UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Marjetka Krajnc

NINDE

Numerična integracija in numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

ZBIRKA NALOG Z REŠITVAMI

Ljubljana, 2013

Kazalo

Zbirka nalog z rešitvami, ki je pred vami, je namenjena študentov druge stopnje matematike in finančne matematike za pomoč pri učenju in razumevanju problemov iz numeričnega odvajanja, numerične integracije in numeričnega reševanja navadnih diferencialnih enačb.

Poglavje 1

Numerično odvajanje

Naloga 1.1.

1. *Preko interpolacijskih polinomov izpeljite formuli za aproksimacijo odvodov oblike*

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= A_1 f(x_0) + B_1 f(x_1) + C_1 f(x_2) + R_1(f), \\ f''(x_1) &= A_2 f(x_0) + B_2 f(x_1) + C_2 f(x_2) + R_2(f), \end{aligned}$$

   kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne z razmikom h.

2. *Z dobljenimi formulami izračunajte približek za prvi in drugi odvod funkcije $f(x) = e^{2x}$ v točki $x = 0$ za $h = \frac{1}{10}$ in $h = \frac{1}{100}$. Primerjajte dobljene vrednosti s točno vrednostjo odvodov.*

Rešitev:

1. Zapišemo interpolacijski polinom na točkah x_0, x_1, x_2 v Lagrangeevi obliki

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_{i,2}(x),$$

   kjer so

$$\begin{aligned} \ell_{0,2}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ \ell_{1,2}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \\ \ell_{2,2}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

   Z odvajanjem Lagrangeevih baznih polinomov dobimo

$$\begin{aligned} A_1 &= \ell'_{0,2}(x_1) = -\frac{1}{2h}, \quad B_1 = \ell'_{1,2}(x_1) = 0, \quad C_1 = \ell'_{2,2}(x_1) = \frac{1}{2h}, \\ A_2 &= \ell''_{0,2}(x_1) = \frac{1}{h^2}, \quad B_2 = \ell''_{1,2}(x_1) = -\frac{2}{h^2}, \quad C_2 = \ell''_{2,2}(x_1) = \frac{1}{h^2}. \end{aligned}$$

Napaki dobimo iz napake interpolacijskega polinoma. Če označimo

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

je napaka $R_1(f)$ enaka

$$R_1(f) = (\omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f)' \big|_{x=x_1} = \omega'(x_1)\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1),$$

kjer je $\xi_1 \in (x_0, x_2)$. Podobno je

$$\begin{aligned} R_2(f) &= (\omega(x)[x_0, x_1, x_2, x]f)'' \big|_{x=x_1} = \\ &= \omega''(x_1)[x_0, x_1, x_2, x]f + 2\omega'(x_1)[x_0, x_1, x_2, x, x]f + 0 = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2), \end{aligned}$$

kjer je $\xi_2 \in (x_0, x_2)$. Rezultat je torej

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1), \\ f''(x_1) &= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2). \end{aligned}$$

2. Točni vrednosti odvoda sta enaki $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$. Za $h = \frac{1}{10}$ dobimo po formuli
$$f'(0) \sim 2.01336, \quad f''(0) \sim 4.01335.$$
Razliki med točnima in izračunanima vrednostima sta -0.01336 ter -0.0133511. Za $h = \frac{1}{100}$ izračunamo
$$f'(0) \sim 2.00013, \quad f''(0) \sim 4.00013,$$
napaki pa sta -0.000133336 ter -0.000133335. Numerični rezultati potrjujejo, da sta napaki res reda $\mathcal{O}(h^2)$.

Naloga 1.2. *Preko interpolacijskih polinomov izrazite formulo za aproksimacijo odvoda $f'(x_0)$ z vrednostmi $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, kjer so točke x_i ekvidistantne.*

Rešitev:
Ekvidistantne točke lahko zapišemo kot $x_i = x_0 + ih$, kjer je h razmik med točkami. Interpolacijski polinom lahko zapišemo v Lagrangeevi ali Newtonovi obliki. Lagrangeeva oblika interpolacijskega polinoma za funkcijo f se v našem primeru glasi

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

in se zaradi ekvidistantnih točk poenostavi v

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} - f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}.$$

Izračunamo odvod

$$p'(x) = f(x_0)\frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} - f(x_1)\frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} + f(x_2)\frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2}$$

ter njegovo vrednost v točki $x = x_0$. Dobimo

$$p'(x_0) = -\frac{3}{2h}f(x_0) + \frac{2}{h}f(x_1) - \frac{1}{2h}f(x_2).$$

Od tod sledi, da je

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2h}f(x_0) + \frac{2}{h}f(x_1) - \frac{1}{2h}f(x_2) + Rf.$$

Napako Rf dobimo iz Newtonove formule za napako interpolacijskega polinoma, ki je v našem primeru enaka

$$f(x) = p(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f.$$

In sicer je

$$\begin{aligned} Rf &= ((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f)' \big|_{x=x_0} = \\ &= ((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))' \big|_{x=x_0}[x_0, x_1, x_2, x_0]f = \\ &= 2h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{6} = h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{3}, \end{aligned}$$

kjer je $\xi \in (x_0, x_2)$.

Naloga 1.3. *Izpeljite formulo za numerično odvajanje oblike*

$$f'(x_2) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

pri čemer so $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne točke s korakom h. Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $[0, 1]$ določite optimalen korak h, če velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| < 5 \cdot 10^{-6}$, kjer z $\tilde{f}$ označimo numerično izračunane vrednosti funkcije f.

Rešitev:
Nalogo lahko rešimo preko interpolacijskega polinoma na točkah x_i, $i = 0, 1, \ldots, 4$. V Lagrangeevi obliki se ta glasi

$$p(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\ell_{i,n}(x).$$

Neznani koeficienti so enaki

$$A = \ell'_{i,n}(x_0), \quad B = \ell'_{i,n}(x_1), \quad C = \ell'_{i,n}(x_2), \quad D = \ell'_{i,n}(x_3), \quad E = \ell'_{i,n}(x_4).$$

Poračunamo in dobimo

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h}.$$

Napaka je enaka

$$Rf = \left(\prod_{i=0}^{4}(x-x_i)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x]f\right)' = \left(\prod_{i=0}^{4}(x-x_i)\right)' \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Drug način kako določiti neznane koeficiente v formuli je z uporabo *metode nedoločenih koeficientov*. In sicer določimo koeficiente A, B, C, D, E tako, da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj. To pomeni, da mora biti napaka enaka nič za polinome čim višjih stopenj. Formula bo točna za vse polinome določene stopnje, če bo točna za vse bazne polinome do te stopnje. Kot bazo prostora polinomov ni nujno da vzamemo standardno bazo. V danem primeru je za lažje računanje boljše vzeti bazo iz prestavljenih potenc, in sicer

$$\{1, x-x_2, (x-x_2)^2, (x-x_2)^3, (x-x_2)^4, \dots\}.$$

V iskani formuli nato za f izbiramo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni. Dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1: &\quad 0 = A + B + C + D + E,\\
f(x) = x - x_2: &\quad 1 = -2hA - hB + hD + 2hE,\\
f(x) = (x-x_2)^2: &\quad 0 = 4h^2A + h^2B + h^2D + 4h^2E,\\
f(x) = (x-x_2)^3: &\quad 0 = -8h^3A - h^3B + h^3D + 8h^3E,\\
f(x) = (x-x_2)^4: &\quad 0 = 16h^4A + h^4B + h^4D + 16h^4E.
\end{aligned}$$

Potrebujemo vsaj toliko enačb kolikor je neznank. Če bi slučajno dobili odvisne enačbe, bi dodali še naslednjo enačbo, itd. V tem primeru imamo pet neodvisnih enačb za pet neznank, rešimo sistem in dobimo

$$A = \frac{1}{12h}, \quad B = -\frac{2}{3h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3h}, \quad E = -\frac{1}{12h},$$

od koder sledi

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}f(x_0) - \frac{2}{3h}f(x_1) + \frac{2}{3h}f(x_3) - \frac{1}{12h}f(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

Izračunati moramo še koeficienta F in m. Koeficient m je enak stopnji baznega polinoma, pri katerem dobljena formula ni več točna. Če za f izberemo $f(x) = (x-x_2)^5$ in vstavimo izračunane koeficiente dobimo

$$0 = \frac{1}{12h}\left(-32h^5 + 8h^5 + 8h^5 - 32h^5\right) + Ff^{(m)}(\xi).$$

Ker je prvi del na desni strani enačbe različen od nič, je $m = 5$ in $Ff^{(m)}(\xi) = 5!F$. Iz enačbe nato izračunamo F in dobimo $F = \frac{h^4}{30}$. Celotna formula se tako glasi

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}f(x_0) - \frac{2}{3h}f(x_1) + \frac{2}{3h}f(x_3) - \frac{1}{12h}f(x_4) + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Pri aproksimaciji odvodov imamo dve vrsti napake: napako metode in napako aritmetike. Napaka metode $Rf = \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$ gre očitno proti nič, ko gre $h \to 0$. Ker pa v formuli delimo s h, napaka aritmetike narašča z manjšanjem h-ja. Optimalen korak h je tisti, pri katerem je vsota obeh napak minimalna. Ocenimo obe napaki:

$$\begin{aligned}
|D_m| &= \frac{h^4}{30}\left|f^{(5)}(\xi)\right| \le \frac{h^4}{30}\max_{\xi\in[0,1]}\left|f^{(5)}(\xi)\right| = \frac{h^4}{30}120 = 4h^4,\\
|D_a| &\le \frac{1}{12h}(\epsilon + 8\epsilon + 8\epsilon + \epsilon) = \frac{18\epsilon}{12h}, \quad \epsilon = 5\cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

Ocena za skupno napako je tako $D(h) = 4h^4 + \frac{18\epsilon}{12h}$. Optimalni h je rešitev enačbe $D'(h) = 0$, in sicer je $h = \sqrt[5]{\frac{3}{32}\epsilon} = 0.05422$.

Naloga 1.4. *Izpeljite formulo za numerično odvajanje oblike*

$$f''(x_2) = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef(x_4) + Ff^{(m)}(\xi),$$

pri čemer so $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne točke s korakom h. Ocenite celotno napako in določite optimalni korak h, če za izračunane funkcijske vrednosti velja $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| < 5\cdot 10^{-6}$ ter je $\|f^{(m)}\|_\infty \le 100$.

Rešitev:
Rešimo nalogo z uporabo *metode nedoločenih koeficientov*. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1, x - x_2, (x - x_2)^2, (x - x_2)^3, (x - x_2)^4, \ldots\}$. Če v iskani formuli za f izbiramo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 :&\quad 0 = A + B + C + D + E,\\
f(x) = x - x_2 :&\quad 0 = -2hA - hB + hD + 2hE,\\
f(x) = (x - x_2)^2 :&\quad 2 = 4h^2A + h^2B + h^2D + 4h^2E,\\
f(x) = (x - x_2)^3 :&\quad 0 = -8h^3A - h^3B + h^3D + 8h^3E,\\
f(x) = (x - x_2)^4 :&\quad 0 = 16h^4A + h^4B + h^4D + 16h^4E.
\end{aligned}$$

Iz teh petih enačb sledi

$$A = -\frac{1}{12h^2}, \quad B = \frac{16}{12h^2}, \quad C = \frac{-30}{12h^2}, \quad D = \frac{16}{12h^2}, \quad E = -\frac{1}{12h^2}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 4. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x - x_2)^5$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$0 = \frac{1}{12h^2}\left(32h^5 - 16h^5 + 16h^5 - 32h^5\right) + R(x - x_2)^5.$$

Ker pa je prvi del desne strani enak levi strani enačbe sledi, da je formula točna tudi za polinome stopnje 5. Nadaljujemo z $f(x) = (x - x_2)^6$. Vstavimo in dobimo

$$0 = \frac{1}{12h^2}\left(-64h^5 + 16h^5 + 16h^5 - 64h^5\right) + R(x - x_2)^6. \tag{1.1}$$

V tem primeru prvi del desne strani ni enak levi strani enačbe, zato je $R(x - x_2)^6 \neq 0$. Če predpostavimo, da je $Rf = Ff^{(6)}(\xi)$, sledi iz (1.1) enačba

$$0 = -\frac{1}{12h^2}96h^6 + 6!F,$$

od koder dobimo $F = \frac{h^4}{90}$. Celotna formula je tako enaka

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2}\left(-f(x_0) + 16f(x_1) - 30f(x_2) + 16f(x_3) - f(x_4)\right) + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi).$$

Ocena napake metode in napake apritmetike je za dan primer enaka

$$\begin{aligned} D_m &\leq \frac{h^4}{90}\|f^{(6)}\|_\infty = \frac{10}{9}h^4, \\ D_a &\leq \frac{64\epsilon}{12h^2}, \quad \epsilon = 5 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

od koder dobimo oceno za skupno napako $D(h) = \frac{10}{9}h^4 + \frac{64\epsilon}{12h^2}$, ki pa je minimalna pri $h = \sqrt[6]{2.4\epsilon} = 0.2221$.

Naloga 1.5. *Izpeljite simetrično pravilo za n-ti odvod, tako da funkcijo interpolirate v ekvidistantnih točkah in izračunate odvod v točki $x_{\frac{n}{2}}$. Določite kakšnega reda je napaka.*

Rešitev:
Interpolacijsko formulo

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) + \omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f,$$

kjer so $\ell_{i,n}$ Lagrangeevi bazni polinomi na točkah $(x_i)_{i=0}^n$ in $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, odvajamo n-krat. Ker je

$$\ell_{i,n}^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}^{(n)} = n!\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = n!\frac{(-1)^{n-i}}{h^n i!(n-1)!} = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{1}{h^n}$$

za vse $i = 0, 1, \ldots, n$, dobimo formulo

$$f^{(n)}(x_{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x_i) + R(f),$$

kjer je

$$R(f) = (\omega(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f)^{(n)} \Big|_{x=x_{\frac{n}{2}}}.$$

Ocenimo še red napake. Opazimo najprej, da je

$$\omega\,(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \mathcal{O}(h^{n+1}),$$
$$\omega'\,(x) = \mathcal{O}(h^n), \quad \omega''\,(x) = \mathcal{O}(h^{n-1}), \quad \ldots$$

za vsak $x \in [x_0, x_n]$ oziroma splošno

$$\omega^{(k)}\,(x) = \mathcal{O}(h^{n+1-k}), \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Ker pa je

$$\omega^{(n)}\left(x_{\frac{n}{2}}\right) = \left((n+1)!x_{\frac{n}{2}} - n! \sum_{i=0}^{n} x_i\right) = 0,$$

nastopajo v formuli za $R(f)$ le odvodi $\omega^{(k)}\left(x_{\frac{n}{2}}\right)$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Po prejšnjem razmisleku je zato

$$R(f) = \mathcal{O}(h^2).$$

Poglavje 2

Numerična integracija

Naloga 2.1.

Izračunajte približek za integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx$ *z uporabo osnovnega trapeznega pravila ter osnovnega Simpsonovega pravila. Primerjajte dobljen rezultat s točnim.*

Rešitev:
Po osnovnem trapeznem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + R(f)$$

dobimo

$$I \sim \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0.27768.$$

Po osnovnem Simpsonovem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + R(f)$$

dobimo

$$I \sim \frac{\pi}{24}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0.292933.$$

Točna vrednost integrala je $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.292893$, napaki sta torej velikosti 0.015213 ter 0.000039419.

Naloga 2.2.

Izračunajte približek za integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ *z uporabo sestavljenega trapeznega pravila ter sestavljenega Simpsonovega pravila. V obeh pravilih uporabite* $m = 2, 4, 6, 8$ *osnovnih pravil. Primerjajte dobljene rezultate s točnim integralom.*

Rešitev:
Točna vrednost integrala je $I = 1$. Z uporabo sestavljenega trapeznega pravila za $m = 2, 4, 6, 8$ dobimo vrednosti

$$0.9480594490, \quad 0.9871158010, \quad 0.9942818883, \quad 0.9967851719,$$

s sestavljenim Simpsonovim pravilom pa

$$1.000134585, \quad 1.000008296, \quad 1.000001634, \quad 1.000000517.$$

Absolutne vrednosti razlik med točnim in izračunanim integralom so v prvem primeru enake

$$0.0519405510, \quad 0.0128841990, \quad 0.0057181117, \quad 0.0032148281,$$

v drugem pa

$$0.000134585, \quad 8.296 \cdot 10^{-6}, \quad 1.634 \cdot 10^{-6}, \quad 5.17 \cdot 10^{-7}.$$

Naloga 2.3.

Izpeljite zaprto Newton-Cotesovo integracijsko pravilo oblike

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1) + Cf(x_2) + Df(x_3) + Ef^{(m)}(\xi),$$

kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne s korakom h. Uporabite:

1. *Lagrangeevo interpolacijsko formulo;*
2. *metodo nedoločenih koeficientov.*

Zapišite tudi sestavljeno pravilo za aproksimacijo integrala $\int_a^b f(x)dx$. Ocenite napako sestavljenega pravila.

Rešitev:

1. S pomočjo Lagrangeeve interpolacijske formule

   $$f(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\ell_{i,3}(x) + \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x_3, x]f,$$

   kjer je $\omega(x) = \prod_{i=0}^{3}(x - x_i)$, dobimo, da so koeficienti enaki

   $$A = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{0,3}(x)dx, \quad B = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{1,3}(x)dx,$$
   $$C = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{2,3}(x)dx, \quad D = \int_{x_0}^{x_3} \ell_{3,3}(x)dx.$$

Integrale enostavno izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $x = x_0 + th$. Na primer,

$$A = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \int_0^3 \frac{h^3(t-1)(t-2)(t-3)}{-6h^3} h dt =$$
$$= -\frac{h}{6}\int_0^3 \left(t^3 - 6t^2 + 11t - 6\right) dt = \frac{3h}{8}.$$

Podobno dobimo

$$B = C = \frac{9h}{8}, \quad D = \frac{3h}{8}.$$

Napaka je oblike

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_3} \omega(x)[x_0, x_1, x_2, x_3, x] f dx.$$

2. Pri metodi nedoločenih koeficientov določimo neznane koeficiente tako, da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, (x-x_0)^3, (x-x_0)^4, \ldots\}$. Če v iskani formuli za f izberemo bazne funkcije in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1: &\quad 3h = A + B + C + D,\\
f(x) = x - x_0: &\quad \frac{(3h)^2}{2} = hB + 2hC + 3hD,\\
f(x) = (x-x_0)^2: &\quad \frac{(3h)^3}{3} = h^2B + 4h^2C + 9h^2D,\\
f(x) = (x-x_0)^3: &\quad \frac{(3h)^4}{4} = h^3B + 8h^3C + 27h^3D.
\end{aligned}$$

Iz teh štirih enačb sledi

$$A = B\frac{3h}{8}, \quad B = C = \frac{9h}{8}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 3. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x-x_0)^4$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{(3h)^5}{5} = \frac{3h}{8}\left(3h^4 + 3\cdot 16h^4 + 81h^4\right) + R(x-x_2)^4.$$

Ker je prvi del desne strani različen od leve strani, vzamemo $m = 4$ in velja

$$Ef^{(m)}(\xi) = 4!E.$$

Iz enačbe nato izračunamo $E = -\frac{3}{80}h^5$. Celotna formula se tako glasi

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Za računanje integrala na poljubnem intervalu $[a,b]$ uporabimo sestavljeno pravilo. Naj bo le to zgrajeno iz n-osnovnih pravil. V tem primeru razdelimo interval $[a,b]$ na $3n$ ekvidistantnih delov s korakom $h = \frac{b-a}{3n}$, to je $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 3n$. Na vsakem od podintervalov nato uporabimo osnovno pravilo in dobimo

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3h}{8} \left(f(x_{3i}) + 3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + f(x_{3i+3}) \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi_i),$$

pri čemer je $\xi_i \in (x_{3i}, x_{3i+3})$. Napaka $R(f)$ sestavljenega pravila je tako enaka

$$R(f) = -\frac{3}{80} h^5 \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i).$$

Iz ocene

$$n \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) \leq n \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

za dovolj gladko funkcijo f dobimo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) = n f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

Sledi

$$R(f) = -\frac{3}{80} h^5 n f^{(4)}(\xi) = -\frac{3}{80} h^5 \frac{b-a}{3h} f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{80} h^4 (b-a) f^{(4)}(\xi).$$

Vidimo, da smo na račun sestavljenega pravila izgubili en red natančnosti.

Naloga 2.4. *Izpeljite integracijsko pravilo*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left(Af(x_0) + Bf(x_1)\right) + h^2\left(Cf'(x_0) + Df'(x_1)\right) + Ef^{(m)}(\xi),$$

kjer je $x_1 = x_0 + h$. *Iz izpeljanega pravila sestavite sestavljeno pravilo za računanje integrala* $\int_a^b f(x)dx$. *Ocenite napako sestavljenega pravila. Na koliko delov moramo vsaj razdeliti interval* $[0,1]$ *pri računanju integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

da bo napaka manjša od 10^{-5}.

Rešitev:
Izpeljimo pravilo z uporabo metode nedoločenih koeficientov. Za bazo prostora polinomov vzemimo prestavljene potence $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, (x - x_0)^3, (x - x_0)^4, \ldots\}$. Če v

iskani formuli za f izberemo bazne polinome in predpostavimo, da napake ni, dobimo sledeče enačbe:

$$\begin{aligned} f(x)=1: &\quad h = hA + hB, \\ f(x)=x-x_0: &\quad \frac{h^2}{2} = h^2B + h^2C + h^2D, \\ f(x)=(x-x_0)^2: &\quad \frac{h^3}{3} = h^3B + 2h^2CD, \\ f(x)=(x-x_0)^3: &\quad \frac{h^4}{4} = h^4B + 3h^4D. \end{aligned}$$

Iz teh štirih enačb sledi

$$A = B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{12}, \quad D = -\frac{1}{12}.$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 3. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x-x_0)^4$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{h^5}{5} = \frac{h^5}{2} - \frac{1}{3}h^5 + R(x-x_2)^4.$$

Ker je prvi del desne strani različen od leve strani, vzamemo $m=4$ in $Ef^{(m)}(\xi) = 4!E$. Iz enačbe nato izračunamo E in dobimo $E = \frac{1}{720}h^5$. Celotna formula se tako glasi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_0) - f'(x_1)\right)) + \frac{1}{720}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Poglejmo si sedaj sestavljeno pravilo. Naj bo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2}{12}\left(f'(x_i) - f'(x_{i+1})\right) + R(f) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right) + R(f) = \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right) + R(f). \end{aligned}$$

Napaka je velikosti

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{720} h^5 f^{(4)}(\xi_i)$$

kjer so $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Če predpostavimo, da je f dovolj gladka, dobimo iz

$$n \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) \leq n \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x),$$

da je $\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) = nf^{(4)}(\xi)$, pri čemer je $\xi \in (a,b)$. Od tod sledi

$$R(f) = \frac{1}{720}h^5 n f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{720}h^4(b-a)f^{(4)}(\xi).$$

Za določitev koraka h pri računanju integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ moramo oceniti napako $R(f)$. Ker je $f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$, je $\|f^{(4)}\| = 4!$. Sledi, da mora biti

$$\begin{aligned} \frac{1}{720}h^4(b-a)|f^{(4)}(\xi)|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{720}h^4 4! &< 10^{-5} \\ h^4 &< 3\cdot 10^{-4} \\ h &< 0.1316, \end{aligned}$$

oziroma $n > 7.5983$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj 8 delov.

Naloga 2.5. *Integral* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *računamo preko sestavljenega trapeznega pravila. Ocenite na koliko delov moramo razdeliti interval, da bo napaka manjša od* 10^{-6}.

Rešitev:
Sestavljeno trapezno pravilo je oblike

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi),$$

kjer so

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Izbrati moramo tak korak h, da bo napaka $R(f)$ manjša od 10^{-6},

$$\left|\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\right| < \frac{h^2}{12}(b-a)\|f''\|_{\infty,[0,1]} < 10^{-6}.$$

Izračunamo

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}.$$

Kandidati za ekstrem so ničle odvoda

$$f^{(3)}(x) = (-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2})' = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2) = 0,$$

ki so enake

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ter krajišča intervala. Ker $\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin [0,1]$ in ker je $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(3)}(1) = 2e^{-1}$, je $\|f''\|_{\infty,[0,1]} = 2$. Sledi, da mora biti $h < \sqrt{6 \cdot 10^{-6}} = 2.4495 \cdot 10^{-3}$ oziroma $n > 408.248$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj $n = 409$ delov. V tem primeru dobimo, da je $I \sim 0.7468237663$, točna vrednost integrala je $I = 0.7468241328$, razlika pa je $3.67 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$.

Naloga 2.6. *Izpeljite odprto Newton-Cotesovo pravilo z eno točko. Zapišite sestavljeno pravilo in določite napako pri računanju integrala $\mathcal{C}^2$ funkcije.*

Rešitev:
Pravilo bo oblike

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = Af(x_1) + R(f),$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2$, ekvidistantne točke. Če integriramo formulo

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)[x_1, x]f$$

dobimo, da je $A = 2h$. Napaka je enaka

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)[x_1, x]f dx.$$

Deljena diferenca $[x_1, x]f =: g(x)$ je funkcija spremenljivke x. Zato lahko zapišemo

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_1) + (x - x_1)[x_1, x]g = [x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x]([x_1, x]f) = \\ &= [x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x_1, x]f, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) \left([x_1, x_1]f + (x - x_1)[x_1, x_1, x]f\right) dx.$$

Ker pa je $\omega(x) = x - x_1$ ortogonalna na 1 glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx,$$

to je $\langle \omega, 1 \rangle = 0$, je

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)[x_1, x_1]f dx = [x_1, x_1]f \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)dx = 0.$$

Dobimo torej, da je

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)^2[x_1, x_1, x]f dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)^2 dx = \frac{1}{3}h^3 f''(\xi),$$

pri čemer smo upoštevali, da $(x-x_1)^2$ ne spremeni predznaka na intervalu integracije.

Zapišimo še sestavljeno pravilo. Naj bo

$$h=\frac{b-a}{2n}, \quad x_i=x_0+ih, \quad i=0,1,\ldots,2n.$$

Tedaj je

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx=2h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})+R(f),$$

kjer je

$$R(f)=\frac{1}{3}h^3\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)=\frac{1}{3}h^3 n f''(\xi)=\frac{1}{6}h^2 f''(\xi)$$

za $\xi_i\in(x_{2i},x_{2i+2})$ ter $\xi\in(a,b)$.

Naloga 2.7. *Izračunajte Peanovo jedro K_0 za osnovno trapezno pravilo ter izračunajte oziroma ocenite napako pri računanju integrala enkrat zvezno odvedljive funkcije.*

Rešitev:
Najprej preverimo, da je trapezno pravilo stopnje vsaj 0, kar pomeni, da mora biti točno za konstante. To je res, saj je

$$R\left(x^0\right)=\int_{x_0}^{x_1} dx-\frac{h}{2}(1+1)=x_1-x_0-h=0.$$

Peanovo jedro je za $t\in[x_0,x_1]$ enako

$$\begin{aligned}
K_0(t)=R((\cdot-t)_+^0)&=\int_{x_0}^{x_1}(x-t)_+^0 dx-\frac{h}{2}\left((x_0-t)_+^0+(x_1-t)_+^0\right)=\\
&=\int_t^{x_1}(x-t)^0 dx-\frac{h}{2}(x_1-t)^0=(x_1-t)-\frac{h}{2}=\\
&=\frac{x_0+x_1}{2}-t.
\end{aligned}$$

Ker K_0 na intervalu $[x_0,x_1]$ spremeni pradznak, lahko napako

$$R(f)=\int_{x_0}^{x_1} K_0(t)f'(t)dt$$

le ocenimo. In sicer je

$$|R(f)|\le\|f'\|\int_{x_0}^{x_1}|K_0(t)|dt=\frac{h^2}{4}\|f'\|.$$

Naloga 2.8. *Izračunajte Peanovo jedro K_1 za osnovno trapezno pravilo ter izračunajte oziroma ocenite napako pri računanju integrala dvakrat zvezno odvedljive funkcije.*

Rešitev:
Najprej preverimo, da je trapezno pravilo stopnje vsaj 1, kar pomeni, da mora biti točno za konstante in za linearne polinome. To je res, saj je

$$\begin{aligned}R(1) &= \int_{x_0}^{x_1} dx - \frac{h}{2}(1+1) = x_1 - x_0 - h = 0,\\ R(x) &= \int_{x_0}^{x_1} x dx - \frac{h}{2}(x_0 + x_1) = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} - \frac{h}{2}(x_0 + x_1) = 0.\end{aligned}$$

Peanovo jedro je za $t \in [x_0, x_1]$ enako

$$\begin{aligned}K_1(t) = R\left((\cdot - t)_+^1\right) &= \int_{x_0}^{x_1} (x-t)_+^1 dx - \frac{h}{2}\left((x_0 - t)_+^1 + (x_1 - t)_+^1\right) =\\ &= \int_{t}^{x_1} (x-t) dx - \frac{h}{2}(x_1 - t) = \frac{(x_1 - t)^2}{2} - \frac{h}{2}(x_1 - t) =\\ &= \frac{1}{2}(x_1 - t)(x_1 - t - h) = \frac{1}{2}(x_1 - t)(x_0 - t).\end{aligned}$$

Ker K_0 na intervalu $[x_0, x_1]$ ne spremeni pradznaka, je napaka

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_1} K_1(t) f''(t) dt$$

enaka

$$\begin{aligned}R(f) &= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} K_1(t) dt = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - t)(x_0 - t) dt =\\ &= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_0^1 h^3 (-u)(1-u) du = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).\end{aligned}$$

Naloga 2.9. *Izračunajte Peanovo jedro K_0 za integracijsko formulo*

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) + R(f)$$

ter izračunajte oziroma ocenite napako pri računanju integrala enkrat zvezno odvedljive funkcije.

Rešitev:
Najprej preverimo, da je pravilo stopnje vsaj 0, kar pomeni, da mora biti točno za konstante. To je res, saj je

$$R\left(x^0\right) = \int_{x_0}^{x_3} dx - \frac{3h}{8}(1 + 3 + 3 + 1) = x_3 - x_0 - 3h = 0.$$

Peanovo jedro je za $t \in [x_0, x_3]$ enako

$$
\begin{aligned}
K_0(t) &= R\left((\cdot - t)_+^0\right) = \\
&= \int_{x_0}^{x_3} (x-t)_+^0 dx - \frac{3h}{8}\left((x_0-t)_+^0 + 3(x_1-t)_+^0 + 3(x_2-t)_+^0 + (x_3-t)_+^0\right) = \\
&= \int_{t}^{x_3} (x-t)^0 dx - \frac{3h}{8}\begin{cases} 7, & t \in [x_0, x_1) \\ 4, & t \in [x_1, x_2) \\ 1, & t \in [x_2, x_3] \end{cases} = \\
&= \begin{cases} x_3 - t - \frac{21h}{8}, & t \in [x_0, x_1) \\ x_3 - t - \frac{12h}{8}, & t \in [x_1, x_2) \\ x_3 - t - \frac{3h}{8}, & t \in [x_2, x_3] \end{cases} = \\
&= \begin{cases} x_0 + \frac{3h}{8} - t, & t \in [x_0, x_1) \\ x_1 + \frac{h}{2} - t, & t \in [x_1, x_2) \\ x_3 - \frac{3h}{8} - t, & t \in [x_2, x_3] \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Ker K_0 na intervalu $[x_0, x_1]$ spremeni pradznak, lahko napako

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_3} K_0(t) f'(t) dt$$

le ocenimo. In sicer je

$$|R(f)| \leq \|f'\| \int_{x_0}^{x_3} |K_0(t)| dt = \|f'\| \left(\left(\frac{3h}{8}\right)^2 + \left(\frac{5h}{8}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) = \frac{25}{32} h^2 \|f'\|.$$

Naloga 2.10. *Izračunajte Peanovo jedro K_1 za integracijsko formulo*

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + R(f)$$

ter izračunajte oziroma ocenite napako pri računanju integrala dvakrat zvezno odvedljive funkcije.

Rešitev:
Najprej preverimo, da je pravilo stopnje vsaj 1, kar pomeni, da mora biti točno za konstante in za linearne polinome. To je res, saj je

$$
\begin{aligned}
R(1) &= \int_{x_0}^{x_3} dx - \frac{3h}{2}(1+1) = 0, \\
R(x) &= \int_{x_0}^{x_3} x dx - \frac{3h}{2}(x_1 + x_2) = \frac{x_3^2 - x_0^2}{2} - \frac{3h}{2}(x_1 + x_2) = \\
&= \frac{3h}{2}(x_0 + x_3 - x_1 - x_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Peanovo jedro je za $t \in [x_0, x_3]$ enako

$$
\begin{aligned}
K_1(t) &= R\left((\cdot - t)_+^1\right) = \\
&= \int_{x_0}^{x_3} (x-t)_+ dx - \frac{3h}{2}\left((x_1 - t)_+ + (x_2 - t)_+\right) = \\
&= \int_{t}^{x_3} (x-t) dx - \frac{3h}{2}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2t, & t \in [x_0, x_1) \\ x_2 - t, & t \in [x_1, x_2) \\ 0, & t \in [x_2, x_3] \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{(x_0+3h-t)^2}{2} - \frac{3h}{2}(2x_0 + 3h - 2t), & t \in [x_0, x_1) \\ \frac{(x_1+2h-t)^2}{2} - \frac{3h}{2}(x_1 + h - t), & t \in [x_1, x_2) \\ \frac{(x_3-t)^2}{2}, & t \in [x_2, x_3] \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}(x_0 - t)^2, & t \in [x_0, x_1) \\ \frac{1}{2}\left((x_2 - t)^2 - h(x_2 - t) + h^2\right), & t \in [x_1, x_2) \\ \frac{(x_3-t)^2}{2}, & t \in [x_2, x_3] \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Očitno je $K_1(t) > 0$ za $t \in [x_0, x_1)$ ter $t \in [x_2, x_3]$. Ker pa je

$$
\frac{1}{2}\left((x_2 - t)^2 - h(x_2 - t) + h^2\right)
$$

parabola, ki ima teme v točki $t = x_2 - h$ z vrednostjo $\frac{3}{8}h^2$, je $K_1(t) > 0$ tudi za $t \in [x_1, x_2)$. Napaka je tako enaka

$$
\begin{aligned}
&R(f) = \int_{x_0}^{x_3} f''(t) K_1(t) dt = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_3} K_1(t) dt = \\
&= f''(\xi)\left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_0 - t)^2}{2} dt + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\left((x_2 - t)^2 - h(x_2 - t) + h^2\right) dt + \int_{x_2}^{x_3} \frac{(x_3 - t)^2}{2} dt\right) = \\
&= \frac{3}{4} h^3 f''(\xi).
\end{aligned}
$$

Naloga 2.11. *Dokažite: če je integracijsko pravilo stopnje n za računanje integrala $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ točno za lihe funkcije, potem je Peanovo jedro K_n sodo.*

Rešitev:
Za pravilo stopnje n velja, da je $R(x^m) = 0$ za $m = 0, 1, \ldots, n$ in $R(x^{n+1}) \neq 0$. Ker je pravilo točno za vse lihe funkcije, mora biti $n + 1$ sodo število oziroma n mora biti liho. Za $(n + 1)$-krat zvezno odvedljive funkcije se napaka izraža kot

$$
R(f) = \int_{-a}^{a} f^{(n+1)}(t) K_n(t) dt.
$$

Za lihe funkcije f in lih n je tudi $f^{(n+1)}$ liha funkcija in velja

$$0 = \int_{-a}^{a} f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt = \int_{-a}^{0} f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt + \int_{0}^{a} f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt =$$
$$= \int_{0}^{a} f^{(n+1)}(t)(K_n(t) - K_n(-t))dt.$$

Dokazati moramo, da je $K_n(t) = K_n(-t)$ za vsak $t \in [0, a]$. Recimo, da v neki točki ξ to ne bi bilo res. Potem bi obstajal interval I, na katerem bi bila razlika $K_n(t) - K_n(-t)$ različna od nič in konstantnega predznaka. Izbrali bi lahko tako liho gladko funkcijo f, da bi imel odvod $f^{(n+1)}$ nosilec ravno enak I in da bi bil $f^{(n+1)}$ na celem I enakega predznaka kot razlika $K_n(t) - K_n(-t)$. Tedaj bi bila vrednost integrala

$$\int_{0}^{a} f^{(n+1)}(t)(K_n(t) - K_n(-t))dt > 0,$$

kar nam da protislovje. Sledi, da mora biti $K_n(t) = K_n(-t)$ za vse $t \in [-a, a]$ in K_n je res soda.

Naloga 2.12. *Dokažite, da velja*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{1}{2} - \int_{0}^{\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{(1+x)^2} dx.$$

Limita na levi se imenuje Eulerjeva konstanta.
Namig: uporabite sestavljeno trapezno pravilo in Peanovo jedro K_0.

Rešitev:
Za osnovno trapezno pravilo in $f \in \mathcal{C}^1$ velja (glej nalogo 2.7)

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0 + h)) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t) \left(x_0 + \frac{h}{2} - t \right) dt,$$

od koder izpeljemo sestavljeno pravilo

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t) \left(x_i + \frac{h}{2} - t \right) dt,$$

kjer so

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Izberimo funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $[0, n-1]$ in naj bo $h = 1$. Tedaj je

$$\int_{0}^{n-1} \frac{1}{1+x} dx = \ln n, \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Izračunajmo ta integral še z uporabo sestavljenega trapeznega pravila. Aproksimacija integrala je enaka

$$\frac{1}{2}\left(1+2\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{1+i}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i}-1-\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

Za napako pa velja

$$R(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{-1}{(1+t)^2}\left(i+\frac{1}{2}-t\right)dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}dt.$$

Dobili smo torej

$$\ln n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}dt,$$

od koder sledi, da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}dt\right)=\\&=\frac{1}{2}-\sum_{i=0}^{\infty}\int_i^{i+1}\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}dt=\frac{1}{2}-\int_0^{\infty}\frac{t-[t]-\frac{1}{2}}{(1+t)^2}dt.\end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana.

Naloga 2.13. *Z Rombergovo ekstrapolacijo trapezne metode izračunajte integral*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx.$$

Za začetni korak vzemite $h=\frac{\pi}{4}$. Naredite dva koraka ekstrapolacije.

Rešitev:
Naj bo $f(x)=\sin x$. Najprej izračunamo približke za integral z uporabo sestavljenega trapeznega pravila za različne h. Dobimo vrednosti

$$\begin{aligned}T_h f&=\frac{\pi}{8}\left(\sin 0+2\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right)=0.948059,\\T_{\frac{h}{2}}f&=\frac{1}{2}T_h f+\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\right)=0.987116,\\T_{\frac{h}{4}}f&=\frac{1}{2}T_{\frac{h}{2}}f+\frac{\pi}{16}\left(\sin\frac{\pi}{16}+\sin\frac{3\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{16}+\sin\frac{7\pi}{16}\right)=0.996785.\end{aligned}$$

Na prvem koraku Rombergove ekstrapolacije velja

$$\begin{aligned}T^1_{\frac{h}{2}}f&=\frac{4T_{\frac{h}{2}}f-T_h f}{3}=1.000135,\\T^1_{\frac{h}{4}}f&=\frac{4T_{\frac{h}{4}}f-T_{\frac{h}{2}}f}{3}=1.000008,\end{aligned}$$

na drugem pa

$$T^2_{\frac{h}{4}} f = \frac{16 T^1_{\frac{h}{4}} f - T^1_{\frac{h}{2}} f}{3} = 0.9999995.$$

Dobili smo

$$\widetilde{I} = 0.9999995, \quad |I - \widetilde{I}| = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Naloga 2.14. *Dokažite, da je en korak Rombergove ekstrapolacije trapezne metode kar Simpsonovo pravilo.*

Rešitev:
Naj bo $h = \frac{b-a}{m}$. Uporabimo najprej trapezno pravilo s korakom $2h$ in h:

$$T_{2h} f = h \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) \right),$$
$$T_h f = \frac{1}{2} T_{2h} f + h \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}).$$

Ekstrapoliramo in dobimo

$$T^1_h f = \frac{4 T_h f - T_{2h} f}{3} = \frac{1}{3} \left(2 T_{2h} f + 4h \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) - T_{2h} f \right) =$$
$$= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + + f(x_{2m}) \right),$$

kar pa je ravno sestavljeno Simpsonovo pravilo.

Naloga 2.15. *Pri računanju integrala*

$$I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

s sestavljenim Trapeznim pravilom velja

$$I = T_h f + a_1 h^{\frac{3}{2}} + a_2 h^{\frac{5}{2}} + a_3 h^{\frac{7}{2}} + \dots .$$

1. *Kako bi uporabili Rombergovo ekstrapolacijo za izračun integrala I?*

2. *Pri računanju dobimo naslednje vrednosti:*

$$T_h f = 0.5, \quad T_{\frac{h}{2}} f = 0.433012, \quad T_{\frac{h}{4}} f = 0.407420.$$

Iz njih ekstrapolirajte točnejšo vrednost integrala. Primerjajte rezultat s običajno Rombergovo ekstrapolacijo.

Rešitev:

1. Velja sledeče.

$$
\begin{aligned}
I &= T_h f + a_1 h^{\frac{3}{2}} + a_2 h^{\frac{5}{2}} + a_3 h^{\frac{7}{2}} + \dots \\
I &= T_{\frac{h}{2}} f + a_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + a_3 \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + \dots
\end{aligned}
$$

Če drugo enakost pomnožimo z $2\sqrt{2}$ in odštejemo od prve dobimo

$$
\begin{aligned}
&(2\sqrt{2}-1)I = \\
&= 2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{2}} f - T_h f + a_2 h^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2} - 1\right) + a_3 h^{\frac{7}{2}} \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) + \dots = \\
&= 2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{2}} f - T_h f + \sum_{i=2}^{\infty} a_i h^{\frac{2i+1}{2}} \left(\frac{1}{2^{i-1}} - 1\right)
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
I = \frac{2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{2}} f - T_h f}{2\sqrt{2}-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^1 h^{\frac{2i+1}{2}},
$$

kjer so $(a_i^1)_i$ nove konstante v razvoju. Definiramo

$$
T_{\frac{h}{2}}^1 f := \frac{2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{2}} f - T_h f}{2\sqrt{2}-1}
$$

in nadaljujemo z izločanjem vodilnih členov napake. In sicer velja

$$
\begin{aligned}
I &= T_{\frac{h}{2}}^1 f + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^1 h^{\frac{2i+1}{2}}, \\
I &= T_{\frac{h}{4}}^1 f + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^1 \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{2i+1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Drugo enakost pomnožimo z $2^2\sqrt{2}$, odštejemo prvo enakost, delimo z $2^2\sqrt{2}-1$ in dobimo

$$
I = \frac{2^2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{4}}^1 f - T_{\frac{h}{2}}^1 f}{2^2\sqrt{2}-1} + \sum_{i=3}^{\infty} a_i^2 h^{\frac{2i+1}{2}},
$$

kjer so $(a_i^2)_i$ nove konstante. Definiramo

$$
T_{\frac{h}{4}}^2 f := \frac{2^2\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{4}} f - T_{\frac{h}{2}} f}{2^2\sqrt{2}-1}.
$$

Sklepamo na splošno formulo

$$
T_{\frac{h}{2^{j+1}}}^k f = \frac{2^k\sqrt{2}\ T_{\frac{h}{2^{j+1}}} f - T_{\frac{h}{2^j}} f}{2^k\sqrt{2}-1}, \quad k = 1, 2, \dots
$$

2. Ekstrapolirajmo najprej približke za vrednost integrala z uporabo zgornje formule:

$$\begin{array}{c|lll} & & & \\ \hline h & 0.5 & & \\ \frac{h}{2} & 0.433021 & 0.396375 & \\ \frac{h}{4} & 0.407420 & 0.393423 & 0.392789 \end{array}, \qquad \widetilde{I}_1 := 0.392789.$$

Če uporabimo navadno Rombergovo ekstrapolacijo pa dobimo

$$\begin{array}{c|lll} & & & \\ \hline h & 0.5 & & \\ \frac{h}{2} & 0.433021 & 0.410683 & \\ \frac{h}{4} & 0.407420 & 0.398889 & 0.398103 \end{array}, \qquad \widetilde{I}_2 := 0.398103.$$

Točen integral izračunamo z uporabo Beta funkcije:

$$I = B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Razliki med točno in izračunanima vrednostima sta tako enaki

$$\left|I - \widetilde{I}_1\right| = 0.0000899183, \qquad \left|I - \widetilde{I}_2\right| = 0.00540392.$$

Razlog za slabši rezultat pri Rombergovi ekstrapolaciji je v tem, da odvodi funkcije f v krajiščih niso omejeni.

Naloga 2.16. *Integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ računamo s sestavljenim Simpsonovim pravilom s korakom $h = \frac{\pi}{8}$ in $\frac{h}{2}$.*

1. *Izračunajte oba približka za vrednost integrala.*
2. *Ocenite napako za oba približka in jo primerjajte z dejansko vrednostjo napake.*
3. *Ocenite obe napaki z uporabo Richardsonove ekstrapolacije.*
4. *Iz izračunanih vrednosti ekstrapolirajte točnejšo vrednost integrala.*

Rešitev:
Z uporabo sestavljenega Simpsonovega pravila dobimo

$$I_h = \frac{\pi}{24}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.000134585,$$

$$I_{\frac{h}{2}} = \frac{\pi}{48}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{3\pi}{16} + 2\sin\frac{\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + 4\sin\frac{5\pi}{16} + 2\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{7\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.000008296.$$

Napaki sta enaki

$$|I - I_h| = 1.3458 \cdot 10^{-4}, \qquad \left|I - I_{\frac{h}{2}}\right| = 8.2955 \cdot 10^{-6}.$$

Ocenimo napako približka z uporabo formule

$$R_h f = \frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi).$$

Ker je $\|f^{(4)}\|_\infty = 1$, velja

$$|R_h f| \le \left(\frac{\pi}{8}\right)^4 \frac{1}{180}\frac{\pi}{2} = 2.0753 \cdot 10^{-4}, \qquad \left|R_{\frac{h}{2}} f\right| \le \left(\frac{\pi}{16}\right)^4 \frac{1}{180}\frac{\pi}{2} = 1.297 \cdot 10^{-5}.$$

Ocenimo sedaj napako približka z uporabo Richardsonove ekstrapolacije. Velja

$$Sf = F_h f + R_h f = F_{\frac{h}{2}} f + R_{\frac{h}{2}} f$$

in

$$R_h f = \frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi), \quad R_{\frac{h}{2}} f = \frac{h^4}{2^4 \cdot 180}(b-a) f^{(4)}(\mu).$$

Predpostavimo, da je $f^{(4)}(\xi) \sim f^{(4)}(\mu)$. Tedaj je $R_h f \sim 16 R_{\frac{h}{2}} f$ in

$$R_{\frac{h}{2}} f = Sf - F_{\frac{h}{2}} f = F_h f + R_h f - F_{\frac{h}{2}} f \sim F_h f - F_{\frac{h}{2}} f + 16 R_{\frac{h}{2}} f$$

od koder sledi

$$R_{\frac{h}{2}} f \sim \frac{F_h f - F_{\frac{h}{2}} f}{15}.$$

V našem primeru imamo

$$R_{\frac{h}{2}} f \sim \frac{I_2 - I_1}{15} = 8.4193 \cdot 10^{-6}, \quad R_h f \sim 1.3471 \cdot 10^{-4},$$

kar kaže, da te ocene lepo sledijo dejanski oceni napake. Ker je

$$Sf \sim F_h f + 16 R_{\frac{h}{2}} f, \quad Sf = F_{\frac{h}{2}} f + R_{\frac{h}{2}} f$$

pa velja tudi

$$Sf \sim \frac{16 F_{\frac{h}{2}} f - F_h f}{15}.$$

Ekstrapolirana vrednost je tako enaka

$$I_3 = \frac{16 I_2 - I_1}{15} = 0.9999998762, \quad |I_3 - I| = 1.2377 \cdot 10^{-7}.$$

Naloga 2.17. *Kako bi izračunali dvojni integral*

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$$

z uporabo sestavljenega trapeznega pravila. Kakšna je napaka?

Rešitev:
Z uporabo Fubinijevega izreka dvojni integral prevedemo na dvakratnega. Razdelimo interval $[a, b]$ na n delov, interval $[c, d]$ pa na m delov. Naj velja

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \\
k &= \frac{d-c}{m}, \quad y_0 = c, y_j = y_0 + jk, \quad j = 0, 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Tedaj je

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_n} dx \int_{y_0}^{y_m} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{k}{2} \left(f(x,y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x,y_j) + f(x,y_m) \right) + R_y f \right) dx = \\
&= \frac{k}{2}\frac{h}{2} \left(f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_0) + f(x_n,y_0) + R_0 f \right. \\
&\quad 2\sum_{j=1}^{m-1} \left(f(x_0,y_j) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_j) + f(x_n,y_j) + R_j f \right) + \\
&\quad \left. f(x_0,y_m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y_m) + f(x_n,y_m) + R_m f \right) + \int_{x_0}^{x_n} R_y f dx,
\end{aligned}
$$

kjer so napake enake

$$
\begin{aligned}
R_y f &= -\frac{k^2}{12}(d-c) \int_{x_0}^{x_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,\mu) dx, \\
R_j f &= -\frac{h^2}{12}(b-a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi_j, y_j), \quad j = 0, 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Integracijsko pravilo je torej oblike

$$
I = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} f(x_i, y_j) + Rf,
$$

pri čemer so

$$
a_{i,j} = \alpha_i \beta_j, i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, m
$$

za

$$
(\alpha_i)_{i=0}^{n} := (1, 2, 2, \ldots, 2, 1), \quad (\beta_i)_{j=0}^{m} := (1, 2, 2, \ldots, 2, 1).
$$

Napaka je enaka

$$
\begin{aligned}
Rf = & -\frac{k^2}{12}(d-c)\int_{x_0}^{x_n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,\mu)dx- \\
& -\frac{kh^2}{24}(b-a)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi_0,y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi_j,y_j)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi_m,y_m)\right)= \\
& =-\frac{k^2}{12}(d-c)(b-a)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\xi,\mu)dx-\frac{kh^2}{24}(b-a)2m\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\tilde{\xi},\tilde{\mu})= \\
& =-\frac{k^2}{12}(d-c)(b-a)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\xi,\mu)-\frac{h^2}{12}(b-a)(d-c)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\tilde{\xi},\tilde{\mu})= \\
& =-\frac{1}{12}(d-c)(b-a)\left(k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\xi,\mu)+h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\tilde{\xi},\tilde{\mu})\right).
\end{aligned}
$$

Naloga 2.18. *Naj bo D trikotnik z ogljišči*

$$A(-h,0),\quad B(h,0),\quad C=(0,\sqrt{3}h).$$

Določite neznane koeficiente a,b,c v izrazu

$$\iint_D f(x,y)dxdy = af(A)+bf(B)+cF(C)+Rf,$$

tako da bo formula točna za polinome čim višjih stopenj.

Rešitev:
Neznane koeficiente določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots$$

Dobimo enačbe

$$
\begin{aligned}
f(x,y)=1: &\quad \iint_D dxdy=\sqrt{3}h^2=a+b+c, \\
f(x,y)=x: &\quad \iint_D xdxdy=0=-ah+bh, \\
f(x,y)=y: &\quad \iint_D ydxdy=h^3=\sqrt{3}hc,
\end{aligned}
$$

iz katerih sledi

$$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2.$$

Pravilo je enako

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2\left(f(-h,0)+bf(h,0)+cF(0,\sqrt{3}h)\right)+Rf.$$

Predpostavimo, da je napaka oblike

$$Rf = c_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1, \mu_1) + c_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2, \mu_2) + c_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_3, \mu_3).$$

Neznane c_1, c_2, c_3 dobimo iz enačb

$$\begin{aligned}
f(x,y) = x^2 : &\quad \iint_D x^2 dxdy = \frac{\sqrt{3}}{6} h^4 = \frac{\sqrt{3}}{3} 2h^4 + 2c_1, \\
f(x,y) = y^2 : &\quad \iint_D y^2 dxdy = \frac{\sqrt{3}}{2} h^4 = \sqrt{3} h^4 + 2c_2, \\
f(x,y) = xy : &\quad \iint_D xydxdy = 0 = 0 + c_3, \\
&\Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} h^4, \quad c_3 = 0.
\end{aligned}$$

Napaka je torej enaka

$$Rf = -\frac{\sqrt{3}}{4} h^4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_1, \mu_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2, \mu_2) \right).$$

Naloga 2.19. *Določite uteži α_0, α_1 ter vozla x_0, x_1 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:
Neznana vozla x_0 in x_1 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$ ter $\omega \perp x$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx,$$

kjer je $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Iz zgornjih dveh pogojev sledita enačbi

$$\int_{-1}^{1} (x - x_0)(x - x_1) dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1) dx = 0.$$

Prva enačba se poenostavi v

$$\int_{-1}^{1} (x - x_0)(x - x_1) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1 \right) dx = \frac{2}{3} + 2x_0 x_1 = 0,$$

iz druge pa dobimo

$$\int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - (x_0 + x_1)x^2 + x_0 x_1 x \right) dx = -\frac{2}{3}(x_0 + x_1) = 0.$$

Rešitev teh dveh enačb nam da neznana vozla

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Uteži lahko določimo z uporabo interpolacijskega polinoma, lahko pa tudi z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $\{1, x, x^2, \dots\}$ in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad \int_{-1}^{1} dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ f(x) = x: &\quad \int_{-1}^{1} x dx = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1. \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb sledi

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1$$

in pravilo je enako

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + Rf.$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$Rf = \int_{-1}^{1} \omega^2(x)[x_0, x_0, x_1, x_1, x]f dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1} \omega^2(x)dx = \frac{1}{135}f^{(4)}(\xi).$$

Dobljeno pravilo se imenuje Gauss-Legendrovo integracijsko pravilo na dveh točkah.

Naloga 2.20. *Določite uteži α_0, α_1, α_2 ter vozle x_0, x_1, x_2 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:
Neznane vozle x_0, x_1 in x_2 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$, $\omega \perp x$ ter $\omega \perp x^2$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

kjer je

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz zgornjih treh pogojev dobimo enačbe

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \\ &\int_{-1}^{1} x(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \\ &\int_{-1}^{1} x^2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0. \end{aligned}$$

Poglejmo si najprej, kako izračunamo integrale oblike

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Če je n lih je vrednost integrala enaka 0, za sode $n = 2k$, pa integral pretvorimo na Beta funkcijo z uporabo nove spremenljivke $u = x^2$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_{0}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= 2 \int_{0}^{1} \frac{u^k}{\sqrt{1-u}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_{0}^{1} u^{k-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} du = \\
&= B\left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}.
\end{aligned}$$

Iz te formule dobimo z upoštevanjem $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ter $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sledeče vrednosti:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \pi, \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{\pi}{2}, \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{3\pi}{8}, \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{5\pi}{16}.
\end{aligned}$$

S pomočjo teh integralov se prva enačba poenostavi v

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-x^2(x_0+x_1+x_2) - x_0x_1x_2\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= -(x_0+x_1+x_2)\frac{\pi}{2} - x_0x_1x_2\pi = 0,
\end{aligned}$$

iz druge dobimo

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} x(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^4 + x^2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= \frac{3\pi}{8} + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\frac{\pi}{2} = 0,
\end{aligned}$$

ter iz tretje

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} x^2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-x^4(x_0+x_1+x_2) - x_0x_1x_2x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= -(x_0+x_1+x_2)\frac{3\pi}{8} - x_0x_1x_2\frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Dobili smo nelinearen sistem enačb

$$
\begin{aligned}
(x_0+x_1+x_2) + 2x_0x_1x_2\pi &= 0, \\
3 + 4(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) &= 0, \\
3(x_0+x_1+x_2) + 4x_0x_1x_2\frac{\pi}{2} &= 0,
\end{aligned}
$$

za katerega pa se da enostavno izračunati rešitev. In sicer je

$$
x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.
$$

Uteži določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $1, x, x^2, \ldots$ in dobimo enačbe

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1: &\quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
f(x) = x: &\quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2, \\
f(x) = x^2: &\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\alpha_0 + \frac{3}{4}\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Rešitev se glasi

$$
\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{3}.
$$

Pravilo je enako

$$
\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{3}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}f(0) + \frac{\pi}{3}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Rf.
$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$
\begin{aligned}
Rf &= \int_{-1}^{1} \omega^2(x)[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2,x_2,x]f\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1} \omega^2(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{32}\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{\pi}{23040}f^{(6)}(\xi).
\end{aligned}
$$

Dobljeno pravilo se imenuje Gauss-Čebiševo integracijsko pravilo na treh točkah.

Naloga 2.21. *Preko ortogonalnih polinomov izpeljite Gauss-Legendrovo integracijsko pravilo*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + Rf.$$

Kako bi to pravilo uporabili za računanje integrala $\int_a^b f(x)dx$ *na polubnem intervalu* $[a, b]$*?.*

Rešitev:
Ortogonalni polinomi na intervalu $[-1, 1]$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

so Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n, \quad \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Prvih nekaj ortonormiranih Legendrovih polinomov je tako enakih

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
p_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2}x, \\
p_2(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1), \\
p_3(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3-3x), \\
p_4(x) &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35x^4-30x^2+3.
\end{aligned}$$

Neznani vozli x_0, x_1, x_2 v integracijski formuli so ravno ničle polinoma p_3. In sicer

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

S pomočjo Legendrovih polinomov pa lahko določimo tudi neznane uteži. Uporabimo formulo

$$\alpha_i = -\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}\frac{1}{p_{n+2}(x_i)p'_{n+1}(x_i)},$$

pri čemer je c_i vodilni koeficient polinoma p_i, n pa je v našem primeru enak 2. Iz polinomov preberemo vodilne koeficiente

$$c_3 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}, \quad c_4 = \frac{35}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}$$

in izračunamo vrednosti

$$p_3'\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=3\sqrt{\frac{7}{2}},\quad p_3'(0)=-\frac{3\sqrt{\frac{7}{2}}}{2},\quad p_3'\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=3\sqrt{\frac{7}{2}},$$
$$p_4\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-\frac{9}{10\sqrt{2}},\quad p_4(0)=\frac{9}{8\sqrt{2}},\quad p_4\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-\frac{9}{10\sqrt{2}}.$$

Vstavimo v formulo in dobimo

$$\alpha_0=\frac{5}{9},\quad \alpha_1=\frac{8}{9},\quad \alpha_2=\frac{5}{9}.$$

Izračunamo še napako

$$Rf=\frac{1}{6!}f^{(6)}(\xi)\int_{-1}^{1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx=\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi).$$

Pravilo se torej glasi

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi).$$

Pravilo za računanje integrala na poljubnem intervalu dobimo z uvedbo nove spremenljivke

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u$$

In sicer je

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^{1}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u\right)\frac{b-a}{2}du=$$
$$\frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{9}f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{5}{9}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)+Rf,$$

pri čemer je

$$Rf=\frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7f^{(6)}(\mu),\quad \mu\in(a,b).$$

Naloga 2.22. *Preko ortogonalnih polinomov določite Gauss-Čebiševo integracijsko pravilo*

$$\int_{-1}^{1}f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\alpha_0f(x_0)+\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+Rf.$$

Rešitev:
Ortogonalni polinomi na intervalu $[-1, 1]$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

so Čebiševi polinomi

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Ortonormiran sistem tvorijo polinomi

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_2, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_3, \quad \ldots$$

Vodilni koeficienti ortonormiranih polinomov so enaki

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Vozli Gaussovega pravila reda $2n + 1$ so ničle polinoma T_{n+1}. In sicer,

$$x_i = \cos\theta_i, \quad \theta_i = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Uteži dobimo po formuli

$$\alpha_i = -\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}\frac{1}{\frac{2}{\pi}T_{n+2}(x_i)T'_{n+1}(x_i)}.$$

Iz

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x_i) &= (\cos((n+1)\theta))'\,\big|_{\theta=\theta_i} = \\ &= -(n+1)\sin((n+1)\theta)\theta'\big|_{\theta=\theta_i} = (-1)^i(n+1)\frac{1}{\sin\theta_i}, \\ T_{n+2}(x_i) &= -\sin((n+1)\theta_i)\sin\theta_i = (-1)^{i+1}\sin\theta_i \end{aligned}$$

sledi

$$\alpha_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

V primeru $n = 2$ rabimo ničle polinoma T_3, ki so enake

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Sledi

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

za uteži pa velja $\alpha_i = \frac{\pi}{3}$, $i = 0, 1, 2$. Napako dobimo po formuli

$$Rf = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \frac{1}{c_{n+1}^2} = \frac{\pi}{23040} f^{(6)}(\xi).$$

Pravilo je torej enako

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3} f(0) + \frac{\pi}{3} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{23040} f^{(6)}(\xi).$$

Naloga 2.23. *Določite uteži α_0, α_1, α_2 ter vozle x_0, x_1, x_2 v Gaussovi integracijski formuli*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-|x|} dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + Rf.$$

Določite tudi napako Rf.

Rešitev:
Neznane vozle x_0, x_1 in x_2 določimo tako, da bo $\omega \perp 1$, $\omega \perp x$ ter $\omega \perp x^2$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-|x|} dx,$$

kjer je

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz teh treh pogojev dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) e^{-|x|} dx = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) e^{-|x|} dx = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) e^{-|x|} dx = 0,
\end{aligned}$$

ki se poenostavijo v

$$\begin{aligned}
2(x_0 + x_1 + x_2) + x_0 x_1 x_2 &= 0, \\
12 + (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) &= 0, \\
12(x_0 + x_1 + x_2) + x_0 x_1 x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Rešitev dobljenega nelinearnega sistema se glasi

$$x_0 = -2\sqrt{3}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2\sqrt{3}.$$

Neznane uteži določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome $1, x, x^2, \ldots$ in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1 : &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ f(x) = x : &\quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x|} dx = 0 = -2\sqrt{3}\alpha_0 + 2\sqrt{3}\alpha_2, \\ f(x) = x^2 : &\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 4 = 12\alpha_0 + 12\alpha_2, \end{aligned}$$

katerih rešitev je enaka

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_1 = \frac{10}{6}.$$

Pravilo je tako

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-|x|} dx = \frac{1}{6} f\left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{10}{6} f(0) + \frac{1}{6} f\left(2\sqrt{3}\right) + Rf.$$

Napako dobimo po formuli za napako Gaussovega pravila:

$$Rf = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(x) e^{-|x|} dx = \frac{6}{5} f^{(6)}(\xi).$$

Naloga 2.24. *Določite koeficiente c_1, c_2, c_3 v formuli*

$$\int_a^{a+2h} (x-a)^\beta f(x) dx = c_1 f(a) + c_2 f(a+h) + c_3 f(a+2h) + Rf$$

za računanje zlimitiranega integrala za vse $\beta > -1$. Določite tudi napako Rf za dovolj gladko funkcijo f.

Rešitev:
Neznane koeficiente lahko določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo polinome

$$1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ (x-a)^3, \ldots$$

in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1 : &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^\beta dx = \frac{(2h)^{\beta+1}}{\beta+1} = c_1 + c_2 + c_3, \\ f(x) = x-a : &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^{\beta+1} dx = \frac{(2h)^{\beta+2}}{\beta+2} = c_2 h + 2c_3 h, \\ f(x) = (x-a)^2 : &\quad \int_a^{a+2h} (x-a)^{\beta+2} dx = \frac{(2h)^{\beta+3}}{\beta+3} = c_2 h^2 + 4c_3 h^2. \end{aligned}$$

Iz teh treh enačb izračunamo

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}(1-\beta), \\ c_2 &= 4\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}, \\ c_3 &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}(1+\beta). \end{aligned}$$

Pri tako določenih koeficientih je formula točna vsaj za vse polinome stopnje ≤ 2. Če zapišemo še enačbo za $f(x) = (x-a)^3$, pri čemer seveda upoštevamo izračunane koeficiente, dobimo enačbo

$$\frac{(2h)^{\beta+4}}{\beta+4} = 4\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}h^3 + 8\frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)}(1+\beta)h^3 + 3!C,$$

od koder izračunamo

$$C = -\frac{2^{\beta+2}\beta}{3(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}h^{\beta+4}.$$

Celotna formula se tako glasi

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+2h} (x-a)^\beta f(x)dx = \\ &= \frac{(2h)^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\big((1-\beta)f(a) + 4(\beta+1)f(a+h) + (\beta+1)^2 f(a+2h)\big) - \\ &\quad \frac{2^{\beta+2}\beta}{3(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}h^{\beta+4}f^{(3)}(\xi). \end{aligned}$$

Naloga 2.25. *Izračunajte zlimitirani integral*

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$$

na dva načina.

1. *S substitucijo odstranite singularnost in uporabite Simpsonovo pravilo.*

2. *Izpeljite formulo*

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = c_1 f(0) + c_2 f(h) + c_3 f(2h) + Rf.$$

Oba načina preizkusite za primer, ko je $f(x) = e^{-x}$ *in* $h = 0.1$. *Kako bi izračunali integral* $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$*?*

Rešitev:

1. Če uvedemo novo spremenljivko $x = t^2$ se integral poenostavi v

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{2h}} f\left(t^2\right) dt.$$

   Ta integral izračunamo s Simpsonovim pravilom in dobimo

$$\int_0^{\sqrt{2h}} f\left(t^2\right) dt = \frac{\sqrt{2h}}{6} \left(f(0) + 4f(h/2) + f(2h)\right) + Rf,$$

   kjer je napaka

$$Rf = -\frac{1}{90} \left(\frac{\sqrt{2h}}{2}\right)^5 \frac{d^4}{dt^4} f\left(t^2\right) \big|_{t=\xi} = -\frac{1}{90} 2^{-5/2} h^{5/2} \frac{d^4}{dt^4} f\left(t^2\right) \big|_{t=\xi} = \mathcal{O}\left(h^{5/2}\right).$$

   V primeru $f(x) = e^{-x}$ dobimo približek

$$\int_0^{0.2} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \sim \frac{\sqrt{0.2}}{3} \left(e^{-0} + 4e^{-0.1} + e^{-0.2}\right) = 0.838324.$$

2. Uporabimo lahko nalogo 2.24 in dobimo pravilo

$$\int_0^{2h} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2h}}{15} \left(12f(0) + 16f(h) + 2f(2h)\right) - \frac{8}{315} \sqrt{2} h^{7/2} f^{(3)}(\xi) = \mathcal{O}\left(h^{7/2}\right).$$

   V primeru $f(x) = e^{-x}$ dobimo približek

$$\int_0^{0.2} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \sim \frac{\sqrt{0.2}}{15} \left(12e^{-0} + 16e^{-0.1} + 2e^{-0.2}\right) = 0.838223.$$

Točna vrednost integrala je 0.838212. Vidimo, da dobimo v drugem primeru točnejši približek.

Pri računanju integrala

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

bi interval integracije razdelili na dva dela: $[0, 2h]$ ter $[2h, 1]$. Na prvem delu bi uporabili izpeljano pravilo, drugi integral pa bi izračunali s sestavljenim Simpsonovim pravilom oziroma s katerimkoli drugim pravilom, ki bi imel napako reda vsaj $\mathcal{O}\left(h^{7/2}\right)$.

Naloga 2.26. *Kako bi numerično izračunali naslednje integrale:*

1. $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/3}\sin x dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}} dx$

3. $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2}\sin\frac{1}{x} dx$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$

Rešitev:

1. Če uvedemo novo spremenljivko $x = t^3$ dobimo

$$\int_0^1 x^{-1/3}\sin x dx = 3\int_0^1 t\sin t^3 dt.$$

Ta integral ni več singularen in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom. Temu pravimo *odpravljiva singularnost*.

2. Poskusimo *eliminirati singularnost*:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x - 1 + 1}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = $$
$$= \int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} dx + 2.$$

Prvi integral nima več singularnosti, saj je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^{1/2}} = 0,$$

drugi integral pa se je dal analitično izračunati. Ponavadi si pri *eliminaciji singularnosti* pomagamo z razvojem v Taylorjevo vrsto.

3. V integral uvedemo novo spremenljivko $t = 1/x$ in dobimo

$$\int_1^\infty x^{-3/2}\sin\frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Dobljen integral izračunamo z uporabo naloge 2.25.

4. Integral razbijemo na dva dela in v drugem uporabimo novo spremeljivko $t = 1/x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}dt = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.\end{aligned}$$

   Dobljen integral ni več zlimitiran in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom.

5. Integral razbijemo na dva dela in v drugem uporabimo novo spremeljivko $t = 1/x$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}dxdx &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}dx + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}dx + \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt = \int_0^1 \frac{1+x^4}{(1+x^2)^3}dx.\end{aligned}$$

   Dobljen integral ni več zlimitiran in ga lahko izračunamo s katerimkoli integracijskim pravilom.

Naloga 2.27. *Določite uteži A_0, A_1, A_2 v formuli*

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx = A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) + Rf,$$

tako da bo točna za polinome čim višjih stopenj. Določite tudi napako Rf za dovolj gladko funkcijo f. Izračunajte še Peanovo jedro K_2 ter določite napako Rf za 3-krat zvezno odvedljivo funkcijo f.

Rešitev:
Neznane uteži lahko določimo z metodo nedoločenih koeficientov. Za bazo izberemo kar standardno bazo polinomov in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} f(x) = 1: &\quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 = A_0 + A_1 + A_2, \\ f(x) = x: &\quad \int_0^\infty xe^{-x}dx = 1 = A_1 + 2A_2,, \\ f(x) = x^2: &\quad \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2 = A_1 + 4A_2. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$A_0 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = 0.$$

Koeficient pri napaki dobimo iz enačbe

$$f(x) = x^3 : \quad \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6 = 4 + 3!C, \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{3}.$$

Pravilo je enako

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x} dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(2)) + \frac{1}{3} f^{(3)}(\xi).$$

Izračunamo še Peanovo jedro:

$$K_2(t) = \frac{1}{2} R\,(\cdot - t)_+^2 = \begin{cases} e^{-t} - \frac{1}{4}(2-t)^2, & t \in [0,2] \\ e^{-t}, & t > 2 \end{cases}.$$

Preveriti moramo, ali K_2 na $[0, \infty)$ spremeni predznak. Za $t > 2$ je očitno $K_2(t) > 0$. Velja tudi

$$K_2(0) = 0, \quad K_2(1) = e^{-1} - 1/4 = 0.11787, \quad K_2(2) = e^{-2} = 0.135335.$$

Če izračunamo še odvod

$$K_2'(t) = -e^{-t} + \frac{1}{2}(2 - t)$$

vidimo, da ima na $[0,2]$ natanko eno ničlo in da K_2 najprej narašča, potem pa pada. Iz teh dejstev sledi, da je $K_2(t) > 0$ tudi za $t \in [0,2]$. Za $f \in \mathcal{C}^3\left([0,\infty)\right)$ je napaka enaka

$$Rf = \int_0^\infty K_2(t) f^{(3)}(t) dt = f^{(3)}(\xi) \int_0^\infty K_2(t) dt = \frac{1}{3} f^{(3)}(\xi),$$

kar se ujema z napako izpeljano z metodo nedoločenih koeficientov.

Poglavje 3

Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

Naloga 3.1. *Začetni problem*

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo. S korakom $h = 0.1$ *določite numerična približka* $y_1 \sim y(0.1)$ *ter* $y_2 \sim y(0.2)$.

Rešitev:
Po eksplicitni Eulerjevi metodi računamo približke za rešitev diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

po formuli

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

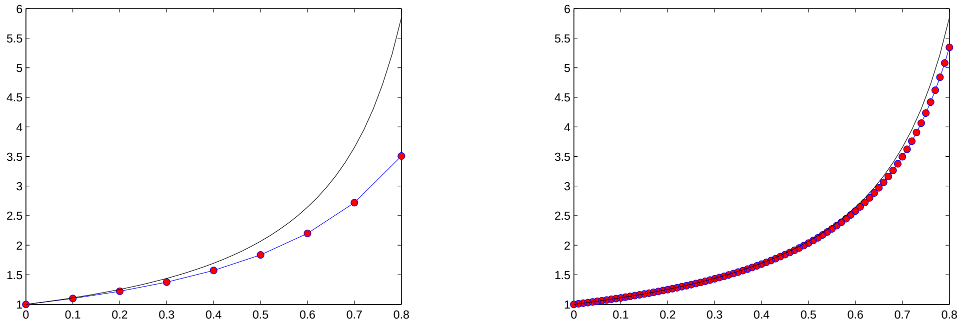
Za dan primer dobimo

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\
&x_1 = 0.1, \quad y_1 = y_0 + h\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 1.1, \\
&x_2 = 0.2, \quad y_2 = y_1 + h\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 1.222.
\end{aligned}$$

Graf numerične in točne rešitve na intevalu $[0, 1]$ za korak $h = 0.1$ in $h = 0.01$ je prikazan na sliki 3.1.

Naloga 3.2. *S pomočjo Taylorjevega polinoma stopnje* 4 *izračunajte numerični približek za rešitev* $y(0.1)$ *diferencialne enačbe*

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$



Slika 3.1: Numerična rešitev pri koraku $h = 0.1$ (levo) ter $h = 0.01$ (desno) ter točna rešitev (črn graf) diferencialne enačbe $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Rešitev:
Če poznamo vrednost $y(x_n)$, potem dobimo približek za $y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$ tako, da razvijemo funkcijo y v Taylorjevo vrsto okrog točke x_n,

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \ldots,$$

in razvoj odrežemo pri neki izbrani potenci m. Odvode neznane funkcije y v točki x_n izračunamo z odvajanjem funkcije f. In sicer je

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}f(x, y(x)) =: f^{(k)}(x, y(x)), \quad k \geq 1,$$

oziroma

$$\begin{aligned}
y' &= f, \\
y'' &= \frac{d}{dx}f = f_x + f_y f, \\
y''' &= \frac{d^2}{dx^2}f = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Taylorjeva metoda reda m se tako glasi

$$y_{n+1} = y_n + hf'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^{(m-1)}(x_n, y_n).$$

Za dano diferencialno enačbo velja

$$\begin{aligned}
y' &= x^2 + y^2, \\
y'' &= 2x + 2yy', \\
y''' &= 2 + 2y'^2 + 2yy'', \\
y^{(4)} &= 6y'y'' + 2yy'''
\end{aligned}$$

in v točki $x = 0$ dobimo

$$y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{(4)}(0) = 28.$$

Nov približek je tako enak

$$y_1 = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2}2 + \frac{(0.1)^3}{6}8 + \frac{(0.1)^4}{24}28 = 1.11145.$$

Čeprav lahko dobimo preko razvoja v Taylorjevo vrsto metode poljubnega reda, se le te v praksi ne uporabljajo, saj so računsko prezahtevne - zahtevajo preveč izračunov vrednosti funkcije f ter njenih odvodov.

Naloga 3.3. *Izpeljite trapezno formulo*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

za reševanje začetnega problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Rešitev:
Diferencialno enačbo integriramo in za aproksimacijo integrala na desni strani uporabimo trapezno pravilo:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \frac{h}{2}\left(f\left(x_n, y(x_n)\right) + f\left(x_{n+1}, y(x_{n+1})\right)\right) - \frac{h^3}{12}f''(\xi, y(\xi)).$$

Napako zanemarimo in točne vrednosti nadomestimo s približnimi $y_n \sim y(x_n)$. Dobimo iskano metodo, ki je implicitna in ima red lokalne napake enak 3.

Naloga 3.4. *Diferencialno enačbo*

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 0,$$

rešujemo s trapezno formulo iz naloge 3.3. S korakom $h = 0.1$ določite numerični približek $y_1 \sim y(0.1)$.

Rešitev:
Po trapezni metodi dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(x_0^2 - y_0^2 + x_1^2 - y_1^2\right), \quad x_0 = 0, x_1 = x_0 + h,$$

kar nam da kvadratno enačbo

$$\frac{h}{2}y_1^2 + y_1 - y_0 - \frac{h}{2}\left(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2\right) = 0$$

za neznan y_1. Dobimo dve rešitvi

$$y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2)}}{h},$$

vprašanje je, katero izbrati. Če izberemo predznak $-$, potem je $\lim_{h\to 0} y_1 = -\infty$, če izberemo predznak $+$, pa dobimo $\lim_{h\to 0} y_1 = y_0$. Nov približek je tako enak

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2hy_0 + h^2(x_0^2 + x_1^2 - y_0^2)}}{h}.$$

Za $y_0 = 0$ in $h = 0.1$ dobimo

$$y_1 = 4.999875 \cdot 10^{-4}.$$

Naloga 3.5. *Diferencialno enačbo*

$$y' = -50y + 100, \quad y(0) = y_0,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$*. Izpeljite splošno formulo za numerične približke* y_n *ter določite vrednosti* h*, pri katerih numerični približek konvergira k točni rešitvi, ko gre* $x \to \infty$*. Komentirajte obnašanje numerične rešitve glede na različne vrednosti* h*.*

Rešitev:
Ker je enačba linearna, lahko izpeljemo splošno formulo za približke y_n. In sicer velja

$$\begin{aligned}
y_n &= y_{n-1} + h(-50x_{n-1} + 100) = y_{n-1}(1 - 50h) + 100h = \\
&= (y_{n-2}(1 - 50h) + 100h)(1 - 50h) + 100h = \\
&= y_{n-2}(1 - 50h)^2 + 100h\,((1 - 50h) + 1) = \\
&= y_{n-3}(1 - 50h)^3 + 100h\,\big((1 - 50h)^2 + (1 - 50h) + 1\big) = \dots \\
&= y_0(1 - 50h)^n + 100h\,\big((1 - 50h)^{n-1} + \dots + (1 - 50h) + 1\big) = \\
&= y_0(1 - 50h)^n + 100h\frac{1 - (1 - 50h)^n}{50h} = \\
&= (y_0 - 2)(1 - 50h)^n + 2.
\end{aligned}$$

Točna rešitev je enaka

$$y(x) = (y_0 - 2)e^{-50x} + 2$$

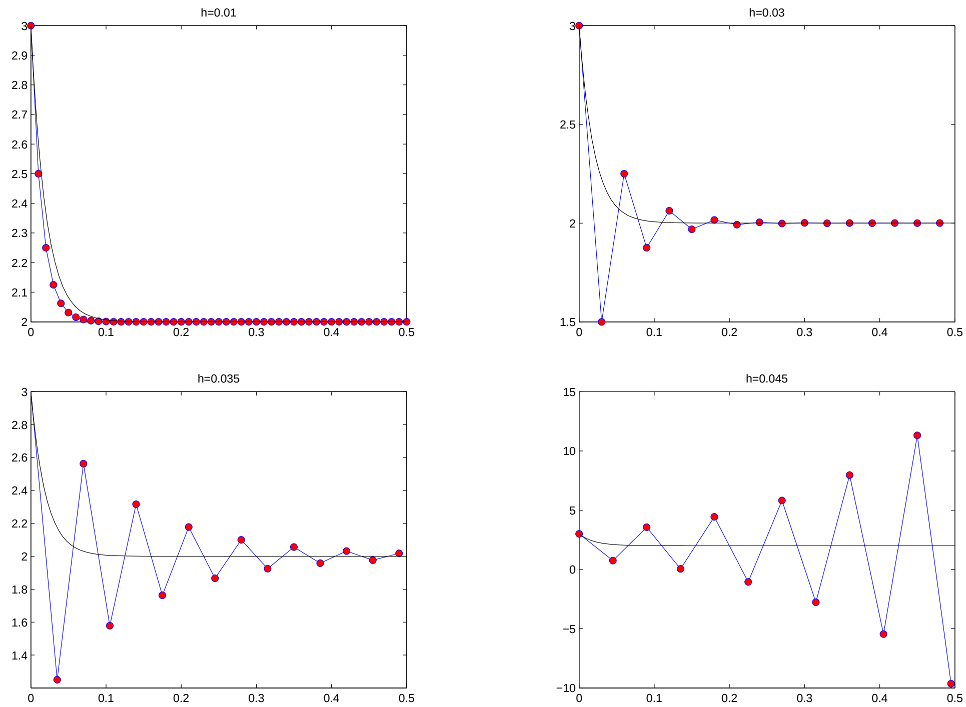
in zanjo velja, da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2.$$

Numerična rešitev gre proti nič, ko gre $n \to \infty$, če velja pogoj $|1 - 50h| < 1$. Ta pogoj je izpolnjen za

$$h \in \left(0, \frac{1}{50}\right] \cup \left(\frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right).$$

Za $h \in \left(\frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right)$ numerična rešitev konvergira proti točni, vendar oscilira. Na sliki 3.2 lahko vidimo primere numerične rešitve za $h = 0.1, 0.3, 0.35, 0.45$.



Slika 3.2: Numerična rešitev diferencialne enačbe $y' = -50y + 100$, $y_0 = 3$ z eksplicitno Eulerjevo metodo s koraki $h = 0.1, 0.3, 0.35, 0.45$.

Naloga 3.6. *Diferencialno enačbo*

$$y' = -50y + 100, \quad y(0) = y_0,$$

rešujemo z implicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. *Izpeljite splošno formulo za numerične približke* y_n *ter določite vrednosti* h*, pri katerih numerični približek konvergira k točni rešitvi, ko gre* $x \to \infty$.

Rešitev:
Približek za točno vrednost v točki x_n dobimo tako, da rešimo enačbo

$$y_n = y_{n-1} + h(-50y_n + 100).$$

Ker je diferencialna enačba linearna, neznanka y_n tudi nastopa linearno. Dobimo

$$y_n = \frac{y_{n-1} + 100h}{1 + 50h}.$$

Nadaljujemo in dobimo

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{\frac{y_{n-2}+100h}{1+50h}+100h}{1+50h} = \frac{y_{n-2}+100h+100h(1+50h)}{(1+50h)^2} = \\
&= \frac{y_{n-3}+100h+100h(1+50h)+ +100h(1+50h)^2}{(1+50h)^3} = \dots \\
&= \frac{y_0+100h\left(1+(1+50h)+\cdots+(1+50h)^{n-1}\right)}{(1+50h)^n} = \\
&= (y_0-2)\frac{1}{(1+50h)^n}+2.
\end{aligned}$$

Za točno rešitev

$$y(x) = (y_0-2)e^{-50x}+2$$

velja, da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2.$$

Numerična rešitev gre proti nič, ko gre $n \to \infty$, če velja pogoj $\frac{1}{|1-50h|} < 1$, kar pa je res za vsak $h > 0$. Pravimo, da je metoda A-stabilna.

Naloga 3.7. *Diferencialno enačbo*

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0 \neq 0,$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Izpeljite splošno formulo za numerične približke y_n ter obravnavajte obnašanje numerične rešitve, ko gre $n \to \infty$ glede na različne vrednosti a in h.

Rešitev:
Ker je enačba linearna, lahko izpeljemo splošno formulo za približke y_n. In sicer velja

$$y_n = y_{n-1} + ahy_{n-1} = (1+ah)y_{n-1} = (1+ah)^2 y_{n-2} = \cdots = (1+ah)^n y_0.$$

Točna rešitev v točki x_n je enaka

$$y(x_n) = y_0\left(e^{ah}\right)^n.$$

Če je $a > 0$, potem točna rešitev raste, ko gre $x \to \infty$, prav tako pa tudi numerična za vsak $h > 0$. Ker velja $1 < 1 + ah < e^{ah}$, raste numerična rešitev počasneje od točne. Za $a = 0$, sta obe rešitvi enaki $y = y_h = y_0$. Za $a < 0$, pa numerična rešitev sledi točni, če je izpolnjen pogoj $|1 + ah| < 1$ oziroma za $0 < h < -2/a$.

Naloga 3.8. *Določite red lokalne napake eksplicitne Eulerjeve metode.*

Rešitev:
Lokalna napaka je razlika med numeričnim približkom y_{n+1} ter točno vrednostjo rešitve v točki x_{n+1} ob predpostavki, da se obe rešitvi ujemata na vseh prejšnjih korakih. Če razvijemo točno rešitev v Taylorjevo vrsto okrog x_n in upoštevamo

$$\begin{aligned} y' &= f, \\ y'' &= f_x + f_y f, \\ y'' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f), \quad \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

dobimo

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right) = \\ &= y(x_n) + hf\left(x_n, y(x_n)\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y(x_n)\right) + f_y\left(x_n, y(x_n)\right) f\left(x_n, y(x_n)\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pri lokalni napaki predpostavimo, da je $y(x_n) = y_n$. Razlika je tako enaka

$$\begin{aligned} &y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) - y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \\ &- \left(y_n + hf\left(x_n, y_n\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y_n\right) + f_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right) = \\ &= -\frac{h^2}{2}\left(f_x\left(x_n, y_n\right) + f_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Lokalna napaka je torej reda 2.

Naloga 3.9. *Določite red lokalne napake implicitne Eulerjeve metode.*

Rešitev:
Lokalna napaka je enaka

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}),$$

ob predpostavki, da velja $y_{n-k} = y(x_{n-k})$ za vse $k \geq 0$. Razvijmo najprej v Taylorjevo vrsto okrog točke (x_n, y_n) prirastek $f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Z upoštevanjem razvoja

$$\begin{aligned} &f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(x, y)\Delta x^2 + f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}f_{yy}(x, y)\Delta y^2 + \mathcal{O}\left((\Delta x + \Delta y)^2\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dobimo

$$\begin{aligned} &f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = f\left(x_n + h, y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right) = \\ &= f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right) = \\ &= f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right)\left(f\left(x_n, y_n\right) + \mathcal{O}\left(h\right)\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right) = \\ &= f\left(x_n, y_n\right) + hf_x\left(x_n, y_n\right) + hf_y\left(x_n, y_n\right) f\left(x_n, y_n\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je razvoj numerične rešitve enak

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + h^2 f_x(x_n, y_n) + h^2 f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Primerjamo z razvojem točne rešitve, pri čemer upoštevamo formule (3.1), in dobimo

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \frac{1}{2}h^2 \left(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right).\right)$$

Lokalna napaka je torej reda 2.

Naloga 3.10. *Rešujemo diferencialno enačbo*

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1.$$

Z Runge-Kutta metodo

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

s korakom $h = 0.1$ določite numerični približek $y_1 \sim y(0.1)$.

Rešitev:
Iz $x_0 = 0$ in $y_0 = 1$ izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) = \frac{1}{10}(-2x_0 y_0) = 0, \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = \frac{1}{10}(-2)(x_0 + 0.05)(y_0 + 0) = -0.01, \\ k_3 &= hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2) = \frac{1}{10}(-2)(x_0 + 0.1)(y_0 - 0 - 0.02) = 0.0196, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 = 0.9900666$$

Naloga 3.11. *Z Runge-Kutta metodo*

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

rešujemo začetni problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

pri čemer je $\lambda < 0$. Zapišite splošno formulo za numerične približke y_n pri izbranem koraku h. Kako velik je lahko korak h, da se bo numerična rešitev obnašala kot točna, ko gre $x \to \infty$. Določite inteval absolutne stabilnosti za $\lambda = -4$ ter $\lambda = -100$.

Rešitev:
Najprej izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) = h\lambda y_n, \\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = h\lambda\left(y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = h\lambda y_n\left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right), \\
k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) = h\lambda(y_n - k_1 + 2k_2) = h\lambda y_n\left(1 + h\lambda + h^2\lambda^2\right)
\end{aligned}$$

in nato

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 = y_n\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right).$$

Od tod sledi, da je

$$y_n = y_0\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right)^n.$$

Točna rešitev je enaka

$$y(x) = y_0 e^{\lambda x}$$

in zanjo velja, da za $\lambda < 0$ pada proti nič, ko gre $x \to \infty$. Za numerično rešitev bo to res, če bo izpolnjen pogoj

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3\right| < 1.$$

Uporabimo sledeče rezultate, ki jih lahko preverimo npr. v Mathematici:

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2, \tag{3.4}$$

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2.51275, \tag{3.5}$$

$$\left|1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right| < 1 \quad \text{za} \quad 0 < x < 2.78529. \tag{3.6}$$

Iz (3.5) sledi, da mora za korak h veljati

$$h \in \left(0, \frac{2.51275}{-\lambda}\right).$$

Dobljen interval imenujemo interval absolutne stabilnosti. Za $\lambda = -4$ je enak $(0, 0.6281)$, za $\lambda = -100$ pa $(0, 0.0251275)$.

Naloga 3.12. *Določite red lokalne napake izboljšane Eulerjeve metode oziroma* 2*-stopenjske Runge-Kutta metode*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Rešitev:
Lokalna napaka je enaka

$$\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y(x_{n+1}),$$

ob predpostavki, da velja $y_{n-k} = y(x_{n-k})$ za vse $k \geq 0$. Razvijmo najprej v Taylorjevo vrsto okrog (x_n, y_n) koeficiete k_i. Zaradi večje preglednosti izpuščajmo argumente. Dobimo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf, \\ k_2 &= hf\left(\cdot + \frac{h}{2}, \cdot + \frac{1}{2}k_1\right) = \\ &= h\left(f + \frac{h}{2}f_x + \frac{1}{2}k_1 f_y + \frac{h^2}{8}f_{xx} + \frac{h}{4}k_1 f_{xy} + \frac{1}{8}k_1^2 f_{yy} + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right) = \\ &= h\left(f + \frac{h}{2}f_x + \frac{h}{2}f_y f + \frac{h^2}{8}f_{xx} + \frac{h^2}{4}f_{xy}f + \frac{h^2}{8}f_{yy}f^2 + \mathcal{O}\left(h^3\right)\right). \end{aligned}$$

Od tod dobimo razvoj numeričnega približka y_{n+1}:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + \\ + \frac{h^3}{8}f_{xx}(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4}f_{xy}(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + \frac{h^3}{8}f_{yy}(x_n, y_n)f^2(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right). \end{aligned}$$

Ob predpostavki, da je $y_n = y(x_n)$, je razvoj točne rešitve $y(x_{n+1})$ enak

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right)(x_n, y_n) + \\ + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right), \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali (3.1). Lokalna napaka je tako enaka

$$\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{6}h^3\left(\frac{1}{4}f_{xx} + \frac{1}{2}f_{xy}f + \frac{1}{4}f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right).$$

Lokalna napaka je reda 3, metoda pa reda 2.

Naloga 3.13. *Določite red lokalne napake* 1*-stopenjske implicitne Runge-Kutta metode*

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_1. \end{aligned}$$

Ali je metoda A-stabilna?

Rešitev:
Razvijmo najprej v Taylorjevo vrsto okrog točke (x_n, y_n) koeficient k_1:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h}{2} k_1 f_y(x_n, y_n) + \\
&\quad + \frac{h^2}{8} f_{xx}(x_n, y_n) + \frac{h^2}{4} k_1 f_{xy}(x_n, y_n) + \frac{h^2}{8} k_1^2 f_y(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right) = \\
&= f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{8} f_{xx}(x_n, y_n) + \\
&\quad + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^2\right)\right) f_y(x_n, y_n) + \\
&\quad + \frac{h^2}{4}\left(f(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h)\right) f_{xy}(x_n, y_n) + \frac{h^2}{8}\left(f(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h)\right)^2 f_y(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right) = \\
&= f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + \\
&\quad + h^2\left(\frac{1}{4} f_x f_y + \frac{1}{4} f_y^2 f + \frac{1}{8} f_{xx} + \frac{1}{8} f_{yy} f^2 + \frac{1}{4} f_{xy} f\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^3\right).
\end{aligned}
$$

Razvoj numerične rešitve okrog točke (x_n, y_n) je tako enak

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = y_n &+ h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n)\right) + \\
&+ h^3\left(\frac{1}{4} f_x f_y + \frac{1}{4} f_y^2 f + \frac{1}{8} f_{xx} + \frac{1}{8} f_{yy} f^2 + \frac{1}{4} f_{xy} f\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right).
\end{aligned}
$$

Z upoštevanjem (3.1) ter (3.2) pa dobimo lokalno napako

$$
\begin{aligned}
\tau_{n+1}(h) &= y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \\
&= -h^3\left(\frac{1}{24} f_{xx} + \frac{1}{12} f_{xy} f + \frac{1}{24} f_{yy} f^2 - \frac{1}{12} f_y^2 f - \frac{1}{12} f_x f_y\right)(x_n, y_n) + \mathcal{O}\left(h^4\right).
\end{aligned}
$$

Red lokalne napake je enak 3, metoda pa je reda 2.

Preverimo še A–stabilnost. Metoda je A–stabilna, če je stabilna pri reševanju diferencialne enačbe $y' = \lambda y$ za $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Čeprav je metoda implicitna, lahko za dano linearno diferencialno enačbo iz enačbe

$$
k_1 = \lambda\left(y_n + \frac{h}{2} k_1\right)
$$

izračunamo koeficient k_1:

$$
k_1 = \frac{2\lambda y_n}{2 - \lambda h}.
$$

Nov približek je tako enak

$$
y_{n+1} = y_n + h k_1 = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} y_n = \cdots = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^{n+1} y_0.
$$

Naj bo $\lambda = u + iv$, $u < 0$. Ker je

$$\left|\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right| = \sqrt{\frac{(2+hu)^2 + h^2v^2}{(2-hu)^2 + h^2v^2}} < 1$$

za vse $h > 0$, je metoda A–stabilna.

Naloga 3.14. *Določite manjkajoče konstante A, B, C in D tako, da bo 3–stopenjska Runge–Kutta metoda*

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ A & B & \frac{5}{4} & 0 \\ \hline & C & \frac{1}{2} & D \end{array}$$

maksimalnega reda.

Rešitev:
Metoda bo maksimalnega možnega reda, če bo taka tudi lokalna napaka za poljubno diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$. Izberimo posebno diferencialno enačbo

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0,$$

katere točna rešitev je enaka

$$y(x) = y_0 e^{\lambda x}.$$

Izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right) = h\lambda y_n, \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) = h\lambda y_n\left(1 + \frac{1}{3}h\lambda\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + Ah, y_n + Bk_1 + \frac{5}{4}k_2\right) = h\lambda y_n\left(1 + h\lambda\left(B + \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{12}h^2\lambda^2\right), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + Ck_1 + \frac{1}{2}k_2 + Dk_3 = \\ &= y_n\left(1 + h\lambda\left(C + \frac{1}{2} + D\right) + h^2\lambda^2\left(\frac{1}{6} + DB + \frac{5}{4}D\right) + \frac{5}{12}Dh^3\lambda^3\right). \end{aligned}$$

Točna rešitev v točki x_{n+1} se razvije kot

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y_0 e^{\lambda(x_n+h)} = y_0 e^{\lambda x_n} e^{\lambda h} = y_(x_n) e^{\lambda h} = \\ &= y(x_n)\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{4!}h^4\lambda^4 + \mathcal{O}\left(h^5\right)\right) \end{aligned}$$

Lokalna napaka bo maksimalnega reda za dano DE, če bo veljalo

$$\begin{aligned}
&C + \frac{1}{2} + D = 1, \\
&\frac{1}{6} + DB + \frac{5}{4}D = \frac{1}{2}, \\
&\frac{5}{12}D = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Rešitev tega linearnega sistema se glasi

$$B = -\frac{5}{12}, \quad C = \frac{1}{10}, \quad D = \frac{2}{5}.$$

Manjka še konstanta A. Le to izračunamo iz pogoja

$$A = B + \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{6}.$$

Dobili smo metodo

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
\frac{5}{6} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{4} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5}
\end{array}.$$

Predpostavimo lahko, da je red lokalne napake enak 4, vendar pa je treba to še preveriti z razvoji v Taylorjevo vrsto za poljuben f.

Naloga 3.15. *Dana je dvostopenjska Runge-Kutta metoda*

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right), \\
k_2 &= hf\left(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1\right), \\
y_{n+1} &= y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2.
\end{aligned}$$

Kakšne zveze morajo veljati med koeficienti α, β, γ_1 ter γ_2, da bo metoda reda 2. Za primer $\gamma_2 = \frac{3}{4}$ zapišite metodo ter vodilni člen lokalne napake.

Rešitev:

Naloga 3.16. *Dana je s–stopenjska implicitna Runge-Kutta metoda*

$$\begin{aligned}
k_j &= hf\left(x_n + \alpha_j h, y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell} k_\ell\right), \quad j = 1, 2, \ldots, s, \\
y_{n+1} &= y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \gamma_\ell k_\ell. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Rešujemo začetni problem $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, pri čemer je f Lipschitzova v drugi spremenljivki s konstanto L:

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L\,|y - z|\,.$$

Dokažite, da za

$$h < \left(L \max_{i=1,2,\ldots,s} \sum_{\ell=1}^{s} |\beta_{j,\ell}|\right)^{-1}$$

obstaja enolična rešitev $\boldsymbol{K} := (k_1, k_2, \ldots, k_s)$ nelinearnega sistema (3.7) ki jo lahko izračunamo z iteracijami

$$k_j^{(r)} = hf\left(x_n + \alpha_j h, y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell} k_\ell^{(r)}\right), \quad j = 1,2,\ldots,s, \quad r = 0,1,2,\ldots$$

Rešitev:
Definirajmo preslikavo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{F} = (F_j)_{j=1}^{s}$, s predpisom

$$F_j\left(\boldsymbol{K}\right) = hf\left(x_n + \alpha_j h, y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell} k_\ell\right), \quad j = 1,2,\ldots,s,$$

in dokažimo, da je za dovolj majhen h preslikava $\boldsymbol{F}$ skrčitev. Ker velja

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}^{(2)}\right) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}^{(1)}\right)\right\|_\infty = \max_{j=1,2,\ldots,s} \left|F_j\left(\boldsymbol{K}^{(2)}\right) - F_j\left(\boldsymbol{K}^{(1)}\right)\right| = \\
&= \max_{j=1,2,\ldots,s} \left|hf\left(x_n + \alpha_j h, y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell} k_\ell^{(2)}\right) - hf\left(x_n + \alpha_j h, y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell} k_\ell^{(1)}\right)\right| \le \\
&\le hL \max_{j=1,2,\ldots,s} \left|\sum_{\ell=1}^{s} \beta_{j,\ell}\left(k_\ell^{(2)} - k_\ell^{(1)}\right)\right| \le \\
&\le hL \max_{j=1,2,\ldots,s} \sum_{\ell=1}^{s} |\beta_{j,\ell}| \left\|\boldsymbol{K}^{(2)} - \boldsymbol{K}^{(1)}\right\|,
\end{aligned}$$

bo preslikava skrčitev za vsak h, za katerega velja

$$hL \max_{j=1,2,\ldots,s} \sum_{\ell=1}^{s} |\beta_{j,\ell}| < M < 1.$$

V tem primeru za zaporedje iteracij

$$\boldsymbol{K}^{(r+1)} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}^{(r)}\right), \quad r = 0,1,2,\ldots$$

velja

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{(r)}\right\|_\infty = \left\|\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}\right) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}^{(r-1)}\right)\right\|_\infty \le M\left\|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{(r-1)}\right\|_\infty \le \\
&\le M\left\|\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}\right) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{K}^{(r-2)}\right)\right\|_\infty \le M^2\left\|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{(r-2)}\right\|_\infty \le \cdots \le M^r\left\|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{(0)}\right\|_\infty
\end{aligned}$$

in

$$\left\|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}^{(r)}\right\|_\infty \overset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Zaporedje iteracij torek konvergira k točni rešitvi, ki je po Banachovem skrčitvenem izreku enolična. Za začetni približek lahko vzamemo kar $\boldsymbol{K}^{(0)} = \left(k_\ell^{(0)}\right)_{\ell=0}^{s} = \mathbf{0}$.

Naloga 3.17. *Dana je diferencialna enačba drugega reda*

$$y'' = y'y^2 - y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{3.8}$$

Enačbo prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda ter izračunajte približka $y_1 \sim y(x_1)$ ter $y_2 \sim y(x_2)$ z uporabo eksplicitne Eulerjeve metode s korakom $h = 0.1$.

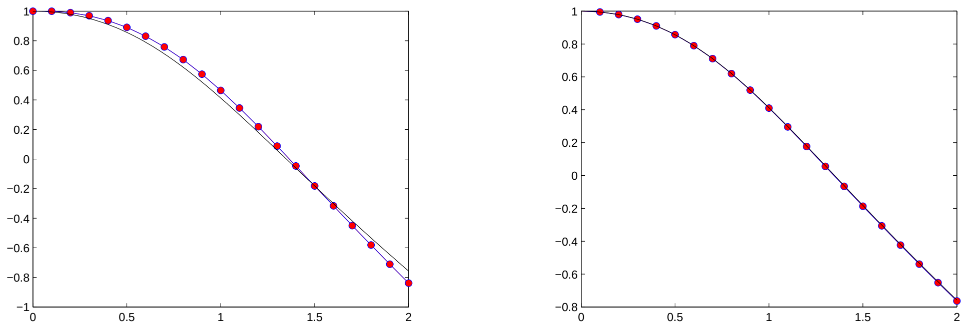
Rešitev:
Enačbo prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda z vpeljavo nove funkcije $z = y'$. In sicer dobimo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ zy^2 - y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z eksplicitno Eulerjevo metodo dobimo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0 y_0^2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 y_1^2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ -0.21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rešitev je prikazana na sliki 3.3 (levo).



Slika 3.3: Numerična rešitev diferencialne enačbe (3.8) pri koraku $h = 0.1$ z uporabo eksplicitne Eulerjeve metode (levo) ter modificirane Eulerjeve metode (desno) v primerjavi s točno rešitvijo (črn graf).

Naloga 3.18. *Dana je diferencialna enačba drugega reda*

$$y'' = y'y^2 - y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Enačbo prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda ter izračunajte približka $y_1 \sim y(x_1)$ *ter* $y_2 \sim y(x_2)$ *z uporabo modificirane Eulerjeve metode s korakom* $h = 0.1$.

Rešitev:
Enačbo prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda z vpeljavo nove funkcije $z = y'$. In sicer dobimo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ zy^2 - y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z modificirano Eulerjevo metodo

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

dobimo po prvem koraku

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{pmatrix} &= h \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0 y_0^2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{pmatrix} &= h \begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ \left(z_0 + \frac{1}{2}\ell_1\right)\left(y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)^2 - \left(y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.005 \\ -0.105 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.995 \\ -0.105 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

po drugem pa

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{pmatrix} &= h \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 y_1^2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0105 \\ -0.1099 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{pmatrix} &= h \begin{pmatrix} z_1 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ \left(z_1 + \frac{1}{2}\ell_1\right)\left(y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)^2 - \left(y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0160 \\ -0.1146 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9790 \\ -0.2196 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Rešitev je prikazana na sliki 3.3 (desno).

Naloga 3.19. *Diferencialno enačbo*

$$y'' = 2xyy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda ter izračunajte približek za $y(1)$ z uporabo 4-stopenjske Runge-Kutta metode

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}.$$

s korakom $h = 0.5$.

Rešitev:

Enačbo prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda z vpeljavo nove funkcije $z = y'$. In sicer dobimo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2xyz \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definirajmo

$$\boldsymbol{Y} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}(1) \\ \boldsymbol{Y}(2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad F(x, \boldsymbol{Y}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}(2) \\ 2x\boldsymbol{Y}(1)\boldsymbol{Y}(2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Prvi korak Runge-Kutta metode se glasi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= hF(x_0, \boldsymbol{Y}_0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_2 &= hF\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.0625 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_3 &= hF\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right) = \begin{pmatrix} 0.5156 \\ 0.0645 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_4 &= hF(x_0 + h, \boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{k}_3) = \begin{pmatrix} 0.5322 \\ 0.2744 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_1 &= \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_2 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_3 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_4 = \begin{pmatrix} 0.5106 \\ 1.0881 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y(0.5) \\ y'(0.5) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

na drugem koraku pa dobimo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= hF(x_1, \boldsymbol{Y}_1) = \begin{pmatrix} 0.5440 \\ 0.2778 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_2 &= hF\left(x_1 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right) = \begin{pmatrix} 0.6135 \\ 0.7201 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_3 &= hF\left(x_1 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right) = \begin{pmatrix} 0.7241 \\ 0.8877 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_4 &= hF(x_1 + h, \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{k}_3) = \begin{pmatrix} 0.9879 \\ 2.4393 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_2 &= \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_2 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_3 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_4 = \begin{pmatrix} 1.2117 \\ 2.0768 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Naloga 3.20. *Diferencialno enačbo*

$$y'' - y'y^2 + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda ter izračunajte približek za $y(0.4)$ *z uporabo 4-stopenjske Runge-Kutta metode*

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}.$$

s korakom $h = 0.2$.

Rešitev:
Enačbo prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda z vpeljavo nove funkcije $z = y'$. In sicer dobimo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y^2 z - y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definirajmo

$$\boldsymbol{Y} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}(1) \\ \boldsymbol{Y}(2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad F(x, \boldsymbol{Y}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}(2) \\ \boldsymbol{Y}(1)^2 \boldsymbol{Y}(2) - \boldsymbol{Y}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Prvi korak Runge-Kutta metode se glasi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= hF(x_0, \boldsymbol{Y}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_2 &= hF\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right) = \begin{pmatrix} -0.02 \\ -0.22 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_3 &= hF\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right) = \begin{pmatrix} -0.0220 \\ -0.2196 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{k}_4 &= hF(x_0 + h, \boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{k}_3) = \begin{pmatrix} -0.0439 \\ -0.2376 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_1 &= \boldsymbol{Y}_0 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_2 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_3 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_4 = \begin{pmatrix} 0.9787 \\ -0.2195 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y(0.2) \\ y'(0.2) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

na drugem koraku pa dobimo

$$\boldsymbol{k}_1 = hF\left(x_1, \boldsymbol{Y}_1\right) = \begin{pmatrix} -0.0439 \\ -0.2378 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = hF\left(x_1 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right) = \begin{pmatrix} -0.0677 \\ -0.2533 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = hF\left(x_1 + \frac{1}{2}h, \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right) = \begin{pmatrix} -0.0692 \\ -0.2508 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_4 = hF\left(x_1 + h, \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{k}_3\right) = \begin{pmatrix} -0.0940 \\ -0.2597 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{Y}_1 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_2 + \frac{2}{6}\boldsymbol{k}_3 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_4 = \begin{pmatrix} 0.9101 \\ -0.4704 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y(0.4) \\ y'(0.4) \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.21. *Rešujemo sistem*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \quad x(0) = 1 \\ \dot{y} &= x, \qquad y(0) = 0. \end{aligned}$$

Poiščite točno rešitev. Numerično rešite problem s trapeznim pravilom.

Rešitev:
Z odvajanjem prve enačbe in upoštevanjem druge dobimo linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$\ddot{x} + x = 0,$$

katere rešitev je enaka

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Iz začetnih pogojev dobimo

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0.$$

Rešitev je torej krožnica

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Pri numeričnem reševanju s trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

zapišemo enačbo v obliki

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in definiramo

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \end{pmatrix}, \quad t_n = t_0 + hn.$$

Nov približek $\boldsymbol{r}_{n+1}$ izračunamo iz enačbe

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{r}_n + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\boldsymbol{r}_n + \boldsymbol{r}_{n+1}).$$

In sicer je

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \left(I - \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \boldsymbol{r}_n,$$

kjer je I identična matrika. Če izračunamo se inverz matrike v zgornjem izrazu dobimo

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \Phi(h)\boldsymbol{r}_n, \quad \Phi(h) := \frac{1}{1+\frac{h^2}{4}} \left(I + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Splošna formula se tako glasi

$$\boldsymbol{r}_n = \Phi(h)^n \boldsymbol{r}_0.$$

Naloga 3.22. *Sistem diferencialnih enačb*

$$y' = \Lambda y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

rešujemo z eksplicitno Eulerjevo metodo. Kolikšen je lahko največ korak h, da se bo numerična rešitev obnašala kot točna, ko gre $x \to \infty$.

Rešitev:
Izračunajmo najprej točno rešitev. Matriko Λ diagonaliziramo

$$\Lambda = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{10}{999} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Če definiramo $z := (z_1, z_2)^T := P^{-1}y$, nam sistem razpade na dve diferencialni enačbi prvega reda

$$z_1' = -100 z_1, \quad z_2' = -\frac{1}{10} z_2,$$

katerih rešitev je enaka

$$z_1 = C_1 e^{-100x}, \quad z_2 = C_2 e^{-\frac{1}{10}x},$$

kjer sta C_1 in C_2 konstanti. Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo, da je

$$y = Pz = P \begin{pmatrix} e^{-100x} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{10}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{-100x} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{10}x} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z Eulerjevo metodo izračunani približki so enaki

$$y_n = y_{n-1} + h\Lambda y_{n-1} = (I + h\Lambda)\, y_{n-1} = \cdots = (I + h\Lambda)^n\, y_0,$$

kjer je $y_0 = y(0)$. Z upoštevanjem diagonalizacije matrike dobimo

$$y_n = P\,(I + hD)^n\, P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (1-100h)^n & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{10}h\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Od tod sledi, da mora za korak h veljati

$$|1 - 100h| < 1, \qquad \left|1 - \frac{1}{10}h\right| < 1.$$

Interval absolutne stabilnosti je torej enak $\left(0, \frac{1}{50}\right)$.

Naloga 3.23. *Dana je linearna veččlenska metoda*

$$y_n = \frac{1}{2}\,(y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}) + \frac{h}{6}\,(13f_{n-1} - 8f_{n-2} + f_{n-3})\,.$$

Določite rodovna polinoma, red metode in vodilni koeficient lokalne napake. Ali je metoda ničelno stabilna? Ali je konvergentna?

Rešitev:
Metoda je tričlenska in eksplicitna. Rodovna polinoma sta enaka

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 + \xi - \frac{1}{2}, \\ \sigma(\xi) &= \frac{13}{6}\xi^2 - \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Lokalna napaka je reda r, če velja relacija

$$\rho(1+z) + \ln(1+z)\sigma(1+z) = C_{r+1} z^{r+1} + \mathcal{O}\left(z^{r+2}\right), \tag{3.9}$$

kjer je C_{r+1} konstanta. Izračunamo

$$\begin{aligned} \rho(1+z) &= -z^3 - \frac{5}{2}z^2 - z, \\ \sigma(1+z) &= \frac{13}{6}z^2 + 3z + 1, \\ \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \ldots \end{aligned}$$

Koeficienti pri potencah z^i na levi strani relacije (3.9) so enaki

$$\begin{aligned} 1 :&\quad 0, \\ z :&\quad -1 + 1 = 0, \\ z^2 :&\quad -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 3 = 0, \\ z^3 :&\quad -1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{13}{6} = 0, \\ z^4 :&\quad -\frac{1}{4} + 1 - \frac{13}{12} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Red lokalne napake je tako enak 4, vodilni koeficient lokalne napake je $C_4 = -\frac{1}{3}$, metoda pa je reda 3. Za ničelno stabilnost je treba preveriti ničle karakterističnega polinoma ρ. Ker je

$$\rho(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)(1-\xi)(1+\xi),$$

so ničle enake $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ in $x = -1$. Ker so vse po absolutni vrednosti manjše ali enake ena, ničli $x = 1$ in $x = -1$ pa sta enostavni, metoda je ničelno stabilna. Ker je red metode več kot ena velja

$$\rho(0) = 0, \quad \rho'(1) + \sigma(1) = 0$$

in metoda je konsistentna. Ker je ničelno stabilna in konsistentna je tudi konvergentna.

Naloga 3.24. *Prvi rodovni polinom ρ linearne tričlenske metode je enak*

$$\rho(\xi) = \xi^3 - \xi^2 + \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}.$$

Določite celotno metodo tako, da bo eksplicitna in čim višjega reda. Ali je ničelno stabilna? Ali je konvergentna?

Rešitev:
Ker mora biti metoda eksplicitna, mora biti stopnja drugega rodovnega polinoma enaka 2. Zapišimo ga kot

$$\sigma(1+z) = az^2 + bz + c.$$

Če hočemo, da bo red metode čim višji, mora biti takšen tudi red lokalne napake. Torej morajo biti koeficienti pri potencah z^i na levi strani relacije (3.9) enaki nič za čim višje potence. Z upoštevanjem

$$\begin{aligned} \rho(1+z) &= z^3 + 2z^2 + \frac{5}{4}z, \\ \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots \end{aligned}$$

dobimo iz relacije (3.9) enačbe

$$\begin{aligned} z: &\quad \frac{5}{4} + c = 0, \\ z^2: &\quad 2 - \frac{1}{2}c + b = 0, \\ z^3: &\quad 1 + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}b + a = 0, \end{aligned}$$

katerih rešitev je enaka

$$a = -\frac{91}{48}, \quad b = -\frac{21}{8}, \quad c = -\frac{5}{4}.$$

Pri potenci z^4 dobimo na levi strani relacije (3.9) vrednost

$$z^4: \quad -\frac{1}{4}c + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}a = \frac{37}{96}.$$

Red lokalne napake je torej enak 4, vodilni koeficient je $C_4 = \frac{37}{96}$, metoda pa je reda 3. Iz izračunanih koeficientov določimo drugi rodovni polinom

$$\sigma(\xi) = -\frac{91}{48}(\xi-1)^2 - \frac{21}{8}(\xi-1) - \frac{5}{4} = -\frac{91}{48}\xi^2 + \frac{7}{6}\xi - \frac{25}{48}.$$

Metoda je tako enaka

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{4}y_{n-2} + \frac{1}{4}y_{n-3} + h\left(\frac{91}{48}f_{n-1} - \frac{7}{6}f_{n-2} + \frac{25}{48}f_{n-3}\right).$$

Ničle karakterističnega polinoma

$$\rho(\xi) = \xi^3 - \xi^2 + \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4} = (\xi-1)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)$$

so enake $x = 1$, $x = \frac{1}{2}i$ in $x = -\frac{1}{2}i$. Ker so vse po absolutni vrednosti manjše ali enake ena, ničla $x = 1$ pa je enostavna, metoda je ničelno stabilna. Ker je red metode več kot ena velja

$$\rho(0) = 0, \quad \rho'(1) + \sigma(1) = 0$$

in metoda je konsistentna. Ker je ničelno stabilna in konsistentna je tudi konvergentna.

Literatura

[1] S.D. Conte, C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1980.

[2] E. Isaacson, H.B. Keller: *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York, 1966.

[3] D. Kincaid, W. Cheney: *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[4] J. Kozak: *Numerična analiza*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.