-1943) na drugem mednarodnem matematčnem kongresu v Parizu kot tretjega izmed svojih znamenitih 23 problemov zastavil vprašanje, ali sta dve piramidi s skladnima osnovnima ploskvama in isto višino enaki po razdelitvi. Oziroma bolj splošno, ali sta dva poliedra z isto prostornino enaka po razdelitvi. Problem je še isto leto razrešil **Max Dehn** (1878-1952), ko je pokazal, da za kocko in prostorninsko enak pravilni tetraeder to ne velja.

Kot je znano, je korekten dokaz formule podal **Evdoks** pol stoletja kasneje s svojo metodo izčrpavanja. To metodo je Arhimed izpopolnil in spretno uporabljal npr. za računanje paraboličnega odseka.

Zgled. Z razpolavljanjem tetiv včrtajmo v parabolični odsek trikotnike (glej sliko 56a). Arhimed je iz geometrije parabole ugotovil, da je vsota ploščin trikotnikov CFA in CBE enaka četrtini ploščine trikotnika ABC. To je ponavljal in dobil

$$p(ABC) + \frac{1}{4}p(ABC) + \frac{1}{4^2}p(ABC) + ... = p(ABC)(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...) = \frac{4}{3}p(ABC).$$

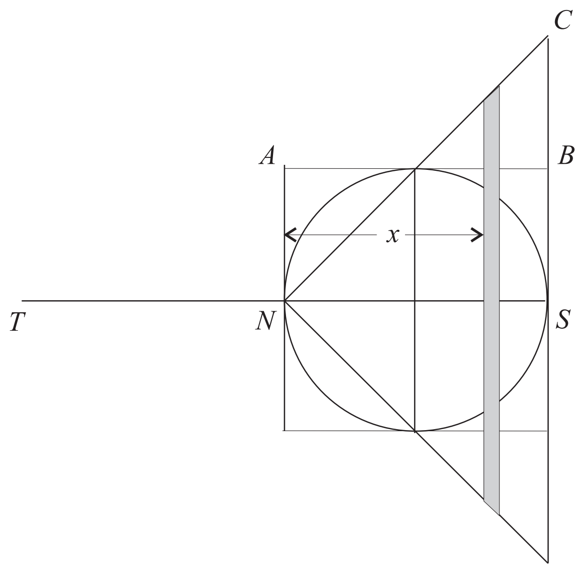
Rezultat je sicer dobil z metodo dvojnega protislovja in ne s seštevanjem vrste, kot bi storili danes. To so bili prvi začetki integralskega računa, ki se je torej (že v antiki!) razvil pred diferencialnim.



Slika 57. Ploščina paraboličnega odseka z metodo izčrpavanja

Arhimedova metoda ravnovesja

Za izračun ploščin in prostornin je Arhimed uporabljal še eno metodo, ki tudi temelji na seštevanju, to pot ne le delov ploščine ali prostornine, ampak tudi momentov. Ilustrirajmo jo na primeru izračuna prostornine krogle s polmerom r. Načrtajmo kroglo s polmerom r, očrtan ležeži valj in dodan stožec. Točka navora naj bo N in $SN = TN = 2r$. Označimo tanko plast v razdalji x od N (slika 58). Potem so prostornine plasti enake $\pi x(2r - x)\Delta x$ za kroglo, $\pi r^2 \Delta x$ za valj in $\pi x^2 \Delta x$ za stožec. Prenesimo plasti za kroglo in stožec v točko T. Njun skupni moment je: $2r\pi x(2r - x)\Delta x + 2r\pi x^2 \Delta x = 4(\pi r^2 x \Delta x)$. To pa je ravno štirikratni moment plasti za valj, ki smo ga pustili na desni strani. Če torej seštejemo vse momente na levi in desni, dobimo $2r(V_{krogle} + V_{stosca}) = 4rV_{valja}$ oziroma $2r(V_{krogle} + 8\pi r^3/3) = 8\pi r^4$, od koder dobimo prostornino krogle $V_{krogle} = 4\pi r^3/3$.



Slika 58. Prostornina krogle z Arhimedovo metodo ravnovesja

Ta postopek je opisan v Arhimedovi razpravi *Metoda*, v kateri v obliki pisma Eratostenu pojasnjuje, kako je prišel do svojih odkritij. Razprava je dosegla Evropo okrog leta 1450 (prek arabskih prevodov v Bagdadu v 9. stoletju). **Regiomontanus** (1436-1476) jo je revidiral in prevedel; natisnili so jo leta 1540. Čez nekaj let je nastal nov prevod, napredka v razvoju integralskega računa pa ni bilo do začetka 17. stoletja.

Zgodovinska zanimivost

Originalna Arhimedova razprava *Metoda* je bila dolgo časa izgubljena. Leta 1906 jo je danski filolog in zgodovinar matematike, profesor na koebenhavenski univerzi *Johan Ludvig Heiberg* (1854-1928) odkril v obliki palimpsesta v Carigradu (besedilo je bilo s pergamenta v začetku 13. stoletja spraskano in potem prekrito z nabožnim besedilom; knjiga se je uporabljala kot molitvenik). Toda najdba je spet poniknila, od leta 1920 je bila v lasti neke francoske družine. Dne 29. oktobra 1998 se je nenadoma pojavila na dražbi agencije Christie in bila prodana za dva milijona dolarjev. (Hkrati so istega dne prodali doktorsko disertacijo Marie Curie s posvetilom Rutherfordu, prvo izdajo Darwinovega *Porekla vrst*, Einsteinovo razpravo o specialni teoriji relativnosti iz leta 1905 ter prvo delo Lobačevskega o neevklidski geometriji iz leta 1829.)

Z moderno spektralno analizo so obnovili 80% prvotnega besedila in ugotovili, da se pod verskim besedilom skrivajo še druge Arhimedove razrave: *O plavajočih telesih*, *O merjenju kroga*, *O krogli in valju*, *O spiralah*, *O ravnovesju ploskev* ter *Stomahion*, oblika sestavljanke podobne tangramu, poleg tega pa tudi komentarji k Aristotelovim *Kategorijam* Aleksandra iz Afrodiziade (2.-3. stol.). *Stomahion* je plošča velikosti 12×12 kvadratov, razdeljena na 14 delov s ploščinami 3,3,6,6,6,6,9,12,12,12,12,21,24. *Persi Diaconis* z ženo *Suzan Holmes* iz Stanforda ter *Ronald Graham* z ženo *Fan Chung* iz San Diega so dokazali, da je 536 načinov za sestavo kvadrata iz teh delov, kar so potrdili z računalnikom.

Eratosten

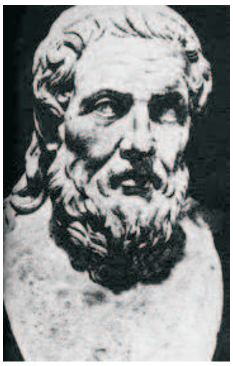
Eratosten ($\sim$ 280-194 pnš.) je nekaj let mlajši od Arhimeda, po rodu iz Kirene v Severni Afriki. Dolgo časa je živel v Atenah, nato ga je Ptolemaj III. povabil v Aleksandrijo za tutorja sinu in za upravnika knjižnice. Okrog leta 194 pnš. je oslepel in kmalu naredil samomor. Bil je nadarjen in razgledan v vseh znanostih, nikjer pa ni bil vrhunski (od tod vzdevek "beta"). V mladosti je bil atlet, nato pesnik, astronom, geograf, zgodovinar in matematik. Podal je mehansko rešitev za duplikacijo kocke, v teoriji števil je znan po situ (rešetu), s katerim presejemo praštevila, najslavnejša pa je njegova meritev Zemljinega obsega (glej vajo 1).

Slika 59. Eratosten

Opomba. Na osnovi Eratostenovega sita so skušali kasneje oceniti, koliko je praštevil do nekega števila. Testiranje praštevilskosti je na splošno težko. Skušali so tudi najti formulo, ki bo producirala čim več praštevil, **Euler** je npr. našel $f(n) = n^2 - n + 41$ (40 praštevil zapored), drugi $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ (80 praštevil zapored), iskali so praštevila med Fermatovimi praštevili, med števili oblike A^{3^n} (**W.H. Mills** 1947) itd. Posplošitev Evklidovega izreka o neskončno mnogo praštevilih je *Dirichletov izrek* iz leta 1837 o neskončno mnogo praštevilih v aritmetičnem zaporedju $a, a + d, a + 2d, ...$, če sta si a in d tuji števili. Nadaljnji uspeh predstavlja *praštevilski izrek* (**Jacques Hadamard** in **Charles de la Valée-Poussin** 1896 analitični dokaz, **Paul Erdős** in **Atle Selberg** 1950 elementarni dokaz). Pogosto so v zgodovini sestavljali obsežne tabele za faktorizacijo naravnih šttevil (1654 *Rahn* do 24.000, 1668 *John Pell* do 100.000, 1776 *Felkel* do 408.000, v 19. stol. *Chernac*, *Burckhardt*, *Crelle*, *Gleisher* in *Dase* do 10,000.000, *J.P. Kulik*, 1773-1863, po 20-letnem delu do 100,000.000 itd.). V zvezi s praštevili so še vedno nerešeni številni problemi (Goldbachov problem, problem praštevilskih dvojčkov itd.).

Apolonij

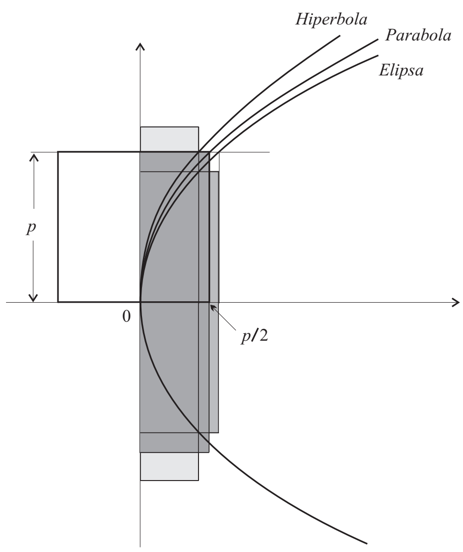
Apolonij ($\sim$ 260-200 pnš.) je tretji grški matematični genij za *Evklidom* in *Arhimedom.* Rojen je v Pergi na jugu Male Azije, o njem pa je malo znanega. Študiral je v Aleksandriji pod Evklidovimi nasledniki in tam tudi živel, vmes je le obiskal univerzo v Pergamu na zahodu Male Azije.



Slika 60. Apolonij iz Perge

Bil je izurjen astronom, slavo pa dosegel s svojimi *Preseki stožca* (8 knjig in približno 400 trditev), v katerih je podrobno raziskal krivulje, presegel *Menajhma* in *Evklida*. Prve štiri knjige so se ohranile v grščini, še tri v arabskem prevodu.

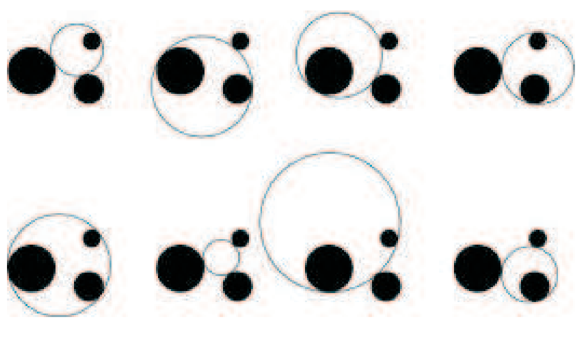
Apolonij si je tudi izmislil imena *elipsa*, *parabola*, *hiperbola*. Če namreč vse tri postavimo s temenom v koordinatno izhodišče in vpeljemo parameter p, imamo za parabolo $y^2 = 2px$, za elipso $y^2 = 2px - px^2/a$ in za hiperbolo $y^2 = 2px + px^2/a$, kjer je a vodoravna, b navpična polos in $p = b^2/a$ (v vseh treh primerih je $l = 2p$ ti. *latus rectum*, navpični odsek skozi gorišče). Torej je elipsa pomankljiva, hiperbola presežna in parabola ravno pravšnja glede na člen $2px$ (slika 61).



Slika 61. Stožnice z istim parametrom

Druga knjiga se ukvarja z asimptotami, tetivami in tangentami hiperbole, tretja z goriščnimi razdaljami, četrta s poli in polarami, peta (najbolj originalna) z ekstremi in normalami, šesta s konstrukcijskimi problemi, sedma s konjugiranimi premeri.

Apolonij je spisal še druga dela: o proporcionalnih rezih (181 trditev), o prostorskih prerezih (124 trditev), o določanju prerezov (83 trditev), o tangentah (124 trditev, med njimi Apolonijev problem kroga, ki se dotika treh danih krogov (glej vajo 7); eno prvih rešitev je podala Descartesova učenka Elizabeta Češka, najbolj elegantno pa francoski artilerijski častnik in profesor matematike **Joseph-Diez Gergonne** (1771-1859), o vstavljanju (125 trditev), o geometrijskem mestu (147 trditev, tudi o Apolonijevem krogu, kjer je razmerje do dveh danih točk konstantno).



Slika 62. Osem rešitev Apolonijevega problema o krogu, ki se dotika treh krogov

Grška trigonometrija

Trigonometrija in sferna geometrija sta se razvili zaradi astronomije. Babilonski (oziroma kaldejski) astronomi 5. in 4. stol. pnš. so svoje znanje predali Grkom.

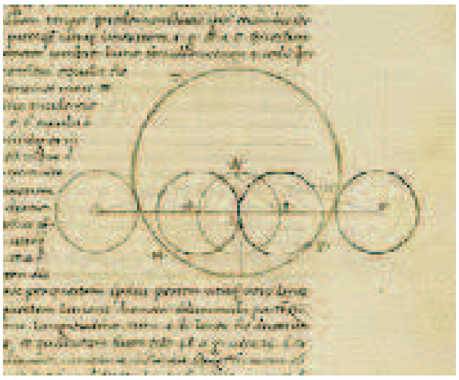
Najpomembnejši antični astronom in utemeljitelj trigonometrije je **Hiparh** ($\sim$ 140 pnš.), ki je na Rodosu določil trajanje lunine mene na sekundo natančno, izračunal naklon ekliptike, lunarno paralakso, ipd., katalogiziral 850 zvezd stalnic ter uvedel v grško matematiko delitev kroga na 360 stopinj. Trigonometrijo in sferno geometrijo je razvil v 12 knjigah (ki jih poznamo po Teonovih komentarjih, originalna dela se niso ohranila). Konstruiral je (za astronomijo in sferno geometrijo pomembne) tabele krožnih tetiv, ki jih je izpopolnil *Klavdij Ptolemaj* (v resnici je izračunal sinuse kotov po $15'$ od 0 do 90 stopinj).

Slika 63. Hiparh

Drugi pomembni ustvarjalec na tem področju je **Menelaj iz Aleksandrije** ($\sim$ 70-140 nš.), avtor *Sferike*, znan po izreku za dvorazmerje $(AN/NB)(BL/LC)(CM/MA) = -1$ pri transverzalah trikotnika.

Slika 64. Klavdij Ptolemaj

Še bolj znan astronom je od Hiparha tri stoletja mlajši **Klavdij Ptolemaj iz Aleksandrije** ($\sim$ 90-168 nš.), ki je $\sim$ 150 nš. napisal vplivno delo *Sintaksis Mathematika* (*Matematična Zbirka*), temelječe na Hiparhovem delu, zelo kompaktno in elegantno, vrhunsko delo imenovano *megiste* (*največje*), po arabsko *al magest* (*Almagest*). Sestavlja ga 13 knjig (o astronomiji, v prvi knjigi osnove, tabele tetiv, Ptolemajev izrek o tetivnem štirikotniku, glej vajo 9), v 3., 4., 5. knjigi razlaga geocentričnega sistema z epicikli, v 4. knjigi problem, kasneje imenovan *problem Snella* (1617) in *Pothenota* (1692), 6. knjiga govori o elipsah, ostale o planetih. *Almagest* je bila standardna astronomska knjiga vse do **Kopernika** in **Keplerja**. Pisal je tudi o projekcijah, optiki, glasbi, trudil se je z dokazovanjem postulata o vzporednicah.



Slika 65. Stran iz Ptolemajevega Almagesta (latinski prevod iz 16. stol.)

Heron

Heron ($\sim$ 10-70 nš.) je bil zelo pomemben uporabni matematik, tehnik in izumitelj, profesor v Aleksandriji z enciklopedičnim znanjem, ki si ga je pridobil s študijem v Grčiji in Egiptu. Ustvaril je številna in raznovrstna dela v matematiki in fiziki (okrog 14 razprav o praktični uporabi matematike in inženirstvu), vključujoč različne izume (sifon, parni stroj, vetrne piščali, vodno črpalko, siringo itd.). Geometrična razprava *Metrika* v treh knjigah (odkrita 1896 v Carigradu) vsebuje merjenja likov, krožnih, eliptičnih, paraboličnih odsekov, površin valjev, stožcev in sfer, slavno formulo za ploščino trikotnika $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = (a+b+c)/2$ (glej vajo 9) in rekurzivno metodo za računanje kvadratnega korena $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$, $n \geq 0$, ki so jo poznali že Babilonci. *Pneumatika*, delo iz mehanike, vsebuje opis okrog sto mehanskih naprav in igrač, *Dioptra* (optične naprave, antična oblika teodolita), *Katoptrika* (lastnosti zrcal).

Slika 66. Heron

Grška algebra

Leta 1842 je G.H.F. Nesselman definiral tri faze v razvoju algebrske notacije: *retorična algebra* (besedni problemi), *sinkoptična algebra* (nekaj okrajšav za neznanke, operacije) in *simbolična algebra*. Pred *Diofantom* so poznali le retorično algebro, probleme so reševali geometrijsko. V Evropi je taka algebra vztrajala do 15. stoletja. Pomemben vir za grške algebrske probleme je *Palatin* (*Antologija*) iz leta $\sim$ 500 nš., ki jo je sestavil jezikoslovec **Metrodor**. Obsega različne umske probleme, ki se prevedejo na enačbe z eno neznanko ipd. Mnoge bi lahko rešili z geometrijsko algebro, a so bili najbrž namenjeni aritmetičnemu reševanju (z metodo napačne predpostavke).

Diofant

Diofant je bil rojen med 200 in 214, umrl med 284 in 298, točne letnice niso znane. Napisal je tri dela: *O poligonalnih številih*, *Porizmi* in *Aritmetika* (v 13 knjigah, od katerih se jih je ohranilo 6). Slednje delo je gotovo najpomembnejše, saj je imelo 1500 let in več izreden vpliv na razvoj matematike. Leta 1575 je grško besedilo *Aritmetike* objavil **Wilhelm Holzmann**, profesor na univerzi v Heidelbergu (z grškim imenom **Ksilander**).

To besedilo je uporabil **Bachet de Méziriac**, ki je leta 1621 izdal grški tekst skupaj z latinskim prevodom. V to knjigo je 1637 **Pierre de Fermat** zapisal svojo slavno opombo na robu o nezmožnosti rešitve enačbe $x^n + y^n = z^n$ v celih številih, če je $n > 2$. (Čeprav je Fermatova originalna kopija Diofantove *Aritmetike* izgubljena, vemo za opombo, ker jo je natisnil Fermatov sin, ko je uredil drugo izdajo leta 1670.)


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Slika 67. Méziriacov prevod Diofantove *Aritmetike* iz leta 1621

Diofantova *Aritmetika* je zahtevno analitično delo o algebrajski teoriji števil (nekateri bralci so Diofanta ob študiju preklinjali, drugi slavili kot "očeta algebre"). Prinaša okrog 130 različnih problemov o enačbah prve in druge stopnje, tudi eni kubični, in reševanje nedoločenih (danes imenovanih diofantskih) enačb. Objavljeni so izreki o predstavitvi števil v obliki dveh, treh ali štirih kvadratov. Nekaj zgledov nalog iz *Aritmetike*: najdi kvadrata x, y, da sta tudi $xy + x$ in $xy + y$ kvadrata (II.29), ali: najdi števila x, y, z, da so $x + y$, $x + z$, $y + z$ in $x + y + z$ kvadrati (III.7). Diofant je posebno zaslužen za uvedbo okrajšav za neznanke, potence, odštevanje, enakost in recipročnost, torej za rojstvo sinkoptične algebre.

Slika 68. Diofant iz Aleksandrije

Papos

Papos iz Aleksandrije ($\sim$ 290-350) je bil zadnji veliki grški matematik, več kot 500 let mlajši od Apolonija. Napisal je *Komentarje* k Evklidovim *Elementom* in *Podatkom* ter k Ptolemajevemu *Almagestu* in *Planisferiju*. Njegovo veliko delo je *Matematična zbirka*, mešanica komentarjev, originalnih prispevkov in izboljšav različnih starejših tekstov. Od osmih knjig je izgubljena prva in del druge. V drugi knjigi je opisana Apolonijeva metoda pisanja in računanja z velikimi števili, v tretji teorija sredin (npr. dvojna geometrijska sredina), neenakosti v trikotniku in včrtavanje pravilnih teles v kroglo, v četrti *posplošitev*

Pitagorovega izreka ter lastnosti *arbelosa*, *Arhimedove spirale*, *Nikomedove konhoide*, *Dejnostratove kvadratrise* z uporabo pri treh velikih geometrijskih problemih. Peta knjiga govori o izoperimetriji, o maksimumih in minimumih ter o čebeljih celicah v satovju. Šesta knjiga je astronomska (nekakšen uvod v *Almagest*), opisani so razni problemi, ki so mnogo kasneje privedli do uvedbe kartezičnih koordinat itd. Vsebuje tudi razultate, podobne tistim, ki jih je kasneje dobil **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), ter gorišča in direktrise stožnic. V sedmi in osmi knjigi so *originalni Paposovi prispevki* (konstrukcija stožnice skozi pet danih točk, Paposov izrek o transverzalah in dvorazmerjih). Nasploh je ta *Zbirka* zgodovinsko zelo verodostojna knjiga, zadnje veliko delo, nekakšen rekvijem grške matematike. Nekaj nalog iz te zbirke je predstavljenih v vajah 14, 15 in 16.

SLIKA 69. Naslovna stran Commandinovega latinskega prevoda Paposove *Matematične zbirke*, izdanega leta 1589

Zaton grške matematike

V zadnjem obdobju so se uveljavili različni pisci, ki so prepisovali in komentirali prejšnje mojstre:

Teon iz Aleksandrije (∼ 335-405) je živel konec 4. stoletja in v 11 knjigah napisal komentarje k Ptolemajevemu *Almagestu* ter revidiral Evklidove *Elemente*, kar je bila podlaga za vse nadaljnje izdaje *Elementov.*

Hipatija (∼ 350-415), Teonova hči, se je odlikovala v matematiki, medicini in filozofiji, napisala je komentarje k Diofantovi *Aritmetiki* in Apolonijevim *Presekom stožca.* Prva znana ženska v matematiki je umrla leta 415 mučeniške smrti od rok krščanskih fanatikov.

Proklos (412-485) je bil neoplatonistični filozof in matematik, avtor *Komentarjev k Evklidu*, ki pomenijo enega glavnih virov za zgodnjo zgodovino grške geometrije. Poznal je Evdemovo *Zgodovino geometrije* in obsežno Geminovo *Teorijo matematičnih znanosti*, ki nam nista dostopni. Podal je tudi komentarje k Platonovi *Republiki*, v kateri so tudi za matematike zanimivi odstavki.

Simplikij iz Kilikije (∼ 490-560) je bil v glavnem komentator Aristotela. Predstavil je tudi *Antifonov* poskus kvadrature kroga, *Hipokratove lune* in *Eudoksov model sončnega sistema* s koncentričnimi sferami. Napisal je tudi komentarje k Evklidovim *Elementom.*

Eutokij iz Askalona (∼ 480-540) je bil Simplikijev sodobnik in je znan po komentarjih k Arhimedovemu delu.

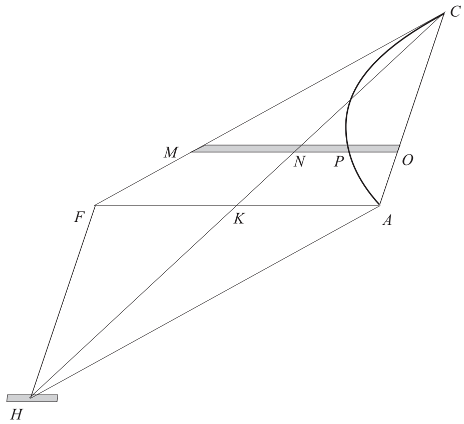
Leta 529 je cesar Justinjan izdal dekret, s katerim so za vedno zaprli atensko Akademijo. Aleksandrijska univerza jo je odnesla nekoliko bolje, ostala je odprta, dokler niso leta 641 Aleksandrijo zasedli Arabci, ki so od Grkov prevzeli baklo napredka v matematiki in drugih znanostih.

Vaje:

(1) **Eratosten** je leta $\sim$ 230 pnš. izračunal obseg Zemlje tako, da je ob poletnem solsticiju, ko v Sieni, današnjem Asuanu, 5000 stadijev južno od Aleksandrije točno opoldne navpična palica ni metala sence, izmeril v Aleksandriji naklon sončnih žarkov za 1/50 polnega kroga (to je 7,2 stopinji). Izračunaj odtod Eratostenov obseg Zemlje, če vemo, da je meril stadij približno 180 m.

(2) **Arhimedovo** najljubše delo je bila razprava *O krogli in valju* (želel je, da bi na nagrobniku imel vklesano kroglo, včrtano v valj). Prepričaj se, da sta tako prostornina kot površina krogle enaka 2/3 prostornine oziroma površine očrtanega valja.

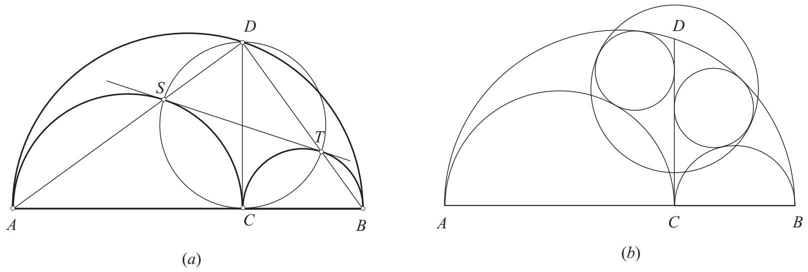
(3) Ploščina paraboličnega odseka je 1/3 ploščine trikotnika, ki ga tvori tetiva, tangenta v enem krajišču in vzporednica osi parabole v drugem (slika 70). Dokaži to z **Arhimedovo metodo ravnovesja**, tako da najprej pokažeš
  (a) da je parabola geometrijsko mesto točk v kotu FAC, ki od vzporednice z FA odreže enak delež kot njeno nožišče na AC od daljice AC, in potem
  (b) dopolniš trikotnik FAC do paralelograma $ACFH$ s središčem K, preneseš v H delček ploščine paraboličnega odseka OP, ki je v ravnovesju glede na K z delčkom trikotnika, torej $OP \cdot HK = KN \cdot OM$, in z vsoto momentov ugotoviš, da je (ploščina paraboličnega odseka) $\cdot HK = (KC/3) \cdot$ (ploščina trikotnika).



SLIKA 70. Arhimedova metoda ravnovesja za ploščino

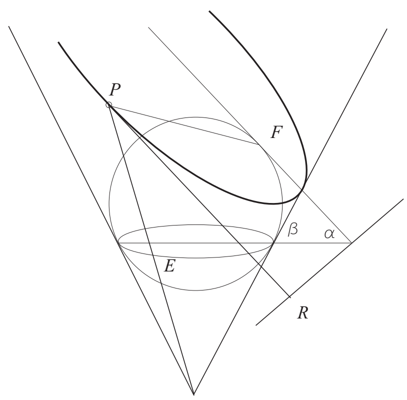
(4) Rimski arhitekt *Vitruvij* je poročal o tem, kako je **Arhimed** rešil problem Hieronove krone, ko se je kopal v kadi (in vkliknil *Eureka*!). Naloga je objavljena v razpravi o plavajočih telesih: Krona, ki tehta c kg, je sestavljena iz a kg zlata in b kilogramov srebra. Potopljena v vodo izgubi c_1 kg teže. Enako, torej c kg, težka masa čistega zlata, izgubi, potopljena v vodo a_1 kg teže, enako težka masa čistega srebra pa b_1 kg teže. Če veš, da je izguba teže enaka teži izpodrinjene vode, pokaži, da je v tem primeru razmerje med težo zlata in srebra v kroni enako: $a/b = (b_1 - c_1)/(c_1 - a_1)$.

(5) *Arbelos* (čevljarski nož) je opisan v **Arhimedovi** razpravi *Liber assumptorum* (*Knjiga lem*), ki se je ohranila v arabskem prevodu, kot lik, ki ga omejujejo tri polkrožnice s premeri AB, AC in CB (kjer je $A < B < C$). Pravokotnica na AB v točki C naj preseka največjo polkrožnico v točki D, skupna tangenta na obe manjši polkrožnici pa naj se ju dotika v točkah S in T (glej sliko 71). Označimo dolžine $AC = 2r_1$, $CB = 2s_1$ in $AB = 2r$. Dokažite:
  (a) Daljici CD in ST sta enako dolgi in se razpolavljata (slika 71a).
  (b) Ploščina arbelosa je enaka ploščini kroga s premerom CD.
  (c) Premici AD in BD potekata skozi S in T.
  (d) Kroga, včrtana v krivočrtna trikotnika ACD in DCB (Arhimedova kroga) sta enako velika s polmerom $r_1 s_1/r$ (slika 71b).
  (e) Najmanjši krog, očrtan Arhimedovima krogoma, je enako velik kot krog iz točke (b).



Slika 71. Arbelos ali čevljarski nož

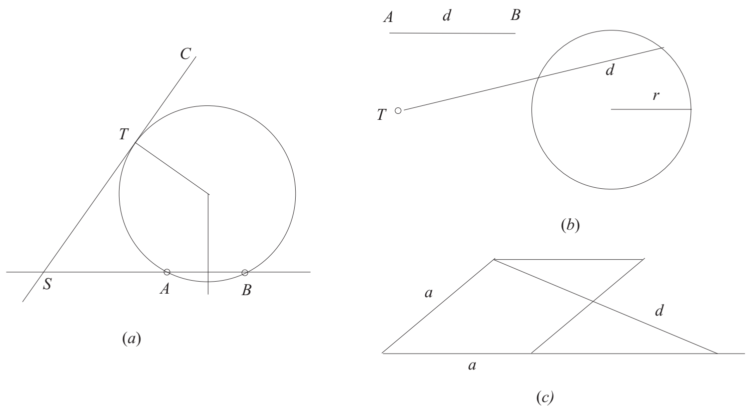
(6) Grki so stožnico definirali kot presek pokončnega stožca z naklonjeno ravnino p. V stožec včrtajmo kroglo, ki se dotakne ravnine p v točki F, stožca pa v krožnici v ravnini q. Z ravnino q naj tvori ravnina p kot α, poljubna tvorilka stožca pa kot β (glej sliko 72). Točko F imenujemo *gorišče*, presečnico d ravnin p in q pa *premico direktriso* dane stožnice. Za vsako točko na stožnici je razmerje med njeno razdaljo do gorišča F in razdaljo do direktrise konstantno, enako ekscentričnosti $e = \sin\alpha/\sin\beta$. Dokaži to tako, kot sta storila **Adolphe Quetelet** (1796-1874) in **Germinal Dandelin** (1794-1847). Pokaži:
   (a) dolžini poljubnih dveh daljic iz dane točke na ravnino sta inverzno proporcionalni razmerju sinusov kotov, ki ju daljici oklepata z ravnino;
   (b) za poljubno točko P na stožnici naj tvorilka stožca skozi P seka ravnino q v točki E, R pa naj bo pravokotna projekcija točke P na direktriso d (slika 72); potem je $PF/PR = PE/PR = \sin\alpha/\sin\beta = e$.



Slika 72. Gorišče in direktrisa stožnice

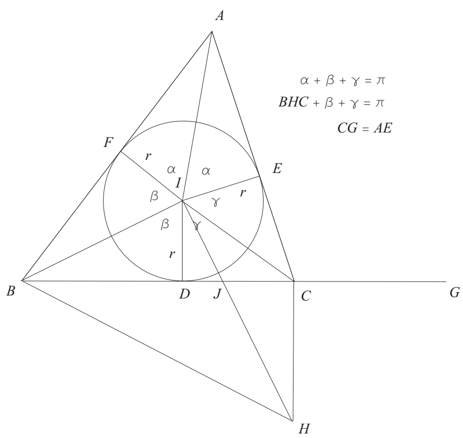
(7) V svojem (izgubljenem) delu *O tangentah* obravnava **Apolonij** problem, kako konstruirati krog, ki se dotika treh danih (disjunktnih) krogov A,B,C, od katerih je vsak lahko tudi izrojen v premico ali točko.
   (a) Pokaži, da obstaja deset primerov tega problema glede na to, ali so A,B,C krogi, premice ali točke. Poišči število rešitev v vsakem posebnem primeru (v splošni legi).
   (b) Reši problem, ko so $A; B; C$ dve točki in premica (Navodilo: če je S presečišče premice C in premice skozi A, B, poišči na C tako točko T, da bo $ST^2 = (SA)(SB)$, slika 73a.) Reduciraj problem, ko so $A; B; C$ dve premici in točka, s simetrijo preko simetrale, na prejšnji primer.

(8) Dve nalogi o vstavljanju:
   (a) V dani krog vriši tetivo dane dolžine, ki kaže proti dani točki (slika 73b).
   (b) V zunanji kot romba (v posebnem primeru kvadrata) vstavi daljico dane dolžine, ki kaže proti nasprotnemu oglišču (slika 73c). (Ta naloga je težja, glej npr. [17], str. 373).



Slika 73. Apolonijeva problema

(9) Dokaži **Ptolemajev izrek**, da je v tetivnem štirikotniku produkt diagonal enak vsoti produktov po dveh nasprotnih stranic. Z uporabo tega izreka pokaži naslednje:
(a) Če sta a in b tetivi za dva zaporedna loka v krogu s polmerom 1, je tetiva, ki pripada njuni vsoti, enaka $s = (a/2)\sqrt{4-b^2} + (b/2)\sqrt{4-a^2}$, kar ustreza adicijskemu izreku za sinus vsote.
(b) Če je a tetiva, ki pripada loku v krogu s polmerom 1, je $s = \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ tetiva, ki pripada polovičnemu loku (kar ustreza formuli za sinus polovičnega kota).
(c) Za poljubno točko P na loku AB očrtanega kroga velja:
(i) pri enakostraničnem trikotniku ABC zveza $PC = PA + PB$,
(ii) pri kvadratu $ABCD$ zveza $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$,
(iii) pri pravilnem petkotniku $ABCDE$ zveza $PC + PE = PA + PB + PD$,
(iv) pri pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ zveza $PD + PE = PA + PB + PC + PF$.
(d) V pravilnem petkotniku se diagonali sekata v razmerju zlatega reza.



Slika 74. Heronova izpeljava formule

(10) Preveri **Heronovo** izpeljavo znamenite formule za ploščino p trikotnika ABC s stranicami a, b, c, središčem včrtanega kroga I in njegovim polmerom r, v naslednjih korakih:
(i) Včrtani krog s središčem I naj se dotika stranic v točkah D, E, F (slika 74), na podaljšku BC odmerimo G, tako da bo $CG = AE$ in potegnemo pravokotnico IH na BI, ki preseka BC v točki J in pravokotnico na BC iz C v točki H.
(ii) Če je $s = (a + b + c)/2$, je $p = rs = (BG)(ID)$.
(iii) B, I, C, H ležijo na isti krožnici (s premerom BH), torej se kota CHB in BIC dopolnjujeta (sta suplementarna), pri čemer je kot CHB enak kotu EIA.
(iv) Potem velja: $BC/CG = BC/AE = CH/IE = CH/ID = CJ/JD$.

(v) Torej $BG/CG = CD/JD$.
(vi) $(BG)^2/(CG)(BG) = (CD)(BD)/(JD)(BD) = (CD)(BD)/(ID)^2$.
(vii) $p = (BG)(ID) = \sqrt{(BG)(CG)(BD)(CD)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

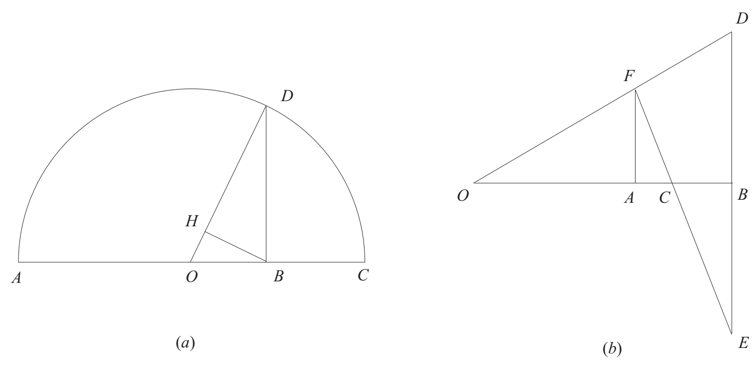
Izpelji Heronovo formulo hitreje z višino h na c in projekcijo m stranice b na c:
(i) $m = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$, (ii) $h = \sqrt{b^2 - m^2}$, (iii) $p = ch/2$.

(11) Problemi iz grške *Antologije*:
(a) Koliko je jabolk, če jih ima prvi 1/3, drugi 1/8, tretji 1/4, četrti 1/5, peti 10, šesti 1?
(b) *Denokar* je četrtino svojega dosedanjega življenja preživel kot deček, petino kot mladenič, tretjino kot mož, zadnjih trinajst let pa živi v domu za stare. Koliko je star?
(c) Izdelovalec opek naredi 300 opek na dan, njegov sin 200 in zet 250. V kolikem času bi vsi trije skupaj naredili 300 opek?

(12) Še tri naloge o starosti:
(a) **Epitaf na Diofantovem grobu** se glasi: "Šestino življenja je preživel v otroštvu, dvanajstino kot mladenič, in sedmino kot samski moški. Pet let po poroki se mu je rodil sin, ki je umrl štiri leta pred njim, ko je bil star pol toliko kot oče ob koncu življenja." Koliko je bil star Diofant, ko je umrl?
(b) **August de Morgan**, ki je živel v 19. stoletju (umrl je 1871), je nekoč zapisal: "Leta x^2 sem bil star x let." Kdaj se je rodil?
(c) **Felix Klein** se je rad pošalil, da se je rodil $5^2 \cdot 2^2 \cdot 43^2$. Kdaj je bilo to?

(13) Identiteta $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$, ki jo je zapisal **Fibonacci** leta 1202 v svoji knjigi *Liber abbaci*, pomeni, da je produkt dveh vsot dveh kvadratov spet vsota dveh kvadratov. Z vprašanjem zapisa naravnega števila v obliki vsote dveh kvadratov naravnih števil, so se kasneje ukvarjali mnogi, med drugimi tudi *Gauss*.
Zapiši z uporabo zgornje identitete število $481 = 13 \cdot 37$ kot vsoto dveh kvadratov naravnih števil na dva različna načina in število $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ na štiri različne načine.

(14) V trinajsti knjigi *Matematične zbirke* je **Papos** podal naslednja preprosta dokaza o sredinah. Preveri ju.
(a) Naj bo O razpolovišče daljice AC in B poljubna druga točka na AC. Pravokotnica v B naj seka polkrožnico s premerom AC v točki D, H pa naj bo nožišče pravokotnice iz B na zveznico OD (slika 75a). Pokaži, da je potem OD aritmetična, BD geometrična in HD harmonična sredina odsekov AB in BC ter da je aritmetična sredina večja od geometične, le-ta pa od harmonične.
(b) Naj bodo točke O, A, B kolinearne. Na pravokotnici na OB v točki B poljubno označimo D in E tako, da bo $BD = BE$. Pravokotnica na OB v točki A pa naj seka daljico OD v točki F, zveznica EF pa daljico OB v točki C (slika 75b). Pokaži, da je potem OC harmonična sredina odsekov OA in OB.

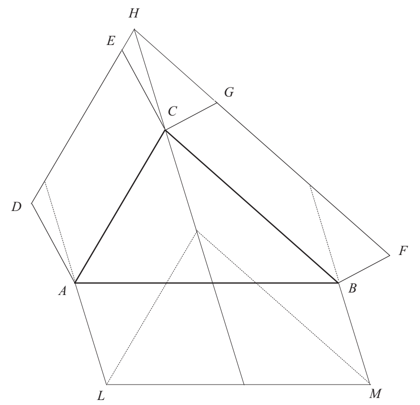


SLIKA 75. Paposova predstavitev sredin

(15) **Papos** je v četrti knjigi *Matematične zbirke* predstavil tudi naslednjo *posplošitev Pitagorovega izreka* (slika 76):

(a) Naj bo ABC poljuben trikotnik ter $ABDE$ in $ACFG$ poljubna paralelograma nad stranicama AB in AC. Premici DE in FG naj se sekata v H. Načrtajmo daljici BL in CM enak dolgi in vzporedni daljici HA. Dokaži z uporabo Evklidove metode z gibanjem, da je potem ploščina paralelograma $BCML$ enaka vsoti ploščin paralelogramov $ABDE$ in $ACFG$.

(b) Dokaži tudi naslednjo **Paposovo** trditev (iz osme knjige *Matematične zbirke*): Če razdelimo stranice poljubnega trikotnika ABC v istem razmerju s točkami D, E, F, imata trikotnika ABC in DEF skupno težišče.



Slika 76. Paposova posplošitev Pitagorovega izreka

(16) V sedmi knjigi *Matematične zbirke* je **Papos** že predvidel naslednji pravili, ki jih je **P. Guldin** (1577-1642) formuliral mnogo kasneje:

(A) Če zavrtimo lok v ravnini okrog osi (v tej isti ravnini), ki ne preseka loka, je površina dobljene rotacijske ploskve enaka produktu dolžine loka in dolžine poti, ki jo opravi težišče loka.

(B) Če zavrtimo ravninski lik okrog osi (v tej ravnini), ki ne preseka lika, je prostornina dobljeneg rotacijskega telesa enaka produktu ploščine lika in dolžine poti, ki jo opravi težišče lika.

Izračunaj na ta način:

(a) prostornino in površino svitka (torusa), ki nastane z vrtenjem kroga s polmerom r okrog osi v ravnini v razdalji $R > r$ od središča kroga;

(b) težišče polkrožnega loka in težišče polkroga.

(17) **Arhimedov** problem o govedu (*problema bovinum*) se glasi (glej [8], str. 3): Sončni kralj je imel čredo, sestavljeno iz bikov in krav, ki so bili bele, črne ali rjave barve, nekatere živali pa so bile tudi lisaste. Belih bikov je bilo za polovico plus tretjino črnih več kot rjavih: vseh črnih bikov je bilo za četrtino plus petino črnih več kot rjavih; lisastih bikov je bilo za šestino in sedmino črnih več kot rjavih. Med vsemi kravami pa je bilo belih ravno tretjina plus četrtina vseh črnih živali, črnih ravno četrtino plus petino vseh lisastih živali, lisastih ravno petina plus šestina vseh rjavih živali in rjavih ravno šestina plus sedmina vseh belih živali. Opiši podrobnejšo sestavo celotne črede, tako da označiš z X, Y, Z, T število belih, črnih, lisastih in rjavih bikov ter z x, y, z, t število belih, črnih, lisastih in rjavih krav. Napiši nedoločeni sistem sedmih enačb z osem neznankami. Najmanjša rešitev je $X = 10.366,482$, $Y = 7.460,514$, $Z = 7.358,060$, $T = 4.149,387$, $x = 7.206,360$, $y = 4.893,246$, $z = 3.515,820$ in $t = 5.439,213$ (glej [8], str. 4).

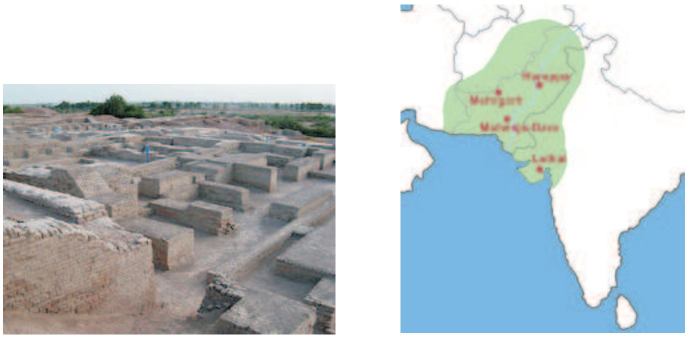
Opomba. *Gotthold Ephraim Lessing* je leta 1773 odkril v nekem grškem rokopisu bolj popolno formulacijo problema v obliki 22 parov verzov v heksametru, ki jih sicer ni pripisal Arhimedu, so pa to storili drugi, npr. *Johan Ludvig Heiberg* in *Paul Tannery* ([8], str. 6). Zanimivo je, da ta verzija zahteva v sedmem distihu, da je $X + Y = U^2$ (kvadrat) in $Z + T = V(V + 1)/2$ (trikotno število), zato se najmanjša rešitev poveča do astronomskih števil.

6. Indija in islamski svet

(A) Indijska matematika

Zgodovinski in splošni matematični okvir

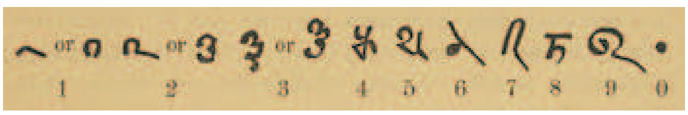
Malo je znanega o starejši indijski matematiki. Gotovo je bila na dosti visokem nivoju, kar pričajo več kot 4000 let stari ostanki mest Mohenjo Daro in Harappa v dolini Inda, z ravnimi ulicami, opečnato gradnjo, hišami s kopalnicami, javnim plavalnim bazenom, pokrito kanalizacijo, namakalnim sistemom. Poznali so pisavo, sistem štetja, tehtanje in merjenje količin.



Slika 77. Ostanki mesta Mohenjo Daro v dolini Inda

Pred kakimi 4000 leti so čez Himalajo prispeli Arijci in v naslednjih pet sto letih prevladali v Indiji. Uvedli so kastni sistem ter izpopolnili pisni in govorjeni jezik - sanskrt, v katerem sta npr. napisana klasična epa *Mahabharata* in *Ramajana.* V sanskrtu so napisane tudi *Vede*, veliki indijski verski tekst. Matematika in astronomija sta se v njih pojavili razmeroma zgodaj, krog 1500 pnš. Kasnejša oblika vedskega teksta *Sulvasutra* (ali *Sulbasutra, Shulba Sutra*) prinaša med drugim geometrijska pravila za konstrukcijo oltarjev. Matematika v *Sulvasutri* je delo več avtorjev v različnih obdobjih: **Baudhayana** ($\sim$ 800 pnš.), **Manava** ($\sim$ 750 pnš.), **Apastamba** ($\sim$ 600 pnš.) in (precej kasneje) **Katyayana** ($\sim$ 200 pnš.). Iz besedil sklepamo, da so poznali Pitagorov izrek in pitagorejske trojice, npr. (3,4,5), (5,12,13,), (8,15,17), (12,35,379). Znali so tudi izračunati $\sqrt{2}$ na pet decimalk natančno (vaja 2).

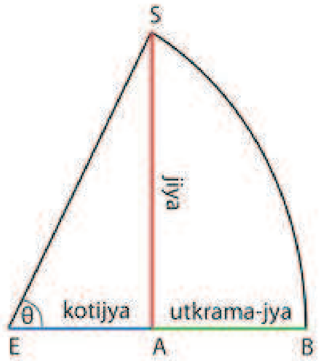
Perzijski osvajalci Indije so pod Darejem v 6. stoletju pnš. le za kratko preplavili Indijo. Iz tega časa sta znana učitelja *Mahavira* (599-527 pnš.), reformator hinduizma in začetnik jainizma, in *Gautama Buda* ($\sim$ 563-483 pnš.), začetnik budizma. Jezikoslovec **Panini** ($\sim$ 520-460) se je ukvarjal tudi s formalno logiko in geometrijo. Po kratki nadvladi Aleksandra Velikega leta 326 pnš. je bil vzpostavljen Maurijski imperij z najslavnejšim kraljem Asokom (272-232 pnš.). Iz tega časa so ohranjeni številni stebri z vklesanimi simboli za števila. V Indiji je tedaj prevladoval *jainizem* kot religija in filozofija. Za matematiko je pomemben, ker jo je osvobodil od verske in obredne vloge. Prvi dokument o tem je ti. *rokopis iz Bakšalija* (70 strani zapisanih na brezovem lubju), najden leta 1881 blizu Pešavarja v današnjem Pakistanu; nastal je najbrž v 7. stoletju, a je prepis starejših tekstov iz obdobja jainizma. Tedaj so matematiki obravnavali števila, tudi zelo velika, in prišli do pojma neskončnost (ločili so celo več vrst neskončnosti).



Slika 78. Simboli za števke iz Bakšalijskega rokopisa

Zanimivo, da se je z matematiko ukvarjal tudi glasbeni teoretik **Pingala** (3. stol. pnš.), ki je odkril binomske koeficiente in Pascalov trikotnik (imenovan *Meru Prastara*) skupaj z dejstvom, da je vsota v n-ti vrstici enaka 2^n, ter osnovno idejo o Fibonaccijevih številih. Politično pa je bilo obdobje precej nestabilno (nadvlada Selevkidov, kušanski imperij, dominacija Perzijcev). Serija invazij se je potem končala z vladavino dinastije *Gupta* (320-550).

Obdobje Gupta štejejo za zlato dobo sanskrtske renesanse, ko je Indija postala center učenja, umetnosti in medicine. Pod vplivom helenistične znanosti so bile ustanovljene prve univerze, napisano prvo pomembno astronomsko delo *Surya Siddhanta* (*Veda o Soncu*) neznanega avtorja. Vsebuje prve zametke moderne trigonometrije (npr. sinus *jya*, kosinus *kojya*).



Slika 79. Definicija sinusa in kosinusa

Matematika je bila izrazito podrejena astronomiji. Priznan astronom je bil **Varahamihira** (6. stol.) z delom *Pancha Siddhantika*, ki vsebuje dobre primere zgodnje trigonometrije (med drugim današnje formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, $(1 - \cos 2x)/2 = \sin^2 x$), povzete po Ptolemajevih tabelah tetiv (računali so polovico tetive, torej sinus polovičnega kota).

Od leta 400 do 1400 preživi Indija spet vrsto tujih invazij (Huni, Arabci, Perzijci, Turki). Kljub temu lahko imamo ta čas za klasično dobo indijske matematike. Najpomembnejši indijski astronomi in matematiki so bili **Aryabhata I** v 6. stoletju v Patni ob Gangesu (delo *Arybhatiya*), **Brahmagupta** v 7. stoletju v Ujjainu v Centralni Indiji (o matematiki govori 12. poglavje njegovega astronomskega dela *Brahmasphutasiddhanta* ali *Popravljeni sistem Brahme*), **Mahavira** v 9. stoletju v Južni Indiji (ki je v najstarejšem indijskem čisto matematičnem delu delu *Ganita Sara Samgraha* pisal o elementarni matematiki) in **Bhaskara II** v 12. stoletju z astronomskim delom *Siddhanta Siromani* (tudi *Shiromani*) in matematičnima deloma *Vijaganita* (tudi *Bijaganita*) in *Lilavati*.

Aryabhata (476-550) je avtor več del iz astronomije in matematike. Pri njem je mestni decimalni zapis prvič eksplicitno poudarjen, ničla pa je nastopala zgolj implicitno. Izračunal je vsote kvadratov in tretjih potenc prvih n naravnih števil. Sestavil je tabele sinusov in kosinusov od 0 do 90 stopinj z intervalom 3.75 stopinj na štiri decimalke natančno. Preko arabskega prevoda indijskega *jya* (*lok*) kot *jaib* (*žep*) je nastal latinski *sinus*. Odkril je razne trigonometrične formule, reševal kvadratne enačbe in diofantske enačbe, število π je ocenil na štiri decimalke natančno: 3.1416.

Brahmagupta (598-668) se je poleg astronomije ukvarjal z geometrijo (tetivni štirikotniki, trikotniki z racionalnimi stranicami in ploščino) in algebro (linearne diofantske enačbe, reševanje Pellove enačbe). Prvi je računal z nič kot s številom in v ta namen sestavil pravila.

Slika 80. Aryabhata in Brahmagupta

Bhaskara (1114-1185) je živel več stoletij kasneje. Kanoniziral je dotedanje matematično znanje: aritmetiko (koreni, zaporedja, obresti), algebro (kvadratne in kubične enačbe, tudi z več neznankami), geometrijo (dokaz Pitagorovega izreka) in trigonometrijo (adicijski izrek), analizo (pravila odvajanja, celo Rolleov izrek). Bhaskarova *Lilavati* je bila na vzhodu več stoletji standardno delo iz aritmetike in merjenja.

Omeniti moramo še eno cvetoče obdobje indijske matematike, **matematično šolo v Kerali**. Od 14. do konca 16. stoletja je v Kerali na jugu indijske podceline delovala matematična šola, ki naj bi jo ustanovil **Madhava iz Sangamagrama** ($\sim$ 1350-1425), njeni znani predstavniki pa so bili še **Narayana Pandit** ($\sim$ 1340-1400), **Parameshvara** ($\sim$ 1370-1460) in **Nilakantha Somayaji** (1444-1544). Slednji je 1501 v verzih napisal odmevno astronomsko delo *Tantrasangraha*, v katerem so opisani dosežki te šole na področju astronomije (najbolj natančni izračuni položaja planetov pred Keplerjem), trigonometrije (aproksimacija sinusa, kosinusa in arkus tangensa) in s tem v zvezi - presenetljivo - analize (seštevanje vrst, razvoj funkcij v vrsto, tudi odvajanje), s čimer je vsaj za dve sto let prehitela uradni začetek evropskega infinitezimalnega računa.

Slika 81. Madhava iz Sangamagrama

V Angliji so Brahmaguptovo delo prevedli leta 1817, Mahavirovo 1912. Na matematično šolo v Kerali pa je leta 1830 na zahodu prvi opozoril Anglež *Charles Whish.* Leta 1907 je bilo ustanovljeno moderno Indijsko matematično društvo.

Števílski sistem in računanje

Najbolj znan dosežek indijske matematike je naš sedanji *decimalni sistem* mestnih vrednosti in zapis števk (indijsko-arabske številke). Poznali so tudi ničlo, prevzeto najbrž od Babiloncev. Brahmagupta in Mahavira sta jo že obravnavala kot druga števila, tudi računanje z njo, razen deljenja, jima je šlo od rok. Tudi Bhaskara je sprva še imel težave povedati, kaj pomeni $n/0$, v *Vijaganiti* pa je temu ulomku že pripisal neskončno vrednost (spomnimo se, da so indijski matematiki dopuščali aktualno neskončnost, medtem ko je v Evropi to storil šele **Georg Cantor** konec 19. stoletja). Sistem se je v Indiji uporabljal nedvomno že dolgo, prvi zapisi so se pojavili na plošči iz leta 595.

Slika 82. Razvoj simbolov za desetiške števke

Za vsakdanje potrebe so Indijci zapisovali račune na majhne lesene plošče in jih, zaradi varčevanja s prostorom, sproti brisali. Števila so nadpisovali, sicer računali podobno kot mi, npr. 345 + 488 = (3+4 = 7), (4+8 = 2, 1 naprej, dobimo 82, (8+5 =3, 1 naprej), torej je skupen rezulta 833. V *Lilavati* je omenejena še ena metoda (štetje enot, desetic, stotic itd.). Podobno so množili, zlasti z enomestnimi števili, sicer pa kombinirali. Poznali so podobno tablico množenj s poševnim seštevanjem, npr.

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & & 1 & & 3 & & 5 & \\
\hline
 & & 1 & & 3 & & 5 & 1 \\
 & & 2 & & 6 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 6 & & 2 & & 0 & &
\end{array}$$

V Evropo se je ta sistem računanja prenesel v 15. stoletju s posredovanjem Arabcev.

Aritmetika in algebra

Pri reševanju aritmetičnih nalog so poleg metode napačne predpostavke poznali tudi metodo inverzije (računanje inverznih operacij v obratnem vrstnem redu): linearno enačbo $(3x+2)/5 = 4$ so npr. rešili z $x = (4 \cdot 5 - 2)/3 = 6$. Poznali so aritmetična in geometrična zaporedja, komercialne probleme, obrestni račun, probleme mešanja itd. Izumili so razne okrajšave, tudi kvadratne korene: število π so npr. aproksimirali z vrednostjo $\sqrt{10}$, Aryabhata pa je našel za π celo približek 3.1416 (vendar ni znano, kako). Uporabljali so formulo

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2},$$

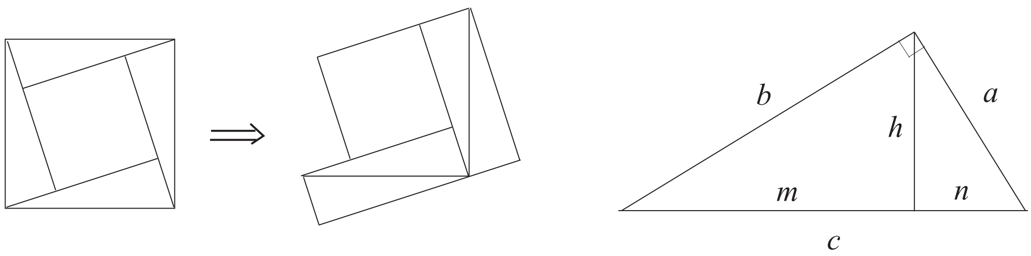
ki jo ima tudi Evklid v X. knjigi *Elementov*. Reševali so nedoločene diofantske enačbe, rešitev enačbe prvega reda $ax + by = c$ najdemo npr. pri Brahmagupti, drugega reda pri Bhaskari. Medtem ko je Diofant dopuščal rešitev z ulomki, so Indijci priznali le cela števila. So pa bili zadovoljni tudi z negativnimi rešitvami. Reševali so tudi Pellovo enačbo oblike $x^2 = ay^2 + 1$, kjer a ni popolni kvadrat (glej vajo 6). Brahmagupta je npr. dal primer $x^2 = 92y^2 + 1$ in povedal: "Kdor reši to enačbo prej kot v enem letu, je matematik". Sam je poznal eno rešitev: $x = 1151$, $y = 120$.

Pellove enačbe se imenujejo po angleškem matematiku **Johnu Pellu** (1611-1685). Kompletno teorijo takih enačb je izpopolnil šele **Joseph Lagrange** v letih 1766-1796.

Geometrija in trigonometrija

Že *Sulvasutra* prinaša uporabno geometrijo s poznavanjem Pitagorovega izreka. Brahmagupta in Mahavira sta predstavila ne samo Heronovo formulo, ampak tudi posplošitev $p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, kjer je $s = (a + b + c + d)/2$ za tetivne štirikotnike (glej vajo 8). Znana je tudi Brahmaguptova posplošitev Ptolemajevega izreka na tetivne štirikotnike (glej vajo 8). Podal je druge trditve o tetivnem štirikotniku (glej vaji 9 in 10).

Bhaskara pa je npr. podal dva dokaza Pitagorovega izreka, enega z razdelitvijo (slika 83a) in drugega s podobnimi pravokotnimi trikotniki, dobljenimi z višino na hipotenuzo (slika 83b).



(a) (b)

Slika 83. Bhaskarova dokaza Pitagorovega izreka

V trigonometriji so indijski matematiki uporabljali stopinje, minute in sekunde (slednja pomeni drugo delitev). Poznali so tabelo sinusov (polovičnih tetiv). Njihova trigonometrija je bila bolj aritmetična kot geometrijska.

Nasploh so se Indijci imeli bolj za astronome kot matematike, bili so dobri računarji in povprečni geometri. V nasprotju z Grki so matematiko gojili le duhovniki, probleme so oblačili v mistični jezik, niso ločevali med kvalitetnimi in bolj elementarnimi deli, naslanjali so se na empirično evidenco in niso čutili potrebe po dokazih.

Začetki diferencialnega računa

Prve nedvoumne moderne formule diferencialnega računa najdemo pri Bhaskari. Ni sicer poznal pojma odvoda, je pa znal aproksimirati razliko dveh sinusov:

$$\sin y - \sin x \approx (y-x)\cos x,$$

če je $x \approx y$. Prav tako je uporabljal zgodnjo obliko Rolleovega izreka: $f'(x) = 0$ za $a < x < b$, če je $f(a) = f(b) = 0$.

Nadaljnje uspehe na tem področju je kasneje dosegel **Madhava** (1350-1425), ustanovitelj matematične šole v Kerali. V začetku 15. stoletja so odkrili vrsto za arkus tangens:

$$r\operatorname{arctg}(y/x) = ry/x - ry^3/3x^3 + ry^5/x^5 - ..., \quad y < x,$$

(za $r = 1$, $x = y$ je to znamenita Leibniz-Gregoryjeva vrsta) ter vrsti za sinus in kosinus:

$$r\sin(x/r) = x - x \cdot x^2/(2^2+2)r^2 + x \cdot x^2/(2^2+2)r^2 \cdot x^2/(4^2+4)r^2 - ...$$

in

$$r(1-\cos(x/r)) = r \cdot x^2/(2^2-2)r^2 - r \cdot x^2/(2^2-2)r^2 \cdot x^2/(4^2-2)r^2 + ...$$

Madhavi pripisujejo tudi naslednji aproksimativni formuli ([29]):

$$\sin(x + h/r) \approx \sin x + (h/r)\cos x - (h^2/2r^2)\sin x + (h^3/6r^3)\cos x,$$

$$\cos(x + h/r) \approx \cos x - (h/r)\sin x + (h^2/2r^2)\cos x.$$

Pomen indijske matematike

Nekoč je bil indijski prispevek k razvoju matematike bolj ali manj spregledan (razen decimalnega mestnega sistema), danes pa čedalje bolj ugotavljajo njegovo prvenstvo in pomen na različnih področjih, npr. trigonometrija (*Surya Siddhanta* in Aryabhata) in teorija vrst (šola v Kerali).

Posebna literatura:

- K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)

(B) Islamska matematika

Zgodovinski okvir

Vzpon in zaton arabskega imperija vključno z njegovo kulturo je ena najbolj spektakularnih epizod v zgodovini človeštva. V desetletju po Mohamedovem odhodu iz Meke v Medino leta 622 so se razkropljena arabska plemena pod vplivom enotne verske ideje združila v uspešen narod. V naslednjem stoletju so Arabci razširili svoj vpliv in uveljavili svoj zakon od Indije, preko Perzije, Mezopotamije in Severne Afrike vse do Španije.

Razdelitev na vzhodni (Bagdad) in zahodni (Cordoba) kalifat se je zgodila leta 755. Vzhod je približno do leta 1000 obdržal duhovno prvenstvo; ko so vzhodne dežele zasedli seldžuški Turki, pa se je center arabske kulture premaknil v Španijo. Križarske vojne med leti 1100 in 1300 niso ogrozile arabske vladavine.

Leta 1258 so Bagdad zasedli Mongoli, v 15. stoletju se je z uspešno rekonkvisto končala tudi mavrska vladavina v Španiji.

Predstavniki arabske matematike

Arabski znanstveniki so nadaljevali indijsko in grško (helenistično) tradicijo. Prevedli so mnoge matematične knjige in jih na ta način ohranili za prihodnost. V 8. in 9. stoletju so bagdadski kalifi podpirali astronomijo in matematiko. Kalif *al Mansur*, ki je vladal v letih 754-775, je npr. dal v arabščino prevesti indijske astronomske razprave, *Harun al Rašid* (vladar 786-809) in njegov sin *al Mamun* (vladar 813-833) sta to nadaljevala in dala prevesti tudi grško matematiko. Poleg tega je al Mamun v Bagdadu zgradil *Hišo modrosti* s knjižnico in observatorijem, kjer se je tudi sam ukvarjal z astronomijo.

Omenjene prevode so opravili krščanski učenjaki iz Sirije. **Mohamed ibn Ibrahim al Fazari** je (skupaj z **Jakubom ibn Tarikom**) konec 8. stoletja prevedel v arabščino Brahmaguptovo astronomsko delo *Brahmasphutasiddhanta*, ki je postalo znano kot *Sindhind*. **Al Hajjaj ibn Jusuf ibn Matar** pa je prevedel Ptolemajev *Almagest* in Evklidove *Elemente*, slednje celo dvakrat, prvič za Haruna al Rašida in drugič za al Mamuna.

Slika 84. Abu Jafar Mohamad ibn Musa al Hvarizmi

Mohamad ibn Musa al Hvarizmi (780-850), po rodu iz perzijske Horezmije, eden prvih uveljavljenih arabskih matematikov, je skupaj z al Fazarijem in al Hajjajem delal v bagdadski *Hiši modrosti* in sestavil natančne astronomske tablice Zij. Najbolj slaven pa je zaradi razprave o algebri *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* (*Veda o dopolnjevanju in izravnavanju*) in knjige o indijskem desetiškem številskem sitemu, ki je imela s prevodom v latinščino v 12. stol. velik vpliv na evropsko matematiko. Sploh je skušal združiti indijsko in grško znanost; imenovali so ga *arabski Evklid*. Njegovo delo sta v 9. in 10. stoletju nadaljevala **Abu Kamil** (850-930), ki je tudi napisal knjigo o algebri, in **al Karaji** (953-1029), ki je osvobodil algebro geometrije.

Slika 85. Stran iz Hvarizmijeve knjige *Hisab al-jabr wal-muqabala*

V 9. stoletju je deloval tudi **Tabit ibn Qurra** (tudi **Qorra**) (836-901), zdravnik, filozof, lingvist, astronom in matematik. Uredil je novo izdajo Evklidovih *Elementov* v prevodu **Ishaka ibn Hunajna**, prevajal Apolonija (tri njegove zadnje knjige so nam znane le preko Tabitovih prevodov) in Arhimeda (npr. razpravo *O krogli in valju* ali izgubljeno razpravo o konstrukciji pravilnega sedemkotnika). V astronomiji je sledil Ptolemaju in bil prvi reformator njegovega sistema. V mehaniki velja za začetnika statike. Malce kasneje je živel **al Batani** (latinsko **Albategnius** (858-929), eden največjih arabskih astronomov in mojster trigonometrije (napisal *Zij as Sabi*, *Sabejske tablice*, revidiral *Almagest*). Oba s Tabitom sta bila Sabejca, prvi iz Harana (sloh ni hotel sprejeti islamske vere), drugi iz Rake, delovala pa sta v Bagdadu, v krogu matematikov bratov **Banu Musa**.


Slika 86. Tabit ibn Qurra (levo) ter Abul Wafa (desno)

Največji islamski matematik in astronom v 10. stoletju je bil **Abul Wafa al Buzjani** (tudi **Wefa**) (940-998), rojen v perzijskem Horasanu, od 1960 živel v Bagdadu in postal ljubljenec kalifov in vezirjev. Je avtor astronomskega dela *Kitab az-Zij*, ukvarjal se je s sferno trigonometrijo. Kot matematik je znan po prevodih Diofanta, uvedbi tangensa v trigonometrijo in trigonometričnih tabelah sinusov in tangensov. Njegov mlajši rojak iz Horezmije, **al Biruni** (973-1048), latinsko **Alberonius**, se je odlikoval v fiziki, matematiki, astronomiji, zgodovini, geografiji ("oče geodezije") in lingvistiki. Znal je klasične jezike (grško, hebrejsko, sirijsko, arabsko, perzijsko). Med potjo v Indijo se je naučil tudi sanskrt in sploh bil eden največjih posrednikov indijske matematike v arabskem svetu.

V Egiptu je okrog leta 1000 živel največji arabski fizik **Hasan ibn al Haitham** (latinsko **Alhazen**) (965-1038), rojen v Basri, znan po delu *Kitab al-Manazir* (*Knjiga o optiki*). Prvi je pravilno razložil, zakaj vidimo. V naravoslovje je uvedel eksperimentalni pristop. Na matematičnem področju je pisal komentarje o grških matematikih (Evklidu, Ptolemaju), trudil se je z dokazovanjem Evklidovega postulata o vzporednicah, njegov problem o krožnem biljardu so kasneje reševali znani matematiki.

Slika 87. Hasan ibn al Haitham

Najgloblji in najbolj originalen prispevek k algebri pa je dal **Omar Hajam** (1038-1123), doma iz Nišapura v perzijskem Horasanu, matematik, astronom, reformator starega perzijskega koledarja (napaka enega dneva v 5000 letih), filozof in pesnik (znan po zbirki pesmi *Rubaijata*). Podal je kompletno klasifikacijo kubičnih enačb, katerih rešitev je znal poiskati s preseki stožnic (glej vajo 17).

Slika 88. Omar Hajam (slika Edwarda FitzGeralda)

Naslednji pomembni matematik je bil **Šaraf al Din al Tusi** (1150-1215), ki je tudi reševal kubične enačbe. Kasneje, že pod mongolsko vladavino, pa je bil glavni matematik **Nasir al Din** (tudi *Eddin*) **al Tusi** (1201-1274), iz mesta Tus v perzijskem Horasanu, kjer je umrl Harun al Rašid, kjer je živel in je tam pokopan pesnik Firduzi. Nasir je bil izmaelit, eden največjih perzijskih znanstvenikov srednjega veka, ki je ločil trigonometrijo od astronomije in cenil grško znanost (tudi on je hotel dokazati postulat o vzporednicah in je vplival na kasnejše Saccherijevo delo).

Slika 89. Nasir al Din al Tusi

Zadnji veliki islamski astronom in matematik je bil **Gijat al Din Jamšid Masud al Kaši** (1380-1429), tudi Perzijec iz Kašana, deloval pa je na observatoriju v Samarkandu pod pokroviteljstvom mongolskega sultana **Ulugbega**, ki je bil tudi sam matematik in astronom. S sodelavci je al Kaši sestavil tabele sinusov in tangensov (*Zij al Sultani*). Bil je dober numerik, prvi je npr. izračunal zelo natančno sinus ene stopinje, na 16 decimalnih mest natančno je izračunal tudi število π. Kosinusni izrek nekateri imenujejo tudi al Kašijev izrek. Njegovo najboljše delo je moderno in pregledno napisana razprava *Ključ aritmetike* (*Miftah al-hisab*), ki ga je učenec **al Kušči** prinesel po Ulugbegovi smrti v Istanbul.

Aritmetika in algebra

Prvotno so števila in aritmetične račune zapisovali z besedami, kasneje je prevladala indijska notacija (zanimivo, da sta Abul Wafa in al Karaji spet začela uporabljati besede pod vplivom grške tradicije). Od Indijcev so privzeli razna računska pravila, npr. *pravilo treh*, današnji sklepni račun (sorazmerja). Prva, al Hvarizmijeva, aritmetika je izkazovala malo originalnosti. Razložene so bile štiri računske operacije, rešena linearna in kvadratna enačba (aritmetično in geometrično). Prvi originalni prispevek je bilo ibn Qurrovo pravilo za iskanje prijateljskih števil (glej vajo 14) in al Karajijeva izpeljava vsote kvadratov in kubov prvih naravnih števil. Največji arabski prispevek pa je bil najbrž storjen na področju geometrijske algebre (npr. Omar Hajamova rešitev kubične enačbe ali Abul Wafova rešitev nekaterih kvartičnih enačb).

Geometrija in trigonometrija

Na tem področju so Arabci bolj kot po originalnih delih pomembni zaradi ohranjanja grške tradicije. Abul Wafa je konstruiral pravilne poliedre z uporabo šestila s fiksno odprtino (primerjaj vajo 18), Omar Hajam z geometrijo rešil kubično enačbo (vaja 17) in Nasir al Din dokazoval postulat o vzporednicah. Prav tako je podal dokaz Pitagorovega izreka, identičen tistemu za Paposovo posplošitev. Iz geometrije je znan tudi al Haithamov problem krožnega biljarda (vaja 19). Kot Indijci so se tudi Arabci prvenstveno imeli za astronome, zato so se tudi zanimali za trigonometrijo. Izdelovali so natančne trigonometrične tabele, izpeljevali enačbe sferne trigonometrije, npr. *kosinusni zakon* za sferični trikotnik (**al Batani** ~ 920) $\cos a = \cos b \cos c + \sin cb \sin c \cos A$ in *Gebrov izrek* (**Jabir ibn Aflah** iz Seville ~ 1130) $\cos B = \cos b \sin A$ za pravokotni sferični trikotnik.

Mnogi dnanšnji matematični izrazi izhajajo iz arabščine: npr. mnoga imena zvezd in ozvezdij (*Aldebaran*, *Vega*, *Rigel*, *Algol*, *Alcor*, *Mizar*), beseda *algebra* (*al jabr*), *algoritem* (iz latinizirane oblike imena al Hvarizmi), *sinus* (Arijabhata *jya*), Arabci *jiba*, kasneje *jaib*, naročje, **Gerardo iz Cremone** ~ 1150 *sinus*). Arabski matematiki so napravili določen napredek v času, ko drugje matematika ni napredovala. Vsekakor pa je njihov ogromni pomen v ohranjanju svetovne matematične (in znanstvene) dediščine.

Vaje:

(1) Dve izmed nalog iz *Bakšalijskega rokopisa* se glasita:
(a) Trgovec plača za neko blago na prvem mestu dajatev v višini 1/3 vrednosti blaga, na drugem mestu 1/4 od razlike in na tretjem še 1/5 od ostanka. Vseh plačanih dajatev skupaj je za 24 denarjev. Kolikšna je bila originalna vrednost blaga?
(b) V skupini 20 ljudi so možje, žene in otroci. Mednje razdelimo 20 kovancev, vsak moški dobi 3 kovance, vsaka ženska 1,5 in vsak otrok 0,5 kovanca. Koliko je mož, koliko žena in koliko otrok v skupini?

(2) Za računanje kvadratnega korena iz 2 se že v *Sulvasutri* pojavi približek: $\sqrt{2} \approx 1 + 1/3 + 1/3 \cdot 4 - 1/3 \cdot 4 \cdot 34 = 577/408 \approx 1.414216$. Prepričaj se, da je lahko ta približek dobljen iz formule $\sqrt{a^2 + r} = a + r/2a - (r/2a)^2/(2a + r/a)$ pri $a = 4/3$ in $r = 2/9$. Aryabhata je kasneje natančno popisal proceduro, podobno današnji, za računanje kvadratnih in kubičnih korenov (glej [30]).

(3) Indijci so spretno računali s kvadratnimi koreni. Reši naslednje naloge:
(a) Pokaži, da ne more veljati enakost $\sqrt{a} = r + s\sqrt{b}$, če so $a, b, r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ in $\sqrt{a}, \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
(b) Pokaži, da iz $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ in $\sqrt{b}, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ sledi $a = c$ in $b = d$.
(c) Zapiši $\sqrt{17 + \sqrt{240}}$ v obliki vsote dveh korenov.

(4) Linearno diofantsko enačbo z dvema neznankama $ax + by = c$ je treba rešiti v celih številih. Naj bosta a, b tuji si števili, tako da je enačba rešljiva za vsak c. Pokaži:
(a) Če je par celih števil x_1, y_1 rešitev enačbe, je vsaka rešitev oblike $x = x_1 + mb$, $y = y_1 - ma$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$.
(b) Poišči vse rešitve enačb $7x + 16y = 209$ in $23x + 37y = 3000$.

(5) Že pri **Brahmagupti** ~ 630 najdemo v besedilo zavite algebraične naloge, npr.:
(a) Dva asketa živita na vrhu strme pečine, visoke h metrov, podnožje pa je d metrov oddaljeno od sosednje vasi. Eden od asketov se spusti po pečini in odkoraka v vas. Drugi, čarovnik, se dvigne x metrov in potem poleti naravnost proti vasi. Oba prepotujeta enako pot. Kako visoko je moral poleteti drugi asket?
(b) 18 metrov visoki bambusni trs se prelomi tako, da en njegov konec pade na zemljo 6 metrov od korenine. Kje se je prelomil? (Starejša verzija take naloge se nahaja v kitajski knjigi *Aritmetika v devetih poglavjih* iz leta 176 pnš.)

(6) Z uporabo Brahmaguptove formule (glej [37])

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - ay_2^2) = (x_1x_2 + ay_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2,$$

ki je posplošitev Diofantove identitete $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = (x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2$, pokaži, da je tudi par (x, y), kjer je $x = x_1x_2 + ay_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$, rešitev Pellove enačbe $x^2 = ay^2 + 1$, če sta rešitvi para (x_1, y_1) in (x_2, y_2).

(7) **Brahmaguptov štirikotnik** je v krog s polmerom r včrtan (tetivni) štirikotnik z zaporednimi stranicami a, b, c, d, diagonalama e, f in semiperimetrom $s = (a + b + c + d)/2$. Pokaži:
(a) da je njegova ploščina enaka $p = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$ (uporabi sinusni in kosinusni izrek za dva trikotnika, ki sestavljata štirikotnik),
(b) da je Heronova formula poseben primer Brahmaguptove formule,
(c) da je $p = \sqrt{abcd}$, če je štirikotnik hkrati tangentni.

(8) **Brahmaguptova posplošitev Ptolemajevega izreka** za tetivni štirikotnik s stranicami a, b, c, d in diagonalama e, f, o kateri poroča tudi Mahavira, je v tem, da je znal eksplicitno izraziti diagonali s stranicami. Z uporabo kosinusnega izreka izpelji naslednji **Brahmaguptovi formuli**:

$$e^2 = (ac + bd)(ab + cd)/(ad + bc),\ f^2 = (ac + bd)(ad + bc)/(ab + cd).$$

(9) Dokaži, da v poljubnem trikotniku s stranicami a, b, c, višino h na stranico c in polmerom r očrtanega kroga velja $ab = 2rh$. S pomočjo tega dokaži še naslednje trditve o Brahmaguptovem štirikotniku:

(a) Če je θ kot med katerokoli diagonalo in pravokotnico na drugo diagonalo, velja

$$ad + bc = 2re\cos\theta,\ ab + cd = 2rf\cos\theta.$$

(b) Z uporabo točke (a) in Ptolemajevega izreka ponovno izračunaj dolžini obeh štirikotnikovih diagonal.

(10) Naj se v Brahmaguptovem štirikotniku diagonali sekata pravokotno (npr. v točki M). Dokaži:

(a) da to velja natanko takrat, ko je $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$,

(b) da potem normala iz M na poljubno stranico razpolavlja nasprotno stranico,

(b) da za polmer r očrtanega kroga tedaj velja $4r^2 = (ab + cd)(ad + bc)/(ac + bd)$.

(11) **Bramaguptov trapez** je tetivni štirikotnik z zaporednimi stranicami aC, cB, bC in cA, pri čemer velja $a^2 + b^2 = c^2$ in $A^2 + B^2 = C^2$.

(a) Pokaži, da ima Brahmaguptov trapez z racionalnimi a, b, c, A, B, C tudi racionalno ploščino in racionalni diagonali, ter da se diagonali sekata pravokotno,

(b) Poišči stranice, diagonali, polmer očrtanega kroga in ploščino Brahmaguptovega trapeza, ki ga določata pitagorejski trojici (3,4,5) in (5,12,13).

(12) **Mahavira** je ~ 850 objavil več podobnih nalog:

(a) Na dvor so pripeljali večjo količino sadežev manga. Kralj si vzame šestino od vsega sadja, kraljica petino od ostanka, vsak od treh kraljevičev četrtino, tretjino in polovico od zaporednih ostankov, najmanši otrok pa dobi tri sadeže. Koliko je bilo vsega sadja pripeljanega na dvor?

(b) Vrednost 9 citron in 7 granatnih jabolk znaša 107, vrednost 7 citron in 9 granatnih jabolk pa 101. Kolikšna je cena samo citron in samo granatnih jabolk?

(c) Četrtino črede kamel so opazili v gozdu, dvakratni kvadratni koren iz celotnega števila kamel se je umaknil na pobočje gore, trikrat po pet kamel pa je ostalo ob reki. Koliko je bilo vseh kamel skupaj?

(13) **Bhaskara** ~ 1150 je rad zastavljal probleme v verzih. Reši naslednje naloge v prevodu Franceta Križaniča (glej [25]):

(a) Čebelice v roju hitijo k napoju, cetovi vsi polni so meda,
h kadambi petina k silindhi tretjina čebelic na cvetje se useda.
Trikratna razlika obojih pa vtika srkala v cvetove kutaje,
le ena se sama od cveta pandama k jasminu preleta igraje,
s pijačo medeno naklonjenost njeno obadva bi rada dobila.
Ti - dražestna moja - povej, si že roja število čebel uganila?

(b) Osel in mula navkreber tovorita težki bremeni.
Peza osleta tišči, da stoka in milo vzdihuje.
Mula opazi le-to in reče skrbečemu drugu:
Starček, povej, kaj se jočeš in tožiš kot šibko dekletce?
Dvakrat več nosim kot ti, če eno odstopiš mi vrečo.
Če pa jaz eno ti dam, enaka sta tvoj in moj tovor.
Dej, odgovori mi, vedec, kaj nosil je osel, kaj mula!

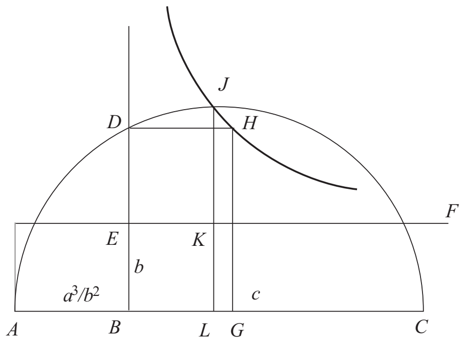
(c) Opic trop je skrit v votlini. Tri odvzemi vseh petini in kvadriraj, kar ostane.
To vseh skritih je število. Eni le se ni ljubilo med tovarišice zbrane
pa se urno vzpne med veje, prekopica se in smeje razposajenost igriva.
Jasnooka Lilavati! Daj, poskusi razvozlati, koliko se opic skriva?

(14) **Tabit ibn Qurra** (826-901) je iznašel naslednjo metodo za iskanje prijateljskih števil: če so $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ in $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ tri liha praštevila, je $2^n pq$ in $2^n r$ par prijateljskih števil. Preveri to pravilo za $n = 1, 2, 3, 4$.

(15) **Al Karaji** je ~ 1020 napisal algebrajsko delo *Fahri*. Eden od problemov je bil poiskati par racionalnih števil z lastnostjo, da je vsota njunih kubov kvadrat racionalnega števila: $x^3 + y^3 = z^2$. Pokaži, da je rešitev $x = n^2/(1 + m^3)$, $y = mx$, $z = nx$, ki jo je našel al Karaji, prava in jo preveri za $m = 1, 2$, $n = 1, 2, 3$.

(16) Islamski matematiki so poznali pravilo, da je ostanek števila pri deljenju z 9 enak ostanku vsote njegovih števk pri deljenju z 9. Dokaži:
(a) ostanek (pri deljenju z 9) vsote dveh števil je enak ostanku vsote ostankov,
(b) ostanek (pri deljenju z 9) produkta dveh števil je enak ostanku produkta ostankov.
Seštej in zmnoži števili 478 in 993 ter preveri zgornji pravili.

(17) **Omar Hajam** je znal geometrijsko rešiti vsak tip kubične enačbe, ki je imela pozitivno rešitev, npr. enačbo oblike $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$, $a, b, c > 0$, ki jo je opisal z besedami: "kub, nekaj stranic in nekaj števil je enako nekaj kvadratov". Preveri in izpopolni naslednji postopek:
(a) Iz danih dolžin a, b konstruiraj z ravnilom in šestilom a^3 in a^3/b^2.
(b) Naj bodo A, B, C kolinearne točke z lastnostjo $AB = a^3/b^2$ in $BC = c$. Pravokotnica na AC v B naj seka polkrožnico s premerom AC v točki D. Na BD označimo $BE = b$ in skozi E potegnemo vzporednico EF k AC. Naj bo G taka točka na BC, da je $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ in eno oglišče pravokotnika $DBGH$. Skozi H načrtajmo pravokotno hiperbolo z asimptotama EF in ED. Hiperbola naj seka polkrožnico v točki J, vzporednica k DE skozi J pa premico EF v točki K in premico BC v točki L (glej sliko 90).



Slika 90. Hajamova rešitev kubične enačbe

Pokaži zapored naslednje relacije:
(i) $(EK)(KJ) = (BG)(ED) = (BE)(AB)$,
(ii) $(BL)(LJ) = (BE)(AL)$,
(iii) $(LJ)^2 = (AL)(LC)$,
(iv) $(BE)^2/(BL)^2 = (LJ)^2/(AL)^2 = LC/AL$,
(v) $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$,
(vi) $b^2(BL + a^3/b^2) = (BL)^2(c - BL)$,
(vii) $(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$.
Torej je BL (pozitivni) koren dane kubične enačbe.

(18) Islamski matematiki so se zanimali za konstrukcije na sferi. Za dano materialno (železno, leseno) kroglo z evklidskim orodjem in ustrezno ravninsko konstrukcijo
(a) poišči premer krogle,
(b) točke na sferi, ki so oglišča včrtane kocke.

(19) **Ibn Haitham** (**Alhazen**) je v svoji *Optiki* zastavil naslednjo nalogo:
Imamo krog in v njem dve točki A in B. Na krožnici poišči točko, v kateri se odbije žarek iz A tako, da poteka skozi B.
Naloga je težja in se prevede na iskanje presečišča med hiperbolo in krožnico (glej [8]).

II. MATEMATIKA SREDNJEGA IN NOVEGA VEKA

Evropa se je ravno s posredovanjem arabskih in perzijskih naravoslovcev, matematikov in astronomov seznanila z matematičnimi dosežki starih civilizacij. Najprej si bomo ogledali (bolj skromna) prizadevanja evropskih matematikov v srednjem veku, da bi vsaj obdržali določen (elementarni) nivo matematične kulture, tudi s prevajanjem antičnih tekstov iz arabščine v latinščino in kasneje v druge jezike. Z iznajdbo tiska je postalo matematično znanje bolj dostopno in v renesansi so že dosegli prve uspehe pri reševanju enačb in v astronomiji. Odkrili so nova matematična orodja (npr. logaritme) in cele nove matematične discipline (verjetnost, analitično geometrijo, moderno teorijo števil, kasneje v 17. stoletju infinitezimalni račun). Prikaz evropske zgodovine matematike bomo zaključili z Eulerjem in potem podali še kratek pregled njenega nadaljnjega razvoja v 19. stoletju.

7. Srednji vek in renesansa

Splošne razmere

S propadom Rimskega cesarstva so propadle tudi uveljavljene šole in univerze, pozabljena je bila grška tradicija, mnoga znanja, številne obrti in umetnosti. Izginila je celo inženirska matematika, ki so jo prakticirali Rimljani. Določeno vedenje o matematiki so gojili le še menihi po samostanih (v glavnem v zvezi s cerkvenim koledarjem) in redki posamezniki. Med izstopajočimi osebnostmi, ki so znali nekaj matematike, omenimo naslednje:

Boecij (**Boethius**) (480-525) iz Rima, filozof, ustanovitelj sholastike, je napisal standardne učbenike za aritmetiko (po Nikomahu iz 1. stoletja) in geometrijo (v glavnem le snov I. in del II. in IV. knjige Evklidovih *Elementov*). Bil je konzul pod ostrogotsko vladavino; zaradi (najbrž lažne) obtožbe o izdajstvu ga je dal umoriti Teodorik Veliki.

Beda Častitljivi (673-735), rojen v Northumbriji v Angliji, je postal eden največjih cerkvenih učenjakov in je pisal o matematičnih osnovah koledarja ter računanju na prste.

Alkuin (735-804), rojen v Yorkshiru v Angliji, deloval pa kot učitelj na dvoru Karla Velikega, je v matematičnem smislu znan predvsem po zbirki problemov *Za bistrenje mladih*, v kateri je vrsta znanih starih ugank in nalog (npr. tista o volku, kozi in zelju).

Gerbert d'Aurillac (950-1003), kasnejši papež Silvester II., je bil eden najbolj izobraženih cerkvenih dostojanstvenikov svojega časa. Študiral je tudi arabske tekste v Španiji in morda prvi prinesel v Evropo znanje o indijsko-arabskih številkah (brez ničle). Pripisujejo mu tudi uvedbo računala (abacusa), uporabo zemeljskega in nebesnega globusa (sferičnega astrolaba), konstrukcijo prve mehanske ure (v Magdeburgu) in nekateri tudi izgradnjo orgel v katedrali v Reimsu.

Prenašanje starega znanja

Dobo po letu 1100 lahko na področju matematike imenujemo tudi dobo prenosa grške in arabske tradicije in znanja v krščansko Evropo. To se je dogajalo hkrati po treh poteh. Krščanski učenjaki so potovali v arabska središča učenosti, predvsem v tiste dele Španije, ki so jo ponovno zasedli kristjani. Toledo je bil npr. osvobojen leta 1085 izpod mavrske nadvlade in njegova bogata knjižnica je v naslednjem stoletju postala zaželjeni cilj mnogih učenjakov in prevajalcev.

Eden prvih je bil **Adelard iz Batha** (1075-1164), ki je potoval tudi v Grčijo, Sirijo in Egipt, prevajal Evklidove *Elemente* in al Hvarizmijeve astronomske tabele. **Ivan iz Seville** (1090-1150) je prevajal direktno v kastiljščino. **Robert iz Chestra** je prevedel al Hvarizmijevo algebro. Bil je pariški študijski kolega in prijatelj našega **Hermana Koroškega** ($\sim$ 1100-1160), ki je v Toledu prav tako prevajal različne arabske spise (zlasti astronomske in verske) v latinščino in prispeval tudi nekaj originalnih filozofskih in matematičnih razprav. Z Robertom sta delala skupaj, oba npr. prevajala koran ter skupaj potovala tudi v Carigrad, Palestino in Damask. **Platon iz Tivolija**, ki je od 1132 do 1146 živel v Barceloni, je bil prevajalec al Batanijeve astronomije in Teodozijevih *Sferik*. Najbolj marljivo pa se je prevajanja lotil **Gerardo iz Cremone** (1114-1187), ki je v latinščino prevedel več kot 90 arabskih del, med njimi Ptolemajev *Almagest*, Evklidove *Elemente* in al Hvarizmijevo algebro.

Slika 91. Herman Koroški, ilustracija iz 13. stoletja

Posrednik med vzhodom in zahodom je bila tudi Sicilija z zanimivo zgodovino. Najprej je bila grška kolonija, potem del Rimskega imperija, po propadu Rima povezana s Konstantinoplom oziroma Bizancem, bila petdeset let pod Arabci v 9. stoletju, nato so jo spet osvojili Bizantinci in nazadnje Normani. Njeni diplomati so stalno potovali na vzhod, v Bizanc in Bagdad, uporabljali tako latinščino kot arabščino, ter pridobili veliko grških in arabskih rokopisov. To dejavnost sta močno podpirala vladarja Friderik II. (1194-1250) in njegov sin Manfred (1231-1260).

Poleg tega so se v 12. in 13. stoletju zaradi trgovskih stikov z arabskim svetom močno razvila italijanska mesta Genova, Pisa, Benetke, Milano in Firence. Trgovci so se na svojih poslovnih poteh dodobra seznanili z računsko in algebrsko prakso vzhoda, kar je imelo pomembno vlogo pri njeni vpeljavi v Evropo vključno z modernim indijsko-arabskim številskim sistemom.

Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170-1250) je bil eden najbolj nadarjenih matematikov srednjega veka. Znan je tudi kot **Leonardo iz Pise** ali **Leonardo Pisano**.

Slika 92. Leonardo iz Pise, imenovan Fibonacci

Bil je sin trgovca Bonaccija, ki ga je jemal na svoja poslovna potovanja na Sicilijo, v Alžirijo, Grčijo, Sirijo in Egipt. Svoja matematična spoznanja, ki si jih je pridobil v stikih z Arabci, je leta 1202 opisal v svoji slavni knjigi *Liber abbaci*. Druga izdaja je izšla leta 1228. Knjiga, posvečena aritmetiki in algebri, kaže močan vpliv **al Hvarizmija** in **Abu**

Kamila ter zagovarja indo-arabsko notacijo, vključno z ničlo. V 15 poglavjih predstavlja računanje s celimi števili in ulomki, kvadratnimi in kubičnimi koreni, reševanje linearnih in kvadratnih enačb (negativnih in imaginarnih korenov ne pozna) ter slavno zaporedje 1,1,2,3,5,.. števil, danes imenovano po avtorju. Velika zbirka problemov v *Liber abbaci* je več stoletij dobro služila študentom matematike.

Slika 93. Stran iz knjige Liber abbaci, na desni so napisana Fibonaccijeva števila

Fibonacci je napisal še druge knjige: *Practica geometriae* 1220, *Liber quadratorum* 1220 (verjetno najgloblje delo o analizi nedoločenosti). To ga uvršča med najpomembnejše algebraike med Diofantom in Fermatom. Zaradi nedvomnega matematičnega talenta so ga povabili na dvor Friderika II., kjer je na matematičnem turnirju rešil različne težke probleme, npr. poiskal racionalno število x, tako da sta $x^2 - 5$ in $x^2 + 5$ kvadrata racionalnih števil (takoj je našel rešitev $x = 41/12$ in jo kasneje objavil v *Liber quadratorum*; omenimo, da je to možno, ker je 5 - najmanjše - ti. kongruentno število), ali poiskal (na 9 decimalk natančno) približno rešitev 1.3688081075 kubične enačbe $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ter pokazal, da rešitev ni racionalna in da se ne izraža s koreni oblike $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

Drugi matematiki v 13., 14. in 15. stoletju

Poleg Fibonaccija se zdijo drugi matematiki 13. stoletja le njegove blede sence. Vseeno omenimo nekatere: **Jordanus Nemorarius** (1225-1260) je pisal o aritmetiki, algebri, geometriji, astronomiji in statiki, prvi je uporabljal črke za splošna (obča) števila. **Johannes de Sacrobosco** (1195-1256), angleški (morda škotski ali irski) menih, se je šolal in potem poučeval na univerzi v Parizu in je avtor v srednjem veku avtoritativnega astronomskega dela *Tractatus de Sphaera* (po Ptolemajevem *Almagestu* in nekaterih arabskih spisih). **Johannesa Campanusa** (1220-1296) iz Novare, prevajalca Evklidovih *Elementov* in astronoma (prvi opis planetarija), smo že omenili. Eden največjih filozofov tega časa, **Roger Bacon** (1214-1294), je študiral v Oxfordu, postal frančiškan, zagovornik znanstvene metode, poznavalec grške in arabske tradicije. Sicer nematematik je pisal tudi o matematiki (njegovo obsežno delo *Opus majus* (1267, 840 strani) vsebuje tudi matematiko in optiko ter izračune položaje in velikosti nebesnih teles).

Sholastiki visokega srednjega veka so poleg praktične matematike prispevali tudi k spekulativni matematiki, teoretizirali so o neskončnosti, gibanju in kontinuumu, diskretnosti in zveznosti (npr. cerkveni učitelj **Tomaž Akvinski** (1225-1274) ali **Thomas Bradwardine** (1290-1349), canterburijski nadškof).

Ni odveč pripomniti, da so v tem času v Evropi nastale in se razvile *prve univerze*: Bologna 1088, Pariz 1150, Oxford 1167, Cambridge 1209, Padova 1222, Napoli 1224, Toulouse 1229, Siena 1240, Coimbra 1290, Madrid 1293, Rim 1303, Firence 1321, Pisa 1343, Praga 1361, Krakow 1364, Dunaj 1365 in Heidelberg 1386.

Štirinajsto stoletje, ki ga je prizadela črna smrt (kuga) in poleg stoletne vojne zmanjšala evropsko prebivalstvo za eno tretjino, je bilo matematično revno. Največji matematik tega obdobja je bil **Nicole Oresme** (1323-1382), ki je bil rojen v Normandiji in postal škof. Napisal je pet matematičnih del in prevedel Aristotela. Prvi je govoril o lomljenih eksponentih in se približal koordinatnemu sistemu, znan je njegov dokaz (ki ga uporabljamo še danes in temelji na združevanju 2^n zaporednih členov), da divergira harmonična vrsta

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$$

V petnajstem stoletju, ko se je pričela renesansa v umetnosti in učenju, so po padcu Bizanca 1453 begunci v Italijo prinesli zaklade grške civilizacije. Zdaj so lahko tudi zahodnjaki grške klasike študirali v originalu, ne le posredno preko arabskih prevodov. Sredi stoletja so tudi iznašli tisk, ki je omogočil hitrejše širjenje informacij. Konec stoletja so odkrili Ameriko. Matematična dejavnost je bila najbolj živa v italijanskih in srednje evropskih mestih (Nürnberg, Dunaj, Praga), kjer so se ukvarjali z aritmetiko, algebro in trigonometrijo, v glavnem zaradi trgovine, navigacije in astronomije.

Nicolas Cusa (1401-1464), iz mesta Cues v francoski provinci Moselle; postal je kardinal, leta 1448 celo guverner Rima, z matematiko se je ukvarjal bolj slučajno, poskusil se je v reformi koledarja, kvadraturi kroga in tretjinjenju kota.

Georg von Peurbach (1423-1461), Cusov učenec, je učil astronomijo v Italiji in na Dunaju, kjer je naredil univerzo, ustanovljeno 1365, za center učenosti in raziskovanja. Sestavil je tabelo sinusov, pisal o aritmetiki in astronomiji ter začel iz grščine prevajati Ptolemajev *Almagest*.

Johann Müller ali **Regiomontanus** (1436-1476) iz bavarskega Königsberga je študiral pri Peurbachu na Dunaju, dokončal prevod *Almagesta* ter iz grščine prevedel še dela Apolonija, Herona in Arhimeda. Najboljše njegovo delo *De triangulis omnimodis* iz leta 1464 (posthumno izdano leta 1533) je prva evropska sistematična predstavitev ravninske in sferične trigonometrije, neodvisna od astronomije (pet knjig o določanju trikotnika, npr. če je dana stranica, višina nanjo in razmerje ostalih dveh stranic ipd., sinusni zakon sferne trigonometrije). Kasneje je sestavil tudi tabelo tangensov. Potoval je po Italiji in Nemčiji ter se ustalil v Nürnbergu, kjer je ustanovil observatorij in tiskarno ter bil nasploh zelo aktiven. Menda je konstruiral mehaničnega orla, predvsem pa pisal razprave iz astronomije. Astronomske tabele je (prvi) poimenoval *efemeride*. Leta 1475 ga je papež Sikst IV. povabil v Rim, da bi sodeloval pri reformi koledarja, a je kmalu umrl, star komaj 40 let.

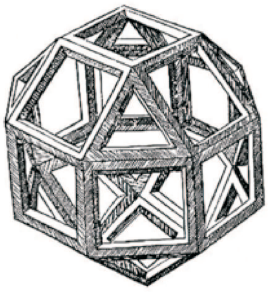
SLIKA 94. Johann Müller, imenovan Regiomontanus

Nicolas Chuquet (1445-1500), najbolj nadarjen francoski matematik 15. stoletja, rojen v Parizu in deloval kot zdravnik v Lyonu. Leta 1484 je napisal razpravo o aritmetiki *Triparty en la science des nombres*, v kateri je obravnaval racionalna in iracionalna števila, pozitivne in negativne eksponente, imena za velika števila, različne okrajšave itd.

Luca Pacioli (1445-1517) iz Sansepolcra v Toskani, italijanski menih (frančiškan), živel in poučeval matematiko v Benetkah, Perugi in Milanu. Leta 1494 je natisnil knjigo *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità*, nekakšen povzetek matematike tistega časa, ki ne prinaša veliko novega v primeri z *Liber abbaci*, ima pa odlično notacijo. Vsebinsko obravnava aritmetični del postopke za osnovne operacije in korenjenje, trgovsko računovodstvo, pravilo napačne predpostavke in je dolgo veljal za standardni računski priročnik. Algebraični del vsebuje kvadratne enačbe in probleme, ki pripeljejo do njih, uporablja različne okrajšave, npr. p (*piu*) za $+$, m (*meno*) za $-$, *co* (*cosa*) za neznanko x, *ce* (*censo*) za x^2, *cu* (*cuba*) za x^3, *cece* (*censocenso*) za x^4, *ae* (*aequalis*) za $=$ itd. Mnogo je potoval in mnogo pisal.

Slika 95. De Barbarijev portret Luca Paciolija

Leta 1509 je objavil drugo knjigo *De divina proportione* o pravilnih telesih (ki mu jih je v knjigi narisal prijatelj *Leonardo da Vinci*)



Slika 96. Da Vincijeva risba rombičnega kubooktaedra v Paciolijevi knjigi *De divina proportione*

Seznam zgodnjih aritmetičnih tiskov

S povečanim renesančnim zanimanjem za izobrazbo in s povečano trgovsko aktivnostjo se je z iznajdbo tiska pojavila cela vrsta aritmetičnih besedil, ena pisana v latinščini s strani cerkvenih učenjakov, druga v ljudskih jezikih za potrebe trgovine:
Aritmetika iz Trevisa anonimnega avtorja (Treviso 1478), v beneškem narečju, najstarejša tiskana knjiga sploh iz matematike (iz Plimptonove zbirke univerze Columbia),
Aritmetika Piera Borgija (Benetke 1484), uspešno in vplivno komercialno delo v italijanščini, doživelo 17 izdaj,
Aritmetika Johanna Widmana (Leipzig 1489) v nemščini, na Nemškem zelo razširjena,
Aritmetika Filippa Calandrija (Firence 1491), vsebuje prvi opis postopka dolgega deljenja in prve ilustrirane probleme v tisku,
Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità Luca Paciolija (Benetke 1494), že opisana,

Aritmetika Jacoba Köbela (Heidelberg 1514), zelo popularna, doživela 22 izdaj,
Aritmetika Adama Rieseja (1522) v nemščini, namenjena poslovnežem in obrtnikom, doživela 114 izdaj (še danes je v nemško govorečih deželah v veljavi izraz "aritmetika po Rieseju"),
Aritmetika Cuthberta Tunstalla (1522) v latinščini, zasnovana na Paciolijevi *Summi*,
The Grounde of Artes Roberta Recorda (1542) v angleščini, pisana v obliki dialoga med učiteljem in učencem, popularna, doživela 29 izdaj.

Začetek aritmetičnega in algebraičnega simbolizma

Prvič se znaka + in − pojavita v Widmanovi aritmetiki (**Johann Widman** je bil rojen ∼ 1460 na Češkem). Znak + je najbrž izpeljan iz latinske besede *et*, znak − pa iz okrajšave $\overline{m}$ za *minus*. Nista pa še pomenila algebraičnih operacij. Kot taka prvič nastopata v neki knjigi nizozemskega matematika **Gillisa van der Hoeckeja** iz leta 1514.

Robert Recorde (1510-1558) je študiral v Oxfordu, medicino v Cambridgeu in učil matematiko v privatnih razredih na obeh inštitucijah. Kasneje je bil osebni zdravnik kralja Edvarda VI. in kraljice Marije (Queen Mary), potem pa kontrolor rudnikov in kovnice denarja. Poleg aritmetike je pisal o astronomiji, geometriji, algebri in medicini. Astronomska knjiga *The Castle of Knowledge* iz leta 1551 je ena prvih knjig, ki je angleškim bralcem predstavila Kopernikov heliocentrični sistem. Istega leta je izšla njegova geometrija (*The Pathewaie to Knowledge*), skrajšana različica Evklidovih *Elementov*, leta 1557 pa še algebra (*The Whetstone of Witte*).

Recordova algebra *The Whetstone of Witte* (1557) je zgodovinsko pomembna zaradi uporabe modernih simbolov. V njej je npr. prvič vpeljan enačaj = "bicause noe 2 thynges can be moare equalle"(podrobneje: "I auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe (thus =), bicause noe .2. thynges, can be moare equalle").

Slika 97. Robert Recorde

Christoff Rudolff (1499-1545) je že prej, leta 1525 v svoji algebri *Die Coss*, prvi nemški knjigi o algebri, vpeljal znak za kvadratni koren. Znak je nastal iz malega *r*, kot okrajšave za *radix* (koren). Drugo izboljšano izdajo je priskrbel Michael Stiffel leta 1553. Že prej je nastala tudi Stiefflova *Arithmetica integra* (1544) v treh delih (racionalna, iracionalna števila in algebra).

V njej je **Michael Stiffel** (1486-1567), ki velja za največjega nemškega algebraika 16. stoletja, povezal aritmetično in geometrično zaporedje (in tako ustvaril predhodno stopnjo logaritmov), podal tabelo binomskih simbolov, predstavil Evklidovo X. knjigo ter uporabljal posebne znake $+, -, \surd$ ter črke za neznanke. Stiffel je bil menih, se spreobrnil v luteranstvo in postal fanatičen reformator. Napovedal je konec sveta za 3. oktober 1533 in uničil življenja mnogim, ki so mu sledili, zato je pristal v ječi. Papeža Leona X. je na osnovi numerologije proglasil za Zver iz Knjige razodetij: LEO DECIMVS je preoblikoval v LDCIMV, dodal X (za Leona X.), izpustil M (misterij), permutiral črke in dobil DCLXVI = 666, ki pomeni Zver (to število so v zgodovini pogosto aplicirali na osovražene ljudi, npr. v rimski dobi na cesarja Nerona, na različne papeže, Luthra, med 1. svetovno vojno na nemškega cesarja Wilhelma).

Kubična in kvartična enačba

Problem reševanja enačbe tretje in četrte stopnje so ugnali italijanski matematiki v 16. stoletju. Zgodba je na kratko naslednja:

Okrog leta 1515 je **Scipione del Ferro** (1456-1526), profesor matematike na univerzi v Bologni, najbrž na osnovi arabskih virov našel rešitev splošne enačbe oblike $x^3+mx=n$; rezultata pa ni objavil, ampak ga je zaupal svojemu učencu **Antoniu Fioru**. Dvajset let kasneje je **Niccolò Fontana iz Brescie** (**Tartaglia**) trdil, da zna rešiti enačbo oblike $x^3+px^2=n$. Fior mu ni verjel, misleč da blefira, zato ga je povabil na dvoboj, kjer pa se je Tartaglia izkazal, saj je rešil več tipov enačb kot Fior. Kasnje je **Girolamo Cardano**, zdravnik in matematik iz Milana, iz Tartaglia izvabil skrivnost reševanja kubičnih enačb in jo (brez dovoljenja) objavil v svoji knjigi *Ars magna*, izdani v latinščini v Nürnbergu leta 1545. Tartaglia je protestiral, toda **Lodovico Ferrari**, Cardanov učenec, je zatrdil, da je Cardano dobil rešitev od Scipiona del Ferra preko tretje osebe, in vrnil Tartagliu s protiobtožbo. Cardanova rešitev je naslednja: Ker je $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$, lahko pišemo $3ab=m$, $a^3-b^3=n$ in $x=a-b$. Odtod dobimo rešitev:

$$a=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}} \text{ in } b=\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}.$$

Leta 1540 je italijanski matematik **Zuanne de Tonini da Coi** predlagal Cardanu problem, ki je vodil do enačbe četrte stopnje. Cardano ga ni znal rešiti, pač pa je to uspelo njegovemu učencu Ferrariju. Tudi ta rešitev je bila objavljena v *Ars magni*. Ferrari je enačbo $x^4+px^2+qx+r=0$ zapisal v obliki $(x^2+p)^2=px^2-qx+p^2-r$; z uvedbo dodatne neznanke je dobil $(x^2+p+y)^2=(p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^2)$. Če določimo y tako, da bo na desni popolni kvadrat, bomo enačbo za x znali rešiti. To pa je res natanko takrat, ko je $4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)-q^2=0$, kar pa je enačba tretje stopnje. (Kasneje sta **François Viète** in **René Descartes** ponudila še drug način reševanja.)

Leonhard Euler je skušal leta 1750 na podoben način reducirati enačbo pete stopnje na enačbo četrte stopnje, a ni uspel. Enako se je zgodilo Lagrangeu trideset let kasneje. Italijanski zdravnik **Paolo Ruffini** (1765-1822) je leta 1803, 1805 in 1813 podal dokaze, da to ne gre. Neodvisno je leta 1824 to ugotovil tudi norveški matematik **Niels Henrik Abel** (1802-1829). S teorijo reševanja enačb višje stopnje so se prej in kasneje ukvarjali še mnogi: **Bring**, **Jerrard**, **Tschirnhaus**, **Galois**, **Jordan** in drugi. Iz teorije enačb je zrasla moderna teorija grup.

Slika 98. Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501-1576) je bil rojen v Paviji, študiral medicino in postal ugleden in po Evropi iskan zdravnik. Potoval je na Škotsko, da je ozdravil astme nadškofa Hamiltona, po vrnitvi pa imel mesti profesorja na univerzah v Paviji in Bologni. Za dodaten zaslužek se je ukvarjal tudi z astrologijo (ne preveč uspešno), a kljub temu kasneje postal astrolog na papeškem dvoru v Rimu, kjer je umrl na isti dan, kot je napovedal. Bil je nagle jeze in nasploh kontroverzna oseba.

Napisal je več razprav o aritmetiki, astronomiji in fiziki, najpomembnejše delo je brez dvoma *Ars magna* iz leta 1545, velika razprava v latinščini, posvečena samo algebri (v njej dopušča tudi negativne rešitve in uporabo imaginarnih števil, opisani so približni postopki itd.). Poznal je že kasnejše Descartesovo pravilo predznakov.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Slika 99. Naslovna stran Cardanove knjige *Ars Magna* (1545)

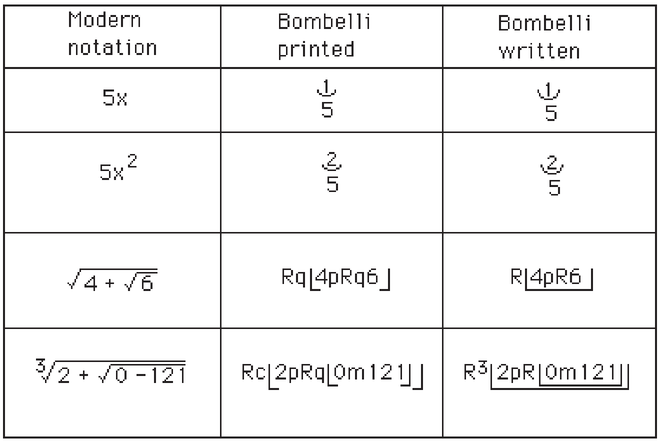
Cardano je bil tudi strasten kockar in je o tem napisal priročnik *Liber de ludo aleae*, ki je izšel posthumno in vsebuje nekaj zanimive verjetnosti.

Niccolò Tartaglia (1499-1557) je imel težko otroštvo, med francosko zasedbo Brescie 1512 je bil ranjen v usta in je zato celo življenje jecljal (tartaglia pomeni jecljavček), oče pa mu je umrl. Kljub pomanjkljivi izobrazbi je bil zelo nadarjen za matematiko, morda najboljši italijanski matematik 16. stoletja. Preživljal se je s poučevanjem matematike in drugih znanosti. Umrl je v Benetkah. Poleg reševanja kubične enačbe je tudi napisal obsežno aritmetično delo v dveh delih, izdal Evklida in Arhimeda. Ukvarjal se je tudi z uporabo matematike v topništvu.

Slika 100. Niccoló Fontana Tartaglia

Rafael Bombelli (1526-1572) je še ena pomembna osebnost italijanske matematike 16. stoletja. Rojen in živel je v Bologni, znan pa je predvsem po svoji *Algebri*, ki jo je izdal tik pred smrtjo 1572. V njej je obravnaval tudi reševanje kubične enačbe $x^3 + mx = n$ v primeru, ko je $(n/2)^2 + (m/3)^3 < 0$ in ima enačba tri realne korene, ki se po Cardanovih formulah izražajo z imaginarnimi števili (*casus irreducibilis*).

V svoji *Algebri* je Bombelli uvedel različne okrajšave za zapisovanje kvadratnih korenov in pri tem uporabljal oklepaje. Izraz $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ bi npr. Pacioli zapisal še v obliki $RV\,7\,\overline{p}\,R\,14$, Bombelli pa kot $R \llcorner 7\,p\,R\,14 \lrcorner$.



Slika 101. Bombellijeva notacija

François Viète

Največji francoski matematik 16. stoletja je **François Viète** (1540-1603), pravnik in član parlamenta. Rojen je bil v Fontenayu, umrl v Parizu. Nizozemski ambasador je kralju Henriku IV. prinesel problem, ki ga je 1593 zastavil **Adrianus Romanus** (ali **Adriaen van Roomen**) (1561-1615) in se prevede na enačbo 45. stopnje. Viète je takoj našel dva korena, kasneje pa še 21 drugih (ne pa negativnih). Romanusu, s katerim sta postala prijatelja, je zastavil Apolonijev problem. Viète je koristil Franciji tudi drugače, v sporu s Španijo: leta 1590 je zlomil ti. špansko kodo, za katero je španski kralj Filip II. mislil, da je nezlomljiva (Filip se je zaradi tega pritožil papežu, češ da gre za črno magijo).

Viète je napisal dela iz trigonometrije, algebre in geometrije. *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) je prva knjiga v zahodni Evropi, ki razvija metode za reševanje trikotnika z uporabo vseh šestih trigonometričnih funkcij. Znal je izračunati $\cos n\theta$ kot funkcijo $\cos\theta$ za $n = 1, 2, ..., 94$. Najslavnejše delo *In artem analyticam isagoge* (1591) prinaša simbolično algebro, uporablja samoglasnike za neznanke in soglasnike za znane količine (naš sedanji dogovor o označevanju neznank s črkami s konca abecede je vpeljal Descartes leta 1637). Enačaja ni pisal, namesto njega je zapisal *aequatur*, je pa uporabljal znaka $+$ in $-$. V knjigi o trigonometriji in geometriji *Suplementum geometriae* iz leta 1593 je predstavil tudi svojo rešitev podvojitve kocke in tretjinjenja kota. V delu *De numerosa potestatum resolutione* (1600) je obravnaval približno reševanje enačb (z nerodno metodo, ki je po mnenju nekaterih pomenila pravo "mučenje kristjanov"). Zelo pa so znane njegove formule, ki povezujejo koeficiente enačbe z elementarnimi simetričnimi funkcijami njenih korenov; npr. za kvadratno enačbo $x^2 + px + q = 0$ s korenoma α, β velja $\alpha + \beta = -p$ in $\alpha\beta = q$.

Leta 1615 je posthumno izšla njegova zadnja knjiga *De aequationum recognitione et emendatione*, v kateri predstavlja novo metodo za reševanje kubične enačbe $x^3 + 3ax = 2b$. Rešitev išče v obliki $x = a/y - y$ in za y^3 dobi kvadratno enačbo $y^6 + 2by^3 = a^3$, ki jo reši, da najde y^3 in nato y, torej tudi x. Za rešitev enačbe 4. stopnje $x^4 + bx^2 + cx = d$ ravna podobno kot Ferrari. Zapiše $x^4 = -bx^2 - cx + d$, na obeh straneh prišteje $x^2y + y^2/4$, tako da dobi $(x^2 + y/2)^2 = (y - b)x^2 - cx + (y^2/4 + d)$, in izbere y tako, da je tudi na desni strani popolni kvadrat. To doseže z rešitvijo pomožne enačbe 3. stopnje $(y - b)(y^2 + 4d) = c^2$.

Viète je bil torej izjemen algebraik, prispeval pa je tudi k reševanju treh klasičnih grških problemov, našel formulo z neskončnim produktom za število $2/\pi$, namreč formulo

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \cdots,$$

ki smo jo navedli v pregledu aproksimacij števila π v 3. razdelku, in skušal obnoviti izgubljeno Apolonijevo delo o tangentah. V sporu s **Claviusom** glede gregorjanske reforme koledarja pa je zastopal povsem zgrešeno in neznanstveno stališče.

SLIKA 102. François Viète

Drugi matematiki in astronomi 16. stoletja

Christopher Clavius (1537-1612), jezuit, rojen v Bambergu na Nemškem, umrl v Rimu, študiral na univerzi v Coimbri, ustanovljeni leta 1290, morda pri Pedru Nuñesu, postal nadarjen učitelj in velik promotor matematike, napisal učbenika aritmetike 1583 in algebre 1608, izdal Evklidove *Elemente* 1574, pisal o trigonometriji in astronomiji ter igral pomembno (morda celo vodilno) vlogo pri gregorijanski reformi koledarja, ki jo je leta 1582 uzakonil papež Gregor XIII. (izpustili so 10 dni, 4. oktobru je sledil 15. oktober).

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), rojen v Bologni, učil matematiko in astronomijo v Firencah, Perugi in Bologni, napisal aritmetiko (popolna števila), uredil izdajo Evklidovih *Elementov* in kratko algebro. Napravil je prve korake v teorijo verižnih ulomkov.

Simon Stevin (1548-1620) je bil najvplivnejši matematik na Nizozemskem, postal general, kot ekspert v statiki in hidrostatiki je vodil mnoga javna dela, napisal aritmetiko s sistematično obravnavo decimalnih števil.

Nikolaj Kopernik (1473-1543), študiral v Krakovu, potem pravo, medicino in astronomijo v Padovi in Bologni. Svoj heliocentrični sistem je dognal leta 1530, objavljen pa je bil šele v letu njegove smrti 1543. Ni bil matematik, je pa napisal delo o trigonometriji.

NICOLAI CO
PERNICI TORINENSIS

SLIKA 103. Naslovna stran Kopernikovega slavnega dela *De revolutionibus orbium coelestium* iz leta 1543

Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576) je bil vodilni nemški astronom 16. stoletja, dvanajst let je s skupino sodelavcev sestavljal natančne in koristne trigonometrične (10- in 15-mestne) tabele za sinus za vsakih 10 sekund. Prvi je definiral trigonometrične funkcije z razmerjem stranic v pravokotnem trikotniku.

Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) je leta 1593 izpopolnil Rhaeticusove tabele. Njegova razprava o trigonometriji je prva, ki res zasluži to ime.

V 16. stoletju je torej štartala simbolna algebra, indo-arabski zapis števil se je standardiziral, prav tako decimalni, priznana so bila negativna števila, kubične in kvartične enačbe so bile dokončno rešene, trigonometrija je bila sistematizirana, napisane odlične tabele. Leta 1556 je v Mexicu Cityju izšla prva matematična tiskana knjiga v Novem svetu (*Juan Diez*, komercialni priročnik).

Vaje:

(1) Naslednje naloge so iz **Alkuinove** zbirke ~ 775:

(a) Volka, kozo in zelje je treba prepeljati čez reko v čolnu, ki lahko poleg čolnarja prepelje samo še eno reč. Kako to storiti, da ne bo volk požrl koze ali koza zelje?
(b) 100 mernikov žita je treba razdeliti med 100 ljudi tako, da vsak moški dobi 3 mernike, vsaka ženska 2 mernika in vsak otrok 1/2 mernika. Koliko moških, žensk in otrok je v skupini? Poišči vse rešitve. Koliko jih je?
(c) Imamo 30 steklenic, med njimi 10 polnih, 10 na pol praznih in 10 praznih. Kako naj jih razdelimo med tri ljudi, da vsak dobi enako mnogo steklenic in enako količino tekočine? Koliko je vseh rešitev?
(d) Pes dela 9 čevljev dolge skoke, zajec pa 7. Po kolikih skokih bo pes ujel zajca, če je na začetku le-ta 150 čevljev pred njim in oba skočita hkrati?

(2) **Fibonaccijeva** knjiga *Liber abbaci* je znana po prvi od naslednjih nalog:

(a) Koliko parov zajcev producira začetni par v enem letu, če vsak par vsak mesec skoti nov par, začenši od drugega meseca dalje?
(b) Označimo n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja 1,1,2,3,5,8,... z u_n. Pokaži, da je:
(i) $u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n$, $n \geq 2$,
(ii) $u_n = [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$,
(iii) $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = (1+\sqrt{5})/2$.

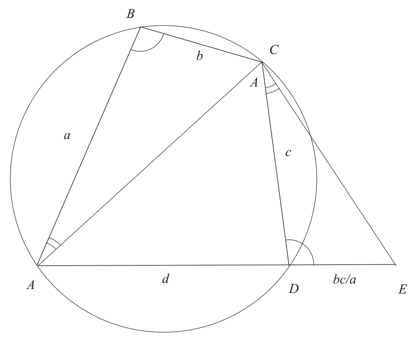
(3) Tudi naslednje naloge so iz knjige *Liber abbaci*:

(a) Oče je zapustil najstarejšemu sinu 1 hektar in 1/7 ostanka posestva, naslednjemu 2 hektarja in 1/7 ostanka itd. Zadnji sin je dobil vse, kar je ostalo. Koliko sinov je imel oče in kako veliko je bilo njegovo posestvo, če so na koncu vsi sinovi dobili enako?
(b) Trije možje imajo v blagajni kup denarja z deleži 1/2, 1/3 in 1/6. Vsak vzame iz blagajne nekaj denarja, tako da v njej nič ne ostane. Prvi vrne 1/2 vsote, ki jo je vzel, drugi 1/3 svoje vsote in tretji 1/6 vsote. Kar je bilo vrnjeno v blagajno, razdelijo na enake dele in vsak dobi enega. Na koncu imajo vsi ravno toliko, kot jim pripada od vsega začetka. Koliko je bilo vsega denarja v blagajni in koliko je na začetku vzel vsak?
(c) Nabiralec jabolk je pri odhodu iz sadovnjaka vsakemu od 7 stražarjev zaporedoma moral dati nekaj jabolk, ki jih je nabral. Prvemu je dal 1/2 od vseh nabranih jabolk in še enega, drugemu 1/2 od preostalih jabolk in še enega itd. Na koncu mu je ostalo eno samo jabolko. Koliko jabolk je nabral?

(4) **Regiomontanus** ponuja bralcu v knjigi *De triangulis omnimodis* iz leta 1484 naslednje konstrukcijske naloge:

(a) Določi trikotnik, če je dana razlika dveh stranic, višina na tretjo stranico in razlika odsekov, na katere razdeli višina tretjo stranico.

(b) Določi trikotnik, če je dana stranica c, višina h na to stranico in razmerje $a/b = r$ preostalih dveh stranic.



Slika 104. Regiomontanusova konstrukcija tetivnega štirikotnika z znanimi stranicami

(c) Konstruiraj krožni (tetivni) štirikotnik, če so dane vse štiri stranice a, b, c, d. Navodilo: na podaljšku AD najprej konstruiraj točko E, tako da bo $DE = bc/a$ in izkoristi podobnost trikotnikov DCE in BAC (glej sliko 104).

(5) **Luca Pacioli** ima v svoji *Summi* iz 1494 tudi naslednji konstrukcijski problem:

Polmer trikotniku včrtaneg kroga je 4, njegovo dotikališče razdeli eno od stranic na dva odseka, dolga 6 in 8. Določi dolžine vseh treh stranic.

(6) V starih aritmetikah je bilo veliko trgovskih nalog, npr.:

(a) (**Chuquet**) Trgovec je obiskal tri sejme. Na prvem je podvojil svoj kapital in porabil 30 dukatov, na drugem potrojil kapital in potrošil 54 dukatov, na tretjem pa je početveril denar, vendar zapravil 72 dukatov. Ostalo mu je 48 dukatov. Koliko denarja je imel na začetku?

(b) (**Tartaglia**) Trgovec je na Portugalskem kupil 50,000 funtov popra in zanj plačal 10,000 skudov in še 500 skudov takse. Prevoz po morju do italijanske obale ga je stal 300 skudov in še 200 dajatev, prevoz od obale do Firenc pa še 100 skudov, 100 skudov pa ga je stalo dovoljenje za vstop v mesto. Nazadnje je moral vladi plačati še 1000 skudov, da je dobil dovoljenje za prodajo popra. Kakšno ceno naj postavi za en funt popra, da bo imel na koncu ob vseh stroških dobiček 1/10 skuda pri vsakem funtu?

(c) (**Humphrey Baker** 1568) Poslovneža sta ustanovila skupno podjetje. Prvi je vložil vanj 1. januarja 640 liber, drugi pa nič do 1. aprila. Koliko naj vloži tedaj, da bo na koncu lahko razpolagal s polovico dobička, če naj po dogovoru njuno partnerstvo traja do konca leta?

(7) Imejmo splošno enačbo tretje stopnje $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, $a \neq 0$.

(a) Pokaži, da transformacija $z = x - b/3a$ prevede zgornjo enačbo v enačbo oblike $x^3 + 3hx = 2g$. Poišči g in h.

(b) Izpelji odtod **Cardanovo formulo**: $x = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 + h^3}} - \sqrt[3]{-g + \sqrt{g^2 + h^3}}$.

(c) Reši enačbo $x^3 + 63x = 316$ po Cardanovi in po Viètovi metodi.

(d) Reši enačbo $x^3 - 63x = 162$, ki spada v primer *casus irreducibilis*, po Cardanovi poti. Nato pokaži, da je $81 \pm 30\sqrt{-3} = (-3 \pm 2\sqrt{-3})^3$ in se prepričaj, da je eden od korenov enak -6. Poišči še druge korene.

(8) Še dve zgodovinski enačbi 4. stopnje:

(a) **Cardano** je rešil enačbo $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ tako, da je na obeh straneh prištel člen $3x^2$. Poišči na ta način vse štiri korene.

(b) Problem, ki ga je **Da Coi** leta 1540 predložil Cardanu se glasi: Razdeli 10 na tri dele tako, da bo srednji del geometrijska sredina ostalih dveh in da bo produkt prvih dveh enak 6 (torej $x + y + z = 10$, $xz = y^2$, $xy = 6$). Pokaži, da odtod dobimo za y enačbo 4. stopnje: $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Reduciraj to enačbo na enačbo 3. stopnje po Ferrarijevi in po Viètovi poti.

8. Rojstvo moderne matematike

Sedemnajsto stoletje je v razvoju matematike izredno zanimivo. Nastopili so Napier s svojimi logaritmi, Harriot in Oughtred z notacijo in kodifikacijo algebre, Galileo, utemeljitelj dinamike, Kepler s planetarnimi gibanji, Desargues in Pascal z inovativnimi pristopi h geometriji, Descartes z revolucionarno idejo povezovanja geometrije in algebre, Fermat z moderno teorijo števil, vsestranski Huygens, konec stoletja pa še Newton in Leibniz, očeta infinitezimalnega računa.

Zgodovinski in splošni matematični okvir

Politični, ekonomski in socialni napredek (prvi uporabni stroji, žage, boljša razsvetljava, kurjava, obleke) so težišče inovativne dejavnosti premaknili bolj na sever Evrope, v Francijo in Anglijo. Začela so se prva stalna britanska naseljevanja Novega sveta (Jamestown 1607). Trgovina in pomorstvo sta vzpodbudila nova znanstvena odkritja. Matematična aktivnost se je nasploh zelo povečala, raziskave naenkrat niso več tako zelo elementarne, pojavljajo se nova matematična področja. Astronomija, navigacija, inženirstvo, vojaška obrt so zahtevali hitrejše in natančnejše izračune. V veliko pomoč razvoju sta se izkazali indo-arabska notacija in decimalni zapis. Temu pa se je pridružilo tudi odkritje logaritmov.

John Napier

Slika 105. John Napier

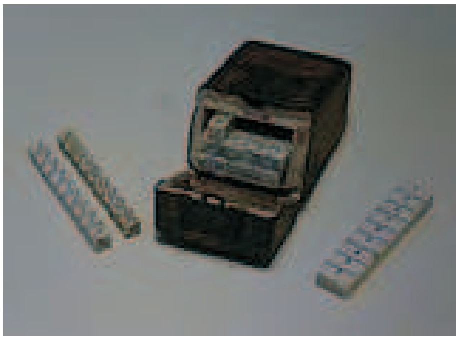
John Napier ali **Neper** (1550-1617) je bil Škot, živel je v bližini Edinburgha in se kot zagrizen antikatolik in privrženec Johna Knoxa in Jamesa I. vneto udejstvoval na političnem in verskem področju (leta 1593 je objavil oster napad na rimskokatoliško cerkev in papeža ter napovedal konec sveta med letoma 1688 in 1700).

Bil je znan tudi po raznih znanstveno fantastičnih napovedih (plovba pod morsko gladino, oklepna bojna vozila) in veljal za precej neuravnovešenega.

Študiral je matematiko in poleg logaritmov, za katere je najbolj zaslužen, prispeval različne matematične novotarije, npr.:
- pravilo krožnih delov za lažje pomnjenje formul za sferične trikotnike (*Napierov krog* oziroma *Napierov pentagram*), glej vajo 4,
- dve formuli sferične trigonometrije (*Napierova analogija*),
- praktični pripomoček za hitro množenje, deljenje in korenjenje (*Napierove palice* oziroma *kosti*), glej sliko 106 in vajo 5.

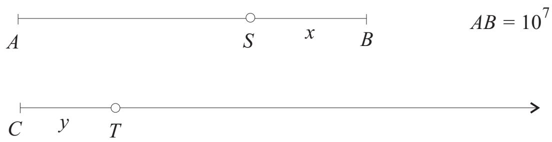
Nastanek logaritmov

Napierovi logaritmi so nastali iz trigonometričnih formul, ki povezujejo množenje in seštevanje, npr. $\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2$. Napier je najprej računal logaritme sinusov kotov in teorijo razvijal vsaj dvajset let, preden jo je objavil. Njegova definicija logaritma je za današnje pojme nenavadna (glej sliko 107):



Slika 106. Napierove palice iz slonove kosti iz leta 1650

Imejmo končno daljico AB in neskončen poltrak $[C,\infty)$; točka S naj se giblje po daljici AB s hitrostjo, ki je enaka razdalji x točke do krajišča B, točka T pa istočasno po poltraku $[C,\infty)$ enakomerno s tako konstantno hitrostjo, kot jo je imela točka S v začetku gibanja; potem je $y = Nap\log x$.



Slika 107. K definiciji Napierovih logaritmov

Ker je imel tabele sinusov natančne na 7 decimalk, je Napier predpostavil, da je $AB = 10^7$. Odtod lahko potem z modernimi metodami (glej vajo 1) najdemo, kaj je res pomenil Napierov logaritem, namreč $\mathrm{Nap}\log x = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7)$. Vidimo, da je bil padajoča funkcija. Napier je z njim odkril glavno lastnost: če je $a/b = c/d$, velja $\mathrm{Nap}\log a - \mathrm{Nap}\log b = \mathrm{Nap}\log c - \mathrm{Nap}\log d$. Svoje ugotovitve je objavil leta 1614 v razpravi *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Opis čudovitega zakona logaritmov*), ki je vsebovala tudi tabelo logaritmov sinusov (za vsako minuto kota). Razprava je takoj vzpodbudila zanimanje.

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Slika 108. Naslovnica Napierove knjige *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* iz leta 1614

Henry Briggs (1561-1631), profesor geometrije na Greshamovem kolidžu v Londonu (in kasneje v Oxfordu) je leta 1615 obiskal Napiera v Edinburghu. Skupaj sta spremenila definicijo tako, da je $\log 1$ enak 0 in $\log 10$ ustrezna potenca 10 (Briggsovi logaritmi z osnovo 10). Briggs se je lotil izdelovanja logaritmičnih tabel. Leta 1624 je objavil *Arithmetica logarithmica*, ki vsebuje 14-mestne tabele desetiških logaritmov za števila od 1 do 20.000 in od 90.000 do 100.000.

Vmesne vrednosti je preračunal in dodal **Adriaan Vlacq** (1600-1666), nizozemski knjigarnar in založnik. Leta 1620 je **Edmund Gunter** (1581-1626), Briggsov kolega in človek, ki je odgovoren za vpeljavo besed *kosinus* in *kotangens*, objavil 7-mestne tabele desetiških logaritmov sinusov in tangensov.

Beseda *logaritem* pomeni "razmerno število", Napier je uporabljal izraz "umetno število". Briggs je iznašel tudi besedi *karakteristika* in *mantisa*.

Alternativno definicijo logaritmov je neodvisno od Napierja leta 1620 podal tudi **Jobst Bürgi** (1552-1632), švicarski izdelovalec instrumentov, urar in matematik, Keplerjev sodelavec v Pragi.

Logaritme so potem razmeroma hitro vpeljali po vsej Evropi: **Bonaventura Cavalieri** jih je vpeljal v Italijo, **Johannes Kepler** v Nemčijo, **Edmund Wingate** (angleški pisec učbenikov) v Francijo.

Zanimivo je, da so logaritme iznašli pred eksponenti, čeprav jih danes definiramo ravno z njimi. Moderno definicijo logaritma kot inverzne operacije k eksponenciranju je podal šele **Euler** leta 1748.

Prva stalna profesorska mesta na angleških univerzah

Henry Briggs je bil prvi *Savilian professor* v Oxfordu. Leta 1619 je namreč *Sir Henry Savile*, profesor na Merton Collegeu v Oxfordu, predavatelj Evklida, kasneje tudi provost na Etonu, ustanovil prvi dve stalni profesorski mesti na Oxfordu, eno v geometriji in eno v astronomiji. Savilianovi profesorji so bili tudi **John Wallis**, **Edmund Halley** in **Christopher Wren**.

Podobno je *Henry Lucas*, zastopnik Cambridgea v parlamentu v letih 1639-1640 leta 1663 odprl (zdaj po njem imenovano) profesorsko mesto na Cambridgeu. Prvi ga je zasedel **Isaac Barrow**, šest let pozneje pa njegov učenec **Isaac Newton**. Najstarejše profesorsko mesto v Angliji pa je že leta 1596 ustanovil *Sir Thomas Gresham* na Gresham Collegeu v Londonu.

Harriot in Oughtred

Thomas Harriot (1560-1621), velja za ustanovitelja angleške matematične šole. Po diplomi na oxfordski univerzi ga je leta 1585 *Sir Walter Raleigh* poslal v Severno Ameriko, da bi kartiral Severno Karolino oziroma Virginijo.

Slika 109. Oxfordski portret Thomasa Harriota

Njegovo najpomembnejše delo *Artis analyticae praxis*, ki je izšlo posthumno leta 1631, je precej kompletna in sistematična algebrajska razprava, ki vsebuje teorijo enačb, zvezo med koeficienti in koreni, različne transformacije, numerične postopke, uvaja nove standarde in oznake (npr. aa za a^2, znaka $>$ in $<$). Harriot je bil tudi astronom (odkril je Sončeve pege, opazoval Jupitrove lune, napravil zemljevid Lune pred Galileom) in fizik (odkril lomni zakon pred Snellom), z logaritmi pa se ni ukvarjal.

William Oughtred (1575-1660) pa je bil najvplivnejši angleški matematični pisec 17. stoletja. Bil je cerkveni dostojanstvenik, ki je dajal privatne lekcije iz matematike. Njegovi učenci so bili npr. **John Wallis**, **Christopher Wren** in **Seth Ward** (kasneje slaven kot matematik, arhitekt in astronom).

SLIKA 110. Portret Williama Oughtreda

Istega leta 1631 kot Harriotova razprava je izšla tudi Oughtredova popularna knjiga *Clavis mathematicae* iz aritmetike in algebre. V njej je uvedel številne oznake, od katerih se je obdržala le oznaka za množenje $\times$ (krat). Kratice sin, cos, tg in ctg za trigonometrične funkcije pa so se prvič pojavile v Oughtredovi knjigi *Trigonometria* leta 1657.

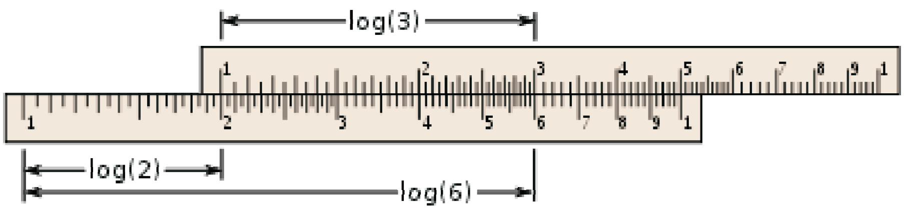
Oughtred je najbrž tudi avtor dodatka k angleški izdaji Napierove *Descriptio* leta 1618, s prvo tabelo *naravnih* logaritmov. Objavil je ekvivalent formule $\ln 10 = 2.302585$, ki pomeni prvo implicitno priznanje vloge števila e v matematiki (sicer je to število vpeljal šele **Euler**). Leta 1647 pa je Oughtred prvi jasno formuliral značilno lastnost logaritemske funkcije, da namreč produkt spremeni v vsoto: $\log(ab) = \log a + \log b$. Prav to dejstvo je odločilno prispevalo k uporabnosti novega pojma.

Vsekakor so logaritmi pomenili revolucionarno izboljšanje računske sposobnosti (bili so računalniki tedanjega časa). **Laplace** je menda nekoč izjavil, da so logaritmi 's skrajšanjem dela podaljšali življenje astronomov za dvakrat'.

Logaritmična računala

Oughtred je menda prvi prišel na idejo o mehanski napravi za računanje logaritmov. Logaritmično skalo je sicer uvedel **Edmund Gunter** že leta 1620 (medtem ko se je dvojna logaritmična skala pojavila mnogo pozneje, leta 1815), Oughtred je dejansko iznašel tako krožno kot drsno logaritmično računalo leta 1622 in ga opisal leta 1632 v knjigi *The Circles of Proportions.*

Zares so delujoče logaritmično računalo konstruirali stoletje kasneje. Pravzaprav je šele francoski oficir **Amédé Mannheim** (1831-1906) leta 1859 standardiziral moderno logaritmično računalo, kakršnega smo poznali pred uvedbo elektronskih kalkulatorjev.



Slika 111. Princip delovanja drsnega logaritmičnega računala

Slavna astronoma

Galileo Galilei (1564-1642) je bil rojen v Pisi revnemu plemiču iz Firenc, študiral medicino po želji staršev ter znanost in matematiko po lastni želji. V Pisi se je začel zanimati za nihanje (lestenca v cerkvi), 25-leten je (na priporočilo **Claviusa**) postal 1589 profesor matematike v Pisi, kjer je opravljal tudi poskuse s prostim padom s poševnega stolpa ter ugotovil, da je pot sorazmerna kvadratu časa. Leta 1592 je sprejel mesto profesorja v Padovi, kjer je ostal 18 let, se seznanil s teleskopom, ki ga je leta 1607 iznašel Johann Lippersheim z Nizozemske. Tudi sam je začel izdelovati teleskop, z njim opazoval Sončeve pege, Venerine faze, Saturnove kolobarje in Jupitrove lune, kar je potrdilo Kopernikovo teorijo in vzbudilo nasprotovanje Cerkve. Tri leta po izidu Galilejeve knjige v podporo Koperniku, leta 1633, je bil zaslišan pred inkvizicijo. Kmalu nato je oslepel.

Galileo je "oče moderne znanosti", ki združuje tako teorijo kot eksperiment. S svojimi osnovami dinamike padajočih teles je bil predhodnik Newtona. Prvi je tudi opazil parabolično obliko trajektorje projektila v vakuumu in iznašel prvi moderni mikroskop. V matematiki je prišel na idejo ekvipolence dveh neskončnih množic (vseh naravnih števil in vseh popolnih kvadratov), zato ga imajo v tem smislu za predhodnika Cantorja. Njegovo glavno delo je *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, tiskano leta 1638 v Leidnu.

Slika 112. Sustermansov portret Galilea

Johannes Kepler (1571-1630) je bil rojen blizu Stuttgarta, študiral v Tübingenu, leta 1594 sprejel mesto predavatelja na univerzi v Gradcu v Avstriji, leta 1599 pa postal asistent slavnega dansko-švedskega astronoma **Tycho Braheja** (1546-1601), ki je bil takrat v Pragi dvorni astronom cesarja Rudolfa II. Ko je čez dve leti Tycho Brahe nenadoma umrl, je njegovo mesto zasedel Kepler (in obenem postal dvorni astrolog cesarja Rudolfa II.). Leta 1609 je (na osnovi številnih empiričnih podatkov svojega predhodnika!) formuliral prva dva zakona planetarnega gibanja, leta 1619 še tretjega:

I. *Planeti se gibljejo okrog Sonca po eliptičnih orbitah s Soncem v enem od gorišč.*
II. *Radij vektor od Sonca do planeta opiše v enakih časovnih intervalih enake ploščine.*
III. *Kvadrat obhodnega časa planeta je sorazmeren kubu velike polosi elipse.*

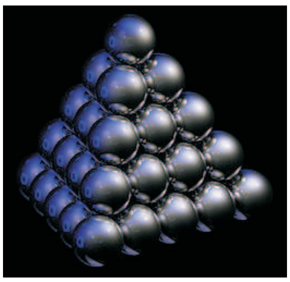
Slika 113. Keplerjev portret iz leta 1610

Zakoni, po katerih se gibljejo planeti, so Keplerju prinesli slavo. Bil pa je tudi eden od začetnikov integralskega računa; poleg ploščin je računal prostornino sodov in drugih rotacijskih teles (npr. *jabolk* in *limon*, če se okrog tetive zavrti večji oziroma manjši krožni lok). Pod vplivom Keplerja je bil v tem pogledu tudi italijanski matematik **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647). O njem in njegovem principu bomo govorili v naslednjem razdelku.

V ravninski geometriji se je ukvarjal z določanjem stožnic, odkril idealne točke in premice v neskončnosti (začetki projektivne geometrije) ter različne limitne lege likov, kar je leta 1822 nadaljeval **Poncelet**.

Kepler je prispeval tudi k teoriji poliedrov (iznašel je npr. *rombični dodekaeder*, *antiprizme*, *zvezdaste poliedre* itd.). V razpravi *Mysterium cosmographicum* je ugotovil, da je razmerje med polmeroma kocki očrtane in včrtane sfere enako razmerju med polmeroma Saturnove in Jupitrove orbite in razvil teorijo, da velja to tudi za druga platonska telesa in druge planete; med sfere šestih dotedaj znanih planetov (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter in Saturn) je vstavil pet pravilnih teles. Teorija je seveda napačna, kaže pa na to, da ga je pri odkrivanju naravnih zakonov vodila matematična estetika.

Kepler se je preskusil tudi v kombinatoriki. Dopisoval si je s **Thomasom Harriotom**, kateremu je *Sir Walter Raleigh* naročil izdelavo bolj ekonomičnega sistema za zlaganje topovskih krogel na palubi ladje. Kepler je o problemu razmišljal in leta 1611 prišel do domneve, da je izmed vseh zlaganj najboljše klasično (kubično) zlaganje krogel, ki ima po njegovem največjo povprečno gostoto, enako $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$ (glej vajo 9). To je znamenita *Keplerjeva domneva*. Še danes ni povsem gotovo, ali je ta domneva res veljavna, čeprav je leta 1998 njen dokaz napovedal in potem deloma objavil ameriški matematik **Thomas Hales** (rojen 1958).



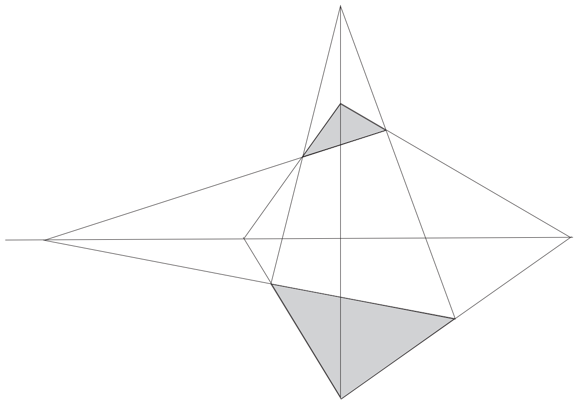
Slika 114. Klasično (kubično) zlaganje topovskih krogel

Keplerjevo delo je mešanica mističnega pristopa, drznih špekulacij in globokega znanstvenega uvida. V osebnem življenju pa je bil zelo nesrečen. Najljubši sin mu je umrl za ošpicami, žena zbolela in umrla, mater so obtožili čarovništva, njega krivoverstva. Ko se je vdrugo poročal, je skrbno in pazljivo izbiral - in na koncu izbral napačno. Nekaj časa je bil prisiljen sestavljati različne horoskope, da se je preživljal.

Slavna geometra

Gérard Desargues (1593-1662) je bil v Lyonu rojeni inženir, arhitekt in oficir. Leta 1639 je v Parizu izšla njegova pomembna drobna knjižica o stožnicah, ki pa je bila kmalu pozabljena. Šele dve stoletji kasnje je leta 1845 francoski geometer **Michel Chasles** (1793-1880) odkril ročni prepis knjižice, ki ga je naredil Desarguesov učenec **Philippe de la Hire** (1640-1718). Razlog pozabe je bil v sočasnem rojstvu Descartesove analitične geometrije in ekscentričnem Desarguesovem pisanju z mnogimi novimi izrazi (okrog 70, ohranila se je le "involucija"). Knjižica na osnovi Keplerjeve doktrine zveznosti o eksistenci idealnih točk in premic razvija osnove involucije, homologije, polarnosti in perspektive, kar je danes domače v projektivni geometriji. Zato velja danes Desargues za začetnika projektivne geometrije.

Znamenit je prvi geometrijski Desarguesov izrek o dveh trikotnikih: *če so zveznice parov ustreznih oglišč konkurentne, so presečišča parov ustreznih stranic kolinearna in obratno* (glej sliko 115).



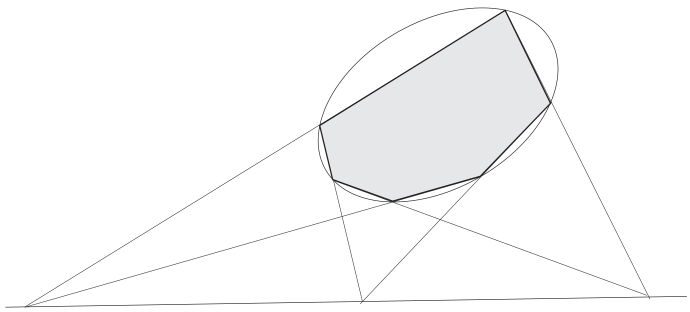
Slika 115. Ilustracija Desarguesovega izreka

Njegovo delo sta spoštovala *Descartes* in *Pascal*, nadaljevali pa šele geometri iz 19. stoletja: **Gergonne**, **Poncelet**, **Brianchon**, **Dupin**, **Chasles** in **Steiner**. Izraz *pol* je vpeljal leta 1810 francoski matematik **Servois**, polaro pa istega leta **Gergonne**. On in **Poncelet** sta začela s proučevanjem dualnosti v projektivni geometriji, ki je bila osvobojena vsake metrike šele v delu **Karla Georga Christiana von Staudta** iz leta 1847. Veliki nemški matematik **Felix Klein** je leta 1872 v svojem *Erlangenskem programu*, po katerem je geometrija pročevanje lastnosti, ki se ohranjajo pri določenih transformacijah, definiral projektivno geometrijo kot vedo o količinah in objektih, ki se ohranjajo pri projekcijah (na drugo ravnino), torej npr. kolinearnost, konkurenčnost, ne pa npr. ploščina, krogi, sredine daljic itd.

Slika 116. Portret Blaisa Pascala

Blaise Pascal (1623-1662), pravi matematični genij, je bil rojen v provinci Auvergne. Dvanajstleten je odkril mnoge izreke elementarne geometrije, štirinajstleten že sodeloval pri zbiranju skupine francoskih matematikov, iz katerih je 1666 zrasla Francoska akademija znanosti, šestnajstleten odkril nekatere globoke izreke projektivne geometrije, devetnajstleten skonstruiral vrsto računskega stroja. Leta 1648 je napisal obsežno študijo o stožnicah, leta 1650 je zbolel, kar mu je spremenilo življenje, saj se je odtlej večinoma posvečal globokim religioznim vprašanjem. Za kratek čas se je vrnil k matematiki, eksperimentiral s tlakom v tekočinah (po njem se imenuje enota *pascal*), s Fermatom je sodeloval pri utrjevanju osnov verjetnostnega računa, a se je leta 1654 že vrnil k verski meditaciji. Pred smrtjo je napisal *Provincialna pisma* in *Misli*, dve fundamentalni deli v izbrušenem stilu in vzor vse kasnejše francoske literature. Njegov oče **Étienne Pascal** (1588-1640) je bil tudi sposoben matematik (po njem se imenuje krivulja *Pascalov polž* oziroma *limaçon de Pascal*, ki smo jo omenili v 3. razdelku v zvezi s tretjinjenjem kota).

Descartes in Leibniz sta še videla Pascalovo razpravo o stožnicah (Leibniz je mislil, da jo je napisal oče Étienne), danes je izgubljena. V njej se pojavi "mistični"heksagram, včrtan v stožnico, in s tem povezan izrek projektivne geometrije, da se trije pari nasprotnih stranic sekajo na skupni premici (glej sliko 117).



Slika 117. Pascalov mistični heksagram

To je eden najbogatejših izrekov v geometriji, samo Pascal je iz njega izpeljal več kot 400 posledic. Razprava sicer ni bila nikoli natisnjena, objavil je le eno stran rezultatov (*Essay pour les coniques*), od katere sta ohranjeni le dve kopiji, ena v zbirki Leibnizovih rokopisov v Hannovru, druga v Nacionalni biblioteki v Parizu. Razprava *Traité du triangle arithmétique* je bila natisnjena posthumno leta 1665. V njem je znameniti Pascalov trikotnik (glej spodnjo tabelo) in tudi prva sprejemljiva formulacija principa matematične indukcije. (Najstarejši tak trikotnik so sicer našli v neki kitajski knjigi iz leta 1303.)

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
...	...	...	...	...	...	...

Pascalov trikotnik (levi zgornji kot)

Pascal velja tudi za enega od očetov verjetnostnega računa. Igre s kocko so bile od nekdaj popularne. Že Luca Pacioli je v *Summi* 1494 spraševal, kako razdeliti točke med enakovredna igralca, če je igra pri nekem rezultatu prekinjena. O problemu (porazdelitve) točk je razpravljal tudi Cardano v 16. stoletju. Leta 1654 je *Chevalier de Méré*, znani kockar, o tem pisal Pascalu, ta pa Fermatu. Njuna korespondenca velja za začetek teorije verjetnosti.

Zadnje Pascalovo matematično delo pa se tiče *cikloide*, te zanimive krivulje, ki so jo zaradi številnih lepih lastnosti imenovali "Helena geometrije". Pozoren nanjo je bil že Galileo (v zvezi z gradnjo mostov), Pascal pa je začel o njej premišljevati leta 1658 menda zato, da bi pozabil na zobobol. O cikloidi je napisal razpravo, v kateri je poiskal prostornino in površino ustrezne vrtenine ter težišče lika pod njo (ploščino pod njenim lokom so znali izračunati že prej).

Pascal je včasih uporabljal psevdonim *Lovis de Montalte* ali njegov anagram *Amos Dettonville*.

Računski stroji

Pascalu pripisujejo tudi iznajdbo prvega računskega stroja. Že leta 1642 je konstruiral mehansko napravo za seštevanje 6-mestnih števil v pomoč očetu pri delu za vlado v Rouenu. Sam Pascal je izdelal 50 protototipov in jih testiral, nato pa v naslednjih desetih letih še 20 takih naprav. Nekatere so še ohranjene.

Slika 118. Pascalovi kalkulatorji

Kasneje v tem stoletju je **Gottfried Wilhelm Leibniz** leta 1672 izdelal napravo za množenje, podobno je konstruiral tudi **Samuel Morley** leta 1673 v Angliji in leta 1820 **Thomas de Colmar** (tudi za odštevanje in deljenje). Vse te naprave so bile precej nerodne. Prvi praktično delujoči računski stroj (za vse štiri računske operacije) je patentiral leta 1875 Američan **Frank Stephan Baldwin**, za njim pa leta 1878 podoben stroj Šved **Willgodt Theophile Odhner**.

S tem v zvezi je treba omeniti še Angleža **Charlesa Babbagea** (1791-1871), ki si je zamislil analitičen stroj za računanje matematičnih tabel in izvajanje različnih aritmetičnih operacij. Ker bi delal po inštrukcijah operaterja, je to nekakšen prototip računalnika. Program zanj mu je napisala **Ada Augusta Lovelace** (1815-1852), hči pesnika Lorda Byrona. Prvi sodobni računalniki so se pojavili ob koncu druge svetovne vojne v Ameriki na Harvardski univerzi 1944 (IBM ASCC) in na univerzi v Pennsylvaniji (ENIAC).

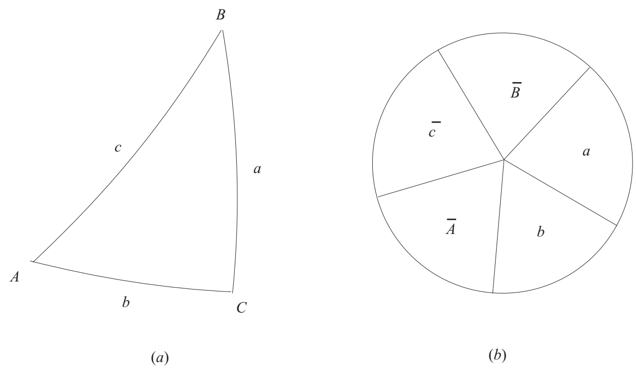
Vaje:

(1) Izpelji formulo za **Napierove logaritme** v današnji obliki: $\operatorname{Nap}\log x = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7)$, tako da predpostaviš, da je $-dx/dt = x$ (hitrost točke S) in $dy/dt = 10^7$ (hitrost točke T). Glej sliko 107.

(2) Z modernimi metodami integralskega računa izračunaj prostornino in površino rotacijskega telesa, če se okrog tetive dolžine a, $0 < a < 1$, zavrti (a) večji, (b) manjši od krožnih lokov v rogu s polmerom 1. **Kepler** je prvi primer imenoval *jabolko*, drugega *limona*.

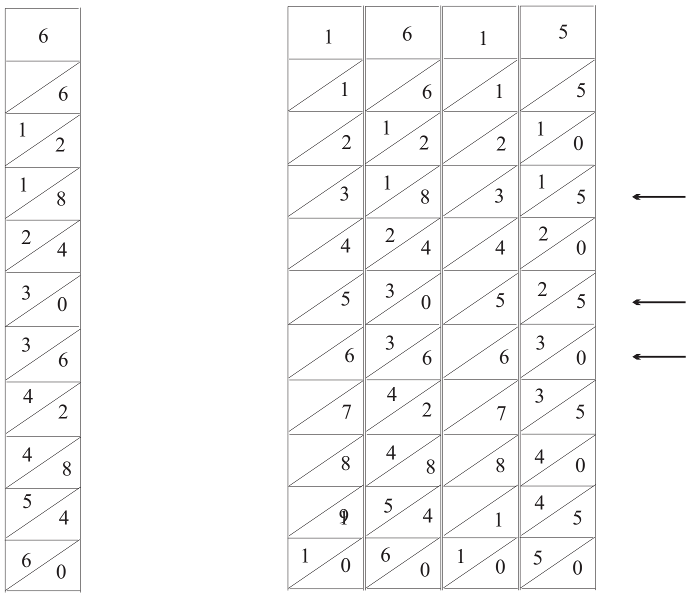
(3) Za sferični trikotnik ABC s stranicami (loki) a, b, c in koti v ogliščih A, B, C izpelji
(a) *kosinusni zakon za stranice*: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$,
(b) *kosinusni zakon za kote*: $\cos C = -\cos A \cos A + \sin A \sin A \cos c$,
(c) *sinusni zakon*: $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$.

(4) Pri pravokotnem sferičnem trikotniku (s pravim kotom pri C) veljajo naslednje formule:
(i) $\sin a = \sin A \sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B$ in podobno za b namesto a, B namesto A in obratno,
(ii) $\cos A = \cos a \sin B = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c$ in podobno za b namesto a, B namesto A in obratno,



SLIKA 119. Napierov krog za lažje pomnenje formul za pravokotni sferični trikotnik

(iii) $\cos c = \cos a \cos b \ = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$ (Pitagorov izrek za pravokotni sferični trikotnik).
(a) Izpelji zgornje formule iz prejšnjih zakonov.
(b) Preveri naslednji pravili v zvezi z *Napierovim krogom* (glej sliko 119, črtica pomeni komplementarni kot):
(i) *Sinus katerega koli dela je enak produktu kosinusov nasprotnih delov.*
(ii) *Sinus katerega koli dela je enak produktu tangensov priležnih delov.*



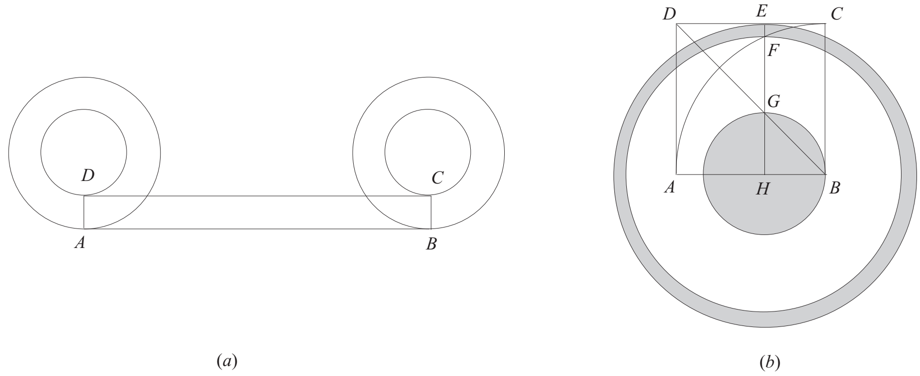
SLIKA 120. Napierove palice za hitro množenje

(5) *Napierove palice* (*kosti*), so priročno sredstvo za hitro množenje večmestnih števil. Vnaprej je treba pripraviti za vsako od desetih števk ustrezen trak večkratnikov (v več kopijah), tako kot npr. za števko 6 na sliki 120a. Ustrezne trakove potem zložimo skupaj in v ustreznih vrsticah preberemo števila (slika 120b), ki jih potem zamaknemo in seštejemo, npr. $1615 \times 365 = 484500 + 96900 + 8075 = 589475$. Zmnoži na ta način še 163×2334 in 3116×624.

(6) **Galileo** ima v *Discorsi* iz leta 1638 opisana naslednja dva paradoksa:

(a) Koncentrična kroga s polmeroma OA in OC sta fiksirana. Ko se veliki krog zakotali po daljici od A do B, napravi polni obrat, zato je njegov obseg enak AB. V istem času tudi manjši krog napravi polni obrat, zato je njegov obseg enak CD (slika 121a). Razloži, ali sta obsega obeh krogov res enaka.

(b) Naj bo $ABCD$ kvadrat in HE poljubna navpična daljica v kvadratu, ki seka diagonalo BD v točki G, krožnico $B(C)$ pa v točki F. Narišimo tri kroge: $H(G)$, $H(F)$, $H(E)$ (slika 121b). Pokaži, da je ploščina kroga $H(G)$ enaka ploščini kolobarja med krogoma $H(E)$ in $H(F)$. Če pošljemo H proti B, se krog $H(G)$ skrči v točko B, kolobar pa v krožnico $B(C)$. Razloži, ali je tedaj res velikost točke B enaka obsegu kroga $B(C)$.



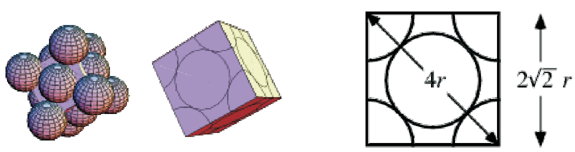
Slika 121. Galilejeva paradoksa

(7) V naslednji tabeli so podani obhodni časi (v letih) šestih planetov in velike polosi njihovih orbit (v astronomskih enotah). Preveri z izračunom, ali velja (približno) **Keplerjev tretji zakon**, da je razmerje med kvadratom obhodne dobe in kubom velike polosi konstantno.

Planet	Obhodni čas	Velika polos
Merkur	0.241	0.387
Venera	0.615	0.723
Zemlja	1.000	1.000
Mars	1.881	1.524
Jupiter	11.862	5.202
Saturn	29.457	9.539

(8) Mozaik je tlakovanje ravnine s pravilnimi večkotniki. Pokaži naslednje:
(a) V pravilnem n-kotniku meri notranji kot $(n-2)\pi/n$.
(b) V mozaiku, sestavljenem iz enakih pravilnih večkotnikov, se v vsakem oglišču stika $2n/(n-2)$ večkotnikov. Poišči vse možnosti.
(c) V mozaiku, pri katerem se v vsakem oglišču stikajo trije različni pravilni večkotniki s stranicami p, q, r, velja $1/p + 1/q + 1/r = 1/2$. Poišči tak primer, da je $p + q + r$ najmanjše število.

(9) Pri klasičnem (kubičnem) zlaganju krogel s polmerom r je vsaka celica kocka z robom $2r\sqrt{2}$, vanjo pa spada v vsakem vogalu $1/8$ krogle in v središču vsake stranske ploskve $1/2$ krogle (glej sliko 122). Izračunaj odtod prostornino, ki jo v kocki zavzemajo krogle, in njen delež glede na prostornino cele kocke. Prepričaj se, da na ta način res dobimo za povprečno gostoto takega pakiranja krogel vrednost $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74048$.



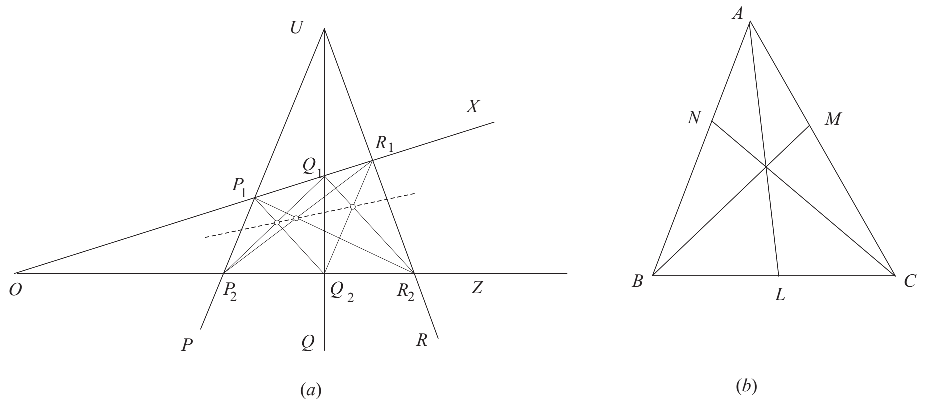
Slika 122. Klasično kubično pakiranje krogel

(10) S projiciranjem ustrezne premice v neskončnost dokažite naslednje trditve:

(a) (**Papos**) Naj bodo UP, UQ in UR tri ravninske premice, ki se sekajo v isti točki, premici OX in OY naj jih sekata zapored v točkah P_1, Q_1, R_1 in P_2, Q_2, R_2 (slika 123a). Potem so presečišča med Q_1R_2 in Q_2R_1, R_1P_2 in R_2O_1, P_1Q_2 in P_2Q_1 kolinearna.

(b) (**Obrat Desarguesovega izreka**) Isto označene stranice dveh ravninskih trikotnikov $A_1B_1C_1$ in $A_2B_2C_2$ naj se sekajo zapored v kolinearnih točkah L, M, N. Potem so premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 konkurentne (se sekajo v isti točki).

(c) **Cevov izrek** iz leta 1678 pravi: *Tri daljice, ki povezujejo tri točke* L, M, N *na stranicah* BC, CA, AB *trikotnika* ABC *z nasprotnimi oglišči, se sekajo v isti točki natanko takrat, ko velja* $(AN/NB)(BL/LC)(CM/MA) = 1$ (slika 123b). Z uporabo Cevovega izreka pokaži, da se zveznice dotikališč včrtanega kroga z nasprotnimi oglišči sekajo v isti točki in (s poševno projekcijo) da velja isto za včrtano elipso.



Slika 123. Metoda projiciranja

(11) Prepričaj se z zveznostnim argumentom, da **Pascalov izrek o heksagramu** velja tudi, če dve točki (ali več parov točk) na stožnici sovpadata. Z uporabo te posplošitve dokaži naslednje:

(a) Če je na stožnici danih pet točk, načrtaj v katerikoli od njih tangento na stožnico.

(b) Če so na stožnici dane štiri točke in tangenta v eni izmed njih, načrtaj še druge točke na stožnici.

(c) Če so na stožnici dane tri točke in tangenti v dveh od njih, načrtaj tangento v tretji.

(12) V projektivni geometriji v ravnini velja dualnost med točkami in premicami. **Pascalov izrek** (*Šest oglišč šestkotnika leži na stožnici natanko takrat, ko ležijo presečišča treh parov nasprotnih stranic na skupni premici*) ima za dualno verzijo naslednji **Brianchonov izrek** iz 1806: *Šest stranic šestkotnika je tangentnih na stožnico natanko takrat, ko se tri premice, ki povezujejo po dve in dve nasprotni oglišči, sekajo v skupni točki.* Z uporabo tega dokaži:

(a) Če je danih pet premic, poišči na katerikoli od njih dotikališče s stožnico, ki se dotika vseh petih premic.

(b) Če so dane štiri tangente na stožnico in dotikališče ene izmed tangent, konsturiraj nadaljnjo tangento na stožnic.

(c) Poišči dualno obliko Desarguesovega izreka.

(13) **Lucasova števila** L_n dobimo iz Fibonaccijevih tako, da seštevamo dve Fibonaccijevi števili, ki se razlikujeta za 2, torej $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $n \geq 1$ ($F_0 = 0$). V tabeli, iz katere smo dobili Pascalov trikotnik, razmaknimo vrstice. Pokaži naslednje:

(a) Če vsak naslednji stolpec razmaknjene tabele zamaknemo za eno vrstico navzdol in seštejemo po vrsticah, dobimo v n-ti vrstici n-to Fibonaccijevo število F_n.

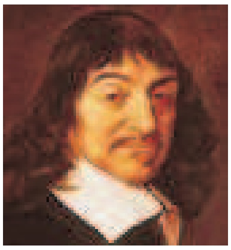
(b) Če najprej vsaki vrstici prištejemo naslednjo, nato pa zamaknemo prvi stolpec za eno vrstico navzdol, drugega pustimo pri miru, vsakega naslednjega pa za eno vrstico navzdol in seštejemo po vrsticah, dobimo v n-ti vrstici n-to Lucasovo število L_n.

9. Analitična geometrija in teorija števil

Descartes in Fermat sta z uvedbo koordinat geometrijo postavila na povsem nove osnove. S korespondenco med geometrijskimi objekti - krivuljami - in algebraičnimi enačbami $f(x, y) = 0$ sta geometrijo takorekoč reducirala na algebro in analizo.

René Descartes (1596-1650)

Veliki filozof in matematik se je rodil blizu Toursa in z osmimi leti začel obiskovati jezuitsko šolo v La Flèchu. Leta 1912 se je preselil v Pariz, kjer je z **Mersennom** in **Mydorgem** začel študirati matematiko. Od 1617 dalje je nekaj let služboval kot vojak v armadi princa Mauricea Oranškega po Nemčiji, Danski, Nizozemski, Švici in Italiji, nato pa nadaljeval študije. Nakar je 20 let preživel na Nizozemskem, leta 1949 pa se je na povabilo kraljice Kristine preselil na Švedsko, kjer je kmalu zbolel in umrl v Stockholmu za pljučnico.



Slika 124. René Descartes

Največ razprav je napisal na Nizozemskem. Fizikalno sliko sveta je leta 1633 opisal v *Le mondu*, vendar dela ni objavil, ker je izvedel za Galilejeve težave z inkvizicijo (izšlo je posthumno šele leta 1664).

Najpomembnejše njegovo matematično delo pa je iz leta 1637, in sicer *Discourse de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* s tremi dodatki *La dioptrique, Les météores* in *La géométrie*. *Dioptrika* se ukvarja z naravo svetlobe (vključuje tudi lomni zakon), *Meteorika* pa je prvi poskus znanstvene razlage vremena (v njej najdemo npr. tudi opis, zakaj nastane mavrica). Poleg tega je izdal filozofski deli v latinščini, *Meditationes* leta 1641 in *Principia philosopiae* leta 1644. Z njima je še utrdil principe racionalizma. Descartes je uvedel metodični dvom: ničesar ni, o čemer ne bi mogli dvomiti, razen dvoma samega; to pa že predpostavlja, da obstaja nekdo, ki dvomi. Odtod njegov citat: *Cogito, ergo sum* (*mislim, torej sem*). Dvom pa ni dovolj. Treba je najti trdno oporo in ta opora je po njegovem lahko le matematika, prva izmed znanosti.

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision: Ainsi n'a-t'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Slika 125. Descartesova *La géométrie*

La géométrie je 100 strani dolga razprava in prinaša v prvem delu osnove analitične geometrije. V nasprotju z Grki, ki jim je količina x^2 pomenila ploščino kvadrata, je Renéju Descartesu pomenila dolžino, ki jo je pri danem x znal konstruitrati s sorazmerjem $1 : x = x : x^2$. V drugem delu se ukvarja s konstrukcijo tangent na krivulje, podane z enačbo $f(x, y) = 0$, npr. na stožnice in druge sorodne krivulje (npr. *Descartesov list*, *Descartesove ovale*, kot geometrijska mesta točk, katerih razdalji r_1, r_2 do dveh izbranih točk zadoščata relaciji $r_1 + mr_2 = a$ itd.). Tretji del obravnava reševanje enačb stopnje več kot 2. V njem najdemo slavno Descartesovo pravilo predznakov za določitev števila pozitivnih rešitev. Prav tako je v njem standardizirana notacija (uporaba začetnih črk za koeficiente, zadnjih za neznanke, potence a^2, a^3 itd.), prva uporaba metode nedoločenih koeficientov itd. *La géométrie* sicer ni napisana zelo jasno in jo je težko brati.

Nadaljni razvoj analitične geometrije

Šele kasnejše latinske izdaje (npr. **Fransa van Schootena** mlajšega iz leta 1649) so analitično geometrijo bolj popularizirale, današnjo podobo pa je dobila šele sto in več let kasneje. Izraze, kot so npr. *koordinate*, *abscisa*, *ordinata*, je vpeljal Leibniz leta 1692. Poleg kartezičnih koordinat so vpeljali tudi polarne koordinate (Jakob Bernoulli 1691) in tudi druge koordinate (za posebne potrebe). Zanimiv razvoj je leta 1829 začel **Julius Plücker** (1801-1868), ko je ugotovil, da osnovni element ni nujno točka, pač pa lahko tudi premica ali krog. Vpeljal je ti. *linearne kordinate* za določanje položaja premice v ravnini (glej vajo 6). Na osnovi tega je tudi izpeljal princip dualnosti v projektivni geometriji, definiral krivuljo ne kot geometrijsko mesto točk, ampak kot ovojnico premic (tangent) itd.

Drugi (**Frans van Schooten**, **La Hire** in **Johann Bernoulli**) so predlagali prostorsko analitično geometrijo, ki jo je prvi sistematično razvil **Antoine Parent** (1666-1716) okrog leta 1700. **Alexis Claude Clairaut** (1713-1765) pa je leta 1731 prvi zapisal analitično primer prostorske krivulje; teorijo takih krivulj je sistematično obdelal **Leonhard Euler**. Večrazsežne prostore so vpeljali šele matematiki 19. stoletja **Arthur Cayley** (1821-1895), **Hermann Grassmann** (1809-1877) in **Bernhard Riemann** (1826-1866).

Pierre de Fermat

Osnove moderne analitične geometrije je (kot zatrjuje v pismu **Robervalu** septembra 1636) neodvisno od Descartesa in celo pred njim razvil drugi veliki francoski matematik tega časa, **Pierre de Fermat** (1601-1665). Poleg enačb premice, krožnice, parabole, hiperbole in elipse je analitično (z enačbami) vpeljal mnoge nove krivulje, npr. krivuljo, kasneje imenovano *verziera* ali *Agnesin koder* (v čast vsestranski ženski **Mariji Gaetani Agnesi** (1718-1799) iz Milana, lingvistki, filozofinji in prvi pomembni matematičarki po Hipatiji).

Slika 126. Pierre de Fermat

Fermat je bil rojen blizu Toulousa, sin trgovca, s 30 leti postal kancler lokalnega parlamenta in se odlikoval po skromnosti in natančnosti. Poleg pravnih zadev je vztrajno raziskoval matematiko. Čeprav je za časa življenja objavil zelo malo, se je veliko njegovih idej ohranilo v pismih mnogim vodilnim matematikom tedanjega časa. Upravičeno ga štejejo za enega največjih francoskih matematikov 17. stoletja.

Začetek moderne teorije števil

Gotovo je njegov najpomembnejši prispevek osnovanje in razvoj *moderne teorije števil*, kjer je izkazal izjemno intuicijo in sposobnost.

Najbrž je bila prav Diofantova *Aritmetika*, ki jo je leta 1621 izdal **Bachet de Méziriac** (1581-1638), njegova prva vzpodbuda na tem področju, saj najdemo mnoge njegove rezultate kot robne opombe k tej knjigi. Mnoge **Fermatove** ugotovitve so se kasneje izkazale kot pravilne. Naštejmo nekaj primerov:

(1) *Mali Fermatov izrek*: *Če je p praštevilo, ki ne deli a, je* $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Ta rezultat je sporočil Fermat v pismu *Fréniclu de Bessyju* oktobra 1640, prvi objavljeni dokaz pa je Eulerjev iz leta 1736.

(2) *Vsako liho praštevilo je razlika dveh kvadratov, in to na en sam način.* Preprost (Fermatov) dokaz: $p = [(p+1)/2]^2 - [(p-1)/2]^2$. Če pa je $p = x^2 - y^2$, je $p = (x+y)(x-y)$ in zato $x + y = p$, $x - y = 1$ oziroma $x = (p+1)/2$, $y = (p-1)/2$.

(3) *Praštevilo oblike $4m+1$ je vsota dveh kvadratov.* To je rezultat iz Fermatovega pisma Mersennu decembra 1640, prvi objavljeni dokaz je iz leta 1754, ko je Euler pokazal tudi enoličnost takega zapisa (glej vajo 13).

(4) *Praštevilo oblike $4m+1$ je (na en sam način) hipotenuza celoštevilskega pravokotnega trikotnika; njegov kvadrat je hipotenuza dvakrat, kub trikrat itd.*. Npr. $5 = 4 \cdot 1 + 1$, $5^2 = 3^2 + 4^2$, $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$, $125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2$. Za dokaz glej vajo 14.

(5) *Vsako nenegativno število je vsota štirih ali manj kvadratov.* Netrivialni rezultat je dokazal Lagrange leta 1770.

(6) *Ploščina celoštevilskega pravokotnega trikotnika ni kvadrat* (tudi dokazal Lagrange).

(7) *Enačba $x^4 + y^4 = z^4$ nima celoštevilske rešitve.* To sledi iz točke (6) (glej vajo 15).

(8) *Obstaja le ena celoštevilska rešitev enačbe $x^2 + 2 = y^3$* $(x = 5, y = 3)$ *in le dve rešitvi enačbe $x^2 + 4 = y^3$* $(x = 2, y = 2$ in $x = 11, y = 5)$.

(9) *Veliki Fermatov izrek*: *Ne obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^n + y^n = z^n$, če je $n > 2$.*

(10) Ena redkih Fermatovih napačnih trditev je v zvezi s števili oblike $f(n) = 2^{2^n} + 1$ (Fermatova števila). Fermat je mislil, da so vsa taka števila praštevila, kar je s protiprimerom ovrgel Euler, ko je pokazal, da je $f(5)$ sestavljeno število.

Opomba. Točka (9) je bila zapisana kot opomba ob robu v Fermatovi kopiji Bachetovega prevoda Diofantove *Aritmetike* ob 8. problemu v II. knjigi. Fermat je še zapisal, da je našel čudovit dokaz, za katerega je na robu premalo prostora.

Mnogi znani matematiki so se kasneje trudili to trditev dokazati, a jim tudi z bolj sofisticiranimi metodami, kot jih je imel na razpolago Fermat, to dolgo ni uspelo.

Fermat je znal dokazati primer $n = 4$, **Euler** $n = 3$, leta 1825 sta neodvisna dokaza za $n = 5$ prispevala **Legendre** in **Dirichlet**, leta 1837 **Lamé** za $n = 7$. Legendre je v svojem dokazu uporabil nekatere rezultate francoske matematičarke in filozofinje **Sophie Germain** (1776-1831). Veliko se je s problemom ukvarjal **Ernst Kummer** (1810-1893) (in ob tem razvil teorijo idealov), problema pa ni rešil. Kasneje so nerešljivost enačbe potrdili za zelo velika števila n, splošne rešitve pa dolgo ni bilo.

Šele leta 1995 je angleški matematik **Andrew Wiles** (rojen leta 1953) dokazal domnevo Shimura-Taniyama in s tem po več kot 350 letih potrdil resničnost Fermatove trditve.

Leta 1897 so med Huygensovimi rokopisi v Leidnu našli besedilo, ki pojasnjuje Fermatovo splošno *metodo neskončnega spusta*, s katero je menda ugnal marsikateri problem (glej vajo 16). Nazadnje je dopisovanje med Fermatom in Pascalom glede vprašanj v zvezi z igrami rodilo osnovna spoznanja iz *verjetnostnega računa* (glej vajo 17).

SLIKA 127. Andrew Wiles leta 2005

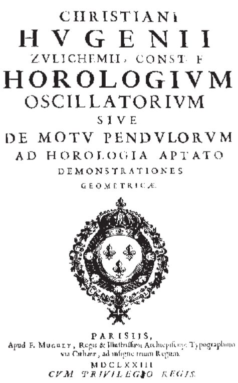
Christiaan Huygens (1629-1695)

Genialni in izredno produktivni nizozemski matematik in fizik je bil rojen v Haagu, študiral v Leidnu pri **Fransu van Schootenu mlajšemu**. Dvaindvajsetleten je odkril napako pri Saint-Vincentovi kvadraturi kroga in o tem objavil članek. Sam je potem objavil razprave o kvadraturi stožnic ter o Snellovi trigonometrični izboljšavi klasične metode za računanje števila π. Leta 1654 je z bratom izboljšal leče za astronomska opazovanja in zastavil vrsto pomembnih astronomskih vprašanj. Čez nekaj let je izumil uro na nihalo. Leta 1657 je napisal prvo razpravo o verjetnosti, *De ratiociniis in ludo aleae*, najboljše delo vse do razprave **Jakoba Bernoullija** *Ars conjectandi* iz leta 1713. V njej je uvedel pojem matematičnega upanja in rešil vrsto težkih, a zanimivih problemov.

SLIKA 128. Vaillantov portret Christiaana Huygensa

Leta 1665 je na povabilo Ludvika XIV. odpotoval v Pariz, postal član novonastale akademije 1666 in sodeloval z Angleško kraljevsko družbo pri problemih dinamike trkov. Leta 1673 je v Parizu izšla njegova velika razprava *Horologium oscillatorium* v petih delih. V prvem opisuje uro, ki jo je izumil leta 1656, v drugem razpravlja o dinamiki padajočih teles v vakuumu vzdolž različnih krivulj. Dokazana je izohronost cikloide. V tretjem delu obravnava evolute in evolvente krivulj, npr. parabole in cikloide, v četrtem sestavljena nihala, v zadnjem, petem delu, pa opisuje cikloidno nihalo in na njem temelječo uro. Konča pa se z izreki o centripetalni sili pri krožnem gibanju. Leta 1675 so pod njegovim vodstvom izdelali prvo uro na nihalno vzmet in jo podarili Ludviku XIV.

Leta 1681 se je po bolezni vrnil na Nizozemsko in se ukvarjal s teleskopi, leta 1689 pa je obiskal Anglijo in se srečal z **Newtonom**. Zagovarjal je valovno naravo svetlobe, medtem ko se je Newton ogreval za korpuskularno teorijo. Med drugimi manjšimi Huygensovimi prispevki omenimo rektifikacijo *Dioklove cisoide*, geometrijske raziskave *verižnice*, *logaritmične spirale* in drugih krivulj. Ukvarjal se je tudi s Fermatovimimi pravili o maksimumih in minimumih in podal številne primere uporabe matematike v fiziki. Njegovi dokazi so skrbno izdelani in rigorozni, poznal je nove metode analitične geometrije in infinitezimalnega računa. Umrl je v Haagu.



SLIKA 129. Huygensova razprava *Horologium oscillatorium*

Drugi matematiki 17. stoletja

V Italiji:

Evangelista Torricelli (1607-1647), najbolj znan v fiziki po raziskovanju tlaka in dinamiki gibanja v tekočinah (izum barometra, enota za tlak), ima veliko matematičnih prispevkov. Bil je prvi, ki je pravilno izračunal ploščino pod cikloidnim lokom. Rešil je problem, ki mu ga je bil zastavil **Fermat**, o legi točke v trikotniku z minimalno vsoto razdalj do njegovih oglišč (rešitev je leta 1659 objavil njegov učenec **Viviani**). To je bila od Starih Grkov naprej prva pomembna nova točka trikotnika; imenujejo jo *Fermat-Steinerjeva točka*, ker je o njej elegantno in preprosto analizo kasneje napravil **Jakob Steiner**. Leta 1640 je Torricelli izračunal tudi dolžino enega zavoja *logaritmične spirale* (že prej tudi Descartes), kar je bila prva krivulja razen krožnice, katero so uspeli rektificirati.

SLIKA 130. Portret Evangelista Torricellija na naslovnici neke njegove knjige

Vincenzo Viviani (1622-1703) je bil Torricellijev učenec in Galilejev asistent (uredil je prvo izdajo Galilejevih zbranih del). Konstruiral je tangento na cikloido, uspešno izvedel trisekcijo kota z enakoosno hiperbolo in presenetil svet s problemom, kako v polkrogelno kupolo napraviti štiri enaka okna, tako da se bo ostanek kupole dal kvadrirati. V matematiki je znan po ugotovitvi, da je v enakostraničnem trikotniku vsota razdalj poljubne točke do vseh treh stranic konstantna (neodvisna od lokacije točke) in po krivulji, presečnici sfere in valja s pol manjšim polmerom osnovne ploskve skozi središče sfere (glej vajo 9). Ukvarjal se je tudi s fiziko. Skupaj z *Borellijem* je meril hitrost zvoka in jo ocenil na 350m/s, kar je veliko boljši rezultat, kot ga je pred njim dobil *Pierre Gassendi* (478 m/s).

Omenimo še člane družine **Cassini**, ki so precej prispevali k astronomiji in matematiki. **Giovanni Domenico Cassini** (1625-1712) se je leta 1680 prvi ukvarjal z družino krivulj, določenih tako, da je produkt razdalj točke do dveh izbranih točk konstanten (*Cassinijevi ovali*, vaja 10). Te krivulje nastanejo s preseki torusa z ravninami, vzporednimi njegovi osi. Med njimi najdemo kot poseben primer tudi znamenito *Bernoullijevo lemniskato* (glej vaji 5, 11).

V Franciji:

Bachet de Méziriac (1581-1638) je leta 1612 napisal in 1624 ponovno izdal znamenito zbirko aritmetičnih ugank in trikov za rekreacijo *Problèmes plaisants et délectables*, leta 1621 pa latinski prevod Diofantove *Aritmetike*, ki je bil že večkrat omenjen.

Drugi znani številski teoretik je bil **Marin Mersenne** (1588-1648), ki si je veliko dopisoval z vodilnimi matematiki. Uredil je mnoga dela grške matematike. Najbolj znan je v zvezi s praštevili oblike $2^p - 1$ (*Mersennova praštevila*), ki so v bijekciji s popolnimi števili.

Claude Mydorge (1585-1647) je bil Descartesov prijatelj, geometer (stožnice) in fizik (optika). Poenostavil je mnoge Apolonijeve izreke. Tudi on je zapustil več kot tisoč geometrijskih problemov za rekreacijo.

Drug tak geometer in fizik je bil **Gilles Personne de Roberval** (1602-1675). Znal je konstrurati tangente na mnoge znane krivulje z dinamično metodo sestavljenih gibanj. Trdil je, da je iznašel *Cavalierijev princip* (glej konec tega razdelka). Vsekakor je s podobno metodo znal poiskati ploščine, prostornine in težišča številnim likom in telesom.

Še bolj vsestranski je bil **Phillipe de la Hire** (1640-1718), ki je bil slikar, arhitekt, astronom in matematik. Poleg stožnic je študiral tudi višje krivulje, magične kvadrate in različne projekcije krogle na ravnino.

V Angliji:

William Brouncker (1620-1684), osnovatelj in prvi predsednik Londonske kraljeve družbe, si je stalno dopisoval z Wallisom, Fermatom in drugimi matematiki. Pisal je o rektifikaciji parabole in cikloide, ukvarjal se je z neskončnimi vrstami in z njimi izrazil npr. ploščino pod hiperbolo $xy = 1$ od $x = 1$ do $x = 2$ v obliki $p = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Bil je tudi prvi angleški matematik, ki je raziskoval verižne ulomke.

James Gregory (1638-1675) je bil Škot, profesor matematike v St. Andrewsu in Edinburghu. Zanimal se je tudi za fiziko (optika, zrcalni teleskop). V matematiki je leta 1667 poiskal vrste za arkus tangens, tangens in arkus sekans. Vrsta za arkus tangens $\operatorname{arc\,tg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ se imenuje po njem in po Leibnizu (kot vemo, jo je poznal že **Madhava iz Sangamagrama**, ustanovitelj astronomske in matematične šole v Kerali v Indiji). Gregory je ločil med konvergentno in divergentno vrsto.

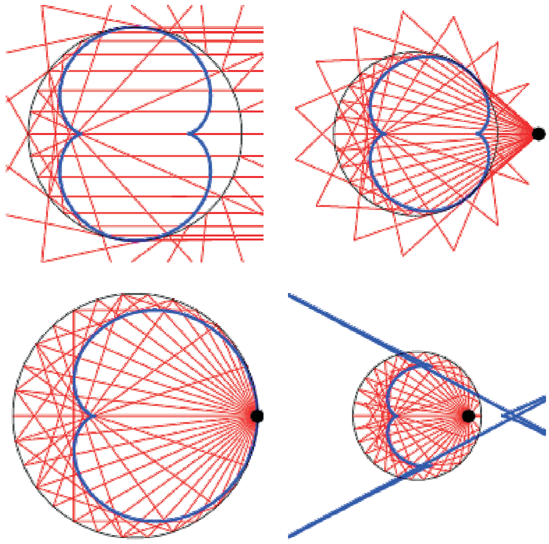
Njegov nečak **David Gregory** (1661-1708) je bil tudi profesor matematike v Edinburghu in po letu 1691 Savilian profesor za astronomijo v Oxfordu. Prav tako se je zanimal za optiko, pisal pa tudi o geometriji in Newtonovi teoriji.

Sir Christopher Wren (1632-1723) bi gotovo postal znan kot matematik, če ne bi bilo londonskega požara leta 1666, po katerem je kot glavni arhitekt obnovil katedralo Sv. Pavla in okrog 50 drugih cerkva in javnih zgradb ter s tem centru obnovljenega Londona vtisnil svoj pečat. Kot Savilian profesor astronomije na Oxfordu v letih 1661 do 1673 in nekaj časa predsednik Kraljeve družbe, se je ukvarjal tudi z dinamiko trkov, optiko, nebesno mehaniko; prvi je leta 1658 izračunal dolžino loka cikloide.

V Nemčiji:

Treba je vsekakor omeniti **Ehrenfrieda Waltherja von Tschirnhausa** (1651-1708), ki je študiral krivulje (kubične, katakavstika) in enačbe višjega reda. Znana je njegova transformacija, ki odpravi drugi in tretji člen v polinomski enačbi.

Katakavstika dane krivulje je ovojnica odbitih žarkov, ki izhajajo iz ene (lahko neskončno oddaljene) točke. *Primeri*: Katakavstika kroga za vzporedne žarke je epicikloida koncentričnega kroga s pol manjšim polmerom z dvema ostema (*nefroida*). Katakavstika kroga za žarke z izvorom na obodu je epicikloida koncentričnega kroga s trikrat manjšim polmerom z eno ostjo (*kardioida*). **Jakob Bernoulli** je leta 1692 pokazal, da je katakavstika kardioide, ko je izvor žarkov v njeni osti, nefroida.



Slika 131. Različni primeri katakavstike kroga glede na izvor žarkov

Na Nizozemskem:

Willebrord Snell (1580-1626) je bil čudežni otrok, ki je zgodaj obvladal standarde tedanje matematike, izumil je *loksodromo* in eden prvih raziskoval sferično trigonometrijo.

Z njo se je ukvarjal tudi **Albert Girard** (1595-1632), znan po uvedbi sedanjih okrajšav za funkcije sinus, tangens itd., podal je formulo za ploščino sferičnega trikotnika z ekscesom, bil je tudi algebraik in je uredil delo Simona Stevina.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) se je ukvarjal s kvadraturo kroga.

Frans van Schooten mlajši (1615-1660) je kot profesor matematike uredil latinske izdaje Descartesove *Geometrije* in učil Huygensa, Huddeja in Sluzeja. Tudi oče **Frans van Schooten starejši** in polbrat **Peter van Schooten** sta bila matematika.

Johann Hudde (1633-1704) je postal celo župan Amsterdama, kot matematik pa se je ukvarjal z iskanjem ekstremov ter reševanjem enačb. Pokazal je, kako lahko večkratne ničle polinomov poiščemo kot ničle največjega skupnega faktorja polinoma in njegovega odvoda.

Še dva matematika sta bila: **René Francois Walter de Sluze** (1622-1685), ki se je ukvarjal z enačbami in krivuljami, ter **Nicolaus Mercator** (1620-1687), ki je uredil Evklida, pisal o trigonometriji in astronomiji ter računal logaritme. Logaritemsko vrsto $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ (imenovano tudi *Mercatorjeva vrsta*) je odkril skupaj z Saint-Vincentom. Ne smemo ga zamenjati z **Gerhardom Mercatorjem** (1512-1594) iz 16. stoletja, ki je znamenit po svoji *Mercatorjevei projekciji*.

Akademije, društva in revije

Povečana matematična aktivnost se je v 16. stoletju odrazila tudi v večjem številu diskusijskih skupin, iz katerih so sčasoma nastale različne stalne **družbe** in **akademije**. Prva akademija je bila ustanovljena v Neaplju že leta 1560, naslednja je bila *Accademia dei Lincei* v Rimu 1603. Nemška *Leopoldina* je bila ustanovljena v Halleju leta 1652, *Accademia del Cimento* v Firencah leta 1657; *Angleška kraljeva družba* je nastala v Londonu leta 1662, *Francoska akademija* pa v Parizu leta 1666. Brouncker je bil npr. (skupaj z Wrenom in Wallisom) ustanovni član angleške akademije, Huygens pa francoske. Omenimo še *Prusko akademijo* iz Berlina (ustanovljena leta 1700) in *Rusko akademijo* iz Sankt Peterburga (ustanovljena leta 1725).

Opomba. Naš polihistor, znameniti **Janez Vajkard Valvasor** (1641-1693), je zaradi svojih obsežnih hidroloških razprav o Krasu in kraških pojavih na pobudo *Edmonda Halleya*, astronoma in geofizika, leta 1687 postal zunanji član Angleške kraljeve družbe. Jezuit **Augustin Hallerstein** (1703-1774), matematik in astronom, pa si je med bivanjem na Kitajskem začel dopisovati leta 1746 z londonsko in leta 1748 s pariško akademijo. Leta 1765 je bil izvoljen za dopisnega člana Ruske akademije v Sankt Peterburgu.

Polagoma je tudi naraščala potreba po **periodičnih publikacijah**, v katerih bi aktivni matematiki lahko objavljali svoje rezultate. Pred letom 1700 je bilo npr. zabeleženih samo 17 revij, ki so (občasno) prinašale tudi matematične članke. Prva sta začela izhajati leta 1665 angleški časopis *Philosophical Transactions* in francoski *Journal des Sçavans*, za njima pa je leta 1682 v Leipzigu *Acto Eruditorum* ustanovil **Leibniz** skupaj z **Menckejem**. V 18. stoletju se je pojavilo že 210 časopisov, v 19. stoletju 950.

Mnoge od teh so bile seveda na elementarnem in bolj rekreacijskem nivoju ali le z nekaj malega uporabe matematike. Tipični zgled je npr. *The Ladies' Diary*, ki je izhajal v Londonu od 1704 do 1841 in je (poleg zgodb, kuharskih receptov in nasvetov) prinašal tudi uganke, rebuse in matematična vprašanja, na katera so lahko odgovarjali bralci.

Zahtevnejše članke iz čiste matematike so objavljale le redke revije. Prva taka resnejša revija je bil francoski *Journal de l'École Polytechnique* z začetkom leta 1794. Prvo čisto matematično revijo, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, je ustanovil francoski matematik **Gergonne** in jo urejal v letih 1810-1831, nakar je prenehala izhajati.

Najstarejša neprekinjeno do danes izhajajoča časopisa, posvečena samo matematiki, sta nemški *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki ga je leta 1826 ustanovil matematik **August Leopold Crelle** (1780-1855), in francoski *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ki se je kot nadaljevanje Gergonnovih *Analov* pojavil leta 1836 pod ustanoviteljstvom in uredništvom matematika **Josepha Liouvillea** (1809-1882). V Angliji je bil leta 1839 ustanovljen *Cambridge Mathematical Journal*, ki pa se je kasneje večkrat preimenoval. Prvi ameriški matematični časopis *The American Journal of Mathematics* je leta 1878 ustnovil **Joseph J. Sylvester** (1814-1897).

V 19. stoletju so nastala tudi prva **matematična društva** (in začela izdajati svoja glasila, *proceedingse* ali *bulletine*), npr. *London Mathematical Society* 1865, *Société mathématique de France* 1872 in *Circolo matematico di Palermo* 1884. Iz društva *New York Mathematical Society*, ustanovljenega 1888, je leta 1894 nastal AMS, *The American Mathematical Society*, nemško društvo DMV, *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, pa je začelo z delom leta 1890.

Slovensko DMF, *Društvo matematikov in fizikov*, kasneje preimenovano v DMFA, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov* Slovenije, je bilo ustanovljeno leta 1949.

Vaje:

(1) **Descartesova** *La géometrie* prinaša različne geometrijske probleme:

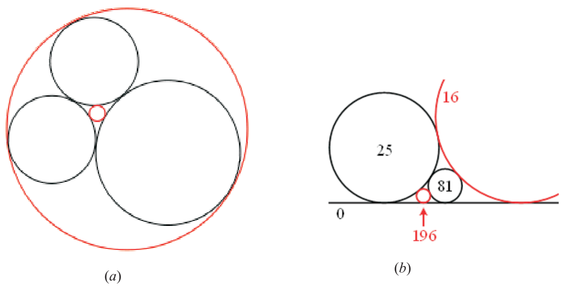
(a) Tangento na krivuljo v dani točki (x_1, y_1) je Descartes našel tako, da je najprej poiskal krog s središčem na abscisni osi, ki se dotika krivulje v točki (x_1, y_1), in s tem normalo na krivuljo v dani točki. Pokaži (i) geometrijsko ali (ii) analitično, da se za parabolo $y^2 = 2px$ to reducira na dejstvo, da je subnormalni odsek v vsaki točki enak p.

(b) Dane so štiri ekvidistantne vzporednice L_1, L_4, L_2, L_3 (v tem vrstnem redu) v medsebojni razdalji a in pravokotnica L_5. Razdalja točke P do premice L_i naj bo p_i. Izberimo L_5 za os x in L_4 za os y. Pošči v kartezičnih koordinatah geometrijsko mesto točk P, za katere velja $p_1p_2p_3 = ap_4p_5$. Dobljena krivulja se imenuje *Descartesov trizob*.

(c) Če so v ravnini dane poljubne štiri premice L_1, L_2, L_3, L_4 in je p_i razdalja točke P do premice L_i. Pokaži, da je za poljubno konstanto $k > 0$ geometrijsko mesto točk P z lastnostjo $p_1p_2 = kp_3p_4$ neka stožnica. (Navodilo: zapiši enačbe štirih premic v normalni obliki in pokaži, da je zadnji pogoj kvadratna funkcija spremenljivk x in y.)

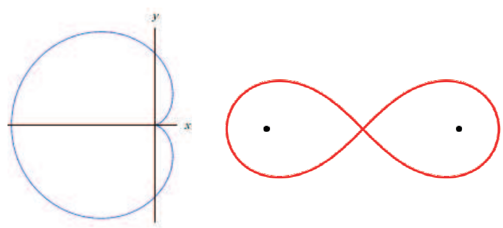
(2) *Descartesovo pravilo predznakov* pravi, da je število pozitivnih korenov polinomske enačbe $f(x) = 0$ z realnimi koeficienti c_i, pripadajočimi padajočim potencam, bodisi enako številu sprememb predznakov v zaporedju koeficientov, bodisi od njega manjše za sodi večkratnik. Število negativnih korenov ugotovimo na enak način iz enačbe $f(-x) = 0$. Z uporabo Descartesovega pravila ugotovi naravo korenov naslednjih enačb:
(a) $x^9 + 3x^8 - 5x^3 + 4x + 6 = 0$.
(b) $2x^7 - 3x^4 - x^3 - 5 = 0$.
(c) Pokaži, da ima enačba $x^5 + x^2 + 1 = 0$ samo en realen koren.
(d) Pokaži, da ima pri realnih $p > 0$ in $q \neq 0$ enačba $x^3 + px + q = 0$ samo en realen koren.

(3) **Descartes** je leta 1643 v pismu princesi Elizabeti Češki obravnaval problem kroga, ki se od zunaj ali od znotraj dotika treh dotikajočih se krogov (glej sliko 132a). Za njihove ukrivljenosti $k_i = 1/r_i$, $i = 1, 2, 3$, in $k = \pm 1/r$ (+ za dotik od zunaj in - za dotik od znotraj) je našel naslednjo relacijo $(k_1 + k_2 + k_3 + k)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2)$, kar je kvadratna enačba za k z dvema rešitvama, od katerih je vsaj ena pozitivna. Dokaz je zahtevnejši. Prepričaj se, da velja Descartesov izrek tudi v primeru, če vzamemo premico namesto enega od dotikajočih se krogov (glej sliko 132b), ali če dva dotikajoča se kroga nadomestimo s parom vzporednih premic.



Slika 132. Ilustracija Descartesovega krožnega izreka

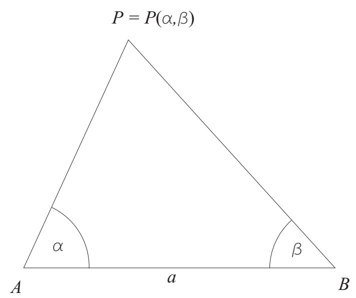
(4) *Descartesov list* je krivulja, ki je v kartezičnih koordinatah podana z enačbo tretje stopnje $x^3 + y^3 = 3axy$.
(a) Nariši krivuljo in pokaži, da je premica $x + y + a = 0$ njena asimptota.
(b) Zapiši krivuljo v polarnih koordinatah.
(c) Vstavi $y = tx$ in napiši enačbo Descartesovega lista v parametrični obliki.
(d) Poišči enačbo Descartesovega lista v zasukanih koordinatah, kjer je os x premica $y = x$.



Slika 133. Kardioida in Bernoullijeva lemniskata

(5) Določi enačbo v kartezičnih koordinatah za naslednje krivulje, dane v polarni obliki:
(a) Bernoullijeva lemniskata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$,
(b) Kardioida: $r = a(1 - \cos\theta)$,
(c) Arhimedova spirala: $r = a\theta$,
(d) Logaritmična spirala: $r = e^{a\theta}$,

(e) Hiperbolična spirala: $r\theta = a$,
(f) Štirilistna roža: $r = a \sin 2\theta$.

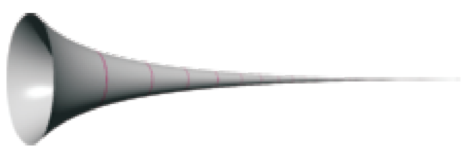


Slika 134. Položaj točke P, določen z bipolarnima koordinatama α in β

(6) *Bipolarni koordinatni sistem* je podan z daljico AB dolžine a in dvema kotoma α in β ob krajiščih, merjenih v nasprotni smeri (slika 134).
  (a) Poišči bipolarno enačbo
    (i) simetrale daljice AB,
    (ii) poljubega krožnega loka, ki ima AB za tetivo.
  (b) Določi zvezo med bipolarnimi in kartezičnimi koordinatami, če za os x izberemo premico AB in za koordinatno izhodišče sredino daljice AB.
  (c) Katere krivulje imajo bipolarno enačbo oblike (k je konstanta):
    (i) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = k$,
    (ii) $\operatorname{ctg}\alpha / \operatorname{ctg}\beta = k$,
    (iii) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = k$.

(7) Premica v koordinatnem sistemu je lahko določena na različne načine.
  (a) Pokaži, da je to možno doseči z (i) naklonom in odrezkom na ordinatni osi, (ii) razdaljo izhodišča do premice in polarnim kotom, (iii) negativnima recipročnima vrednostima odsekov na oseh x in y (*Plückerjevi koordinati*). Določi položaj premice s kartezično enačbo $5x + 3y - 6 = 0$ na vsakega od opisanih načinov. Katera premica ima Plückerjevi koordinati $(1, 3)$?
  (b) Pokaži, da Plückerjevi koordinati u, v katerekoli premice skozi točko (2,3) zadoščata linearni enačbi $2u+3v+1 = 0$. To enačbo lahko torej vzamemo za Plückerjevo enačbo točke $(2, 3)$. Napiši Plückerjevo enačbo za točko s kartezičnimi koordinatami (1,3). Kateri kartezični koordinati ima točka s Plückerjevo enačbo (i) $5u + 3v - 6 = 0$, (ii) $au + bv + 1 = 0$?

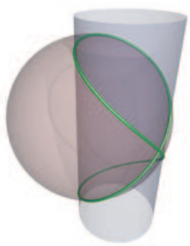
(8) Leta 1641 je **Torricelli** odkril, da je prostornina neskončno dolgega telesa, ki nastane z vrtenjem pravokotne hiperbole $y = 1/x$ okrog asimptote (npr. na poltraku $[1, \infty)$), končna. Ker ni imel na voljo integrala, je njegov dosežek še bolj pomemben. Tudi sicer se je odkritje, ki se je z Mersennovimi pismi hitro razširilo po Evropi, zdelo sodobnikom presenetljivo in so se z njim veliko ukvarjali, zlasti, ko so ugotovili, da je površina tega rotacijskega telesa (kasneje imenovanega *Torricellijeva trobenta* ali *Gabrielov rog*, glej sliko 135) neskončna. **Sluze** je npr. postavil vprašanje glede konstrukcije lahkega neskončnega "kozarca, ki bi ga še tako dober pivec ne mogel izprazniti" (ker bi imel neskončno prostornino).



Slika 135. *Torricellijeva trobenta* oziroma *Gabrijelov rog*

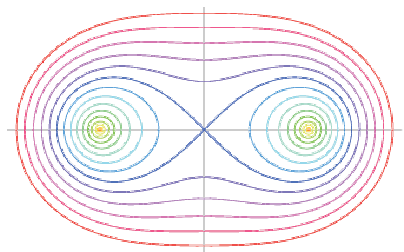
(a) Pokaži z uporabo modernega integralskega računa, da je prostornina Torricellijeve trobente končna (izračunaj njeno vrednost), površina pa neskončna;
(b) Razreši paradoks, da lahko trobento (od znotraj) pobarvamo kljub neskončni površini.

(9) *Vivianijeva krivulja* nastane, če presekamo sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ v središčni legi s polmerom $2a$ s pokončnim valjem $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ s središčem v točki $(a, 0, 0)$ in polmerom a (slika 136). Pokaži, da so njene parametrične enačbe enake $x = a(1 + \cos t)$, $y = a \sin t$, $z = 2a \sin(t/2)$. Stereografska projekcija Vivianijeve krivulje na ekvatorialno ravnino pa nosi ime *strofoida*.



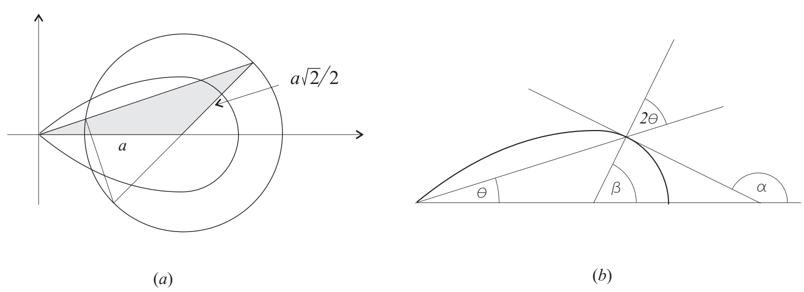
Slika 136. Vivianijeva krivulja

(10) Cassinijev oval naj ima gorišči v točkah $(-a, 0)$ in $(a, 0)$, konstantni produkt razdalj do obeh gorišč pa naj bo k^2.
(a) Napiši kartezično enačbo te krivulje.
(b) Pokaži, da je polarna enačba enaka $r^4 - 2r^2a^2 \cos 2\theta + a^4 = k^4$.
(c) Prepričaj se, da je v primeru $k = a$ krivulja enaka *Bernoullijevi lemniskati* z enačbo $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.



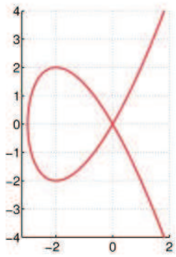
Slika 137. Cassinijevi ovali

(11) **Bernoullijeva lemniskata** ima polarno enačbo $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Pokaži:
(a) Lemniskata je posebna cisoida glede na dva loka kroga s polmerom $a\sqrt{2}/2$ in pol O, ki je za a oddaljen od središča kroga (slika 138a).
(b) Pokaži (s sredstvi infinitezimalnega računa), da tvori normala na lemniskato v poljubni točki s polarnim kotom θ z radijem vektorjem do te točke kot 2θ. Odtod pokaži, kako bi v tej točki konstruirali tangento na lemniskato (slika 138b).



Slika 138. Bernoullijeva lemniskata kot posebna cisoida in njena normala

(12) **Sinusoidna spirala** imenujemo vsako krivuljo, katere enačba v polarnem zapisu ima obliko $r^n = c\cos n\theta$, kjer je $a > 0$ in $n \neq 0$ racionalno število. Prepričaj se, da se v tej družini krivulj skrivajo naslednje znanke: *pravokotna hiperbola* ($n = -2$), *navpična premica* ($n = -1$), *parabola* ($n = -1/2$), *Tschirnhausova kubika* ($n = -1/3$), *kardioida* ($n = 1/2$), *krožnica* ($n = 1$), *Bernoullijeva lemniskata* ($n = 2$).



SLIKA 139. Tschirnhausova kubika

(13) Dokaži, da mora biti liho praštevilo p, ki je samo ali pa njegov kvadrat vsota dveh pozitivnih kvadratov, oblike $4m + 1$. Pokaži (kot je to storil **Euler**), da se to lahko zgodi samo na en način. (Navodilo za enoličnost: Iz $p = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, kjer predpostavimo npr. $x > z > t$, sklepamo, da sta si x, y tuji števili, enako z, t in nobeno od teh števil ni deljivo s p. Dobimo $p^2 = (x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz+yt)^2+(xt-yz)^2 = (xz-yt)^2+(xt+yz)^2$ in $(xz+yt)(xt+yz) = x^2zt+xyz^2+xyt^2+y^2zt = (x^2+y^2)zt+xy(z^2+t^2) = p(xy+zt)$; torej $p|(xz+yt)$ ali $p|(xt+yz)$. Denimo, da velja prvo. Potem iz prve enakosti vidimo, da velja tudi $p|(xt - yz)$. Torej je (spet po prvi enakosti) p^2 vsota kvadratov dveh nenegativnih večkratnikov števila p^2. Ker je $xz + yt > 0$, mora biti $xt - yz = 0$. Ker sta si x in y tuja, iz $xt = yz$ sledi, da $x|z$, kar pa zaradi neenakosti $x > z$ ni mogoče. Torej p ne deli $xz + yt$. Podobno vidimo, da p ne deli $xt + yz$. Iz $p^2 = x^2 + y^2$ (primitivna pitagorejska trojica) pa najdemo $p = m^2+n^2$ (po prejšnjem enolično), torej je tudi $p^2 = (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ enoličen zapis.)

(14) Izpelji **Fermatovo** trditev, da je liho praštevilo oblike $p = 4m+1$ hipotenuza celoštevilskega pravokotnega trikotnika in to na en sam način, njegov kvadrat p^2 na dva načina in tretja potenca p^3 na tri načine. (Navodilo: za p upoštevaj rešitev prejšnje vaje, za p^2 in p^3 pa večkrat zapored uporabi pravilo $(a + b)^2 = (a - b)^2 + (2ab)^2$ in/ali množenje s p^2, npr. $p^4 = p^2 \cdot p^2 = ((m^2 - n^2)p)^2 + (2mnp)^2$.)

(15) Ob predpostavki, da velja **Fermatova** trditev (ki jo je dokazal **Lagrange**), da ploščina celoštevilskega pravokotnega trikotnika ni kvadrat naravnega števila, dokaži, da naslednji enačbi (od katerih je druga poseben primer *Fermatovega velikega izreka*) nimata rešitve v celih številih:
(a) $x^4 - y^4 = z^2$,
(b) $x^4 + y^4 = z^4$.
(Navodilo: (a) Če bi bila trojica celih števil x, y, z rešitev prve enačbe, poišči celoštevilski pravokotni trikotnik s ploščino $(xyz)^2 = xy^2(x^4-y^4)$, (b) Piši $z^4-y^4 = (x^2)^2$ in upoštevaj točko (a).)

(16) **Fermat** je pri dokazovanju uporabljal *metodo neskončnega spusta*: za dokaz, da neka relacija med naravnimi števili ni možna, predpostavimo nasprotno in potem to relacijo reduciramo na enako relacijo med manjšimi naravnimi števili. Dokaži s to metodo, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. (Navodilo: iz $\sqrt{2} = a/b$ izpelji $\sqrt{2} = 1/(\sqrt{2} - 1) - 1 = 1/(a/b - 1) - 1 = (2b - 1)/(a - b) = a_1/b_1$ in pokaži, da je $0 < a_1 < a$.)

(17) (**Problem razdelitve točk**): Denimo, da je igra med enakovrednima igralcema prekinjena, ko prvemu igralcu do zmage manjkata dve točki, drugemu pa tri točke. Igra se torej zagotovo konča v naslednjih štirih dvobojih. Napiši vse možnosti (kombinacije s ponavljanjem), kako se igra lahko konča, in izračunaj verjetnost, da bo končni zmagovalec prvi oziroma drugi igralec.

10. Začetki infinitezimalnega računa

Pod infinitezimalnim računom razumemo tako integralski račun, katerega korenine segajo v antiko, kot diferencialni račun, ki je iznajdba 17. stoletja.

Začetki modernega integralskega računa

Videli smo, da so bili prvi začetki integralskega računa narejeni že v antiki z Arhimedovim računanjem ploščine paraboličnega odseka in prostornine krogle.

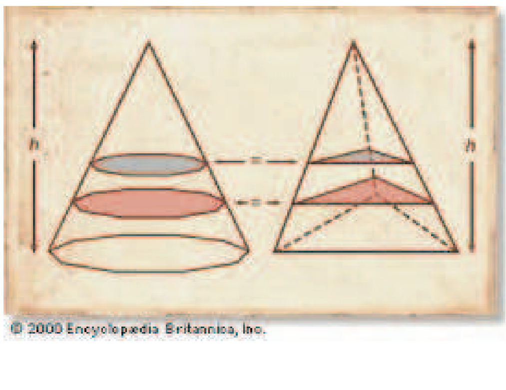
Zgodnja moderna avtorja, ki sta imela podoben pristop kot Arhimed, sta bila flamski inženir **Simon Stevin** (1548-1620) in italijanski matematik **Luca Valerio** (1552-1618), ki sta se hotela izogniti dvojni metodi redukcije ad absurdum in direktno uporabiti limito.

Za napredek integralskega računa je potem, kot vemo, najbolj zaslužen **Johannes Kepler** (1571-1630). Izračunal je prostornino 93 rotacijskim telesom, npr. torusu, vrtenini večjega in manjšega krožnega loka okrog tetive (jabolka in limone), sodom (razprava *Stereometria dolorium vinorum* 1615). Ni pa bil zelo potrpežljiv pri svojih računih: ploščina kroga je po njem kar vsota ploščin neskončno mnogo enakih enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču kroga, torej $p = obseg \cdot r/2 = \pi r^2$, podobno volumen krogle: $V = \text{površina} \cdot r/3 = 4\pi r^3/3$.

Nadaljnji pospešek teoriji in praksi računanja ploščin likov in prostornin teles je dal še en italijanski matematik.

Slika 140. Bonaventura Francesco Cavalieri

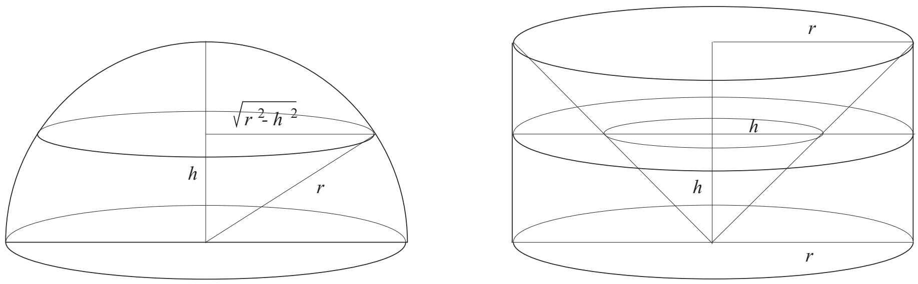
Bonaventura Cavalieri (1598-1647) je bil rojen v Milanu, študiral pri **Galileju** in postal profesor matematike na univerzi v Bologni 1629-1647. Bil je eden najvplivnejših matematikov svojega časa, tudi optik in astronom. V Italijo je pripeljal logaritme. Najbolj znan pa je po svojem načelu, prvič vpeljanem leta 1635 (*če imajo vzporedne plasti isto ploščino, imata telesi isto prostornino*, enako za ploščino likov).



Slika 141. Ilustracija Cavalierijevega principa

Isti princip so uporabljali **Roberval** (ki je trdil, da ga je sam odkril), **Torricelli**, **Fermat**, **Pascal**, **Saint-Vincent**, **Barrow** itd., Švicar **Guldin** pa ga je kritiziral.

Zgled: Polkrogla in valj enake višine in obsega z izrezanim stožcem, obakrat je ploščina plasti $\pi(r^2 - h^2)$, torej je prostornina polkrogle enaka prostornini valja minus prostornina stožca (slika 142).



Slika 142. Izračun prostornine krogle s Cavalierijevim načelom

Vodilno vlogo so v nadaljevanju prevzeli angleški matematiki (Wallis, Barrow, Newton), kasneje Leibniz in drugi.

John Wallis (1616-1703)

Bil je eden najbolj originalnih, vsestranskih in sposobnih matematikov svojega časa. Na pamet je bil zmožen računati z velikimi števili. Deloval je na mnogih področjih in mnogo pisal (poleg matematike tudi o glasbi, teologiji, logiki, angleški gramatiki in filozofiji). Med drugim mu npr. pripisujejo iznajdbo enega prvih sistemov za učenje gluhonemih. Od 1643 do 1689 je bil glavni kriptograf angleškega parlamenta. Leta 1649 je postal Savilian profesor geometrije na Oxfordu, kjer je ostal vse do smrti. Bil je eden od ustanoviteljev in prvih članov angleške Kraljeve družbe leta 1662.

Tudi v sami matematiki se je loteval zelo različnih problemov. Na stožnice je gledal kot na algebrajske krivulje drugega reda in pri določanju njihovih lastnosti med prvimi uporabljal analitično geometrijo. Ukvarjal se je tudi s trigonometrijo, z analizo neskončnih vrst, uvedel je pojem *verižnega ulomka*. V geometriji mu pripisujejo dokaz Pitagorovega izreka s podobnimi trikotniki. Poznal je dela islamskih matematikov. **Al Tusi** ga je inspiriral, da se je začel ukvarjati s problemom petega Evklidovega postulata in odkril eno izmed ekvivalentnih trditev (da ploščine trikotnikov niso navzgor omejene).

Slika 143. John Wallis

V analizi pa se je ukvarjal predvsem z integralskim računom in s svojimi dosežki pripravil pot **Isaacu Newtonu**. Leta 1656 je izdal knjigo *Artithmetica infinitorum*, ki je mnogo let ostala standard na tem področju, kljub nekaterim pomanjkljivostim. V njej je razložil in razvil Descartesovo in Cavalierijevo metodo in razdelal številne pomembne posebne primere. Bil je prvi, ki je razumel pomen ničle, negativnih in lomljenih eksponentov ter neskončnosti (uvedel je današnji simbol ∞).

Trudil se je izračunati ploščino kroga, kar bi bilo ekvivalentno izračunu današnjega integrala $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$. Pravo vrednost je dobil z interpolacijo splošnega zakona za $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, kjer je n naravno število ali nič. Od tod je z zapleteno metodo našel svojo slavno formulo, ki izrazi število $\pi/2$ z neskončnim produktom:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\;\ldots$$

Odkril je ekvivalent formule $s = \int_a^b (1 + (dy/dx)^2)^{1/2}\,dx$ za ločno dolžino in jo uporabil za rektifikacijo semikubične parabole $y^3 = ax^2$, ki jo je leta 1657 odkril njegov učenec **William Neil** (1637-1670). Lotil se je tudi reševanja nekaterih Pascalovih problemov v zvezi s cikloido (rektifikacijo cikloide je sicer prvi opravil **Chistopher Wren**).

Nekoliko se je ukvarjal tudi s fiziko: pisal je o statiki (računanje težišč) in dinamiki elastičnih trkov. Sredi petdesetih let 17. stoletja se je (skupaj z nekaterimi drugimi matematiki) zapletel v polemiko s filozofom **Thomasom Hobbsom** (1588-1679) glede matematičnih in logičnih osnov razumevanja sveta.

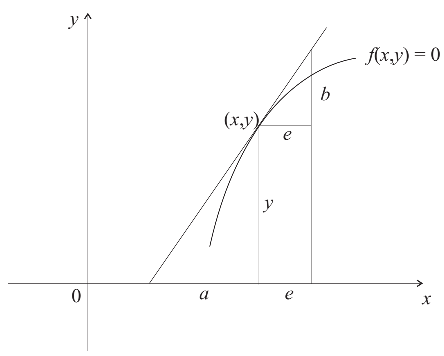
Wallis se je izkazal tudi kot zgodovinar matematike. Njegovo delo *De algebra tractatus; historicus et practicus* iz leta 1673 je bilo poleg tega v Angliji prvi resni poskus napisati zgodovino matematike. Uredil je dela nekaterih pomembnih grških matematikov.

Začetki diferencialnega računa

Drugi pol infinitezimalega računa predstavljajo problemi lokalnega vedenja krivulj in funkcij. Začelo se je s problemom načrtovanja tangent na krivulje in z iskanjem ekstremov, kar lahko v modernem smislu pripišemo Fermatu.

Fermatova metoda

V ekstremu je za majhen premik e vrednost $f(x-e) \approx f(x)$; izenačimo, da dobimo zvezo med e in x, nazadnje postavimo $e = 0$. Poglejmo, kako je to naredil **Fermat** pri vprašanju, kako razdeliti dano količino B na dva dela A in $B - A$ tako, da bo produkt delov največji (samoglasnike je po Viètovi maniri uporabil za neznanke, soglasnike za znanke): iz $(A-E)(B-A+E) = A(B-A)$, dobimo $2AE - BE - E^2 = 0$ oziroma $2A - B - E = 0$; postavimo $E = 0$, pa dobimo pogoj $2A = B$ (Fermat ni vedel, da je to samo potrebni pogoj, niti ni razlikoval med maksimumom in minimumom). Opazimo, da je logika ista kot pri modernem pristopu, ko zahtevamo, da je v limiti diferenčni kvocient enak nič.



Slika 144. Fermatova metoda iskanja tangente

Tangento na krivuljo v dani točki (x, y) je Fermat našel tako, da je poiskal subtangento a in primerjal trikotnik, ki ga določa, s podobnim trikotnikom ob dotikališču, dobljenim z majhnim premikom (slika 144): točka na tangenti blizu dotikališča je $(x+e, y+b) = (x+e, y+ye/a)$; predpostavimo, da je ta točka na krivulji $f(x,y) = 0$, izenačimo in po krajšanju postavimo $e = 0$, da dobimo zvezo med a, x, y v dotikališču (kar je ekvivalentno današnji metodi z odvodom $y' = y/a$, ki ga dobimo iz $\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0$).

Zgled: Descartesov list ima enačbo $x^3 + y^3 = 3bxy$. Najprej vstavimo vanjo $x + e$ namesto x in $y(1+e/a)$ namesto y, tako da dobimo $(x+e)^3 + y^3(1+e/a)^3 - 3by(x+e)(1+e/a) = 0$; po krajšanju z e in postavitvi $e = 0$ najdemo $a = -(y^3 - bxy)/(x^2 - by)$.

Podobno metodo je uporabljal angleški matematik **Isaac Barrow**, ki je danes znan predvsem kot Newtonov predhodnik in učitelj.

Isaac Barrow (1630-1677)

Rojen v Londonu je kljub težavnemu začetku šolanja postal po študiju na Cambridgeu eden najbolj učenih in klasično izobraženih Angležev. Odlikoval se je v matematiki, fiziki, astronomiji in teologiji. Kot prvi je leta 1663 zasedel na novo ustanovljeno Lucasovo profesorsko mesto v Cambridgeu, vendar se je z njega leta 1669 umaknil v korist mladega Newtona, katerega sposobnost je spoznal kot njegov učitelj.

Slika 145. Portret Isaaca Barrowa

Najpomembnejše delo je *Lectiones opticae et geometricae.* V tej knjigi najdemo najboljši približek modernemu procesu odvajanja, npr. znameniti *diferencialni trikotnik*, katerega slika je v vseh učbenikih na začetku poglavja o odvajanju (podobno kot na sliki 144). Barrow je namesto deljenja z e in postavljanja $e = 0$ zanemaril člene z višjimi potencami za e in dobil razmerje b/e, ki je v bistvu odvod. To metodo je uporabil na številnih zgledih, npr. *Descartesovem listu* (ki ga je imenoval *la galande*) $x^3 + y^3 = rxy$, *krivulji kappa* $x^2(x^2 + y^2) = r^2y^2$, *kvadratrisi* $y = (r - x)\operatorname{tg} \pi x/2r$ itd.

Zgled (*Laméjeva krivulja*) $x^3 + y^3 = r^3$: če so koordinate dotikališča (x, y) in koordinate premaknjene točke $(x+e, y+b)$, kjer je $b = ey/a$, se delajmo, da ležita obe točki na krivulji, zato dobimo $(x+e)^3+(y+b)^3 = r^3$ oziroma $x^3+3ex^2+3e^2x+e^3+y^3+3by^2+3b^2y+b^3 = r^3$; znemarimo člene z višjo potenco števila e, upoštevajmo $x^3+y^3 = r^3$ in dobimo $3ex^2+3by^2 = 0$, se pravi $b/e = -x^2/y^2$.

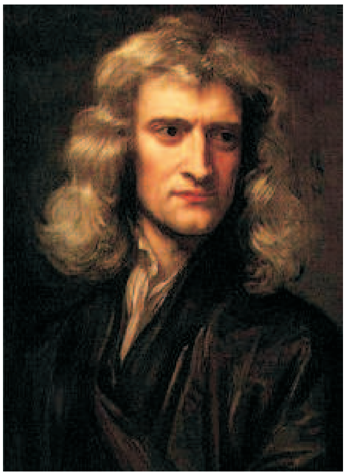
Barrowu pripisujejo, da je prvi spoznal, da sta integriranje in odvajanje inverzni operaciji. O tem je izdal knjigo svojih predavanj s skoraj samimi geometrijskimi slikami, ki pa je (razen **Newtona**, ki je ta predavanja poslušal) niso razumeli. V bistvu je odkril *Newton-Leibnizovo formulo.* Izpeljal je tudi njene posledice, npr. zamenjavo spremenljivk v integral ter postopek za reševanje diferencialnih enačb z ločljivimi spremenljivkami. Leta 1675 je izdal prve štiri knjige Apolonijevih *Stožnic* in dela Arhimeda in Teodozija. Barrow je poznan tudi po formuli za določanje goriščne razdalje pri lečah.

V tem času so v zvezi z infinitezimalnim računom že obvladali integracijo različnih primerov, konstrukcijo tangent na razne krivulje, počasi so se seznanjali s pojmom limite, prepoznavali osnovne izreke. Simbolizma pa še ni bilo (to sta prispevala **Newton** in **Leibniz**), tudi ne rigorozne izpeljave (to je zasluga šele matematikov 19. stoletja, predvsem **Augustina-Louisa Cauchyja**).

Za prava očeta infinitezimalnega računa štejemo angleškega matematika in fizika **Isaaca Newtona** in nemškega matematika in filozofa **Gottfrieda Wilhelma Leibniza**.

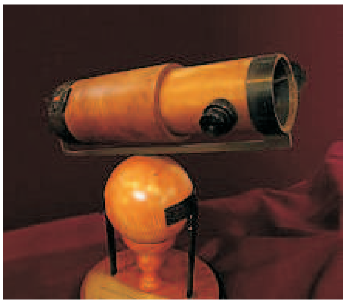
Isaac Newton (1642-1727)

Rojen je bil leta 1642 po starem (julijanskem) koledarju v Woolsthorpu blizu Cambridgea, istega leta, kot je umrl Galileo Galilei. Oče mu je umrl že pred rojstvom, mati se je vdrugo poročila in je pustila malega Isaaca stari mami. Ker je v šoli izkazal veliko nadarjenost, so mu omogočili nadaljnje šolanje, tako da ni postal kmet kot njegov oče. Že v mladosti je izvedel veliko eksperimentov in konstruiral različne naprave (npr. leseno uro, ki jo je poganjala voda). Od leta 1661 je študiral na Trinity Collegeu v Cambridgeu in se ob tem začel zanimati za matematiko (pod vplivom Isaaca Barrowa).



Slika 146. Knellerjev portret Isaaca Newtona iz leta 1689

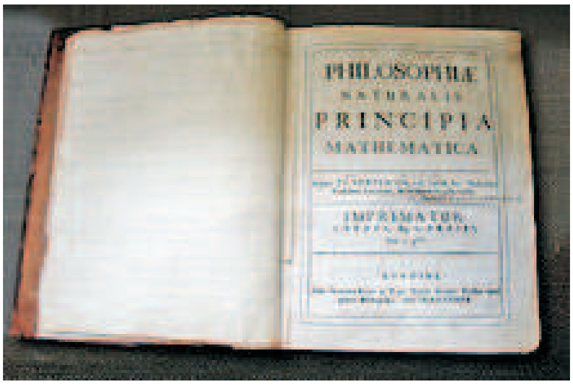
Prebral je Evklidove *Elemente* (prelahko), Descartesovo *La géometrie* (težko), dela Oughtreda, Keplerja in Vièta ter Wallisovo *Arithmetico infinitorum.* Začel je matematiko tudi odkrivati na novo. Leta 1665 je poznal splošni binomski obrazec in metodo fluksov, temelj njegovega diferencialnega računa. Zaradi kuge je bila univerza več kot leto zaprta, zato je živel doma in razmišljal, kako poiskati tangento na krivuljo in njen krivinski polmer. Zanimal se je za fizikalna vprašanja, gravitacijo in optiko. Leta 1667 se je vrnil na univerzo in se ukvarjal z optiko. Naslednje leto je končal magisterij in postal stalni član Trinity Collegea. Leta 1669 mu je Barrow prepustil mesto Lucasovega profesorja. Imel je malo študentov in malo obveznosti (pol ure na dan). Predaval je optiko, leta 1671 izumil zrcalni teleskop, ki je do danes ostal standard v astronomiji, kar je bil njegov prvi večji javni uspeh.



Slika 147. Replika Newtonovega zrcalnega teleskopa iz leta 1671

Svoja dognanja je predložil Kraljevi družbi, vendar so njegovo teorijo barv in druga spoznanja (Hooke in drugi) tako močno kritizirali, da po tem ni hotel več objavljati. To je imelo za zgodovino matematike in posebej infinitezimalnega računa precej hude posledice. **Leibniz** je namreč podobne rezultate objavil prej (leta 1684 v razpravi *Nova Methodus pro maximis et minimis*) in sprožil nesrečni spor glede prvenstva. Prišlo tako daleč, da so se angleški matematiki, ki so podpirali svojega voditelja, za skoraj sto let popolnoma izolirali od razvoja matematike na celini. Zaradi velikega Newtonovega vpliva je v optiki za lep čas prevladala njegova korpuskularna teorija svetlobe nad valovno.

Newtonova univerzitetna predavanja v letih od 1673 do 1683 so bila posvečena *algebri in teoriji enačb*. Leta 1679 pa je tudi preveril svojo gravitacijsko teorijo z novimi merjenji Zemljinega polmera in gibanja Lune. Spoznal je skladnost tega zakona s **Keplerjevimi** ugotovitvami o gibanju planetov, vendar ga je šele Halleyev obisk leta 1684 vzpodbudil, da je to napisal v obliki razprave, ki jo je poslal Kraljevi družbi in je postala temelj njegove *Principie*. Ob istem času je tudi matematično rešil problem gibanja točkaste mase v gravitacijskem polju. Prvo knjigo *Principie* je končal poleti 1685, leto kasneje je končal drugo in začel tretjo. Toda Hookove obtožbe na račun Newtonovega prilaščanja njegovih idej so delo zavrle in skoraj ustavile. Kompletna razprava *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ki jo je financiral astronom **Edmund Halley** (1656-1742), je izšla sredi leta 1687 in nemudoma naredila močan vtis na vso evropsko znanost.



SLIKA 148. Originalna Newtonova kopija *Principie* (z latnoročno pripisanimi popravki za drugo izdajo)

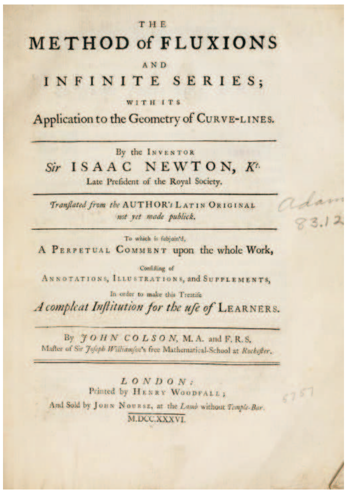
Leta 1689 je Newton kot član parlamenta zastopal univerzo, leta 1693 je resno zbolel in utrpel kratek živčni zlom, kasneje pa se je bolj posvetil kemiji, alkemiji in teologiji, s katerimi se je ukvarjal že prej. Še vedno pa je znal rešiti marsikateri težak matematični problem, s katerim so ga nadlegovali. Leta 1699 je postal Mojster kovnice, 1703 predsednik Kraljeve družbe, visoko funkcijo je obdržal do smrti. Leta 1705 ga je kraljica Ana povišala v viteza (ta naziv je med znanstveniki dobil drugi, za *Francisom Baconom*) in z naslovom 'Sir Isaac' živel do 84-tega leta starosti. Ko je leta 1727 umrl, so ga pokopali z vsemi častmi v Westminstrski opatiji. Zraven njega leži danes tudi Charles Darwin, oba sta s svojim delom in svojimi zakoni racionalno razložila svet, prvi neživo in drugi živo naravo.

Newtonova dela

Vsa njegova glavna matematična dela, razen *Principie*, so bila objavljena veliko let potem, ko so nastala: *Kubične krivulje* ter *Kvadratura in rektifikacija krivulj z uporabo neskončnih vrst* leta 1704 kot dodatek k njegovi pomembni razpravi *Opticks*, *Arithmetica universalis* leta 1707, *Analysis per Series, Fluxiones etc.* in *Methodus differentialis* leta 1711, *Lectiones opticae* leta 1729.

Nekaj svojih matematičnih metod je Newton razkril že leta 1676 v pismu H. Oldenburgu, tajniku Kraljeve družbe, npr. vpeljavo splošnega binomskega izreka za lomljene eksponente, katerega pravilnost je dokazal sto petdeset let kasneje norveški matematik **Niels Henrik Abel** (1802-1829). Svojo idejo o fluksih je Newton sporočil Barrowu leta 1669, dokončno jo je opisal v latinščini v knjigi *Method of Fluxions and Infinite Series* leta 1671.

Knjiga je sicer izšla šele po njegovi smrti, leta 1736, v angleškem prevodu J. Colsona. Krivuljo vidi kot sled zveznega gibanja točke, spremenljivo količino y imenuje *fluento*, hitrost spreminanja $\dot{y}$ *fluksijo*, njen diferencial $\dot{y}o$ ($o = dt$) pa *moment fluente*. Če v enačbo krivulje pišemo $x + \dot{x}o$ namesto x in $y + \dot{y}o$ namesto y ter zanemarimo vse višje člene v o, dobimo zvezo med fluentami in fluksijami (kar je ekvivalentno našemu odvajanju oziroma diferenciranju). Obratni problem je iz take zveze spet poiskati zvezo med fluentami (kar ustreza reševanju diferencialne enačbe).



THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, Kt.
Late President of the Royal Society.

Translated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is subjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Consisting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M.A. and F.R.S.
Master of Sir Joseph Williamson's free Mathematical-School at Rochester.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the Lamb without Temple-Bar.
M.DCC.XXXVI.

Slika 149. Naslovnica Newtonove knjige *Method of Fluxions and Infinite Series*, ki je izšla leta 1736

Newton je metodo fluksij uporabil za reševanje različnih problemov (iskanje tangent, ekstremov, prevojev, ukrivljenosti itd.), spreten pa je bil tudi pri reševanju diferencialnih enačb, npr. določanju ortogonalnih trajektorij dane družine krivulj (problem, ki mu ga je bil zastavil **Leibniz**). V resnici je on izpeljal Taylorjeve vrste za elementarne funkcije in jih uporabil za računanje odvoda. V omenjenem delu je opisana tudi metoda iskanja približne numerične vrednosti korenov algebrajske ali transcendentne enačbe (današnja Newtonova metoda).

V delu *Arithmetica universalis* se skriva teorija enačb (kompleksne rešitve nastopajo v parih, ocene za mejo korenov polinoma, Newtonove formule za vsoto n-tih potenc korenov, izraženo s koeficienti itd.). *Kubične krivulje* so dodatek k *Optiki* in prinašajo klasifikacijo kubičnih krivulj (72 od 78 tipov), v glavnem brez dokaza, pa trditev, da vse kubike dobimo s centralno projekcijo enačbe oblike $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (dokaz šele 1731). Kompleten sistem dinamike in matematično formulacijo vseh zemeljskih in nebesnih gibanj predstavlja seveda *Principia*, najbolj občudovano in najbolj vplivno delo v zgodovini znanosti. Izreki, ki jih je najbrž Newton odkril z uporabo svoje teorije fluksov, je rigorozno dokazal z uporabo grške geometrijske metode in z nekaj uporabe preprostega limitnega procesa. Tudi v *Principii*, ki je v prvi vrsti referenčno delo vse sodobne fizike (do teorije relativnosti), najdemo mnoge zanimive matematične izreke (o tangentah na stožnice itd.).

Newtonov pomen

Newton se uvršča med vodilne matematike vseh časov. Celo **Leibniz**, njegov veliki tekmec, je nekoč izjavil: "Kar je naredil Newton, je več od polovice tega, kar so naredili vsi matematiki pred njim." Newton je ostal glede svojega prispevka skromen: "Ne vem, kakšen se morda zdim svetu; sam sebi se zdim kot deček, ki se igra na obali in se veseli najdbe bolj okroglega kamenčka ali lepše školjke, medtem ko ocean resnice leži neodkrit pred menoj." In še: "Če sem kdaj videl dlje od drugih, je to zato, ker sem stal na ramenih velikanov." Bil je neverjetno delaven, sposoben v veliki koncentraciji zdržati in pisati 18 ali 19 ur na dan. Zato pa je bil v drugih rečeh pogosto raztresen, tako da o njem kroži veliko legend.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Veliki univerzalni um 17. stoletja in Newtonov tekmec je bil rojen v Leipzigu leta 1646. Kot otrok se je naučil brati grško in latinsko, do dvajsetega leta je obvladal skoraj vse, kar so vsebovali standardni učbeniki matematike, filozofije, teologije in prava. Že tedaj se je ukvarjal z univerzalnimi zakoni logike. Ker so mu v Leipzigu zaradi mladosti zavrnili podelitev doktorata v pravu, se je preselil v Nürnberg in napisal briljantno delo o poučevanju prava, zato so ga izbrali za kodifikacijo statuta. Tako je potem vse svoje življenje od leta 1676 dalje ostal v diplomatski službi najprej volilnega kneza v Mainzu in nato brunsviškega vojvode v Hannovru. Že leta 1672 so ga poslali v Pariz, kjer je za Ludvika XIV. pripravil projekt o zasedbi Egipta (uresničil ga je šele Napoleon).

SLIKA 150. Gottfried Wilhelm Leibniz

Leta 1672 se je v Parizu srečal s **Huygensom**, ki ga je seznanil z najpomebnejšimi matematičnimi dosežki. Za matematiko se je sicer zanimal že prej, ker se je pač zanimal za vse splošne ideje. Naslednje leto je v Londonu obiskal Oldenburga. V Angliji je zasnoval svoj znameniti računski stroj in ga prikazal Kraljevi družbi (iznajdljivi Hooke ga je takoj nekoliko izboljšal). Predno se je vrnil v Hannover za knjižničarja brunsviškega vojvode, je odkril osnovni izrek integralskega računa, poenostavil notacijo (oznaka $\int$ za integral iz prve črke latinske besede *summa*, oznaki dx, dy za diferencial, kjer je $dy : dx = y :$ subtangenta) in izdelal skoraj vse elementarne formule za odvajanje (zdaj se po njem imenuje samo ena, formula za višji odvod produkta). Njegova notacija je bila bolj posrečena od Newtonove in se je v Evropi hitro prijela (razen v Angliji). Sploh je imel Leibniz dober občutek za matematiko in večjo širino kot Newton, čeprav ni bil toliko prodoren.

Prva knjiga o infinitezimalnem računu se je pojavila že leta 1696; napisal jo je **Markiz de l'Hospital** (1661-1704) po predavanjih svojega učitelja **Johanna Bernoullija**. Po letu 1700 so postali integrali in diferenciali standarni del vseh učbenikov analize, skoraj v taki obliki, kot jo v prvem letniku spoznavajo današnji študentje.


ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI
publicata,
ac
POTENTISSIMO SERENISSIMOQUE PRINCIPI AC DOMINO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R. IMPERII ARCHIMARESCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegiis.

LIPSIÆ,

SLIKA 151. *Acta Eruditorum*

Leibniz je bil tudi nadarjen lingvist (poznal npr. sanskrt) in cenjen filozof (razvil je sistem matematične logike). Lotil se je različnih globalnih projektov, npr. združitve vseh cerkva ali vsaj prostestantske in katoliške cerkve.

Z **Ottom Menckejem** je ustanovil leta 1682 časopis *Acta eruditorum*, ki ga je urejal in v njem v desetih letih objavil večino svojih matematičnih člankov. Leta 1700 je ustanovil Berlinsko akademijo in načrtoval podobne akademije v Dresdenu, v Sankt Peterburgu in na Dunaju, skušal za carja Petra Velikega prenoviti ruski pravni sistem (prva perestrojka), a mu ni uspelo. Iskal je ti. *karakteristike*, univerzalne prvine vseh znanosti in univerzalno metodo za rešitev vseh problemov. V zadnjih sedmih letih se je zapletel v prepir z Newtonom glede neodvisnega odkritja infinitezimalnega računa. Leta 1714 je njegov delodajalec, brunsviški vojvoda, postal *Jurij I.*, (prvi nemški) kralj Anglije. Leibniz je ostal v Hannovru in umrl bolj ali manj osamljen.

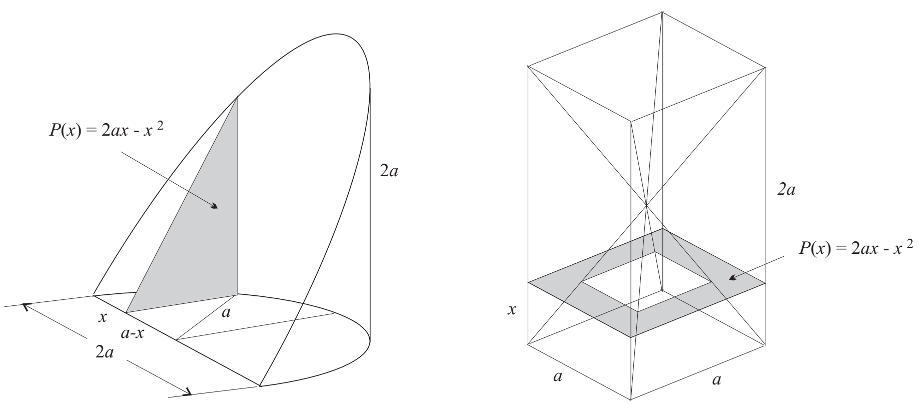
Spor med Newtonom in Leibnizom

Spor glede vprašanja, kdo je bolj zaslužen za nastanek infinitezimalnega računa, ni obremenil le zadnja leta njunega ustvarjalnega življenja, ampak je trajala debata o tem še stoletje in več. Danes prevladuje med matematiki in zgodovinarji matematike mnenje, ki enake zasluge pripisuje obema. Oba sta delala bolj ali manj neodvisno; Newton je res prvi prišel do odločilnih rezultatov, vendar jih je Leibniz leta 1684 prvi objavil. Sta pa oba velika moža uporabljala pri utemeljitvi diferencialnega računa za današnje in tudi za tedanje pojme precej skrivnostne in nerazumljive argumente. Newton se je skliceval na 'zadnji ulomek', *ultimo ratio*, tj. na diferenčni kvocient tik predno prirastek $o = dt$ izgine. Leibniz pa je raje govoril o neskončno majhnih količinah, ki še niso nič, ne more pa se jih še bolj zmanjšati.

Tak pristop je upravičeno ostro (in z dobro mero ironije) kritiziral že filozof in škof **George Berkeley** (1685-1753) v delu *The Analyst, or a Discourse Addresed to an Infidel Mathematician*: "In kaj so ti fluksi? Hitrosti izginjajočih prirastkov? In kaj so ti izginjajoči prirastki? Niso niti končne količine niti neskončno majhne količine niti niso še nič. Ali jih ne bi raje imenovali duhovi odhajajočih količin?". Videli bomo, da so matematiki šele v 19. stoletju razrešili ta vprašanja in diferencialni račun postavili na trdne temelje.

Vaje:

(1) Z modernimi metodami integralskega računa izračunaj
  (a) površino krogelne kapice s polmerom r in višino h ter njeno težišče,
  (b) prostornino *valjastega klina*, tj. telesa, ki ga od pokončnega valja s polmerom r in višino h odreže poševna ravnina skozi premer osnovne ploskve in robno točko zgornje osnovne ploskve,
  (c) prostornino preseka dveh pravokotnih krožnih valjev z enakim polmerom.



SLIKA 152. Uporaba Cavalierijevega načela pri prostornini valjastega klina

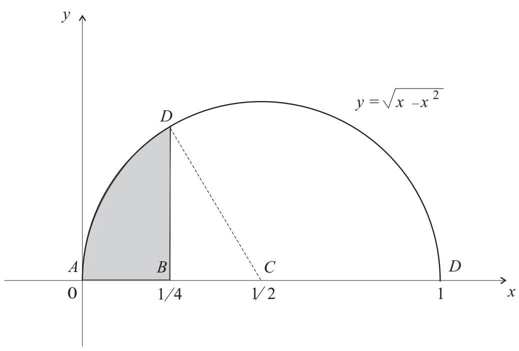
(2) S *Cavalierijevim načelom* izračunaj prostornino:
  (a) *valjastega klina* nad premerom kroga $2a$ in višino $2a$ (za primerjavo izberi kvader dimenzije $a \times a \times 2a$ z izrezanima kvadaratnima piramidama z osnovnima ploskvama $a \times a$ in skupnim vrhom v središču kvadra), glej sliko 152,
  (b) *kroglinega prstana* (tj. krogle z valjasto odprtino okrog osi) z višino $2h$ (za primerjavo izberi kroglo s polmerom h).

(3) Poišči naklon tangente v točki $(3, 4)$ na krožnici $x^2 + y^2 = 25$ po
  (a) Fermatovi metodi,
  (b) Barrowovi metodi,
  (c) Newtonovi metodi,
  (d) moderni metodi.

(4) Dokaži naslednja **Newtonova** rezultata:
  (a) Kompleksni koreni polinoma z realnimi koeficienti nastopajo v konjugiranih parih.
  (b) Vsako število a, za katerega so za polinom n-te stopnje f pozitivna vsa števila $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), ..., f^{(n)}(a)$, je zgornja meja za korene enačbe $f(x) = 0$.

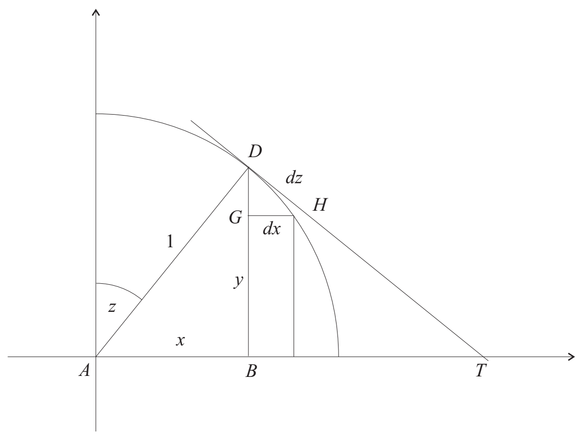
(5) Leta 1665 je **Newton** odkril način za razvoj binomskega izraza $(P + PQ)^{m/n}$ s poljubnim (pozitivnim, negativnim) racionalnim eksponentom v potenčno vrsto: $(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + (m/n)AQ + ((m-n)/2n)BQ + ((m-2n)/3n)CQ + ((m-3n)/4n)DQ + ...$, kjer predstavlja $A, B, C, ...$ prejšnji člen (glej [10] ali [11]).
  (a) Izrazi $A, B, C, ...$ z P in Q in se prepričaj, da dobimo na ta način v potenčni vrsti običajne binomske koeficiente.
  (b) Uporabi Newtonovo metodo na primeru razvoja v potenčno vrsto binoma (i) $\sqrt{c^2 + x^2}$, (ii) $1/\sqrt{1 - x^2}$.

(6) Oborožen z binomskim izrekom je **Newton** znal poljubno natančno aproksimirati število π, tako da je na dva načina izračunal ploščino pod krožnico $x^2 + y^2 = x$ na intervalu od 0 do 1/4 (slika 153). Ponovimo njegov postopek [10]:
  (a) Razvij v binomsko vrsto $y = \sqrt{x - x^2} = x^{1/2}(1 - x)^{1/2} = x^{1/2}(1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 - 5x^4/128 - 7x^5/256 - ...) = x^{1/2} - x^{3/2}/2 - x^{5/2}/8 - x^{7/2}/16 - 5x^{9/2}/128 - ...$
  (b) Z integracijo prvih devet členov in vstavljanjem $x = 1/4$ pokaži, da je ploščina enaka 0.7677310678.
  (c) Pokaži, da je po drugi strani ploščina enaka $\pi/24 - \sqrt{3}/32$ (ploščina krožnega izseka minus ploščina trikotnika) in s primerjavo izpelji, da je $\pi \approx 3.141592668$ (natančno na 7 decimalk).



SLIKA 153. Newtonova aproksimacija števila π

(7) **Newton** je potenčno vrsto oblike $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + ...$, za $A \neq 0$ znal obrniti, tj. izraziti x s spremenljivko z. To je storil tako, da je zanemaril višje potence za x in rešil preostalo enačbo $x = z/A$, nato je iskal rešitev v obliki $x = z/A + p$, vstavil v vrsto, razvil po p, zanemaril višje potence p in rešil glede p v obliki ulomka dveh potenčnih vrst, v katerih je zanemaril višje potence z in izrazil p s kvadratom z^2, itd. [11]. Uporabi to metodo na primeru $z = x - x^2 + x^3 - x^4 + ...$



Slika 154. Newtonova izpeljava sinusne vrste

(8) Iz podobnosti trikotnikov DGH (infinitezimalno majhnega), DBT in ABD na sliki 154 dobimo razmerje $GH/DH = BD/AD$ oziroma $dx/dz = y/1$ in zato $dz = dx/y$. Ker je $y = \sqrt{1-x^2}$, dobimo z uporabo razvoja iz točke (5b)(ii) $dz = (1 + x^2/2 + 3x^4/8 + 5x^6/16 + ...)dx$. **Newton** je odtod z integracijo izrazil z s potenčno vrsto v spremenljivki x. To je vrsta za $\arcsin x$; poišči jo [11]. Nato je z metodo obračanja vrst iz vaje 7 določil še znano vrsto za $x = \sin z$ [11]. Preveri vse njegove korake.

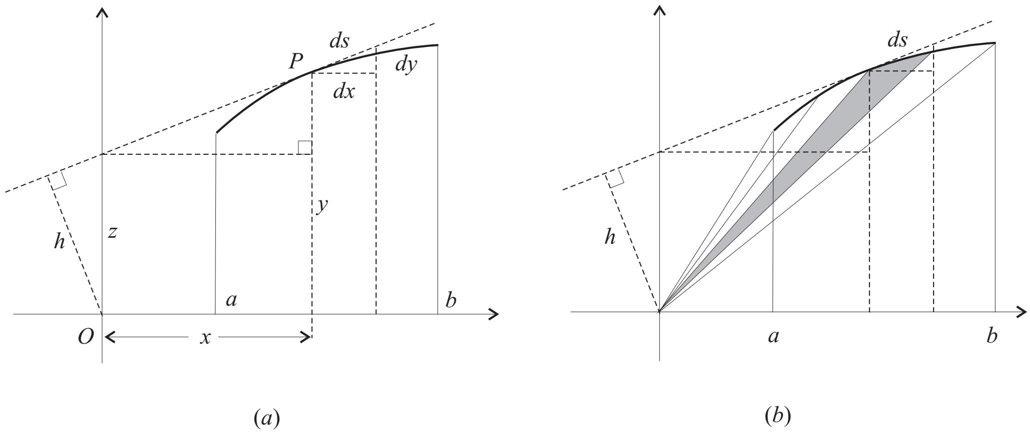
Opomba. Na Zahodu je bil to prvi zapis vrste za sinus, vendar so odkrili, da je že leta 1545 opisal to vrsto indijski matematik **Nilakantha** (1445-1545) (v verzih v pesnitvi *Tantrasangraha*) in jo celo pripisal še starejšemu matematiku **Madhavi** ($\sim$ 1350-1425), začetniku matematične šole v Kerali.

(9) *Newtonova tangentna metoda* za približno iskanje ničel algebraičnih in transcendentnih enačb se glasi: *Naj ima enačba $f(x) = 0$ samo en koren na intervalu $[a, b]$ in naj prvi in drugi odvod f' in f'' ne spremenita predznaka na $[a, b]$. Če za x_0 izberemo tisto krajišče, a ali b, v katerem imata $f(x_0)$ in $f''(x_0)$ isti predznak, je število $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ bliže korenu enačbe kot začetni približek x_0.*
(a) Dokaži ta rezultat s sodobnimi metodami.
(b) Poišči z Newtonovo metodo tisti koren kubične enačbe $x^3 - 2x - 5 = 0$, ki leži med 2 in 3.
(c) Poišči z Newtonovo metodo tisti koren transcendentne enačbe $x = \operatorname{tg} x$, ki leži med 4.4 in 4.5.
(d) Poišči z Newtonovo metodo $\sqrt{3}$ na tri decimalke natančno.

(10) **Leibniz** je iznašel osnovna pravila za računanje z množicami (v zvezi s presekom, unijo, komplementom). Z uporabo *Vennovih diagramov* se prepričaj o veljavnosti naslednjih formul:
(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
(iv) $(A' \cup B)' = A \cap B'$.

(11) **Huygens** je Leibnizu v Parizu zastavil problem določiti vsoto recipročnih vrednosti trikotnih števil $k(k+1)/2$, $k = 1, 2, ...$, torej vsoto $S = 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + ...$ **Leibniz** je S najprej delil z 2 in vsoto dobljene vrste izračunal z razčlembo členov na parcialne ulomke. Ponovi njegov postopek in izračunaj S.

(12) Da bi izračunal ploščino pod krivuljo med abscisama a in b, je **Leibniz** v dani točki $P = P(x, y)$ načrtal tangento in iz podobnih trikotnikov (eden je infinitezimalni) na sliki 155a našel $dy/dx = (y - z)/x$ oziroma $z = y - xdy/dx$, poleg tega pa še $ds/dx = z/h$ oziroma $hds = zdx$ (glej [11]).



Slika 155. Izpeljava Leibnizove formule za ploščino pod krivuljo

Potem je seštel ploščine infinitezimalnih trikotnikov z vrhom v izhodišču na sliki 155b in tako geometrijsko odkril svoj t.i. *transmutacijski* izrek, ki mu je dal ploščino pod krivuljo: $\int y dx = \frac{1}{2}\int z dx + \frac{1}{2}by(b) - \frac{1}{2}ay(a)$ [11].

(a) Vstavi iz prejšnje formule izraz $z = y - xdy/dx$, da dobiš integralsko enakost $\int y dx = \frac{1}{2}\int y dx - x dy + \frac{1}{2}(by(b) - ay(a))$ oziroma (če vstavimo tudi meje, kot smo vajeni) $\int_a^b y dx = by(b) - ay(a) - \int_{y(a)}^{y(b)} x dy$.

(b) Izpelji enakost iz točke (a) tudi geometrijsko in se prepričaj, da je to poseben primer formule za integracijo po delih (per partes).

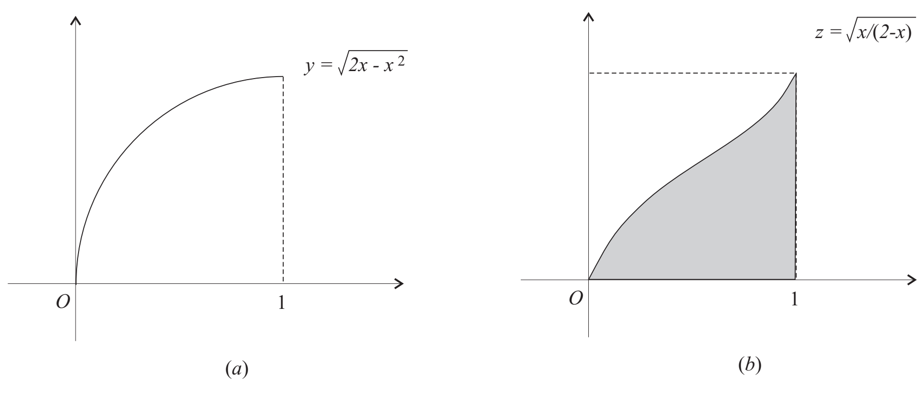
(13) **Leibniz** je transmutacijski izrek uporabil na četrtini krožnice $(x-1)^2+y^2 = 1$ oziroma $x^2+y^2 = 2x$ v mejah od 0 do 1 (slika 156a) in s tem izpeljal svojo znamenito vrsto $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$ (glej [11]).

(a) Z diferenciranjem krožnice s pomočjo ustrezne formule iz točke (12) ugotovi, da je $z = x/y$ in zato $z^2 = x/(2-x)$ oziroma $x = 2z^2/(1+z^2)$.

(b) Izrazi ploščino pod krivuljo $z = z(x)$ kot $\int_0^1 z dx = 1 - \int_0^1 x dz$ (slika 156b) in z uporabo transmutacijskega izreka iz vaje 12a zapiši $\pi/4 = 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}$.

(c) Z razvojem integranda v geometrijsko vrsto in integriranjem po členih izpelji Leibnizovo vrsto.

(d) Z deljenjem z 2 in združitvijo po dveh in dveh členov izpelji iz Leibnizove vrste, da je $\pi/8 = 1/(2^2-1) + 1/(6^2-1) + 1/(10^2-1) + ...$



Slika 156. Izpeljava Leibnizove vrste za $\pi/4$

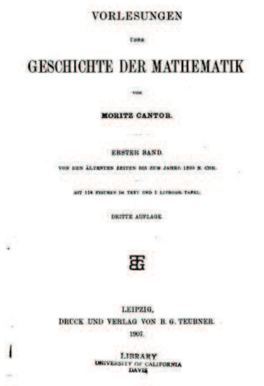
Opomba. Čeprav je nekaj let prej **James Gregory** našel bolj splošno vrsto za arctg x (česar **Leibniz** leta 1674 ni vedel), je bil nad Leibnizovim rezultatom **Huygens** tako navdušen, da je izjavil, "da se bodo matematiki tega odkritja vedno spominjali".

11. Matematiki v osemnajstem stoletju

Splošni matematični okvir

Doslej smo spremljali razvoj matematike s poudarkom na elementarni matematiki. Z nastankom infinitezimalnega računa se je odkrivanje in razvijanje elementarnih metod v glavnem izčrpalo (nekatere kasnejše prilagoditve in dopolnitve smo že omenili). Odslej se je razvijala matematika na višjem nivoju, postajala je čedalje bolj abstraktna, nastajale so nove matematične discipline, kar vse zahteva bolj poglobljeni študij matematike, če hočemo razumeti zgodovinske procese. Šele tako zavzame tudi elementarna matematika svoje pravo mesto v zgodovinskem razvoju celotne vede.

Zaradi obilice materiala (števila ustvarjalcev matematike, njihovih člankov in rezultatov) ostane vsak pregled nadaljnjega dogajanja nujno le nepopolna skica. Če je nemški zgodovinar matematike **Moritz Cantor** (1829-1920) popisal njeno zgodovino do konca 18. stoletja v štirih debelih knjigah s po 1000 strani, bi samo za 19. stoletje potrebovali ob enaki ločljivosti 14 dodatnih knjig enakega obsega in podobno samo za prvo polovico 20. stoletja. Število mednarodnih časopisov, ki so posvečeni izključno matematiki, se je enormno povečalo. Res pa je, da lahko samo zelo majhen del objavljenih člankov prebere še kdo razen peščica specialistov.


VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR.

DRITTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

Slika 157. Naslovna stran prve knjige Zgodovine matematike Moritza Cantorja

Nastanek infinitezimalnega računa je prinesel razcvet analize in njene uporabe v fiziki in povsod. Le malokdo se je v začetku spraševal po logičnih utemeljitvah in rigoroznih dokazih. To se je v večji meri zgodilo šele v 19. stoletju z natančnejšimi definicijami osnovnih pojmov, kot so limita, funkcija, zveznost, odvedljivost, integrabilnost, konvergenca, prostor, dimenzija. Razvile so se nove veje matematike (teorija množic, topologija, kasneje funkcionalna analiza) in s paradoksi prinesle probleme logičnih osnov matematike. V dvajsetem stoletju so vse skupaj postavili na še bolj splošno in abstraktno raven. Po drugi strani pa so se uveljavile nove uporabe v zavarovalništvu, statistiki, vojaških vedah, ekonomiji, razvijanju novih tehnologij, moderni fiziki itd.

Matematika 18. stoletja pa je bila še vedno v tesni povezavi z astronomijo in mehaniko. Omenili smo že dela **Antoina Parenta** in **Alexisa Clauda Clairauta** v prostorski analitični geometriji, pa **Girolama Saccherija** in **Johanna Lamberta** v neevklidski geometriji (ki je vrhunec dosegla v prvi polovici 19. stoletja v delih **Carla Friedricha Gaussa**, **Nikolaja Lobačevskega** in **Janosa Bolyaia**). Glavni prispevek k matematiki in zlasti matematični analizi pa so v 18. stoletju dali člani družine **Bernoulli**, **Abraham De Moivre**, **Brook Taylor**, **Colin Maclaurin**, **Leonhard Euler**, **Alexis Claude Clairaut**, **Jean-le-Rond D'Alembert**, **Johann Heinrich Lambert**, **Joseph Louis Lagrange** in **Gaspard Monge**.

Znameniti švicarski matematiki

Jakob in **Johann Bernoulli**, švicarska brata matematika, predstavnika ene najodličnejših družin v celotni zgodovini matematike, sta se učila iz **Leibnizovih** člankov, ki so izhajali v *Acta eruditorum*. Bila sta najbolj zvesta **Leibnizova** privrženca in sta veliko doprinesla k širjenju infinitezimalnega računa po Evropi. Od leta 1687 do smrti je starejši Jakob zasedal mesto profesorja matematike na univerzi v Baslu, mlajši Johann pa je leta 1697 postal profesor na univerzi v Groningenu na Nizozemskem. Leta 1705 je nasledil brata na univerzi v Baslu. Brata sta bila aktivna raziskovalca matematike in sta stalno izmenjavala svoje ideje z **Leibnizom**, drugimi sodobniki in med sabo, pogosto kot zagrizena nasprotnika oziroma tekmeca.

SLIKA 158. Jakob in Johann Bernoulli

Jakob Bernoulli (1654-1705)

K matematiki je prispeval veliko. Njegov doprinos so npr. zgodnja vpeljava polarnih koordinat, izpeljava formule za ukrivljenost ravninskih krivulj, študij krivulje verižnice (tudi take s spremenljivo gostoto in delujoče v polju centralne sile), odkritje krivulje *izohrone* (neke vrste kubične parabole, vzdolž katere je v gravitacijskem polju gibanje enakomerno), določitev oblike upogiba na enem koncu pritrjene elastične palice z bremenom na drugem koncu in upogiba opne. Navdušen je bil nad lastnostmi *logaritemske spirale* in si jo je (podobno kot Arhimed v valj včrtano kroglo) zaželel vklesano na nagrobniku. Predlagal je tudi raziskovanje *izoperimetričnega problema* in tako vzpodbudil začetke *variacijskega računa*.

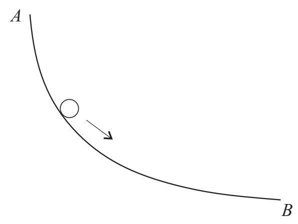
Bil je eden od utemeljiteljev matematične teorije verjetnosti (njegova knjiga o tem *Ars conjectandi* je izšla posthumno leta 1713). Po njem se imenuje v verjetnosti *Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov* in *Bernoullijev zakon velikih števil*, v analizi pa *Bernoullijeva lemniskata*, ki smo jo že srečali, pa *Bernoullijeva števila* in *Bernoullijevi polinomi* in še *Bernoullijeva diferencialna enačba prvega reda*. V delu Jakoba Bernoullija iz leta 1690 prvič srečamo besedo *integral* (v smislu analize). Medtem ko je Leibniz sprva še uporabljal zvezo *calculus summatorius*, sta se leta 1696 Leibniz in Johann Bernoulli dogovorila o uporabi izraza *calculus integralis*.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Johann je bil še bolj plodovit matematični pisec kot njegov brat, na katerega je bil ljubosumen. Bil je hkrati eden najuspešnejših učiteljev matematike svojega časa. Obogatil je infinitezimalni račun in mnogo pripomogel k njegovemu širjenju po Evropi. Njegov učenec, bogati markiz **de l'Hospital** (1661-1704), je učiteljevo znanje zajel in leta 1696 oblikoval v prvi učbenik infinitezimalnega računa v Evropi. V njem je med drugim objavljeno tudi slavno *L'Hospitalovo pravilo* za računanje limit.

Johann Bernoulli je pisal o številnih različnih temah: o optiki (odboj in lom svetlobe), ortogonalnih trajektorijah družine krivulj, rektifikaciji in kvadraturi krivulj, razvojih v vrsto, analitični trigonometriji, eksponentni funkciji itd.

Pomembno in slavno je njegovo delo v zvezi s problemom *brahistohrone*, krivulje, vzdolž katere se masna točka pod vplivom gravitacije spusti najhitreje. O problemu je razpravljal z bratom Jakobom in izkazalo se je, da je taka krivulja ustrezni cikloidni lok (slika 159). Cikloida je tudi *tavtohrona*, to je taka krivulja, vzdolž katere se masna točka pod vplivom teže spusti v izhodiščni položaj vedno v istem času, ne glede na to, kako visoko smo jo spustili. Ta problem sta sicer že prej rešila **Huygens** (1673) in **Newton** (1687). **Huygens** ga je uporabil tudi pri svoji konstrukciji cikloidne ure, kasneje pa sta se z njim ukvarjala tudi **Euler** in **Lagrange**.



Slika 159. Cikloida kot brahistohorna in tavtohrona

Sinovi in nečaki

Johann Bernoulli je imel tri sinove, Nicolausa II., Daniela in Johanna II.; vsi so postali znani matematiki in znanstveniki.

Nicolaus II. Bernoulli (1695-1726) je šudiral matematiko in pravo v Baslu, potem postal profesor matematike v Padovi in Bernu ter pomagal očetu pri korespondenci v zvezi z Leibniz-Newtonovim sporom. Zaradi matematične odličnosti ga je Peter Veliki (skupaj z bratom Danielom) leta 1725 poklical na novoustanovljeno Sanktpeterburško akademijo, kjer pa je po osmih mesecih staknil hudo vročino in nesrečno umrl. Nasledil ga je brat Daniel, istočasno pa je na vzporedno mesto za fiziologijo prišel tudi **Leonhard Euler**, s katerim sta bila brata Bernoulli prijatelja.

Kot matematik se je Nicolaus ukvarjal s krivuljami, diferencialnimi enačbami in verjetnostjo. Najbolj je znano njegovo odkritje ti. *peterburškega paradoksa* o neskončnem matematičnem upanju v igri, kjer dobi igralec v naslednjem poskusu metanja kovanca dvakrat več kot prej, če pade grb. Paradoks je sicer razrešil in objavil leta 1738 brat Daniel.

Daniel Bernoulli (1700-1782) je bil najslavnejši od Johannovih sinov. Potem ko je sedem let preživel v Sankt Peterburgu, se je vrnil v Basel. V verjetnosti je razvil koncept *moralnega pričakovanja*, v svoji *Hidrodinamiki* iz leta 1738 pa je postavil osnove fizikalne teorije tekočin (*Bernoullijeva enačba*). Pisal je o plimi, kinetični teoriji plinov, študiral nihajočo struno in kot eden prvih raziskoval parcialne diferencialne enačbe.

Slika 160. Daniel Bernoulli

Nečak Jakoba in Johanna (sin brata Nicolausa, ki ni bil matematik) in starejši bratranec treh mladih Bernoullijev je bil **Nicolaus I. Bernoulli** (1687-1759) in je tudi postal slaven v matematiki. V Padovi je zasedal profesorsko mesto, ki ga je nekoč imel Galilei. Pisal je o geometriji in diferencialnih enačbah, v kasnejših letih pa je učil logiko in pravo.

Tudi **Johann II. Bernoulli** (1710-1790) je bil v poznih letih profesor matematike v Baslu (nasledil je očeta), ukvarjal pa se je v glavnem s teorijo toplote in svetlobe. Leta 1736 je dobil nagrado Francoske akademije, ker je predlagal študij etra. Njegov sin **Johann III.** (1744-1807) se je prav tako kot oče od prava obrnil k matematiki, že 19-leten je dobil mesto profesorja matematike na Berlinski akademiji. Drugi sin **Jakob II.** (1759-1789) je bil malo pred tridesetim letom starosti imenovan za profesorja matematike v Sankt Peterburgu; poročil se je z vnukinjo Leonharda Eulerja, a je utonil v reki Nevi julija 1789 nekaj mesecev po poroki. Še dva sinova **Daniel II.** in **Nicolaus IV.** sta manj znana. Zanimivo je morda le to, da je bil eden od kasnejših potomcev Nicolausa IV. slavni švicarski arhitekt *Hans Benno Bernoulli* (1876-1959), drugi pa še bolj slavni pisatelj in Nobelov nagrajenec za literaturo leta 1946 *Hermann Hesse* (1877-1962).

Leonhard Euler (1707-1783)

Euler je bil učenec **Johanna Bernoullija** in eden največjih matematičnih genijev vseh časov, vsekakor pa najbolj ustvarjalen in plodovit matematični pisec. Matematiko je s svojim delom spremenil za zmeraj.

Slika 161. Bruckerjev portret Leonharda Eulerja iz leta 1756

Rojen je bil v Baslu leta 1707. Nadarjenost je pokazal že v otroštvu in matematiko prizadevno študiral pri **Johannu Bernoulliju**, ki je hitro spoznal njegov talent. Star devetnajst let je dobil (drugo) nagrado Francoske akademije za analizo najboljšega nameščanja jamborov na ladje (čeprav do takrat morja in jadrnic sploh še ni videl).

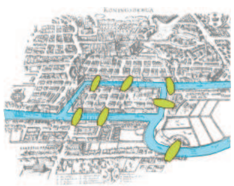
Kot dvajsetletnik je leta 1727 dobil mesto profesorja (za medicino in fiziologijo) na Sanktpeterburški akademiji, kjer je kot profesor matematike deloval že njegov prijatelj Daniel Bernoulli. Leta 1733, ko se je Daniel vrnil v Basel, je zasedel njegovo mesto. V tridesetih letih 18. stoletja je z neverjetno energijo reševal različne matematične probleme in delal na vseh področjih od geometrije, teorije števil, kombinatorike do uporabe matematike v mehaniki, hidrodinamiki in optiki, čeprav je že tedaj začel izgubljati vid na desnem očesu. Leta 1741 je za 25 let na povabilo Friderika Velikega prevzel pozicijo na Berlinski akademiji znanosti, nato pa se je 1766 vrnil v Sankt Peterburg, kjer je ostal (in od 1768 dalje popolnoma slep še vedno ustvarjalno delal) do smrti. Pokopan je v Sankt Peterburgu.

Euler je imel odličen spomin; ne le, da si je npr. zapomnil prvih 100 praštevil, ampak tudi njihove kvadrate, kube in četrte potence. Na pamet je brez posebnega napora izvajal račune tudi do 50 mest natančno. V mladosti si je zapomnil celotno Vergilovo Eneido in jo znal citirati še pol stoletja kasneje.

Eulerjeva slava temelji na njegovih knjigah. Najbolj znan učbenik matematike, v katerem je združil in poenostavil večji del dotedanjega matematičnega znanja, je *Introductio in Analysin infinitorum* iz leta 1748, temu je dodal knjigo o diferencialnem računu *Institutiones calculi differentialis* leta 1755 in tri volumne o integralskem računu v letih 1768-1774.

SLIKA 162. Eulerjevi razpravi o integralskem in diferencialnem računu

V teh knjigah je uvedel jasno in moderno notacijo (npr. $f(x)$ za funkcijo, e za osnovo naravnih logaritmov, i za imaginarno enoto, znak Σ za vsoto itd.). To so obenem prve knjige, ki so tudi na videz take kot sodobni matematični teksti. Uvedel je znamenito formulo $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ s posledico $e^{i\pi} + 1 = 0$ in 'čudno' zvezo $i^i = e^{-\pi/2}$. V geometriji trikotnika je znana *Eulerjeva premica*, v zvezi s konveksnimi poliedri *Eulerjeva formula* $V - E + F = 2$, v teoriji števil *Eulerjeva funkcija* ϕ, pa *Eulerjev izrek* (posplošitev Fermatovega). Večino trditev, ki jih je navedel **Fermat** brez dokaza, je dokazal ravno Euler, npr. dejstvo, da se da praštevilo oblike $p = 4k + 1$ *na en sam način* zapisati kot vsota dveh kvadratov, pa *mali Fermatov izrek* (glej vajo 11). Do Eulerja so poznali le tri pare prijateljskih števil, on je odkril skoraj 60 novih parov. Zavrnil je domnevo o *Fermatovih praštevilih* (vaja 12). Pripisujejo mu definicijo funkcij beta in gama, čeprav jih je poznal že Wallis. Pri diferencialnih enačbah je uvedel integracijski faktor, znana je *Eulerjeva diferencialna enačba*, napisal je osnovne formule variacijskega računa. Velja tudi za začetnika teorije particij in v kombinatoriki za predhodnika teorije grafov (Königsberški mostovi, premikanje šahovskega konja), konstruiral je magične kvadrate.



SLIKA 163. Königsberški mostovi čez reko *Pregl*

Mnogo del je posvetil uporabni matematiki, nebesni mehaniki, hidravliki, astronomiji, gradnji ladij, artileriji, akustiki in teoriji glasbe. Še več, tudi marsikateri matematični rezultat ali pojem, ki ga pripisujejo drugim, je v resnici Eulerjevo delo. Razširil je meje znanega v teoriji števil, v algebri in geometriji, posebej pa v analizi. Bil je neumorni integrator (računar integralov) in manipulator z neskončnimi vrstami. Seveda pa pri vsem tem ni mogel vedno poznati standardov rigoroznega izvajanja dokazov, ki so se jih matematiki zavedeli in jih vzpostavili šele v 19. stoletju. Še več, znano je, da je marsikateri rezultat o seštevanju vrst napisal nekritično, npr. $-1 = (1-2)^{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$ ali, ko je iz $x + x^2 + ... = x/(1-x)$ in $1 + 1/x + 1/x^2 + ... = x/(x-1)$ izpeljal, da je $... \ 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + ... = 0$. Kljub temu je bil ne samo prodoren raziskovalec, ampak tudi izvrsten učitelj ("Mojster vseh nas", kot se je izrazil Laplace). Skrbel je, da so njegovi bralci, kar je napisal, tudi razumeli, čeprav jih je rad presenečal in ob tem občutil posebno zadovoljstvo.

Slika 164. Eulerjeva knjiga o izoperimetričnih problemih

Njegovo celokupno delo, *Opera Omnia*, 73 zvezkov zbranih člankov in knjig, skupaj jih je 886, napisanih v latinščini, francoščini in nemščini, je opus, ki ga ni še nihče presegel. Ocenjujejo, da je tretjino vseh matematičnih del v drugi polovici 18. stoletja napisal Euler. Pisal je tako naglo, da ga založniki niso mogli dohajati, izdajanje njegovih del je trajalo še 47 let po njegovi smrti. Na prvem mednarodnem matematičnem kongresu leta 1897 v Zürichu so Švicarji napovedali in v začetku 20. stoletja tudi začeli urejati in izdajati njegova zbrana dela. To je projekt, ki ob pomoči različnih akademij (Berlinske, Sanktpeterburške) in drugih ustanov še vedno traja. Skupaj so natisnili že čez 25.000 strani Eulerjevih matematičnih besedil. Samo o analizi je izdanih 18 debelih zvezkov s skoraj 9000 stranmi (tri knjige in na desetine člankov od diferencialnih enačb preko neskončnih vrst do eliptičnih integralov).

Drugi, v glavnem francoski, matematiki 18. stoletja

Med ostalimi matematiki tega časa omenimo **Abrahama De Moivrea** (1667-1754), Francoza, ki je skoraj vse svoje življenje preživel v Angliji, znanega po svoji *Doktrini verjetnosti* in kot začetnika aktuarske matematike. Ukvarjal se je tudi z analizo in trigonometrijo, prvi je napisal verjetnostni integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$, iznašel formulo $n! \approx (2\pi n)^{1/2}e^{-n}n^n$, ki nosi ime po **Jamesu Stirlingu** (1692-1770), in nas naučil, da je $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.

Slika 165. Abraham de Moivre

Druga dva omembe vredna matematika sta povezana z razvojem odvedljivih funkcij v vrsto; to sta Anglež **Brook Taylor** (1685-1731), Newtonov učenec, in Škot **Colin Maclaurin** (1698-1746). Prvi je leta 1715 uporabil svoj razvoj $f(x+h) = f(a)+hf'(a)+h^2f''(a)/2!+...$ za numerično reševanje enačb, ukvarjal pa se je tudi s perspektivo v geometriji, kar je našlo uporabo v moderni fotogrametriji. Drugi, **Maclaurin**, je bil eden najsposobnejših matematikov v 18. stoletju. Leta 1742 je uporabil poseben primer Taylorjevega razvoja (pri $a = 0$), kar je sicer že prej našel **James Stirling**. Študiral je višje krivulje, delal še v geometriji in njeni uporabi v fiziki ter razvil matematično teorijo plimovanja.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765)

Bil je Parižan, nekoliko mlajši od Eulerja in čudežni otrok, ki je že kot trinajstletnik napisal razpravo o krivuljah tretjega reda, kasneje pa še razpravo o prostorskih krivuljah. To mu je zagotovilo mesto v Francoski akademiji znanosti pri 18. letih, kar ni bilo niti običajno niti po pravilih.

Slika 166. Alexis Claude Clairaut

Triindvajsetletnik se je leta 1736 udeležil **Maupertuisove** geografske odprave na Laponsko, da bi izmerili dolžino stopinje zemeljskega poldnevnika. Istočasno je **La Condamine** vodil podobno odpravo v Peru. Član te druge odprave **Pierre Bouger** je, zanimivo, bil tisti, ki je leta 1727 pobral prvo nagrado akademije pred Eulerjem; takrat je dobil vzdevek "oče mornariške arhitekture".

Francozi so te odprave organizirali zato, da bi končali znanstveni spor o sploščenosti Zemlje. Medtem ko sta Huygens in Newton trdila, da je Zemlja na polih sploščena, sta italijanski matematik in astronom **Giovanni Domenico Cassini** (1625-1712) in njegov v Franciji rojeni sin **Jacques Cassini** (1677-1756) z merjenji zemljepisne dolžine od Dunkerqua do Perpignana stopila na stran Descartesove teorije o polarni raztegnjenosti Zemlje. Odpravi na Laponsko in v Peru sta nedvomno potrdili Huygens-Newtonovo domnevo (**Maupertuisu** so zato dali vzdevek 'sploščitelj Zemlje').

Po vrnitvi z odprave je Clairaut leta 1743 objavil *Théorie de la figure de la Terre*, leta 1752 pa prejel nagrado Sanktpeterburške akademije za razpravo *Théorie de la Lune*. Hkrati s tem je postal znan po svoji diferencialni enačbi oblike $y = px + f(p)$, kjer je $p = dy/dx$, za katero je našel tudi singularno rešitev. Podobno je prej enačbo obravnaval tudi **Brook Taylor**. Leta 1759 je izračunal (z enomesečno napako) datum vrnitve *Halleyevega kometa*. Tudi Clairautov oče je bil učitelj matematike in pisal o geometriji, njegov nadarjeni brat pa je umrl že pri šestnajstih letih, potem ko je napisal članek o geometriji.

Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783)

Tudi Parižan, najdenček v bližini cerkve Saint Jean-le Rond (od tod ime), je postal vnet nasprotnik in tekmec **Clauda Clairauta**. Kot 24-letnik je postal član akademije, leta 1743 objavil razpravo *Traité de dynamique* iz kinetike, raziskoval hidrodinamiko in gibanje v zraku (nastanek vetrov). Leta 1747 ga je raziskovanje nihajoče strune pripeljalo do *parcialnih diferencialnih enačb* in velja za začetnika teorije. Dokončno je rešil problem precesije ekvinokcija in se v glavnem posvečal analizi.

Ni bil zadovoljen z neskončno majhnimi količinami kot osnovnim pojmom infinitezimalnega računa in je bil prvi, ki je predlagal pojem limite za bolj korektno vpeljavo odvoda, a v 18. stoletju na ta njegov predlog ni bilo odziva.

Leta 1754 je postal *permanentni sekretar Francoske akademije*, kar je bila vseskozi zelo pomembna funkcija, ker je odločal o objavah in dajal predloge za nove člane. V zadnjih letih življenja je skupaj z **Denisom Diderotom** uredil delo, po katerem je najbolj znan: *Veliko francosko enciklopedijo*, ki je izhajala od 1751 do 1772. D'Alembert je zanjo prispeval članke o matematiki, filozofiji in religiji.

SLIKA 167. Jean le Rond d'Alembert

Johanna Heinricha Lamberta (1728-1777) smo že omenili v zvezi z neevklidsko geometrijo. Rojen je bil v Mulhousu v Alzaciji, takrat v Švici, v precejšnji meri samouk, postal pa je kvaliteten matematik z občutkom za rigoroznost.

Prvi je leta 1761 korektno dokazal, da je število π iracionalno, in sicer tako, da je najprej ugotovil, da za neničelne racionalne argumente x vrednost $\operatorname{tg} x$ ne more biti racionalna, nato je vstavil $x = \pi/4$. Prvi je tudi vpeljal in raziskal hiperbolične funkcije. Ukvarjal se je s petim Evklidovim postulatom o vzporednicah (*Lambertov štirikotnik*); leta 1766 je svoja tovrstna raziskovanja opisal v delu *Die Theorie der Parallellinien*. Pisal je še o opisni geometriji, računal orbite kometov, uporabljal projekcijo pri kartiranju itd.

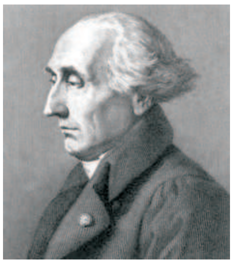
SLIKA 168. Johann Heinrich Lambert

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Za Eulerjem največji matematik 18. stoletja je bil rojen v Torinu v Italiji. Ko je Euler leta 1766 zapustil Berlin, ga je na akademiji nadomestil Lagrange, in tam ostal dvajset let. Po nekaj letih v Parizu je sprejel mesto na *École Normale* in nekaj kasneje na *École Polytechnique*. Obe znameniti šoli sta bili ustanovljeni po francoski revoluciji leta 1794 in mnogi znani francoski matematiki so bili njeni študentje ali profesorji. Lagrangevo delo ima velik vpliv na kasnejši razvoj matematike.

Prvi je spoznal nezadovoljivo stanje osnov matematične analize, kar je želel leta 1797 izboljšati v razpravi *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel* (ni mu uspelo, ker ni poznal pojma konvergence in divergence), je pa to prva resna splošna obravnava realnih funkcij in ne le posameznih posebnih primerov. Zanimivo je, da je odvode (tako kot pred njim Newton) računal iz vrst in ne obratno. Drugo njegovo delo je *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés*, najbolj znano pa *Mécanique analytique* 1787.

V Berlinu je odkril in obdelal splošne enačbe gibanja in dinamičnih sistemov, kar danes imenujemo *Lagrangeve enačbe* (v povezavi z razvojem variacijskega računa). V teorijo diferencialnih enačb je vpeljal metodo variacije konstant. Imel je tudi nagnjenje do teorije števil (izrek o reprezentaciji števil z vsoto štirih kvadratov), v algebri je znan njegov izrek o deljivosti reda grupe z redom podgrupe. Lagrangea lahko imamo za prvega realnega analitika z modernim pristopom.



Slika 169. Jean Louis Lagrange

Gaspard Monge (1746-1818)

Človek, ki je iznašel *opisno geometrijo*, se je rodil v Burgundiji in v Lyonu izšolal za učitelja fizike, uveljavil pa kot dober risar in inženir. Navdušil se je za francosko revolucijo in se ukvarjal s politiko. Leta 1792 je postal celo minister za mornarico in kolonije, leta 1793 pa član konventa in skupaj s prijateljem kemikom *Claudom-Louisom Bertholettom* odgovoren za tovarne smodnika in obrambo ogrožene republike.

Slika 170. Gaspard Monge

Leta 1794 je pomagal ustanoviti *École Polytechnique* in tedaj tudi postal na njej profesor matematike. Znan je po uvedbi in izpopolnitvi opisne geometrije ter po zgodnji obravnavi diferencialne geometrije. Bil je nadarjen učitelj z vplivom na bodoče geometre.

Kasneje je postal dober prijatelj Napoleona, ki ga je vodil s seboj v Italijo in Egipt - in skupaj z njim tudi pobegnil iz Egipta; Monge mu je ostal zvest do konca; po Napoleonovem padcu so ga zato leta 1815 skupaj s **Carnotom** iz političnih razlogov izključili iz Francoske akademije.

Vaje:

(1) Da harmonična vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + ...$ divergira, je vedel že **Nicole Oresme** ($\sim$ 1323-1389) in za dokaz uporabil v bistvu isti argument kot danes (združevanje členov v skupine z vsoto več kot 1/2). **Pietro Mengoli** (1625-1686) pa je leta 1647 združil po tri zaporedne člene in tudi dokazal divergenco harmonične vrste. Ponovi njegov dokaz v naslednjih korakih [10]:
(a) Za $a > 1$ velja $1/(a-1) + 1/a + 1/(a+1) > 3/a$.
(b) Z grupiranjem treh zaporednih členov dobimo $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... =$
$1 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7) + ... > 1 + 3/3 + 3/6 + 3/9 + ... =$
$2 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + ... > 2 + 3/3 + 3/6 + 3/9... = 3 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + ...$ itd.

(2) **Johann Bernoulli** je odkril dokaz divergence harmonične vrste, vendar ga ni objavil. Izšel pa je kasneje v *Razpravi o neskončnih vrstah* brata Jakoba. Prepostavka, da je $A = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$ končno število, pripelje do protislovja. Ideja je v seštevanju neskončnih vrst, sestavljenih iz recipročnih vrednosti produktov zaporednih števil: $B = 1/2+1/6+1/12+1/20+... = 1$, $C = 1/6+1/12+1/20+ \quad ... = 1-1/2 = 1/2$, $D = 1/12 + 1/20 + ... = 1/2 - 1/6 = 1/3$, itd. Pokaži, da je $B + C + D + ... = 1/2 + 2/6 + 3/12 + 4/20 + ... = 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... = A - 1$, kar pripelje do protislovja, ker po drugi strani velja tudi $B + C + D + ... = A$ (glej [10]).

(3) **Jakob Bernoulli** pa je divergenco harmonične vrste dokazal v naslednjih korakih:
(a) Če imata geometrijska in aritmetična vrsta s pozitivnimi členi enaka prvi in drugi člen, je vsak nadaljnji člen geometrijske vrste večji od ustreznega člena aritmetične vrste.
(b) Vsota končnega števila členov geometrijske vrste naj bo $S = A + B + C + ... + E$. Potem je je $A/B = (S - E)/(S - A)$ oziroma $S = (A^2 - BE)/(A - B)$.
(c) Iz ostanka harmonične vrste $1/a + 1/(a + 1) + 1/(a + 2) + ...$ lahko izberemo toliko zaporednih členov, da njihova vsota presega 1. (Navodilo: ker je $a, a + 1, a + 2, ...$ aritmetično zaporedje, oceni s členi geometrijske vrste $1/a + 1/(a + 1) + 1/(a + 2) + ... > 1/a + 1/(a + 1) + 1/C + ... + 1/K$, kjer je $K \geq a^2$; to končno vsoto seštej po točki (b) in dobiš ≥ 1.)
Jakob Bernoulli je v skladu s tem združeval člene harmonične vrste v obliki
$1 + (1/2 + 1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + ... + 1/25) + ...$ (glej [11]).

(4) **Jakob Bernoulli** je znal sešteti tudi ti. *figurativne vrste* $a/A + b/B + c/C + ...$, kjer so $A, B, C, ...$ členi geometrijskega zaporedja, $a, b, c, ...$ pa ti. *figurativna števila* (npr. kvadrati $1, 4, 9, 16, ..$, kubi $1, 8, 27, 64, ...$, trikotna števila $1, 3, 6, 10, ...$, piramidalna števila $1, 4, 10, 20, ...$, itd.). Naj bo $b > 0$ in $d > 1$. Pokaži naslednje [11]:
(a) S seštevanjem geometrijskih vrst $1/b+1/bd+1/bd^2+... = d/b(d-1)$, $1/bd+1/bd^2+... = 1/b(d-1)$, $1/bd^2+... = 1/bd(d-1)$ itd. dobimo $1/b+2/bd+3/bd^2+... = d^2/b(d-1)^2$.
(b) S seštevanjem vrst $1/b+1/bd+1/bd^2+... = d/b(d-1)$, $2/bd+2/bd^2+... = 2/b(d-1)$, $3/bd^2 + ... = 3/bd(d - 1)$ itd. dobimo $1/b + 3/bd + 6/bd^2 + ... = d^3/b(d - 1)^3$.
(c) Iz točke (b) lahko hitro sestavimo tudi vsoto vrste $P = 1/b + 4/bd + 10/bd^2 + ... = d^4/b(d-1)^4$ s piramidalnimi števili v števcih. Velja namreč $P = (1/b+3/bd+6/bd^2 + ...) + (1/bd + 4/bd^2 + 10bd^3 + ...) = T + P/d$, kjer je T vsota vrste iz (b).
(d) Podobno dobimo vsoto vrste $C = 1/b+8/bd+27/bd^2+... = d^2(d^2+4d+1)/b(d-1)^4$, če upoštevamo, da je $C = N + 6P/d$, kjer je N vsota vrste iz točke (a) in P vsota vrste iz točke (c).

Opomba. Vrsta recipročnih kvadratov $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ...$ pa je bila pretežka za **Jakoba Bernoullija**, čeprav je s primerjavo z vrsto recipročnih trikotnih števil znal pokazati, da konvergrira. Določitev njene natančne vsote je pustil kot odprt problem v svoji *Razpravi o neskončnih vrstah* 1689 (to je znameniti *baselski problem*, glej vajo 9). Rešil ga je leta 1734 mladi **Leonhard Euler**, ki je študiral pri **Johannu Bernoulliju**.

(5) **Johann Bernoulli** je izračunal ploščino pod krivuljo $y = x^x$ z vrsto, tako da je sklepal: če je $z = \ln y$, je $y = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + ...$ (eksponentna vrsta). Vstavil je $y = x^x$, torej $z = x \ln x$ in dobil $x^x = 1+x\ln x+x^2(\ln x)^2/2!+x^3(\ln x)^3/3!+...$; iskano ploščino je potem izračunal z integriranjem po členih [11].
(a) Z integracijo po delih (per partes) izpelji za $n \geq 1$ rekurzivno formulo
$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx$ in iz nje eksplicitno relacijo
$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = (-1)^n n!/(m + 1)^{n+1}$.
(b) Z uporabo točke (a) pokaži: $\int_0^1 x^x dx = 1-1/2^2+1/3^3-1/4^4+... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k^k$.
(c) Uporabi Leibnizovo pravilo za alternirajoče vrste, da ugotoviš, koliko členov vrste iz točke (b) je treba sešteti, da bo rezultat pravilen na štiri decimalke natančno.

(6) Za **Eulerja** je bil diferencial enak nič, $dx = dy = 0$, zato je npr. lahko zapisal $y + dy = \sin(x + dx)$ ali $y + dy = \ln(x + dx)$ in še toliko lažje zanemaril potence diferenciala. Z razvojem v vrsto ustrezne funkcije in s črtanjem višjih potenc izpelji po Eulerjevi poti naslednji diferencialni formuli:
(a) $dy = (\cos x)dx$ (za funkcijo $y = \sin x$),
(b) $dy = dx/x$ (za funkcijo $y = \ln x$).

(7) **Euler** je spretno izračunal številne težke integrale, pri čemer si je (kot Newton) pomagal z razvojem v vrsto in integracijo po členih (glej [11]). Kot primer Eulerjeve metode pokaži:

$$\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}\, dx = \pi/4.$$

(i) Najprej razvij integrand po potencah logaritma,
(ii) Nato vrsto členoma integriraj, rekurzivno z uporabo metode integracije po delih.
(iii) Nazadnje upoštevaj vsoto Leibnizove vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... = \pi/4$.

(8) Po klasični (Arhimedovi) metodi računanja števila π je treba zaradi aproksimacije kroga s pravilnim večkotnikom izračunati številne vgnezdene kvadratne korene. **Viète** je za devet pravilnih decimalk moral izračunati vgnezdene korene globine 17, **Ludolph van Ceulen** za 35 decimalk globine 60 (lahko si predstavljamo, da je za to porabil pol življenja). **Euler** je leta 1779 našel hitrejšo pot z uporabo formule za tangens razlike dveh kotov oziroma formule

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{z}{w} = \operatorname{arctg} \frac{xw - yz}{yw + xz}.$$

V eni uri je izračunal π na 20 mest natančno [11]. Ponovi njegove izračune tako, da
(a) v zgornjo formulo vstaviš po vrsti naslednje vrednosti: (i) $x = y = z = 1$ in $w = 2$, (ii) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ in $w = 7$, (iii) $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$ in $w = 7$ ter (iv) $x = 2$, $y = 11$, $z = 1$ in $w = 7$; na koncu dobiš formulo

$$\pi = 20 \operatorname{arctg}(1/7) + 8 \operatorname{arctg}(3/79);$$

(b) arkus tangensa v zadnji formuli razviješ v potenčno vrsto in sešteješ 6 členov, da dobiš približek $\pi \approx 3.14159265357$, ki ima napako 2 enoti na 11. mestu.

(9) Znamenitega *baselskega problema*, poiskati vsoto vrste $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ...$, se je Euler lotil s faktorizacijo potenčne vrste, ki mu je omogočila izračun vsote cele serije bolj splošnih potenčnih vrst [11]. Sledeč njegovemu postopku pokaži naslednje:
(a) Če je $P(x) = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + ... = (1 + a_1x)(1 + a_2x)(1 + a_3x)...$, imamo naslednje relacije $\sum a_k = A$, $\sum a_k^2 = A^2 - 2B$, $\sum a_k^3 = A^3 - 3AB + 3C$ itd.
(b) Razvij v potenčno vrsto zgornje oblike funkcijo $P(x) = \cos(\pi x/4) + \sin(\pi x/4)$, od koder dobiš $A = \pi/4$, $B = -\pi^2/32$, $C = -\pi^3/384$ itd.
(c) Ničle funkcije $P(x)$ so cela števila $-1, 3, -5, 7, -9, ...$, od koder dobimo $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$, $a_3 = 1/5$, $a_4 = -1/7$ itd.
(d) Po formulah iz točke (a) dobimo
(i) $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... = \pi/4$,
(ii) $1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 + ... = \pi^2/8$ in od tod s preoblikovanjem
$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + ... = \pi^2/6$,
(iii) $1 - 1/27 + 1/125 - 1/343 + ... = \pi^3/32$,
(iv) $1 + 1/16 + 1/81 + 1/256 + 1/625 + ... = \pi^4/90$.

Opomba. Formula (ii) je presenetila celo Eulerja; nihče ni pričakoval, da bo rezultat povezal kvadrate števil (kvadrate v geometriji) s številom π (s krogom v geometriji).

(10) Da bi izpeljal funkcijo gama, je Euler definiral za $x > -1$ neskončni produkt [11]:

$$f(x) = \frac{1 \cdot 2^x}{1 + x} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{2 + x} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{3 + x} \cdot ...$$

(a) Pokaži, da je $f(n) = n!$ za vsako naravno število n, da velja formula

$$f(1/2) = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ...}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot ...}} = \sqrt{\pi}/2,$$

(po Wallisovi formuli) ter rekurzivna zveza $f(x) = xf(x-1)$.

(b) Eulerju je uspelo funkcijo $f(x)$ izraziti z integralom: $f(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt$. S substitucijo se prepričaj, da je ta integral enak integralu $\int_0^\infty y^x e^{-y} dy$.

Euler je potem definiral *funkcijo gama* s predpisom $\Gamma(x) = f(x-1)$.

Opomba. Funkcija gama je danes ena najpomembnejših višjih funkcij v analizi. To je zgodovinsko prva funkcija, katere definicija zahteva poznavanje infinitezimalnega računa in torej presega elementarno matematiko.

(11) *Fermatov mali izrek* pravi, da velja $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ za poljubno praštevilo p in za vsako celo število a, ki ni deljivo s p. **Fermat** je to le omenil v pismu leta 1640, **Euler** pa dokazal skoraj sto let kasneje, leta 1736. Najprej je pokazal, da je za vsako praštevilo p in celo število a tudi izraz $a^{p-1} + \frac{p-1}{2!} a^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{3!} a^{p-3} + ... + a$ celo število [10].

Ob tem privzetku pokaži, da je:

(a) število $(a+1)^p - a^p - 1$ deljivo s p,

(b) število $(a+1)^p - (a+1)$ deljivo s p, če velja to za število $a^p - a$,

(c) število $a^p - a$ vedno deljivo s p

in odtod izpelji mali Fermatov izrek.

(12) **Euler** se je začel zanimati za teorijo števil pod vplivom korespondence s **Christianom Goldbachom** (1690-1764), ki je znan po še vedno nerešeni *Goldbachovi domnevi* (da je vsako sodo število, večje od 4, vsota dveh lihih praštevil). Ta ga je 1. decembra 1729 opozoril na Fermatovo domnevo, da so vsa števila oblike $2^{2^n} + 1$ praštevila. Za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ je to res. Pri $n = 5$ pa dobimo $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294, 967.297$. V poskusu, da bi to število faktoriziral ali dokazal, da je praštevilo, je z uporabo malega Fermatovega izreka razvil poseben test, kakšno mora biti praštevilo p, ki deli števila oblike $a^{2^n} + 1$. Pokaži (glej [10]):

(a) Če praštevilo p ne deli sodega števila a, deli pa $a^2 + 1$, mora biti oblike $p = 4k + 1$. (Namig: sicer bi moral p deliti $a^{4k+2} - 1$ po malem Fermatovem izreku in $a^{4k+2} + 1$ zaradi faktorizacije, kar ne gre.)

(b) Če praštevilo p ne deli sodega števila a, deli pa $a^4 + 1$, mora biti oblike $p = 8k + 1$. (Namig: zaradi $a^4 + 1 = (a^2)^2 + 1$ vidimo iz točke (a), da je lahko praštevilo le oblike $p = 8k + 1$ ali $8k + 5$. Drugo možnost izločimo podobno kot v točki (a).) Podobno lahko ugotovimo, da mora biti praštevilo oblike $p = 16k + 1$, če deli $a^8 + 1$, oblike $p = 32k + 1$, če deli $a^{16} + 1$ in oblike $p = 64k + 1$, če deli $a^{32} + 1$.

(c) Praštevilo, ki deli $F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294, 967.297$ mora biti torej oblike $p = 64k + 1$. Preveri, da za $k = 1, 2, 3, ..., 9$ število $64k + 1$ bodisi ni praštevilo, ali pa ne deli F_5, da pa je za $k = 10$ število $64k + 1 = 641$ praštevilo, hkrati pa je $F_5 = 4.294, 967.297 = 641 \cdot 6, 700.417$.

(d) **Euler** je prej dokazal, da ima praštevilo oblike $p = 4k + 1$ eno samo reprezentacijo kot vsota dveh kvadratov (glej vajo 13 v razdelku 9). Ker je $2^{32} + 1 = 4.294, 967.297$ očitno oblike $4k+1$ in lahko ugotovimo, da je $4.294, 967.297 = 65536^2 + 1^2 = 20449^2 + 62264^2$, ne more biti praštevilo.

Opomba. Šesto Fermatovo število $F_6 = 2^{2^6} + 1 = 2^{64} + 1 = 18, 446, 744, 073, 709, 551, 617$ je deljivo s praštevilom $p = 274, 177$. Tudi naslednje število $F_7 = 2^{2^7} + 1 = 2^{128} + 1$ je sestavljeno, vendar so to odkrili z bolj kompliciranimi metodami leta 1905, faktorizirali pa so ga šele leta 1971. Podobno so do leta 1988 ugotovili, da so sestavljena vsa števila F_8, F_9, ..., F_{31}. Pravzaprav niso doslej našli med števili oblike $2^{2^n} + 1$, $n > 4$, nobenega praštevila, zato sklepajo, da so morda tista, ki jih je poznal Fermat, edina te vrste.

13. Razvoj matematike v 19. stoletju

Kot rečeno, bomo v 19. stoletju zaradi obilice materiala in eksponentne rasti pomembnih matematičnih rezultatov lahko omenili le nekatere posameznike, ki so prispevali h glavnim trendom v razvoju moderne matematike, ki je tedaj že močno presegla elementarni nivo in postala bolj zahtevna. Večino časa bomo posvetili razvoju analize, ki se je razvila iz osnov diferencialnega in integralskega računa.

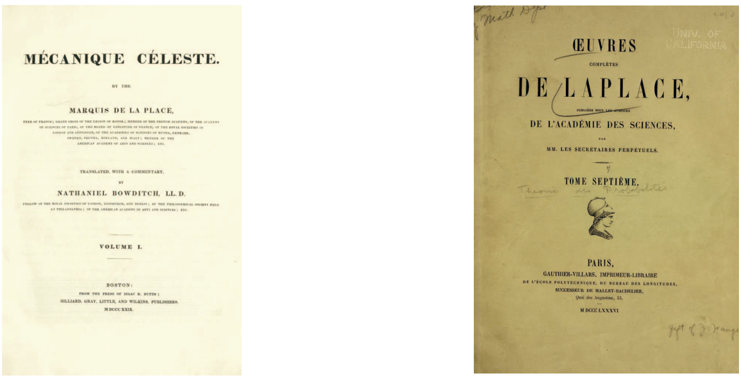
Napoleonovi sodobniki

Tako kot **Monge** so bili Napoleonovi sodobniki tudi **Laplace**, **Legendre** in **Fourier**, rojeni sredi 18. stoletja, svoja glavna dela pa so ustvarili že v novem stoletju. Prvi se je uveljavil že pred revolucijo, kot politični oportunist pa je dobro shajal tudi med njo in potem pod Napoleonom. Zadnji pa je bil sploh Napoleonov privrženec in imel pod njim (kot Monge) visoke politične funkcije.

Slika 171. Posthumni Laplaceov portret iz leta 1842

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Kljub revnim staršem je zaradi svoje matematične sposobnosti naredil veliko kariero kot učitelj in znanstvenik. Njegovo področje so bila nebesna mehanika, geodezija, diferencialne enačbe in verjetnost. Napisal je dve monumentalni deli: *Traité de mécanique céleste* v petih volumnih 1799-1825 in *Théorie analytique de probabilité* 1812.



MÉCANIQUE CÉLESTE.

BY THE

MARQUIS DE LA PLACE,

TRANSLATED, WITH A COMMENTARY,

BY

NATHANIEL BOWDITCH, LL. D.

VOLUME I.

BOSTON:

FROM THE PRESS OF ISAAC R. BUTTS;

HILLIARD, GRAY, LITTLE, AND WILKINS, PUBLISHERS.

M DCCC XXIX.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXVI

Slika 172. Laplaceovi knjigi o nebesni mehaniki in teoriji verjetnosti

Zaradi prvega dela so ga primerjali z Newtonom. Drugo delo zajema poleg klasične definicije verjetnosti razprave o igrah na srečo, geometrijski verjetnosti, Bernoullijevem izreku, normalni porazdelitvi, metodi najmanjših kvadratov in aposteriorni verjetnosti Thomasa Bayesa; v delu je izpeljana tudi *Laplaceova transformacija*, ki jo je uporabil pri reševanju diferencialnih enačb.

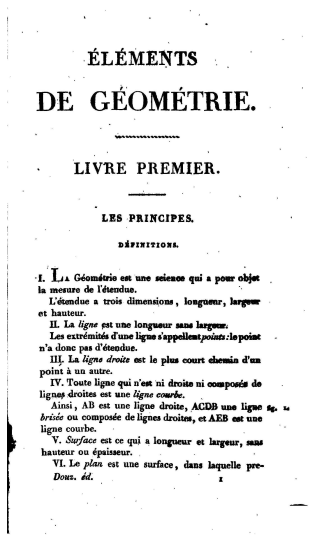
Kot matematik je znan tudi po razvoju determinant, kot naravoslovec in filozof pa po utemeljitvi klasičnega determinizma. Umrl je natanko sto let po Newtonu.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

V nasprotju od Mongea in Lapalacea je izhajal iz bogate družine, a je svoje imetje izgubil med revolucijo. Že pred njo si je na Collège de Mazarin pridobil odlično matematično izobrazbo in postal učitelj topničarjev (kot naš **Jurij Vega** (1754-1802)) na vojaški šoli. To delo je potem opravljal tudi pod Napoleonom. Leta 1795 je postal član akademije, kjer je preoblikoval geometrijsko sekcijo.

Slika 173. Adrien-Marie Legendre

Napisal je v naslednjih sto letih zelo popularno delo *Élements de géométrie* (1794), s katerim je pedagoško preoblikoval in poenostavil snov Evklidovih *Elementov.* Poskušal je dokazati aksiom o vzporednicah.



ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

LES PRINCIPES.

DÉFINITIONS.

I. La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur.

II. La *ligne* est une longueur sans largeur.

Les extrémités d'une ligne s'appellent *points*: le point n'a donc pas d'étendue.

III. La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.

IV. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites est une *ligne courbe*.

Ainsi, AB est une ligne droite, ACDB une ligne *brisée* ou composée de lignes droites, et AEB est une ligne courbe.

V. *Surface* est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur.

VI. Le *plan* est une surface, dans laquelle pre-

Douz. éd. 1

Slika 174. Legendrova knjiga *Élements de géométrie*

Poleg tega se je ukvarjal z vsem mogočim. V teoriji števil je dokazal Fermatov izrek za primer $n = 5$, napovedal je kvadratni reciprocitetni zakon (po njem se imenuje simbol, ki določa kvadratično naravno ostankov danega števila po praštevilskem modulu, ti. *Legendrov simbol*), ki ga je dokazal **Gauss**, ter *praštevilski izrek*, ki sta ga šele 1896 dokazala **Jacques Hadamard** in **Charles de la Valée Poussin**.

Razvil je *metodo najmanjših kvadratov*, ki ima ogromno uporabe v statistiki in drugje, ukvarjal se je z eliptičnimi funkcijami in klasifikacijo eliptičnih integralov. S svojo transformacijo je preoblikoval enačbe analitične mehanike.

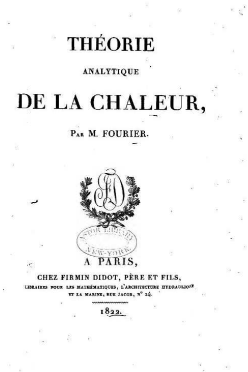
Najbolj pa je seveda znan po *Legendrovih polinomih*, ki so rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

Joseph Fourier (1768-1830)

Bil je krojačev sin iz Auxerra, nekoliko mlajši od predhodnikov. Tudi on si je s svojo inteligenco in bistrostjo priboril mesto učitelja matematike na vojaški šoli. Zagovarjal je francosko revolucijo, kar mu je olajšalo kasnejšo kariero. Leta 1795 je bil imenovan za profesorja na École Normale Supérieure in nadomestil **Lagrangea** na École Polytechnique. Kot Mongea je tudi njega Napoleon med številnimi drugimi znanstveniki vzel na svojo ekspedicijo v Egipt. Tam je postal tajnik novoustanovljenega Egiptovskega inštituta (kasneje je prispeval k izidu obsežne znanstvene monografije z opisom Egipta).

Slika 175. Joseph Louis Fourier

Po vrnitvi v Francijo ga je Napoleon leta 1801 imenoval za prefekta Grenobla. Zanimivo je, da je tedaj 11-letnega *Jeana Françoisa Champolliona* seznanil s kopijo kamna iz Rosette, ki jo je prinesel iz Egipta, in mu kot prefekt pomagal pri šolanju. Ta kamen je v letih 1822-1824 omogočil Champollionu nesmrtno slavo z razvozlanjem egiptovskih hieroglifov. Po Napoleonovem padcu je odšel v Anglijo in se vrnil leta 1822, ko je nadomestil **Delambra** na vplivnem mestu permanentnega tajnika Francoske akademije.


THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.
A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
1822.

Slika 176. Fourierova *Teorija toplote iz leta 1822*

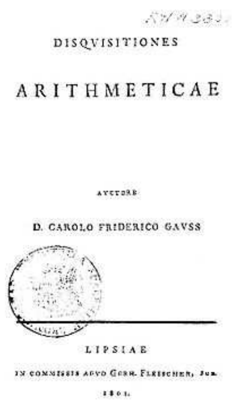
Fourierovo epohalno delo o analitični teoriji toplote (*Théorie analytique de chaleur*) iz leta 1822 prinaša poleg nedvomnih fizikalnih spoznanj pomembne matematične prispevke. Medtem ko je za Eulerja ali Lagrangea bila funkcija vedno podana z zaključeno formulo, je Fourier prvi prišel na misel, da so funkcijske vrednosti lahko podane kakorkoli (npr. kot porazdelitev temperature po nosilcu). Menil je, da se da vsaka funkcija, zvezna ali ne, razviti v posebno *trigonometrijsko vrsto* po sinusih in kosinusih večkratnih kotov. Za lepe funkcije je celo znal izračunati koeficiente in ji tako določiti *Fourierovo vrsto.*

To je bil začetek harmonične analize, ki je v teku stoletja močno vplivala na poostritev marsikaterega matematičnega pojma (npr. funkcije, zveznosti, konvergence, integrala) ter vzpodbudila nastanek novih matematičnih disciplin (npr. teorije množic, topologije, teorije mere). V zvezi s tem se je ukvarjala tudi s parcialnimi diferencialnimi enačbami (*Fourierova metoda*) in dimenzijsko analizo.

V algebri ga je zanimal položaj korenov algebrajske enačbe, v fiziki pa zlasti problem prevajanja toplote; odkril je tudi efekt tople grede.

Največji nemški matematik

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) je bil rojen v Braunschweigu. Bil je čudežni otrok (šolska anekdota o seštevanju prvih sto naravnih števil), devetnajstleten je leta 1796 odkril evklidsko konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika in zadosten pogoj za konstrukcijo pravilnega n-kotnika (lihi del števila n mora biti produkt različnih Fermatovih praštevil). To ga je navdušilo za študij matematike (želja, da bi imel pravilni *heptadekagon* vklesan v nagrobnik pa se mu ni uresničila). Rezultat je objavil v svojem najpomembnejšem delu *Disquisitiones arithmeticae*, ki je bilo končano leta 1798 (pri enaindvajsetih letih), objavljeno pa leta 1801.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, IVN.

1801.

Slika 177. Gaussova knjiga o aritmetiki *Disquisitiones arithmeticae*

To delo je za vso nadaljnjo dobo zakoličilo razvoj teorije števil. V njej je obravnaval tudi modularno aritmetiko, kvadratični reciprocitetni zakon, porazdelitev praštevil, predstavitve števila z vsoto kvadratov, trikotnih števil ipd. Leta 1799 je v Helmstedtu doktoriral pri **Pfaffu** z dokazom *osnovnega izreka algebre*, ki sta ga zaman skušala dokazati D'Alembert in Euler. Kasneje je Gauss v letih 1814, 1816 in 1848 podal še vrsto alternativnih dokazov. S temi zgodnjimi in kasnejšimi deli se je uveljavil kot vodilni matematik svojega časa z vzdevkom *Princeps mathematicorum*.

Slika 178. Jensenov portret Carla Friedricha Gaussa

Tridesetletnik je leta 1807 postal direktor astronomskega observatorija v Göttingenu in na tem mestu ostal do smrti. Poleg čiste matematike (neevklidske geometrije, diferencialne geometrije - *theorema egregium*) se je odtlej posvečal tudi uporabi matematike (geodeziji, astronomiji, optiki, magnetizmu). Preračunal je pot asteroida *Ceresa*, ki se je pojavil leta 1801, s kolegom fizikom **Wilhelmom Webrom** sta raziskovala zemeljsko magnetno polje (po Gaussu se imenuje enota za gostoto magnetnega toka), izboljšala telegraf itd.

Pogosto so ga (kot Laplacea) primerjali z **Newtonom**. Res so podobnosti: oba sta delala čisto matematiko in njeno uporabo, oba sta malo objavljala, čeprav sta se zavedala svoje vrednosti, oba sta bila sposobna neverjetne koncentracije, oba sta se gibala v visokih akademskih krogih, vendar sta se izogibala žolčnim akademskim razpravam in prepirom. Gauss je Newtona še presegel glede matematične natančnosti in perfekcionizma.

Gauss je bil konservativen in ni rad priznal drugim njihovih dosežkov (npr. **Janosu Bolyaiu**, sinu svojega prijatelja Farkasa, glede neevklidske geometrije ali **Legendru** glede metode najmanjših kvadratov), češ da je sam to že prej odkril, vendar ne objavil. Ignoriral je tudi zgodnja **Cauchyjeva dela**. Kljub temu je pokazal presenetljivo človeško širino in ni zavrnil priznanja **Sophie Germain** (1776-1831), ko je izvedel, da objavlja pod moškim imenom *Antoine Le Blanc*, in je zanjo (šest let po prezgodnji smrti zaradi raka na prsih) celo predlagal častni doktorat göttinške univerze, potem ko ji je ta naslov zaradi spola zavrnila berlinska univerza.

Sicer je Gauss imel kasneje slavne doktorske študente, kot so **Friedrich Bessel**, **Richard Dedekind**, **Bernhard Riemann** in znani zgodovinar matematike **Moritz Cantor**, med drugimi njegovimi učenci pa lahko naštejemo **Eisensteina**, **Kirchhoffa**, **Kummra**, **Dirichleta** in **Möbiusa**. Preko njih in seveda preko svojega dela je imel velik vpliv na celoten razvoj matematike v 19. stoletju.

Gaussovo načelo je bilo *Pauca sed matura* (*Malo ali vredno*), matematiko je cenil čez vse: "Matematika je kraljica znanosti, in teorija števil je kraljica matematike."

Slika 179. Gaussov spomenik v Braunschweigu in grob v Göttingenu

Splošne značilnosti razvoja matematike v 19. stoletju

Za devetnajsto stoletje je v matematičnem smislu značilen prehod od intuicije k rigoroznosti. Matematika se je osvobodila tradicionalnih vezi z astronomijo in fiziko, zatekla se je k lastnim zakonitostim in bolj abstraktnim konceptom. Hkrati se je postopoma povečeval pomen in odgovornost učenja matematičnih pojmov, ki ni bilo več vezano na kraljevske ugodnosti in učene akademije, ampak se je sčasoma skoncentriralo na univerzah. Nacionalni jeziki so polagoma zamenjali znanstveno latinščino, delo se je specializiralo na posameznih matematičnih področjih.

Poleg napredka v *geometriji* (opisna, neevklidska, projektivna, diferencialna geometrija) in proti koncu stoletja novih pogledov nanjo (Kleinov Erlangenski program, Hilbertova aksiomatizacija), sta se v devetnajstem stoletju razvili zlasti *algebra* (osnovni zakoni, nekomutativne strukture, večrazsežni vektorski prostori in linearne transformacije nad njimi) ter *analiza* (utrditev osnovnih konceptov, aritmetizacija analize z aksiomatiko realnih števil, uvedbo teorije množic).

Skica razvoja treh osnovnih matematičnih disciplin

Geometrija

O odkritju neevklidske geometrije smo že govorili; pomenila je osvoboditev od realnega sveta, še posebej, ko je **Eugenio Beltrami** (1835-1900) leta 1868 prvi dokazal konsistentnost neevklidske geometrije Bolyaia in Lobačevskega.

Kot vemo, je *opisno geometrijo* inavguriral **Gaspard Monge**, njegov najboljši učenec **Jean Victor Poncelet** (1788-1867) pa je s svojim delom *Traité des proprietés des figures* iz leta 1822 začetnik *projektivne geometrije* kot samostojne vede. Velik nadaljnji pospešek ji je dal švicarski geometer **Jakob Steiner** (1796-1863), ki je deloval v Berlinu, **Karl Georg Christian von Staudt** (1798-1867) pa jo je osvobodil metrike.

Med znanimi geometri devetnajstega stoletja omenimo **Augusta Ferdinanda Möbiusa** (1790-1868), **Michela Chaslesa** (1793-1880) in **Juliusa Plückerja** (1801-1868). Michel Chasle se je uveljavil tudi kot prvi zgodovinar geometrije. *Diferencialna geometrija*, ki se je začela z Mongem, je dobila svoje zagovornike in razvijalce v osebah velikih matematikov, kot sta npr. **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) in **Georg Bernhard Riemann** (1826-1866).

Nemški matematik **Felix Klein** (1849-1925) je s svojim *Erlangenskim programom* leta 1872 postavil ne samo projektivno, ampak tudi druge možne geometrije na nove temelje, ko jim je dal pomen proučevanja invariantnih lastnosti glede na neko grupo transformacij. Njegov učenec **David Hilbert** (1865-1943) pa je ob izteku stoletja v svojem delu *Grundlagen der Geometrie* predstavil leta 1899 formalni sistem 20 (originalno 21) aksiomov evklidske geometrije.

Slika 180. Felix Klein in David Hilbert

Omeniti je treba še italijansko geometrijsko šolo na čelu z odličnimi matematiki, kot so bili **Luigi Cremona** (1830-1903) s svojim raziskovanjem algebraičnih krivulj ter kasneje **Gregorio Ricci-Curbastro** (1853-1925) in njegov učenec **Tullio Levi-Civita** (1873-1941), ki sta razvila tenzorski račun, delala pa tudi na drugih področjih.

Slika 181. Niels Henrik Abel

Algebra

V začetku 19. stoletja so gledali na algebro kot na posplošeno aritmetiko, namenjeno reševanju enačb (spomnimo se **Paola Ruffinija** (1765-1822) in **Nielsa Henrika Abela** (1802-1829), ki sta dokazala nezmožnost rešitve splošne polinomske enačbe reda več kot štiri z radikali). Algebrajski zakoni naj bi bili tisti, ki veljajo za realna števila: komutativnost, asociativnost, distributivnost, obstoj enote itd. Leta 1815 pa je **Cauchy**, o katerem bomo več govorili v zvezi z analizo, obravnaval sestavljanje (komponiranje) permutacij in ugotovil, da je vrstni red pomemben. O grupah takrat še ni bilo govora.

Resneje so se matematiki zavedeli nove situacije okrog sredine stoletja, ko je leta 1843 irski matematik **William Rowan Hamilton** (1805-1865) iz fizikalnih pobud iznašel *kvaternione*. Le-ti sestavljajo algebro, v kateri komutativnostni zakon ne velja, kar je bilo veliko presenečenje. Nemec **Hermann Grassmann** (1809-1877) je že naslednje leto konstruiral celo družino algeber z nenavadnimi lastnostmi. Nazadnje je Anglež **Arthur Cayley** (1821-1895) leta 1857 odkril splošno *matrično algebro*, ki nam je danes najbližji oziroma najbolj domači primer nekomutativne strukture.

Richard Dedekind (1831-1916)

Znan je po posebni konstrukciji realnih števil in definiciji neskončne množice. Kasneje je aksiomatiziral algebro, definiral pojem *ideala* in začel teorijo funkcijskih obsegov. Vrata v abstraktno algebro so bila s tem odprta. Od takrat dalje so matematiki ustvarili plejado (več kot 200) različnih algebrajskih struktur, na katerih temelji moderna matematika (grupoidi, kvazigrupe, polgrupe, monoidi, grupe, kolobarji, celostne domene, mreže, Boolovi kolobarji, kolobarji z deljenjem, obsegi, vektorski prostori, jordanske in Liejeve algebre, splošne neasociativne algebre itd.)

Slika 182. Richard Dedekind

Analiza

Analizi bomo posvetili nekaj več prostora.

Potem ko je v 18. stoletju **D'Alembert** spoznal, da pri nadaljnjem razvoju infinitezimalnega računa potrebujemo limite, in je Lagrange začutil potrebo po večji rigoroznosti, je velik korak v to smer napravil leta 1821 francoski matematik **Cauchy**.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Razvil je teorijo in prakso računanja z limitami, korektno definiral konvergenco, zveznost in odvedljivost funkcij ter računanje določenega integrala (zveznih) funkcij ravno z uporabo limit.

Cauchy je bil rojen v Parizu v družini visokega policijskega uradnika, ki je nekako srečno preživela francosko revolucijo in teror (pod Napoleonom je oče celo dobil mesto generalnega sekretarja senata in je delal pod Laplaceom). Augustin-Louis je končal politehniko in se usmeril v civilno inženirstvo. Po letu 1812 se je začel globje zanimati za matematiko, neumorno raziskoval, a ni dobil primerne službe.

Slika 183. Augustin-Louis Cauchy

Šele leta 1816, ko so iz akademije izključili Mongea in Carnota, je na akademiji zasedel mesto enega od njiju, začel pa je tudi učiti na politehniki. Postal je zagrizen rojalist in zvest pripadnik Bourbonov in si s tem nakopal precej političnih nasprotnikov. Po smrti Ludvika XVIII. leta 1924 je služil Karlu X., zaposlil se je tudi kot profesor na Collège de France in Fakulteti za znanost na Sorbonni. Po julijski revoluciji leta 1830 pa je Cauchy pustil vse funkcije in za kraljem odšel v izgnanstvo v tujino (Torino, Praga, Gorica). Leta 1838 se je lahko vrnil v Pariz in zavzel svoje mesto na akademiji, ni pa smel učiti, ker ni prisegel novi oblasti Louisa Philippa. To se je uredilo šele po revoluciji 1848, ko so prisego sprva odpravili, kasneje pa, ko jo je Napoleon III. spet uvedel, Cauchyja od nje oprostili.

Cauchy je takoj za Eulerjem matematik z največ objavljenimi članki (skupaj 789). Že zgodaj je izkazal svoj talent (npr. z elegantno rešitvijo Apolonijevega problema o dotikanju treh krogov, s posplošitvijo Eulerjeve poliedrske formule), sicer pa se je ukvarjal z višjo matematiko. S številnimi matematičnimi prispevki je obravnaval konvergenco in divergenco neskončnih vrst (Cauchyjev kriterij, Cauchyjev produkt), realne in kompleksne funkcije (Cauchy-Schwarzova neenakost, Cauchyjeva integralska formula in Cauchyjev integral v kompleksni analizi), diferencialne enačbe (Cauchyjevi pogoji, Cauchy-Riemannove enačbe), verjetnost (Cauchyjeva porazdelitev), matematično fiziko (elastomehanika) itd.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

Slika 184. Cauchyjev učbenik *Cours d'analyse*

Analizo je obravnaval tako natančno kot še nihče pred njim. Kritiziral je **Lagrangev** pristop s potenčnimi vrstami, saj je predstavil primer neskončnokrat odvedljive funkcije, ki ima v točki 0 vse odvode enake nič in se zato ne da razviti v (neničelno) potenčno vrsto (taka je funkcija f, pri kateri je $f(0) = 0$ in $f(x) = e^{-1/x^2}$ za $x \neq 0$). Njegovi knjigi *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* iz leta 1821 in *Résumé des leçons données a l'École royale polytechnique, sur le calcul infinitésimal* iz leta 1823 sta postali pojem rigoroznosti; iz njiju se je učila celotna matematična Evropa. Pri dokazovanju se ni zanašal na geometrijsko predstavo in intuicijo, ampak je vse skušal izpeljati algebrajsko iz definicij.

Imel pa je Cauchy, kar se rigoroznosti v analizi tiče, odličnega naslednika, **Karla Weierstrassa**, o katerem bomo govorili kasneje.

Pojem funkcije

Zanimivo je pogledati, kako se je razvijal npr. *pojem funkcije.* Za **Newtona** in **Leibniza** je funkcija pomenila *krivuljo*, saj sta izhajala iz naivnega geometrijskega pristopa.

Euler je napravil premik v pojmovanju: razlikoval je konstante in spremenljivke, funkcije so bile zanj analitični izrazi (formule), sestavljeni iz spremenljivk in konstant. Funkcijo $f(x) = x$, če je $x \geq 0$, in $f(x) = -x$, če je $x < 0$, je npr. imel za nezvezno zaradi nezvezne formule (v resnici je zvezna, **Cauchy** jo je celo znal opisati z eno samo formulo $f(x) = \sqrt{x^2}$, kar bi bilo všeč tudi Eulerju). Je pa res, da je kasneje, leta 1755, Euler v definiciji funkcije že opustil izraz formula.

Nadalje je pojem posplošil **Fourier**, ko je rekel, da se da *vsaka* funkcija razviti v trigonometrično vrsto $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a)$. "Vsaka" je zanj pomenila vsak nabor vrednosti, tudi če ne zadošča nekemu splošnemu zakonu, npr. vsaka porazdelitev temperature po nosilcu ali vsak položaj strune. Fourier je koeficiente trigonometrične vrste izračunal z integrali $a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(k\pi x/a)dx$ in $b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(k\pi x/a)dx$. Toda vprašanje je, ali ti integrali pri bolj splošnih funkcijah še obstajajo. **Cauchy** je npr. znal integrirati le zvezne funkcije. Za integracijo (nekaterih) nezveznih pa je zaslužen **Dirichlet** (in za njim **Riemann**).

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Študiral je v Parizu in Bonnu, učil pa v Wroclawu (Breslau) in Berlinu. Njegov glavni prispevek je na področju analitične teorije števil. Leta 1829 je v delu *Sur le convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données* definiral integral za funkcije, ki so zvezne povsod razen v končno mnogo točkah, z vsoto integralov na posameznih odsekih. Pokazal je tudi, da lahko *absolutno konvergentne* vrste poljubno preuredimo, ne da bi s tem spremenili njihove konvergence niti njihove vsote.

Slika 185. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Dirichlet je matematičnemu svetu predstavil funkcijo, ki je tako zelo nezvezna, da sploh nima integrala:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionalen}, \\ 0, & x \text{ iracionalen}. \end{cases}$$

Take funkcije so navedle Riemanna, da se je začel spraševati, koliko nezvezne so lahko funkcije, da se še dajo integrirati.

Georg Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann je torej oral ledino v smer večje abstraktnosti matematičnih konceptov. Bil je Dirichletov učenec in zadnji Gaussov doktorand. Pustil je neizbrisno sled v moderni matematiki.

Njegova doktorska disertacija iz leta 1851 nam je dala pojem *Riemannove ploskve* in z njo povezane prve topološke raziskave. Eden glavnih dosežkov je *Riemann-Rochov izrek*, ki povezuje analitične lastnosti funkcije s topološkimi lastnostmi ustrezne Riemannove ploskve. V tem času se je kot **Webrov** asistent intenzivno bavil s fiziko, ni pa zanemaril niti pomembne matematike.

Slika 186. Georg Bernhard Riemann

Riemannova habilitacijska teza iz leta 1854 je postregla z moderno diferencialno geometrijo, katere glavni pojmi *mnogoterost*, *Riemannova metrika* in *ukrivljenost* na novo opredeljujejo pojem prostora, kar vse je v začetku dvajsetega stoletja postalo osnova Einsteinove splošne teorije relativnosti. *Riemannova geometrija* je še ena od neevklidskih geometrij. V habilitacijskem delu je tudi predstavil rigorozno definicijo določenega (tj. *Riemannovega*) integrala (glej vajo 5), po kateri je znan med vsemi, ki so kdaj študirali višjo matematiko, in ki je na prelomu stoletja vodila do odkritja splošnejšega *Lebesguovega integrala.*

Riemann je znan tudi po svojem izreku o preureditvi pogojno konvergentnih vrst, ki pravi, da lahko tako vrsto preuredimo tako, da konvergira proti poljubnemu vnaprej izbranemu številu, ali da divergira. Razvil je teorijo trigonometričnih vrst, ki niso nujno Fourierove.

Leta 1859 pa je objavil domnevo o lokaciji ničel ti. *Riemannove funkcije* v teoriji števil. *Riemanova hipoteza* je danes eden najbolj slavnih še nerešenih problemov v matematiki. Umrl je za tuberkulozo, mlad, star komaj 40 let, in za sabo pustil sicer po obsegu majhnen, a po globini matematične misli izreden znanstveni opus.

Realna števila

Poleg funkcij so se matematiki prvenstveno ukvarjali z *realnimi števili.* Že v 18. stoletju so razločevali ne samo med racionalnimi in iracionalnimi števili, ampak so poznali tudi definicijo algebraičnih in transcendentnih števil. Algebraičnih števil ni bilo težko identificirati, taka so npr. vsa racionalna števila, pa različni koreni in sploh rešitve polinomskih enačb s celimi koeficienti.

Večji problem pa je nastal z iskanjem transcendentnih števil. Medtem ko je **Euler** leta 1737 dokazal, da je število e iracionalno, **Lambert** pa je leta 1768 isto storil za število π, za katerega je le domneval, da je tudi transcendentno, do sredine 19. stoletja niso poznali nobenega konkretnega transcendentnega števila. Prvo je konstruiral leta 1851 (glej vajo 8) francoski matematik **Joseph Liouville** (1809-1882), ki ga poznamo tudi po Sturm-Liouvilleovi teoriji iz diferencialnih enačb. Poleg tega se je ukvarjal z elektriko in termodinamiko, sodeloval v politiki, pomemben pa je tudi kot ustanovitelj in urednik enega prvih vplivnih časopisov za področje matematike *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ki izhaja neprekinjeno od leta 1836 do danes.

Kar se števil e in π tiče, je transcendentno naravo prvega ugotovil **Charles Hermite** (1822-1901) leta 1873, drugega pa **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) leta 1882. Lindemannov rezultat je hkrati pomenil, da klasična kvadratura kroga ni mogoča.

Potem ko je **Hilbert** leta 1900 postavil eksplicitno vprašanje o transcendentnosti števil kot je npr. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, je bil napredek v tej smeri dosežen šele leta 1934, ko sta **Alexandr Gelfond** (1906-1968) in **Theodor Schneider** (1911-1988) neodvisno dokazala transcendentno naravo cele družine števil: če je $\alpha \neq 0, 1$ algebraično število in β iracionalno algebraično število, je število α^β transcendentno. To je npr. res za število $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ali število $e^\pi = e^{(-i\pi)i} = (-1)^i$. Seveda pa ostaja vprašanje transcendentnosti nerešeno še za mnoga znana števila, npr. $e + \pi$, $e\pi$, π^e itd.

Karl Weierstrass (1815-1897)

Weierstrass je izjema, ki potrjuje pravilo, da se velika dela v matematiki zgodijo v mladih letih. Potem ko se kot študent ni ravno proslavil, je petnajst let učil na srednji šoli in razmišljal o pravi matematiki šele pozno zvečer, ko je že opravil svoje učiteljske obveznosti.

SLIKA 187. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Leta 1854 mu je v *Crellejevem Journalu* uspelo objaviti razpravo o *Abelovih integralih*, ki je izzvala znanstveno senzacijo. Univerza v Königsbergu, kjer je na istem področju delal Jacobi, mu je podelila častni doktorat, nakar so ga povabili na univerzo v Berlin, kjer je potem naredil akademsko kariero in postal eden od stebrov nemške matematike. Poleg zgodnjih člankov o eliptičnih integralih, Abelovih funkcijah in algebraičnih diferencialnih enačbah je njegovo najpomemnejše matematično delo posvečeno osnovam teorije kompleksnih funkcij in potenčnih vrst. Raziskoval je cele funkcije in neskončne produkte, odkril je pomem *enakomerne zveznosti* funkcij, razumel je razliko med konvergenco po točkah in *enakomerno konvergenco* funkcijskega zaporedja, hkrati s pomembnimi posledicami glede intergriranja takih zaporedij in vrst.

Weierstrass je analizo postavil na trdne temelje. Reduciral je lastnosti realnih števil na nekaj aksiomov, iz katerih je potem zgradil celotno analizo. Če je **Cauchy** (sicer korektno) vpeljal limito funkcije z besedami, s formulacijo, ki je vsebovala pojme, kot so približevanje neki vrednosti, je **Weierstrass** pojem limite osvobodil gibanja in jo izrazil v sodobnem jeziku z epsilonom in delto.

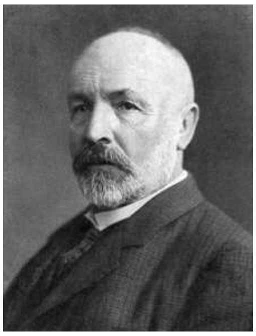
Leta 1861 je prvi odkril primer zvezne funkcije, ki ni odvedljiva v nobeni točki (vaja 9); leta 1872 jo je predstavil Berlinski akademiji, končno pa je primer objavil **Paul du Bois-Reymond** (1831-1889) leta 1875.

Tako vedenje je bilo za Weierstrassa značilno: ni se gnal za prvenstvo in marsikakšen pomemben rezultat je prepustil svojim učencem. Vsekakor je bil zelo vpliven učitelj in še danes predstavlja pojem rigoroznega razmišljanja v analizi in sploh v matematiki. Zaradi njegovih številnih zaslug na tem področju so ga imenovali "oče moderne analize".

Weierstrassove novotarije (npr. povsod zvezne, nikjer odvedljive funkcije) pa so njegovi sodobniki težko sprejemali, nekateri celo zavračali (npr. francoska šola na izkustvu in povezavi s fiziko utemeljene matematike s **Hermitom**, **Poincaréjem** in **Picardom** na čelu). **Henri Poincaré** (1854-1912) je ob tem govoril o "prestopku zoper zdravo pamet", **Émile Picard** (1856-1941) pa je izjavil naslednje: "Če bi Newton in Leibniz menila, da zvezne funkcije nimajo nujno odvoda, ... bi nikoli ne iznašla diferencialnega računa."

Georg Cantor (1845-1918)

To je še eden v vrsti odličnih nemških matematikov, ki so pustili trajno sled v moderni matematiki. Rojen v Sankt Peterburgu, se je že v mladosti preselil v Nemčijo, študiral v Berlinu pri **Weierstrassu** od 1863 do 1869, in potem ves čas učil v Halleju.



Slika 188. Georg Cantor

Zanimal se je za teorijo števil, enačbe in trigonometrične vrste, kar ga je pripeljalo do osnov analize. Izdelal je teorijo iracionalnih števil, temelječo na ekvivalenčnih razredih *Cauchyjevih zaporedij*, kar je bilo drugače (čeprav ekvivalentno) kot teorija, ki jo je predlagal **Dedekind** s svojimi *prerezi*.

Leta 1874 je začel z revolucionarnim delom na teoriji množic in teoriji neskončnosti, po kateri je najbolj znan. Ustvaril je novo področje matematičnega raziskovanja aktualne neskončnosti in transfinitnih števil, "raj, iz katerega nas ne bodo nikdar izgnali", kot se je izrazil **David Hilbert** (1862-1943). Večina njegovih kolegov matematikov, zlasti pa **Leopold Kronecker** (1823-1891), so njegovo delo zavračali. Nepriznanje ga je psihično obremenjevalo, tako da je resno zbolel in se je moral večkrat zdraviti v psihiatričnih ustanovah. Poleg tega so se v sami zgradbi teorije množic v začetku 20. stoletja pojavila protislovja (ti. paradoksi Russela, Burali-Fortija in drugih), ki so ogrozili njene temelje. Spor glede osnov matematike se je vlekel še dolgo v 20. stoletje, reševali so ga na različne načine; **Hilbert** s svojim *formalizmom* in **Brouwer** s svojim *intuicionizmom*.

Danes praktično celotna matematika temelji na Cantorjevi teoriji, njeni moderni rezultati se skoraj brez izjeme izražajo z množicami.

Problem, ki ga Cantor ni mogel rešiti, pa je bila *hipoteza kontinuuma*. Večkrat se je je lotil, prvič leta 1884, a brez uspeha; doživel je (prvič med več kasnejšimi ponovitvami) celo živčni zlom. **David Hilbert** (1862-1943) je to domnevo postavil na prvo mesto svojega seznama znamenitih 23 nerešenih problemov matematike, ki ga je predstavil 18. avgusta 1900 na drugem mednarodnem matematičnem kongresu v Parizu. **Kurt Gödel** (1906-1978) je leta 1937 dokazal konsistentnost hipoteze kontinuuma z drugimi aksiomi Zermelo-Fraenkelovega sistema, **Paul Cohen** (1934-2007) pa leta 1963 konsistentnost njene negacije. Torej je domneva neodvisna od drugih aksiomov in Cantor je nikakor ni mogel iz njih izpeljati ne zanikati. Situacija je podobna kot s petim Evklidovim postulatom. To dokazuje, da se v matematiki kljub ogromnim spremembam zares nič ne spreminja, zanjo velja: "Plus ça changes plus c'est la mème chose."

Vaje:

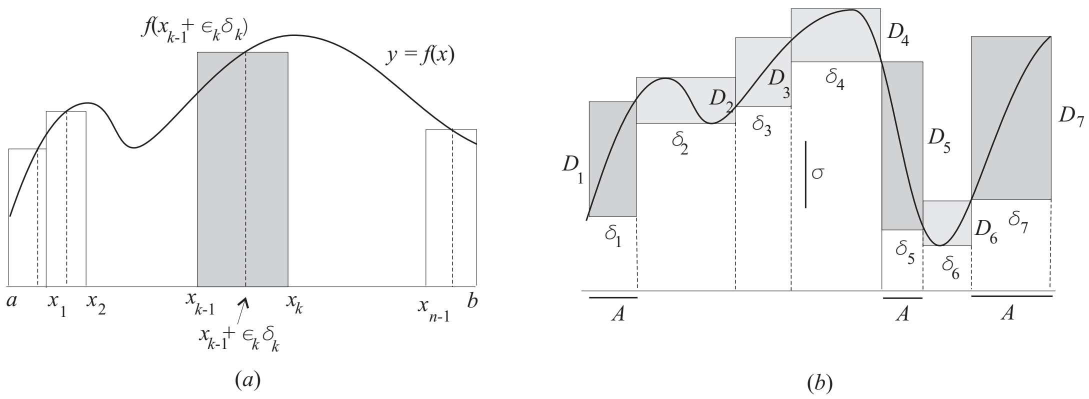
(1) Da ima zvezna funkcija f na intervalu (a, b) ničlo, če je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, je geometrijsko očitno, **Cauchy** pa je to želel dokazati iz definicije zveznosti. Razdelil je interval $[a, b]$ z dolžino $h = b - a$ na m enakih delov in v zaporedju $f(a)$, $f(a + h/m)$, $f(a + 2h/m)$, ..., $f(a + mh/m) = f(b)$ poiskal tak n, da je $f(a + nh/m) \leq 0$ in $f(a + (n + 1)h/m) \geq 0$.
(a) Postavi $a_1 = a + nh/m$ in $b_1 = a + (n+1)h/m$ in postopek ponovi na intervalu $[a_1, b_1]$ dolžine h/m, da dobiš interval $[a_2, b_2]$ dolžine h/m^2.
(b) S ponavljanjem postopka poišči nepadajoče zaporedje $a_1, a_2, ...$ in nenaraščajoče zaporedje $b_1, b_2, ...$, tako da $b_k - a_k = h/m^k \to 0$ $(h \to \infty)$. Prepričaj se, da zaradi polnosti sistema realnih števil obstaja tak $a \in \mathbb{R}$, da je $\lim_{k\to\infty} a_k = a = \lim_{k\to\infty} b_k$.
(c) Pokaži, da mora zaradi zveznosti funkcije f hkrati veljati $f(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq 0$ in $f(a) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) \geq 0$, torej $f(a) = 0$.
Odtod takoj sledi, da zavzame zvezna funkcija na vsakem zaprtem intervalu vsako vmesno vrednost med največjo in najmanjšo.

(2) V poskusu, dokazati *Lagrangev izrek*, je **Cauchy** najprej dokazal lemo: Če je $A \leq f'(x) \leq B$ za $a \leq x \leq b$, velja tudi $A \leq (f(b) - f(a))/(b - a) \leq B$ (glej [11]).
(a) Dokaži zgornjo lemo tako, da najprej za vsak $x \in [a, b]$ in vsak $\epsilon > 0$ poiščeš tak $\delta > 0$, da je $f'(x) - \epsilon < (f(x + h) - f(x))/h < f'(x) + \epsilon$ za $x \in [a, b]$ (slednje ne gre vedno, kot je zmotno mislil Cauchy; predpostaviti je treba enakomerno izbiro δ glede na x), nato pa razdeliš interval $[a, b]$ na dovolj majhne dele $[x_k, x_{k+1}]$ in s seštevanjem neenakosti $A - \epsilon < f'(x_k) - \epsilon < (f(x_{k+1}) - f(x_k))/(x_{k+1} - x_k) < f'(x_k) + \epsilon < A + \epsilon$ za $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$ dobiš neenakost $A - \epsilon < (f(b) - f(a))/(b - a) < A + \epsilon$.
(b) Z uporabo točke (1) izpelji odtod znani *Lagrangev izrek* $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(a + \theta(b - a))$, kjer je $0 \leq \theta \leq 1$.
(c) Izpelji posledico: če je odvod funkcije f povsod enak nič, je funkcija f konstantna.

(3) Tudi pri definiciji integrala se **Cauchy** ni zanašal na geometrijski pomen, ampak je preprosto najprej definiral 'levo' integralsko vsoto $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$ in nato integral kot približek takih vsot. Za zvezne funkcije f mu je uspelo dokazati enakost: $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(a + \theta(b - a))$, kjer je $0 \leq \theta \leq 1$.
(a) Pokaži, da za funkcijo $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ s spremenljivko x in vsak h velja $\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ ter da obstaja tak θ med 0 in 1, da je $\Phi(x+h) - \Phi(x) = hf(x+\theta h)$.
(b) Izpelji odtod, da je funkcija Φ zvezna in odvedljiva v točki x z odvodom $\Phi'(x) = f(x)$.
(c) Če je f poljubna odvedljiva funkcija z lastnostjo $F'(x) = f(x)$ za vsak x, dokaži odtod na običajen način osnovno formulo integralskega računa $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Opomba. **Vito Volterra** (1860-1940) je leta 1881 odkril funkcijo, ki ima v vsaki točki omejen odvod, vendar pa ta odvod ni integrabilen niti v Cauchyjevem niti v Riemannovem smislu (glej [11]). Osnovna formula integralskega računa $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ torej brez dodatnih predpostavk na odvod $F' = f$ (npr. zveznosti) nasploh ne velja.

(4) **Cauchy** je bil prvi, ki je zares obravnaval tudi konvergenco in divergenco neskončnih vrst (na moderen način). Je pa avtomatično privzel, da vsako (danes po njem imenovano) Cauchyjevo zaporedje števil tudi zares konvergira (torej polnost prostora realnih števil). Korenski kriterij za konvergenco vrst s pozitivnimi členi je dokazal podobno, kakor to storimo danes. Uporabljal je tudi kvocientni kriterij in ga pripisal D'Alembertu. Tudi naslednji test je njegov: *če ima vrsta* $\sum u_k$ *pozitivne člene in velja* $\lim_{k\to\infty} \ln(u_k)/\ln(1/k) = h > 1$*, vrsta konvergira* [11].
(a) Izberi $1 < a < h$ in naravno število m tako, da bo $\ln(u_k)/\ln(1/k) > a$ za $k \geq m$, ter izpelji odtod neenakost $u_k < 1/k^a$ za $k \geq m$. S primerjavo z vrsto $\sum(1/k^a)$ se prepričaj, da vrsta $\sum u_k$ konvergira.
(b) Uporabi zgornji kriterij za dokaz konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(k)/k^p$, kjer je $p > 1$.



Slika 189. K definiciji Riemannovega integrala

(5) **Riemann** je svoj integral poljubne *omejene* funkcije začel z delitvijo intervala $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$, oznako $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, izbiro poljubnih $\epsilon_k \in [0,1]$ in definicijo integralske vsote $S = \sum_{k=1}^{n} \delta_k f(x_{k-1}+\epsilon_k\delta_k)$ (slika 189a). Če obstaja število A, kateremu so integralske vsote ne glede na izbiro ϵ_k in δ_k poljubno blizu, je $A = \int_a^b f(x)dx$ integral funkcije f na intervalu $[a,b]$. Definiral je še *oscilacijo* D funkcije na celotnem intervalu $[a,b]$ in D_k na k-tem podintervalu, oscilacijsko vsoto $R = \sum_{k=1}^{n} \delta_k D_k$ in $\Delta(d)$ 'največjo' izmed oscilacijskih vsot glede na delitve z normo (največjo dolžino podintervala) pod $d > 0$ (slika 189b). Vedel je, da integral obstaja natanko takrat, ko je $\lim_{d\to 0} \Delta(d) = 0$. Za $\sigma > 0$ je podintervale razdelil na tiste tipa A, kjer je oscilacija $D_k > \sigma$, in tipa B, kjer je $D_k \leq \sigma$ (slika 189b) in definiral $s(\sigma) = \sum_A \delta_k$ (seštevanje po podintervalih tipa A). Dokaži naslednji *Riemannov integrabilnostni kriterij* [11]: *Integral obstaja natanko takrat, ko za vsak* $\sigma > 0$ *velja* $s(\sigma) \to 0$, *ko* $d \to 0$, tako da
(a) za potrebnost iz zgornjih definicij oceniš $0 \leq s(\sigma) \leq \Delta(d)/\sigma$ in potem upoštevaš $\Delta(d) \to 0$,
(b) za zadostnost zapišeš $R = \sum_A \delta_k D_k + \sum_B \delta_k D_k$ in prvo vsoto oceniš navzgor z $Ds(\sigma)$, drugo pa z $\sigma(b-a)$.
Z uporabo tega kriterija se prepričaj, da Dirichletova funkcija, definirana s predpisom $\phi(x) = 1$ za $x \in \mathbb{Q}$ in $\phi(x) = 0$ za $x \notin \mathbb{Q}$, ni integrabilna.

(6) Naj pomeni $(x) = x - n$, kjer je n *najbližje* celo število. *Riemannova patološka funkcija* (z neskončno skoki, a kljub temu integrabilna) je potem definirana z vrsto $f(x) = (x)/1 + (2x)/4 + (3x)/9 + (4x)/16 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (kx)/k^2$ [11]. Pokaži:
(a) Vrsta konvergira in vrednost funkcije $f(x)$ obstaja za vsak $x \in \mathbb{R}$.
(b) Funkcija je zvezna pri vseh iracionalnih številih (povsod, kjer so zvezni vsi členi).
(c) V točkah $x = m/2n$, kjer sta si m in n tuji naravni števili, doživi f skok velikosti $1/n^2 + 1/9n^2 + 1/25n^2 + ... = \pi^2/8n^2$ (po rešitvi baselskega problema).
(d) Za vsako pozitivno število $\sigma > 0$ je samo *končno mnogo* točk oblike $x = m/2n$, v katerih je skok večji od σ.
Ker je oscilacija drugje manjša od σ, skupno dolžino intervalov, ki vsebujejo teh končno mnogo točk, pa lahko napravimo poljubno majhno, Riemannov kriterij integrabilnosti iz točke (5) pove, da je funkcija f integrabilna.

(7) **Liouville** je dokazal, da se dajo iracionalna algebraična števila slabo aproksimirati z racionalnimi, natančneje: če je x_0 iracionalno algebraično število z minimalnim polinomom $P(x)$ stopnje $n \geq 2$, obstaja $A > 0$, tako da za vsako racionalno število $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ velja $|p/q - x_0| \geq 1/Aq^n$. Preveri, da je to res, tako da:
(a) pokažeš, da zaradi minimalnosti polinoma P in iracionalnosti števila x_0 število p/q ni ničla polinoma P,
(b) z uporabo Lagrangevega izreka oceniš $|P(p/q)| \leq A|p/q - x_0|$ in
(c) zaradi cele leve strani dobiš odtod $1 \leq |q^n P(p/q)| \leq Aq^n |p/q - x_0|$.

(8) Naj bo $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(1/10^{k!}) = 1/10 + 1/10^2 + 1/10^6 + 1/10^{24} + ...$ (glej [11]).
(a) Pokaži, da vrsta konvergira in da je z njo definirano realno število x_0 iracionalno.
(b) Predpostavi, da je x_0 algebraično število z minimalnim polinomom stopnje $n \geq 2$, izberi naravno število $m > n$ in zapiši $\sum_{k=1}^{m}(1/10^{k!}) = p_m/10^{m!}$, kjer je p_m naravno število.
(c) Z indukcijo pokaži, da je za vsak $r \geq 1$ res $(m+r)! \geq (m+1)! + r - 1$ in oceni $|p_m/10^{m!} - x_0| = \sum_{k=m+1}^{\infty}(1/10^{k!}) \leq (1/10^{(m+1)!}(1 + 1/10 + 1/10 + 1/10^3 + ...) < 2/10^{(m+1)!}$.
(d) Prepričaj se, da je to v nasprotju z Liouvilleovo neenakostjo iz točke (7).

(9) **Weierstrass** je dokazal, da je pri pogojih $a \geq 3$, $0 < b < 1$ in $ab > 1 + 3\pi/2$ funkcija f, definirana z vrsto $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(\pi a^k x)$, povsod zvezna in nikjer odvedljiva [11]. Sledi njegovim korakom in dokaži:
(a) Zgornja vrsta konvergira enakomerno proti zvezni funkciji f.
(b) Naj bo r poljubno realno število. Za vsak $m \geq 1$ definirajmo $\epsilon_m = (a^m r)$, z oznakami iz točke (6), in $h_m = (1 - \epsilon_m)/a^m$. Potem je $-1/2 < \epsilon_m \leq 1/2$ in $0 < 1/2a^m \leq h_m < 3/2a^m$, tako da $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$.
(c) Izrazi diferenčni kvocient v obliki

$$\frac{f(r+h_m) - f(r)}{h_m} = \sum_{k=0}^{m} b^k \frac{\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r)}{h_m} +$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} b^k \frac{\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r)}{h_m}$$

in z uporabo (a) oceni prvo vsoto navzgor z $\frac{\pi(ab)^m}{ab-1}$.
(d) Naj bo c_m najbližje celo število k $a^m r$, tako da je $a^m r = c_m + \epsilon_m$. Prepričaj se, da je $\pi a^k r + \pi a^k h_m = \pi a^{k-m}(c_m + 1)$ za $k \geq m$ in zato $\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) = (-1)^{c_m+1}$, $\cos(\pi a^k r) = (-1)^{c_m} \cos(\pi a^{k-m}\epsilon_m)$.
(e) Za drugo vrsto zaradi (d) velja $|\sum_{k=m}^{\infty} b^k(\cos(\pi a^k r + \pi a^k h_m) - \cos(\pi a^k r))/h_m| = \frac{1}{h_m}\sum_{k=m}^{\infty} b^k(1 + \cos(\pi a^{k-m}\epsilon_m)$ in jo lahko zato navzdol ocenimo s prvim členom vrste $b^m(1 + \cos(\pi\epsilon_m))/h_m \geq b^m/h_m > 2(ab)^m/3$.
(f) Dobimo končno oceno $|\frac{f(r+h_m)-f(r)}{h_m}| > \frac{2(ab)^m}{3} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1} = (\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})(ab)^m$, kjer je koeficient pred $(ab)^m$ pozitiven. Ker velja to za poljuben m, je v limiti leva stran enaka neskončno, tako da funkcija f v (nobeni) točki r ni odvedljiva.

(10) **Karl Thomae** (1840-1921) je leta 1875 definiral na intervalu funkcijo, ki je zvezna v vsaki iracionalni točki in nezvezna v vsaki racionalni točki: $r(x) = 1/q$, če je $x = p/q$ (okrajšan ulomek), in $r(x) = 0$, če je x iracionalno število (glej [11]).
(a) Pokaži, da za vsak $a \in (0,1)$ velja $\lim_{x\to a} r(x) = 0$.
(b) Izpelji odtod zveznost funkcije r v iracionalnih in nezveznost v racionalnih točkah.
(c) Pokaži, da je za $d > 0$, $\sigma > 0$ in $N > 1/\sigma$ samo končno mnogo, npr. M, racionalnih točk p/q takih, da je $r(p(q) \geq 1/N$, in naj vsaka leži v podintervalu dolžine $d/2M$. Potem je po Riemannovem kriteriju iz točke (5) $s(\sigma) = \sum_A \delta_k = \sum_A d/2M \leq d/2$, torej $s(\sigma) \to 0$ ko $d \to 0$, in funkcija r je integrabilna na intervalu (0,1). Da se pokazati, da je njen integral enak nič.

Opomba. Enake lastnosti ima na celo realno os razširjena Thomaejeva funkcija R, definirana s predpisom $R(x) = 1$ za $x \in \mathbb{Z}$ in $R(x) = r(x - n)$ za $n < x < n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

(11) Znani italijanski matematik **Vito Volterra** (1860-1940) je leta 1881 pokazal, da ne obstaja realna funkcija, ki bi bila zvezna v vsaki racionalni in nezvezna v vsaki iracionalni točki (torej ravno obratno kot velja za Thomaejevo funkcijo). Za poljubno funkcijo f definirajmo množici $C_f = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ je zvezna v } x\}$ in $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ ni zvezna v } x\}$. Predpostavimo, da obstajata taki funkciji f, g na (a,b), ki sta zvezni vsaka na svoji gosti množici točk, da je $C_f = D_g$ in $D_f = C_g$. Funkcija f ima na (a,b) vsaj eno točko zveznosti x_0, torej obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < 1/2$ [11].

(a) Pokaži, da na poljubnem zaprtem podintervalu $[a'_1, b'_1] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ velja $|f(x) - f(y)| < 1$. Ponovi prejšnje izvajanje zdaj za funkcijo g in za interval (a'_1, b'_1), tako da dobiš zaprt podinterval $[a_1, b_1]$, na katerem velja tako $|f(x) - f(y)| < 1$ kot $|g(x) - g(y)| < 1$.
(b) Ponovi celoten postopek na intervalu (a_1, b_1) z manjšo vrednostjo $1/4$, in potem na dobljenem manjšem intervalu (a_2, b_2) še z manjšo vrednostjo $1/8$ itd. Na koncu dobimo zaporedje vloženih intervalov $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$, tako da je $|f(x) - f(y)| < 1/2^{k-1}$ in $|g(x) - g(y)| < 1/2^{k-1}$ za vsak par $x, y \in [a_k, b_k]$.
(c) Naj bo c poljubna skupna točka vseh vloženih podintervalov. Pokaži, da sta funkciji f in g obe zvezni v točki c, kar je v nasprotju s predpostavko $C_f = D_g$ in $D_f = C_g$. Torej taki dve funkciji ne obstajata.
(d) Dokaži odtod posledico: *Ne obstaja funkcija, ki bi bila zvezna v vsaki racionalni in nezvezna v vsaki iracionalni točki.*

(12) Z uporabo **Volterrove trditve** iz prejšnje točke pokaži, da ne obstaja zvezna funkcija g, tako da bi bilo $g(x) \in \mathbb{Q}$ za $x \notin \mathbb{Q}$ in $g(x) \notin \mathbb{Q}$ za $x \in \mathbb{Q}$. (Navodilo: Predpostavi, da taka funkcija g obstaja. Če je R razširjena Thomaejeva funkcija iz točke (10), naj bo $G(x) = R(g(x))$; pokaži, da je potem G zvezna pri $x \in \mathbb{Q}$ in nezvezna pri $x \notin \mathbb{Q}$.)

(13) Leta 1874 je **Cantor** pokazal, da zaporedje ne more izčrpati celotnega intervala in s tem ugotovil neštevnost intervala (znameniti diagonalni argument, ki ga uporabljamo danes, je odkril šele leta 1891). Pri tem je uporabil polnost sistema realnih števil v obliki trditve, da je presek vsakega padajočega zaporedja zaprtih podintervalov neprazen [11]. S pomočjo tega pokaži:
(a) Naj bosta vsaj dva člena zaporedja (x_k) v odprtem intervalu (a, b) (sicer je trivialno); prva dva, ki padeta vanj označimo z a_1 (manjšega) in z b_1 (večjega), nato isto storimo z odprtim intervalom (a_1, b_1) itd. Prepričaj se, da lahko s ponavljanjem tako konstruiramo zaporedji (a_r) in (b_r), tako da je $a < a_1 < a_2 < ... < a_r < ... < b_r < ... < b_2 < b_1 < b$ in da velja $x_k \in (a_r, b_r)$, samo če je $k \geq 2r + 1$.
(b) Uporabi dejstvo, da obstaja $c \in [a_r, b_r]$ za vsak r, in se prepričaj, da ne more veljati $c = x_N$ za noben N.

(14) Dokaži **Cantorjev** izrek, da je moč katerekoli množice A manjša od moči njene potenčne množice $\mathcal{P}(A)$, tako da najprej
(a) poiščeš injekcijo iz A v $\mathcal{P}(A)$,
(b) pri predpostavki, da obstaja bijekcija $f: A \to \mathcal{P}(A)$, konstruiraš podmnožico $B = \{x \in A;\ x \notin f(x)\}$ in se prepričaš, da to vodi do protislovja (vprašaj se, ali element $y \in A$ z lastnostjo $f(y) = B$ pripada množici B ali ne).

(15) Če je $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + fx + g$ polinom n-te stopnje s celimi koeficienti, definirajmo njegovo *višino* s predpisom $h(P) = n - 1 + |a| + |b| + ... + |g|$ (kar je naravno število). Ker ima vsako algebraično število minimalni polinom, v katerem imajo koeficienti največji skupni delitelj 1, lahko vsa algebraična števila razvrstimo v zaporedje (a_k) glede na višino minimalnega polinoma. Pokaži:
(a) Obstaja samo končno mnogo algebraičnih števil z dano višino minimalnega polinoma.
(b) Algebraičnih števil je števno mnogo.
(c) Transcendentnih števil je neštevno mnogo.

Opomba. To je (nekonstruktiven) dokaz, da transcendentna števila obstajajo, ne da bi posebej izpostavili ali konstruirali vsaj enega (kot je to npr. storil **Liouville**, glej vajo 8). Na veliko presenečenje matematikov se je s tem pričela nova doba primerjanja moči množic. Naravno so se postavila vprašanja kot npr.: Ali obstajajo tudi neštevne množice z večjo kardinalnostjo, kot jo ima interval? Ali obstajajo neskončne množice s kardinalnostjo med števnim zaporedjem in neštevnim intervalom? Odgovor na prvo vprašanje je pozitiven (glej vajo 14), odgovor na drugo ni možen (glej besedilo o **Cantorju** in njegovo dokazovanje *hipoteze kontinuuma*).

Literatura

[1] A. Aaboe, *Episdes From the Early History of Mathematics*, New Mathematica Library 13, Random House and L.W. Singer Co. 1964.
[2] W.S. Anglin, *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, GTM, Springer, 1994.
[3] W.S. Anglin, J. Lambek, *The Heritage of Thales*, UTM, Springer, 1995.
[4] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
[5] E.T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.
[6] B. Bold, *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover Publ. 1969.
[7] R. Cooke, *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, inc., 1997.
[8] H. Dörrie, *100 Great problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover publ., New York 1965.
[9] J. Derbyshire, *Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra*, Joseph Henry Press, Washington, D.C.2006.
[10] W. Dunham, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1990.
[11] W. Dunham, *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton 2005.
[12] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22, MAA, 1999.
[13] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
[14] R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of Pharaohs*, Dover Publ., 1982.
[15] M.J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, W.H. Freeman and Co., San Francisco 1974.
[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.
[17] T.L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, na spletu
[18] H. Hellman, *Great Feuds in Mathematics, Ten of the liveliest Disputes Ever*, John Wiley and Sons, 2006.
[19] L. Hodgkin, *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press, 2005.
[20] J. Hoyrup, *Old Babylonian 'Algebra' and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics*, preprint, 8 September 2010, (na spletu).
[21] A. Imhausen, *Ancient Egyptian Mathematics: New Perspectives on Old Sources*, Mathematical Intelligencer 28 (2006), 19-27.
[22] V.J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd edition, Addison Wesley, 1998.
[23] V.J. Katz, ed., *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, MAA 2000.
[24] R. Knott's Egyptian Mathematics Site (na spletu).
[25] F. Križanič, *Križem po matematiki*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1960.
[26] G.E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.
[27] E. Maor, *The Pythagorean Theorem, a 4,000-year history*, Princeton Science Library, Princetn University Press, Princeton and Oxford, 2007.
[28] E. Maor, *The Story of e*, Princetn University press, 1994.
[29] I.G. Pearce, *Indian Mathematics: Redressing the balance*, na spletu (www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html)
[30] K. Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
[31] A.S. Posamentier, *The Pytagorean Theorem, the Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books, New York 2010.
[32] M. Razpet, *Ravninske krivulje*, Knjižnica Sigma 65, DMFA-založništvo, Ljubljana 1998.
[33] E. Robson, *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica 28 (2)(2001), 167-206.
[34] E. Robson, *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, American Mathematical Monthly 109 (2)(2002), 105-120.
[35] E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton University Press, 2008.
[36] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth, A History of Symmetry*, Basic Books, New York 2007.
[37] J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer 2010.
[38] D.J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978.
[39] F. Swetz et all, ed., *Learn From The Masters*, MAA, 1995.
[40] V.S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS 2006.
[41] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih*, Knjižnica Sigma 67, DMFA-založništvo, Ljubljana 1999.
[42] *Zgodovina matematike, zgodbe o problemih - 2. del*, Knjižnica Sigma 69, DMFA-založništvo, Ljubljana 2001.

.