UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Marjeta Krajnc

Numerična aproksimacija in interpolacija

ZBIRKA NALOG Z REŠITVAMI

Ljubljana, 2013

Kazalo

Zbirka vaj, ki je pred vami, je namenjena študentov druge stopnje matematike in finančne matematike za pomoč pri učenju in razumevanju problemov iz numerične aproksimacije in interpolacije. Na začetku vsakega poglavja je na kratko povzeta teorija, naloge pa so vse opremljene z rešitvami.

Poglavje 1

Teorija aproksimacije

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n so definirani kot

$$b_{n,i}(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_{n,i}$$

imenujemo Bernsteinov polinom stopnje n.

Bernsteinov operator

$$B_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{P}_n, \quad f(x) \mapsto B_n f(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x),$$

je linearen operator, ki funkciji f priredi Bernsteinov polinom $B_n f$ stopnje n.

Naloga 1.1. *Zapišite in narišite vse Bernsteinove bazne polinome stopnje* $n = 0, 1, 2, 3, 4$. *Kakšne so njihove vrednosti pri* $x = 0, 1$*?*

Rešitev:
Konstanten Bernsteinov polinom je en sam in je enak $b_{0,0}(x) = 1$. Linearna Bernsteinova bazna polinoma sta podana z

$$b_{1,0}(x) = (1-x), \quad b_{1,1}(x) = x,$$

pri $n = 2, 3, 4$ pa imamo

$$\begin{aligned}
n = 2: \quad & b_{2,0}(x) = (1-x)^2, \quad b_{2,1}(x) = 2x(1-x), \quad b_{2,2}(x) = x^2, \\
n = 3: \quad & b_{3,0}(x) = (1-x)^3, \quad b_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2, \\
& b_{3,2}(x) = 3x^2(1-x), \quad b_{3,3}(x) = x^3, \\
n = 4: \quad & b_{4,0}(x) = (1-x)^4, \quad b_{4,1}(x) = 4x(1-x)^3, \quad b_{4,2}(x) = 6x^2(1-x)^2, \\
& b_{4,3}(x) = 4x^3(1-x), \quad b_{4,4}(x) = x^4.
\end{aligned}$$

Za nekonstantne Bernsteinove bazne polinome velja

$$b_{n,i}(0) = b_{n,i}(1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

ter

$$b_{n,0}(0) = 1, \quad b_{n,n}(0) = 0, \quad b_{n,0}(1) = 0, \quad b_{n,n}(1) = 1.$$

Grafi Bernsteinovih baznih polinomov stopenj ≤ 4 so prikazani na sliki 1.1.

Slika 1.1: Grafi Bernsteinovih baznih polinomov stopenj ≤ 4.

Naloga 1.2. *Določite, kje na intervalu* $[0, 1]$ *je dosežen maksimum izraza*

$$\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad n \geq 1,$$

kolikšen je in kam gre, ko gre $n \to \infty$.

Rešitev:
Ta izraz predstavlja Bernsteinov bazni polinom. Če je $i = 0$ ali $i = n$, je maksimalna vrednost dosežena v enem od krajišč in je enaka 1. Za $i \neq 0$ in $i \neq n$ sta vrednosti v obeh krajiščih enaki nič. Ekstrem polinoma je tako dosežen pri ničli odvoda

$$b'_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} (i - nx),$$

to je v točki $x = \frac{i}{n}$. Vrednost polinoma je v tej točki enaka

$$b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} \frac{i^i}{n^n} (n-i)^{n-i}.$$

Z uporabo Stirlingove formule $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ dobimo, da je za velike n

$$b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) \sim \sqrt{\frac{n}{n-i}} \frac{i^i}{i!e^i}$$

in v limiti velja

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^i}{i!e^i} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}.$$

Naloga 1.3. *Dokažite, da Bernsteinovi bazni polinomi zadoščajo rekurzivni zvezi*

$$b_{n,i}(x) = (1-x)b_{n-1,i} + xb_{n-1,i-1}.$$

Dokažite tudi, da tvorijo particijo enote.

Rešitev:
Prva trditev sledi direktno iz definicije Bernsteinovih baznih polinomov in lastnosti binomskega simbola:

$$\begin{aligned}(1-x)b_{n-1,i} + xb_{n-1,i-1} &= (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-i} = \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right)x^i(1-x)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = b_{n,i}(x).\end{aligned}$$

Da tvorijo polinomi particijo enote dobimo iz

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = (x+(1-x))^n = 1.$$

Naloga 1.4. *Izpeljite formulo za k-ti odvod Bernsteinovega polinoma*

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x).$$

Rešitev:
Odvod Bernsteinovega baznega polinoma lahko zapišemo rekurzivno kot

$$b'_{n,i}(x) = n\left(b_{n-1,i-1}(x) - b_{n-1,i}(x)\right).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}B'_n f(x) &= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b'_{n,i}(x) = n\left(\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i-1}(x) - \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x)\right) = \\ &= n\left(\sum_{i=-1}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) b_{n-1,i}(x) - \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x)\right) = \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) b_{n-1,i}(x),\end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$. Če definiramo operator Δ, imenovan prema diferenca, ki deluje na zaporedju $(g_i)_i$ kot

$$\Delta g_i := g_{i+1} - g_i, \quad \Delta^k g_i = \Delta\left(\Delta^{k-1} g_i\right) = \Delta^{k-1} g_{i+1} - \Delta^{k-1} g_i,$$

potem je

$$B_n' f(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-1,i}(x).$$

Z istim sklepanjem vidimo, da velja

$$B_n^{(k)} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n-k,i}(x),$$

kar se preprosto dokaže z indukcijo.

Naloga 1.5. *Pokažite, da za Bernsteinov operator*

$$B_n : \mathcal{C}\left([0,1]\right) \to \mathbb{P}_n, \quad f \mapsto \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_{n,i}(x),$$

velja

$$B_n p_0(x) = 1, \quad B_n p_1(x) = x, \quad B_n p_2(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n},$$

kjer so $p_i(x) := x^i$, $i = 0, 1, 2$.

Rešitev:
Bernsteinov operator ohranja konstante, saj velja

$$B_n p_0(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Ohranjanje linearnih funkcij sledi iz

$$\begin{aligned} B_n p_1(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = x \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{n-1-(i-1)} = \\ &= x B_{n-1,i} p_0(x) = x. \end{aligned}$$

Pri kvadratičnih polinomih dobimo skorajšnje ohranjanje, saj velja

$$\begin{aligned} B_n p_2(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^2} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} = \\ &= \frac{n-1}{n} x \sum_{i=-1}^{n-1} \frac{i+1}{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} = \\ &= \frac{n-1}{n} x \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} b_{n-1,i} + \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1,i} \right) = \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Naloga 1.6. *Izračunajte $B_n x^3$ ter dokažite, da je*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n x^3 - x^3\right) = 3x^2(1-x).$$

Kaj lahko iz tega sklepate o hitrosti padanja napake aproksimacije?

Rešitev:
Najprej poenostavimo izraz $B_n x^3$, pri čemer si pomagamo z nalogo 1.7:

$$\begin{aligned}
\left(B_n x^3\right)(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i^3}{n^3}\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = x\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^2}\binom{n-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} = \\
&= x\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2}\binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} = \frac{x}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i^2+2i+1) b_{n-1,i}(x) = \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2} x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{(n-1)^2} b_{n-1,i}(x) + 2\frac{(n-1)}{n^2} x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{(n-1)} b_{n-1,i}(x) + \\
&\quad + \frac{x}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1,i}(x) = \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2} x \left(B_{n-1}x^2\right)(x) + 2\frac{(n-1)}{n^2} x \left(B_{n-1}x\right)(x) + \frac{x}{n^2} = \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2} x \left(\frac{n-2}{n-1}x^2 + \frac{x}{n-1}\right) + 2\frac{(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{x}{n^2} = \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 + 3\frac{n-1}{n^2} x^2 + \frac{x}{n^2}.
\end{aligned}$$

Iz izpeljanega dobimo

$$n\left(B_n x^3 - x^3\right) = \frac{2-3n}{n} x^3 + \frac{3n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n},$$

od koder sledi

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n x^3 - x^3\right) = 3x^2(1-x).$$

Sklepamo lahko, da napaka pada kot $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Naloga 1.7. *Numerično preverite obnašanje norme razlike $\|f - B_n f\|_\infty$ za funkcije*

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x\sqrt{x}, \quad f_3(x) = x^2\sqrt{x}.$$

Kaj lahko sklepate iz rezultatov?

Rešitev:
Iz dokaza Weierstrassovega izreka (glej [4], str. 18) vemo, da za poljubno zvezno funkcijo f zaporedje Bernsteinovih polinomov $B_n f$ konvergira proti f v neskončni normi. Vprašanje pa je, kako hitro konvregira. Predpostavimo, da se vodilni člen napake

n	$\|f_1 - B_n f_1\|_\infty$	α
1	0.2500000000	0
2	0.1844862627	0.438414701
3	0.1530507046	0.460719630
4	0.1336583404	0.470944966
5	0.1201654999	0.476898777
6	0.1100800173	0.48081219
7	0.1021724915	0.48358562
8	0.09575685320	0.48565568
9	0.09041599314	0.48726060
10	0.08587975866	0.48854169

Tabela 1.1: Tabela napak aproksimacije funkcije f_1 ter ocena reda aproksimacije.

n	$\|f_2 - B_n f_2\|_\infty$	α
1	0.1481481481	0
2	0.07676692312	0.948483863
3	0.05123675526	0.997167697
4	0.03820402729	1.020279824
5	0.03034769802	1.031713748
6	0.02512143254	1.03662618
7	0.02140795477	1.03767818
8	0.01864089304	1.03649674
9	0.01650317863	1.03414478
10	0.01480394535	1.03130934

Tabela 1.2: Tabela napak aproksimacije funkcije f_2 ter ocena reda aproksimacije.

$\|f - B_n f\|$ obnaša kot $C\, n^{-\alpha}$, kjer je C konstanta, eksponent α pa lahko numerično ocenimo iz napak

$$e_n = \|f - B_n f\|_\infty \sim C\, n^{-\alpha}, \quad e_m = \|f - B_m f\|_\infty \sim C\, m^{-\alpha}$$

pri dveh različnih stopnjah n in m. In sicer je

$$\alpha \sim \frac{\ln\left(\frac{e_n}{e_m}\right)}{\ln\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

Iz tabel 1.1, 1.2 ter 1.3 sklepamo, da velja

$$\|f_1 - B_n f_1\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \|f_2 - B_n f_2\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|f_3 - B_n f_3\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Grafi Bernsteinovih polinomov stopenj $n = 1, 2, \ldots, 10$ skupaj s funkcijo, ki jo aproksimirajo, so prikazani na sliki 1.2.

n	$\|f_3 - B_n f_3\|_\infty$	α
1	0.3257301140	0
2	0.1663312329	0.969618007
3	0.1124615677	0.965236289
4	0.08502176846	0.972268510
5	0.06835390061	0.977884829
6	0.05715043611	0.98184555
7	0.04910197335	0.98467160
8	0.04304027580	0.98675598
9	0.03831057179	0.98834641
10	0.03451732820	0.98959671

Tabela 1.3: Tabela napak aproksimacije funkcije f_3 ter ocena reda aproksimacije.

Naloga 1.8. *Izračunajte Bernsteinov polinom* $B_4 f(x)$ *za funkcijo* $f(x) = \sin(\pi x)$ *na intervalu* $[0, 1]$*. Primerjajte to aproksimacijo s Taylorjevim razvojem* $T_4 f(x)$ *okrog točke* $x = \frac{1}{2}$ *do členov stopnje* 4.

Rešitev:
Bernsteinov polinom stopnje 4 za dano funkcijo f je enak

$$\begin{aligned} B_4 f(x) &= \sum_{i=0}^{4} \sin\left(\frac{i}{4}\pi\right)\binom{4}{i} x^i (1-x)^{4-i} = \\ &= 2x(1-x)\left(\sqrt{2}(1-x)^2 + 3x(1-x) + \sqrt{2}x^2\right). \end{aligned}$$

Taylorjev aproksimacijski polinom stopnje n se izračuna kot

$$T_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i,$$

kjer je a točka okrog katere razvijamo. V našem primeru dobimo

$$T_4 f(x) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\pi^4\left(x - \frac{1}{2}\right)^4.$$

V tabeli 1.4 je prikazana razlika med obema polinomoma v točkah $\left(\frac{i}{10}\right)_{i=0}^{5}$. Vidimo, da Taylorjev polinom zelo dobro aproksimira funkcijo v okolici točke $x = \frac{1}{2}$. Največja napaka je v krajiščih. Nasprotno B_4 v krajiščih funkcijo interpolira, napaka pa je največja pri $x = \frac{1}{2}$. Iz slike 1.3, kjer sta obe aproksimacijski funkciji prikazani, vidimo, da se graf Taylorjevega polinoma skoraj prekriva s funkcijo f

Naloga 1.9. *Naj bo funkcija* f *na intervalu* $[0, 1]$ *Lipschitzova, to je*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|.$$

Slika 1.2: Grafi Bernsteinovih polinomov stopenj ≤ 10 za funkcije f_1 (levo zgoraj), f_2 (desno zgoraj) ter f_3 (spodaj).

Pokažite, da za vsak $x \in [0,1]$ velja neenakost

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{C}{2\sqrt{n}},$$

kjer je $B_n f$ Bernsteinov polinom stopnje n.

Rešitev:
Ker velja $B_n 1 = 1$ je

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) b_{n,i}(x).$$

x	$\lvert B_4 f(x) - f(x)\rvert$	$\lvert B_4 f(x) - f(x)\rvert$
0	0	0.019969
$\frac{1}{10}$	0.051679	0.005318
$\frac{2}{10}$	0.126452	$0.958118 \cdot 10^{-3}$
$\frac{3}{10}$	0.199915	$0.84857 \cdot 10^{-4}$
$\frac{4}{10}$	0.252469	$0.133291 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{2}$	0.271447	0

Tabela 1.4: Primerjava med Bernsteinovim in Taylorjevim aproksimacijskim polinomom stopnje 4 ter funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$.

Slika 1.3: Bernsteinov aproksimacijski polinom B_4 (levo) ter Taylorjev aproksimacijski polinom T_4 (desno) za funkcijo $f(x) = \sin(\pi x)$.

Z upoštevanjem Cauchy-Schwartzove neenakosti ter pozitivnosti Bernsteinovih baznih polinomov dobimo

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - B_n f(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^2 b_{n,i}(x)} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(x)} \leq \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} C^2 \left(x - \frac{i}{n}\right)^2 b_{n,i}(x)} = C \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(x^2 - 2x\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) b_{n,i}(x)} = \\
&= C\sqrt{x^2 - 2xB_n x + B_n x^2}.
\end{aligned}
$$

Upoštevamo, da velja

$$
B_n x = x, \quad B_n x^2 = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}
$$

in dobimo

$$
|f(x) - B_n f(x)| \leq C\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{C}{2\sqrt{n}}.
$$

Naloga 1.10. *Pokažite, da je Bernsteinov operator, ki polinomu priredi Bernsteinov polinom, monoton. To je: če je $f \geq g$, potem je $B_n f \geq B_n g$.*

Rešitev:
Bernsteinov operator

$$
B_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{P}_n, \quad f \mapsto B_n f,
$$

je linearen in pozitiven. Torej je $B_n f \geq 0$ za $f \geq 0$. Če je $f \geq g$, potem je

$$
f - g \geq 0 \implies B_n(f-g) = B_n f - B_n g \geq 0 \implies B_n f \geq B_n g,
$$

kar dokazuje monotonost.

Modul zveznosti $\omega(f,h)$ funkcije f je na splošnem intervalu $[a,b]$ definiran kot

$$\omega(g,h) := \sup_{\substack{|x-y|\le h\\ x,y\in[a,b]}} |g(x)-g(y)|.$$

Naloga 1.11. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Dokažite naslednje ocene in lastnosti za modul zveznosti za funkcijo f na intervalu $[a,b]$.*

1. *Če je f Lipschitzova s konstanto C, potem velja $\omega(f,h) \le h\,C$.*
2. *Če je f odvedljiva, potem je $\omega(f,h) \le h\,\|f'\|$.*
3. *Za modul zveznosti velja $\omega(f,h) = \max\limits_{|x-y|\le h} |f(x)-f(y)|$.*
4. *Velja: $\lim\limits_{h\to 0}\omega(f,h) = 0$.*

Rešitev:
Vse lastnosti sledijo direktno iz definicije modula zveznosti.

Naloga 1.12. *Naj bo f poljubna funkcija. Dokažite naslednje ocene in lastnosti za modul zveznosti.*

1. *Modul zveznosti je monoton: za $h<k$ velja $\omega(f,h) \le \omega(f,k)$.*
2. *Modul zveznosti je subaditiven:*

$$\omega(f,k+h) \le \omega(f,k) + \omega(f,h).$$

3. *Iz pogoja $\omega(f,h) = o(h)$ sledi, da je f konstanta.*

Rešitev:

1. Trditev očitno sledi iz lastnosti supremuma.
2. Če je $|x-y| \le h+k$, potem obstaja tak z, da je $|x-z| \le h$ ter $|z-y| \le k$. Od tod sledi

$$\sup_{|x-y|\le h+k} |f(x)-f(y)| \le \sup_{\substack{|x-z|\le h\\ |z-y|\le k}} \left(|f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)|\right) \le \omega(f,k)+\omega(f,h).$$

3. Pogoj $\omega(f,h) = o(h)$ pomeni, da je $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega(f,h)}{h} = 0$. Ker velja
$$0 \le \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \le \lim_{h\to 0} \frac{\omega(f,h)}{h} = 0,$$
limita $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{h}$ obstaja in je enaka nič. Iz tega sledi, da je funkcija f odvedljiva in odvod je za vsak x na intervalu $[a,b]$ enak nič. Torej mora biti f konstantna funkcija.

Naloga 1.13. *Dokažite, da za zvezno odvedljivo funkcijo f odvodi njenih Bernsteinovih polinomov enakomerno konvergirajo k odvodu f', ko gre $n \to \infty$.*

Rešitev:
Dokazati moramo, da velja
$$\|(B_n f)' - f'\|_{\infty,[0,1]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Za odvod Bernsteinovega polinoma vemo (glej nalogo 1.7), da je enak
$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) b_{n-1,i}(x).$$
Z upoštevanjem Leibnitzovega pravila dobimo
$$(B_n f)'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)\, b_{n-1,i}(x), \quad \xi_i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$
Ker je f' zvezna funkcija, velja
$$\|B_n f' - f'\|_{\infty,[0,1]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.1}$$
za vsak n (glej [4]). Dalje je
$$\begin{aligned}\|(B_n f)' - f'\|_{\infty,[0,1]} &= \|(B_n f)' - B_{n-1}f' + B_{n-1}f' - f'\|_{\infty,[0,1]} \le \\ &\le \|(B_n f)' - B_{n-1}f'\|_{\infty,[0,1]} + \|B_{n-1}f' - f'\|_{\infty,[0,1]}.\end{aligned}$$
Ker velja (1.1) moramo dokazati le še, da gre prvi sumand proti nič z naraščajočim n. To sledi iz
$$\begin{aligned}&|(B_n f)'(x) - B_{n-1}f'(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)\, b_{n-1,i}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f'\left(\frac{i}{n-1}\right) b_{n-1,i}(x)\right| \le \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \left| f'(\xi_i) - f'\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| b_{n-1,i}(x) \le \omega\left(f', \frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1,i}(x) = \\ &= \omega\left(f', \frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$
kjer je $\omega\left(f', \frac{1}{n}\right)$ modul zveznosti za funkcijo f' na intervalu $[0,1]$ Ker je f' zvezna funkcija očitno velja, da gre modul zveznosti $\omega\left(f', \frac{1}{n}\right)$ proti nič, če gre $\frac{1}{n}$ proti nič. S tem je trditev dokazana.

Naloga 1.14. *Naj bo $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Če v definiciji Bernsteinovega polinoma za funkcijo f nadomestimo $f\left(\frac{i}{n}\right)$ s povprečjem funkcije f na bližnjem intervalu, to je z*

$$f_{n,i} := (n+1)\int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)dt,$$

dobimo t.i. Kantorovičev polinom

$$K_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i} b_{n,i}(x).$$

Dokažite, da velja

$$B'_{n+1}F = K_n f,$$

kjer je $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Rešitev:
Odvod $B'_{n+1}F$ je enak

$$B'_{n+1}F(x) = (n+1)\sum_{i=0}^{n} \Delta F\left(\frac{i}{n+1}\right) b_{n,i}(x).$$

Ker je

$$\Delta F\left(\frac{i}{n+1}\right) = F\left(\frac{i+1}{n+1}\right) - F\left(\frac{i}{n+1}\right) = \int_0^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)dt - \int_0^{\frac{i}{n+1}} f(t)dt = \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)dt,$$

trditev sledi.

Naloga 1.15. *Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, zaporedje vozlov in naj bo*

$$S_{1,\boldsymbol{x}} = \left\{ f : f\big|_{(x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1 \right\} \cap \mathcal{C}([a,b])$$

prostor zveznih odsekoma linearnih funkcij. Baza tega prostora so funkcije $(H_i)_{i=0}^n$, definirane kot

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,n-1,$$

$$H_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \qquad H_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Operator $I_{1,\boldsymbol{x}}$ je definiran kot

$$I_{1,\boldsymbol{x}} : \mathcal{C}([a,b]) \to S_{1,x}, \quad I_{1,\boldsymbol{x}} f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_i(x).$$

1. Pokažite, da je operator $I_{1,\boldsymbol{x}}$ monoton.

2. Naj bo $\boldsymbol{x} = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ in $f(x) = \sin(\pi x)$. Izračunajte $I_{1,\boldsymbol{x}} f$.

Rešitev:

1. Naj bo $f \geq g$. Dokazati moramo, da je tedaj $I_{1,\boldsymbol{x}} f \geq I_{1,\boldsymbol{x}} g$. Ker so funkcije H_i povsod nenegativne velja

$$I_{1,\boldsymbol{x}}(f-g) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - g(x_i)) H_i(x) \geq \min_{i=0,1,\ldots,n} (f(x_i) - g(x_i)) \sum_{i=0}^{n} H_i(x)$$

Lahko je preveriti, da je

$$\sum_{i=0}^{n} H_i(x) = 1.$$

Od tod sledi, da je $I_{1,\boldsymbol{x}}(f-g) \geq 0$ in iz linearnosti dobimo $I_{1,\boldsymbol{x}} f \geq I_{1,\boldsymbol{x}} g$.

2. V tem primeru dobimo, da je

$$I_{1,\boldsymbol{x}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} H_1(x) + H_2(x),$$

kjer sta

$$H_1(x) = \begin{cases} 4x, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 2 - 4x, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \qquad H_2(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Naloga 1.16. *Bernsteinovi polinomi nastopanjo v definiciji zelo znanih krivulj, t.i. Bézierovih krivulj. Bézierova krivulja $\mathcal{B}_n : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ je definirana kot*

$$\mathcal{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i b_{n,i}(t),$$

kjer so $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 0, 1, \ldots, n$, kontrolne točke, ki določajo obliko krivulje. Vrednosti Bézierovih krivulj računamo z rekurzivnim algoritmom imenovanim de Casteljauov algoritem, ki pravi

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}_i^0(t) := \boldsymbol{b}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \\ &\boldsymbol{b}_i^r(t) = (1-t)\boldsymbol{b}_i^{r-1}(t) + t\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, n-r. \end{aligned}$$

Dokažite, da velja

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{r,j}(t) \tag{1.2}$$

ter da je $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ enak vrednosti Bézierove krivulje pri parametru t:

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \mathcal{B}_n(t).$$

Rešitev:
Trditev dokažimo z indukcijo glede na r. Pri $r = 0$ imamo

$$\boldsymbol{b}_i^0(t) = \sum_{j=0}^{0} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{0,j} = \boldsymbol{b}_i b_{0,0}(t) = \boldsymbol{b}_i$$

in trditev velja. Predpostavimo, da trditev velja za $r-1$ in dokažimo, da velja tudi za r. Iz lastnosti binomskega simbola sledi naslednja zveza

$$b_{n,i}(t) = (1-t)b_{n-1,i}(t) + t b_{n-1,i-1}(t).$$

Z upoštevanjem te zveze in indukcijske predpostavke pa dobimo

$$\begin{aligned}
b_i^r(t) &= (1-t)b_i^{r-1}(t) + t b_{i+1}^{r-1}(t) \overset{I.P.}{=} (1-t)\sum_{j=0}^{r-1} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{r-1,j}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} \boldsymbol{b}_{i+1+j} b_{r-1,j}(t) = \\
&= (1-t)\sum_{j=0}^{r-1} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{r-1,j}(t) + t \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{r-1,j-1}(t) = \\
&= \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} \left((1-t)b_{r-1,j}(t) + t b_{r-1,j-1}(t)\right) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} b_{r,j}(t).
\end{aligned}$$

Zadnji sklep sledi iz (1.2) pri $r = n$.

Naloga 1.17. *Zapišite Bézierovo krivuljo s kontrolnimi točkami*

$$\boldsymbol{b}_0 = (0,0), \quad \boldsymbol{b}_1 = (0,2), \quad \boldsymbol{b}_2 = (8,2), \quad \boldsymbol{b}_3 = (4,0)$$

ter izračunajte njeno vrednost pri parametru $t = \frac{1}{2}$ *ter pri* $t = \frac{3}{4}$.

Rešitev:
Krivulja se glasi

$$\mathcal{B}_3(t) = \left(4x^3 + 24(1-x)x^2, 6x^2(1-x) + 6x(1-x)^2\right).$$

Vrednosti krivulje izračunamo z de Casteljauovim algoritmom, ki ga predstavimo v trikotni shemi. Pri $t = \frac{1}{2}$ dobimo

$$\begin{pmatrix}
(0,0) & & & \\
(0,2) & (0,1) & & \\
(8,2) & (4,2) & (2,3/2) & \\
(4,0) & (6,1) & \left(5,\frac{3}{2}\right) & \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)
\end{pmatrix}.$$

Zadnji element je točka na Bézierovi krivulji $\mathcal{B}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ pri parametru $t = \frac{1}{2}$. Podobno iz de Casteljauove sheme pri $t = \frac{3}{4}$, ki je enaka

$$\begin{pmatrix}
(0,0) & & & \\
(0,2) & \left(0,\frac{3}{2}\right) & & \\
(8,2) & (6,2) & \left(\frac{9}{2},\frac{15}{8}\right) & \\
(4,0) & \left(5,\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{21}{4},\frac{7}{8}\right) & \left(\frac{81}{16},\frac{9}{8}\right)
\end{pmatrix},$$

Slika 1.4: Vmesne točke de Casteljauovega algoritma za $t = \frac{1}{2}$ (levo) ter $t = \frac{3}{4}$ (desno) skupaj z Bézierovo krivuljo.

preberemo vrednost $\mathcal{B}_3\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{81}{16}, \frac{9}{8}\right)$. Grafična interpretacija de Casteljauovega algoritma je za oba primera skupaj s krivuljo prikazana na sliki 1.4

Naloga 1.18. *Dokažite naslednje lastnosti Bézierovih krivulj:*

1. *Afina invarianca;*
2. *Za parametre $t \in [0, 1]$ ležijo točke $\mathcal{B}_n(t)$ v konveksni lupini kontrolnega poligona;*
3. *Krivulja interpolira prvo in zadnjo kontrolno točko;*
4. *Velja formula*
$$\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j b_{n,j}(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{n-j} b_{n,j}(1-t);$$

Rešitev:

1. Afina invarianca pomeni, da podata naslednja dva postopka isti rezultat:
   (a) Izračunaj točko $\mathcal{B}_n(t)$ na Bézierovi krivulji in jo nato preslikaj z afino preslikavo;
   (b) Uporabi afino preslikavo na kontrolnih točkah in nato izračunaj točko z de Casteljauovim algoritmom.

   Preslikava $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je afina, če ohranja afine oz. baricentrične kombinacije. To pomeni, da za vsak
$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \boldsymbol{x}_j, \quad \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1,$$

velja

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \Phi(\boldsymbol{x}_j).$$

Vsako afino preslikavo se da predstaviti v obliki

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}, \quad A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d.$$

Bézirove krivulje so afino invariantne, saj velja

$$\Phi(\mathcal{B}_n(t)) = A\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i b_{n,i}(t)\right) + \boldsymbol{c} = \sum_{i=0}^{n} A\boldsymbol{b}_i b_{n,i}(t) + \boldsymbol{c}\sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (A\boldsymbol{b}_i + c) b_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n} \Phi(\boldsymbol{b}_i) b_{n,i}(t).$$

2. Točka $\mathcal{B}_n(t)$ leži za vsak $t \in [0,1]$ v konveksni lupini kontrolnega poligona, saj velja

$$\sum_{i=0}^{n} b_{n,i}(t) = 1, \quad b_{n,i}(t) \geq 0, \quad t \in [0,1].$$

   To pomeni, da je $\mathcal{B}_n(t)$ konveksna kombinacija kontrolnih točk.

3. Krivulja interpolira prvo in zadnjo kontrolno točko, saj je

$$\mathcal{B}_n(0) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i b_{n,i}(0) = \boldsymbol{b}_0 b_{n,0}(0) = \boldsymbol{b}_0,$$
$$\mathcal{B}_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i b_{n,i}(1) = \boldsymbol{b}_n b_{n,n}(1) = \boldsymbol{b}_n.$$

4. Dokaz je trivialen.

Naloga 1.19. *Izpeljite formulo za k-ti odvod Bézierove krivulje. Kako bi vrednosti odvodov izračunali s pomočjo trikotne de Casteljauove sheme?*

Rešitev:
Pomagamo si z nalogo 1.7. Dobimo, da je

$$\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{B}_n(t) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k \boldsymbol{b}_i b_{n-k,i}(t),$$

kjer je Δ prema diferenca, definirana rekurzivno kot

$$\Delta^0 \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_i, \quad \Delta \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_{i+1} - \boldsymbol{b}_i, \quad \Delta^k \boldsymbol{b}_i = \Delta\left(\Delta^{k-1}\boldsymbol{b}_i\right).$$

Vrednosti odvodov lahko izračunamo tako, da uporabimo de Casteljauov algoritem na kontrolnih točkah $\Delta\boldsymbol{b}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Odvod pa se da izračunati tudi iz koeficientov prvotne de Casteljauove sheme direktno. Poglejmo najprej, kako je s prvim odvodom. Iz formule (1.2) izpeljane v nalogi 1.16 dobimo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{B}_n(t) &= n\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{b}_{i+1} - \boldsymbol{b}_i)b_{n-1,i}(t) = \\ &= n\left(\boldsymbol{b}_1^{n-1}(t) - \boldsymbol{b}_0^{n-1}(t)\right) = n\Delta\boldsymbol{b}_0^{n-1}(t).\end{aligned}$$

To pomeni, da prvi odvod Bézierove krivulje pri parametru t izračunamo tako, da izračunamo premo diferenco predzadnjega stolpca de Casteljauove sheme in jo pomnožimo z n. Za višje odvode moramo uporabiti formulo

$$\Delta^k\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\boldsymbol{b}_{i+j},$$

ki se jo enostavno dokaže z indukcijo. Z upoštevanjem te formule in formule (1.2) dobimo

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{B}_n(t) &= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\boldsymbol{b}_{i+j}b_{n-k,i}(t) = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{n-k}\boldsymbol{b}_{i+j}b_{n-k,i}(t) = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\boldsymbol{b}_j^{n-k}(t) = \frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\boldsymbol{b}_0^{n-k}(t).\end{aligned}$$

Izpeljava pove, da dobimo k-ti odvod Bézierove krivulje pri vrednosti parametra t tako, da izračunamo k-to premo diferenco $(n-k)$-tega stolpca de Casteljauove sheme in to diferenco pomnožimo z $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Naloga 1.20. *Izračunajte prvi, drugi in tretji odvod Bézierove krivulje s kontrolnimi točkami*

$$\boldsymbol{b}_0 = (0,0), \quad \boldsymbol{b}_1 = (0,2), \quad \boldsymbol{b}_2 = (8,2), \quad \boldsymbol{b}_3 = (4,0)$$

pri parametru $t = \frac{1}{2}$ *ter* $t = \frac{3}{4}$.

Rešitev:
V primeru $t = \frac{1}{2}$ je de Casteljauova shema enaka (glej nalogo 1.17)

$$\begin{pmatrix} (0,0) & & & \\ (0,2) & (0,1) & & \\ (8,2) & (4,2) & (2,3/2) & \\ (4,0) & (6,1) & \left(5,\frac{3}{2}\right) & \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Prema diferenca predzadnjega stolpca se glasi

$$\Delta \boldsymbol{b}_0^2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(5, \frac{3}{2}\right) - (2, 3/2) = (3, 0)$$

od koder sledi

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_3\left(\frac{1}{2}\right) = (9, 0).$$

Drugi odvod je enak

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{B}_3\left(\frac{1}{2}\right) = 6\Delta^2 \boldsymbol{b}_0^1\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left((6,1) - 2(4,2) + (0,1)\right) = (-12, -12).$$

Tretji odvod je konstanta, in sicer

$$\frac{d^3}{dt^3}\mathcal{B}_3(t) = 6\Delta^3 \boldsymbol{b}_0^1\left(t\right) = 6\left((4,0) - 3(8,2) + 3(0,2) - (0,0)\right) = (-120, 0).$$

Iz de Casteljauove sheme pri parametru $t = \frac{3}{4}$, ki je enaka

$$\begin{pmatrix} (0,0) & & & \\ (0,2) & \left(0, \frac{3}{2}\right) & & \\ (8,2) & (6,2) & \left(\frac{9}{2}, \frac{15}{8}\right) & \\ (4,0) & \left(5, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{21}{4}, \frac{7}{8}\right) & \left(\frac{81}{16}, \frac{9}{8}\right) \end{pmatrix},$$

dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{B}_3\left(\frac{3}{4}\right) &= 3\Delta \boldsymbol{b}_0^2\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}, -3\right), \\ \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{B}_3\left(\frac{3}{4}\right) &= 6\Delta^2 \boldsymbol{b}_0^2\left(\frac{3}{4}\right) = \left(-42, -12\right). \end{aligned}$$

V splošnem je odvod enak

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_3(t) = 3\sum_{i=0}^{2} \Delta \boldsymbol{b}_i b_{2,i}(t),$$

kjer so

$$\Delta \boldsymbol{b}_0 = (0, 2), \quad \Delta \boldsymbol{b}_1 = (8, 0), \quad \Delta \boldsymbol{b}_2 = (-4, -2).$$

Če bi izračunali vrednost odvoda z de Casteljauovo shemo na kontrolnih točkah $(\Delta \boldsymbol{b}_i)_{i=0}^2$, bi pri $t = \frac{1}{2}$ dobili

$$\begin{pmatrix} (0,2) & & \\ (8,0) & (4,1) & \\ (-4,-2) & (2,-1) & (3,0) \end{pmatrix},$$

od koder sledi že izračunan rezultat

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}_3\left(\frac{1}{2}\right) = 3(3,0) = (9,0).$$

Podobno za $t = \frac{3}{4}$ ter za višje odvode.

Naloga 1.21. *Naj bodo* $\boldsymbol{b}_0$*,* $\boldsymbol{b}_1$*,* $\boldsymbol{b}_2$*,* $\boldsymbol{b}_3$ *kontrolne točke Bézierove krivulje definirane na intervalu* $[a, b]$ *ter* $\boldsymbol{b}_3$*,* $\boldsymbol{b}_4$*,* $\boldsymbol{b}_5$*,* $\boldsymbol{b}_6$ *kontrolne točke Bézierove krivulje definirane na intervalu* $[b, c]$*. Kakšna zveza mora veljati med kontrolnimi točkami, da bosta krivulji* $\mathcal{C}^1$ *zvezni?*

Rešitev:
Krivulji sta enaki

$$X_-(u) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{b}_i b_{3,i}\left(\frac{u-a}{b-a}\right), \quad u \in [a, b],$$
$$X_+(u) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{b}_{i+3} b_{3,i}\left(\frac{u-b}{c-b}\right), \quad u \in [b, c].$$

Pri $u = c$ sta krivulji očitno zvezni. Ker sta odvoda pri $u = b$ enaka

$$\frac{d}{du}X_-(u)\big|_{u=b} = \frac{3}{b-a}\sum_{i=0}^{2} \Delta\boldsymbol{b}_i b_{2,i}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\big|_{u=b} = \frac{3}{b-a}\Delta\boldsymbol{b}_2,$$
$$\frac{d}{du}X_+(u)\big|_{u=b} = \frac{3}{c-b}\sum_{i=0}^{2} \Delta\boldsymbol{b}_{i+3} b_{2,i}\left(\frac{u-b}{c-b}\right)\big|_{u=b} = \frac{3}{c-b}\Delta\boldsymbol{b}_3,$$

sta krivulji pri $u = b$ zvezno odvedljivi, če velja

$$\frac{3}{b-a}(\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_2) = \frac{3}{c-b}(\boldsymbol{b}_4 - \boldsymbol{b}_3).$$

To pomeni, da morajo biti točke $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ ter $\boldsymbol{b}_4$ kolinearne in v ustreznem razmerju. Če zahtevamo samo kolinearnost točk, pravimo, da sta krivulji G^1 zvezni oz. geometrijsko zvezni reda 1.

Naloga 1.22. *Naj bo* $\mathcal{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i b_{n,i}(t)$ *Bézierova krivulja stopnje* n*. Na to krivuljo lahko gledamo tudi kot na krivuljo stopnje* $n+1$*. Določite njene kontrolne točke?*

Rešitev:
Krivuljo $\mathcal{B}_n(t)$ lahko zapišemo kot

$$\mathcal{B}_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \boldsymbol{b}_i^{(1)} b_{n+1,i}(t).$$

Določimo nove kontrolne točke $\boldsymbol{b}_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Iz

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n(t) &= (1 - t + t)\mathcal{B}_n(t) = \\
&= (1-t)\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} + t\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \frac{n+1-i}{n+1} b_{n+1,i}(t) + \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \frac{i+1}{n+1} b_{n+1,i+1}(t) = \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{n+1-i}{n+1}\boldsymbol{b}_i + \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1} \right) b_{n+1,i}(t)
\end{aligned}$$

dobimo

$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\boldsymbol{b}_i + \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Poglavje 2

Optimalni aproksimacijski problemi

Splošni optimalni aproksimacijski problem je sledeč. Dan je normiran vektorski prostor X ter podprostor (podmnožica) $S \subseteq X$. Za vsak $f \in X$ iščemo element najboljše aproksimacije v S, to je iščemo tak $f^* \in S$, da velja

$$\|f - f^*\| = \inf_{s \in S} \|f - s\|.$$

Zanima nas obstoj, enoličnost in konstrukcija elementov najboljše aproksimacije za različne vektorske prostore, norme ter različne podprostore.

Velja sledeče: če je X normiran vektorski prostor in $S \subset X$ končno dimenzionalen podprostor, potem za vsak $f \in X$ obstaja element najboljše aproksimacije $f^* \in S$.
Pri nalogah bomo potrebovali naslednje definicije:

Definicija 2.1. *Naj bo X vektorski prostor. Množica $K \subseteq X$ je konveksna, če za vsak $x, y \in K$ in za vsak $\lambda \in (0,1)$ velja, da je*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K.$$

Množica $K \subseteq X$ je strogo konveksna, če za vsak $x, y \in K$ in za vsak $\lambda \in (0,1)$ velja, da je

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{int} K.$$

Definicija 2.2. *Normiran vektorski prostor X je enakomerno konveksen, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za poljuben par elementov $x, y \in X$, takih da $\|x\| = \|y\| = 1$, velja*

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f - g\| < \epsilon.$$

Definicija 2.3. *Normiran vektorski prostor X je strogo normiran, če za vsak par vektorjev $x, y \in X$, $y \neq 0$, iz pogoja*

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

sledi, da je $x = \lambda y$ za nek neničeln skalar λ.

Naloga 2.1. *Poiščite zglede prostorov in podmnožic teh prostorov, pri katerih element najboljše aproksimacje obstaja in je/ni enoličen ter zgled, kjer element najboljše aproksimacije ne obstaja.*

Rešitev:
Če za prostor izberemo $X = \mathbb{R}^2$ opremljen z evklidsko normo, za podmnožico S pa izberemo zaprto enotsko kroglo $S = \left\{(x, y) \in X : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$, potem element najboljše aproksimacije vedno obstaja in je določen enolično. Če za S izberemo odprto enotsko kroglo $S = \left\{(x, y) \in X : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\right\}$, potem element najboljše aproksimacije ne obstaja za noben $(x, y) \in X \setminus S$. Če izberemo

$$S = \left\{(x, y) \in X : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\} \setminus \{x > 0, y > 0\},$$

potem element najboljše aproksimacije vedno obstaja, a ni enoličen za $(x, x) \in X \setminus S$, $x > 0$.

Naloga 2.2. *Naj bo V normiran vektorski prostor in $T \subset V$ podprostor. Elemente $v \in V$ aproksimiramo z elementi iz podprostora T. Zaporedje $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k \in T$, imenujemo* **minimizirajoče zaporedje** *za $v \in V$, če velja:*

$$\lim_{k\to\infty} \|v - u_k\| = \inf_{t\in T} \|v - t\|.$$

Naj bo $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ minimizirajoče zaporedje za nek izbran $v \in V$, $u^* \in T$ pa stekališče tega zaporedja. Dokažite, da je tedaj u^* element najboljše aproksimacije za v z elementi iz podprostora T.

Rešitev:
Trditev bomo dokazali s protislovjem. Recimo, da u^* ni element najboljše aproksimacije za v. Torej obstaj tak $\epsilon > 0$, da je

$$\|v - u^*\| > \inf_{t\in T} \|v - t\| + \epsilon.$$

Ker je u^* stekališče minimizirajočega zaporedja, obstaja podzaporedje $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, ki konvergira k u^*. Za vsak $\delta > 0$ torej obstaja tak j_0, da je za vse $j \geq j_0$

$$\|u_{k_j} - u^*\| < \delta.$$

Izberimo sedaj $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Ker je podzaporedje minimizirajočega zaporedja tudi minimizirajoče, bi moralo veljati

$$\lim_{j\to\infty} \|v - u_{k_j}\| = \inf_{t\in T}\|v - t\|. \tag{2.1}$$

Ker pa je

$$\|v - u_{k_j}\| = \|v - u^* + u^* - u_{k_j}\| \geq \|v - u^*\| - \|u^* - u_{k_j}\| \geq$$
$$\geq \left(\inf_{t\in T}\|v - t\| + \epsilon\right) - \delta = \inf_{t\in T}\|v - t\| + \frac{\epsilon}{2}$$

za vse $j \geq j_0$, enakost (2.1) ne more biti izpolnjena. Iz protislovja sklepamo, da u^* je element najboljše aproksimacije.

Naloga 2.3.

1. *Naj bo $T \subset V$ kompaktna podmnožica. Pokažite, da za vsak $v \in V$ obstaja element najboljše aproksimacije $\tilde{v} \in T$.*

2. *Naj bo $T \subset V$ kompaktna strogo konveksna podmnožica normiranega prostora V. Pokažite, da za vsak $v \in V$ obstaja natanko en element najboljše aproksimacije $\tilde{v} \in T$.*

Rešitev:

1. Za vsak $v \in V$ lahko najdemo minimizirajoče zaporedje $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ v T. Na primer, za vsak $k \in \mathbb{N}$ po definiciji infimuma obstaja tak $v_k \in T$, da je $\|v - v_k\| = \inf_{t\in T}\|v - t\| + \frac{1}{2^k}$. Ker je T kompaktna, ima to zaporedje stekališče $v^* \in T$. Po nalogi 2.2 je v^* element najboljše aproksimacije za v.

2. Podmnožica $T \subset V$ je strogo konveksna, če $\forall u, v \in T$ in $\forall \lambda \in (0, 1)$ velja

   $$\lambda\, u + (1 - \lambda)\, v \in \mathrm{int}T.$$

   Recimo, da obstajata dva elementa $t_1, t_2 \in T$ najboljše aproksimacije za $v \in V$. Torej velja

   $$\|v - t_1\| = \|v - t_2\| = \inf_{t\in T}\|v - t\|.$$

   Zaradi stoge konveksnosti za vsak $\lambda \in (0, 1)$ velja

   $$t_3 := \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 \in \mathrm{int}T.$$

   Dalje velja

   $$\|v - t_3\| = \|\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2\| = \|\lambda(v - t_1) + (1 - \lambda)(v - t_2)\| \leq$$
   $$\leq \lambda\|v - t_1\| + (1 - \lambda)\|v - t_2\| = \inf_{t\in T}\|v - t\|,$$

od koder sledi, da je tudi t_3 element najboljše aproksimacije za v. Ker pa je $t_3 \in \mathrm{int}T$, obstaja tak $\delta \in (0,1)$, da $\tilde{t}_3 := t_3 + \delta(v - t_3)$ še vedno leži v podmnožici T. Ker pa je

$$\|v - \tilde{t}_3\| = \|v - t_3 + \delta(v - t_3)\| = (1-\delta)\|v - t_3\| < \inf_{t\in T}\|v - t\|,$$

pridemo v protislovje, kar pomeni, da mora biti element najboljše aproksimacije enoličen.

Naloga 2.4. *Dokažite, da prostor $\mathbb{R}^n$ z ℓ^1 normo ni enakomerno konveksen.*

Rešitev:
Poiščimo protiprimer. Če izberemo

$$\boldsymbol{x} = (1,0,0,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = (0,1,0,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^n,$$

velja

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1, \quad \left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\right\| = 1, \quad \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = 2.$$

Naj bo $\epsilon = 1$. Ker je

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\right\| = 1 > 1 - \delta$$

za vsak $\delta > 0$, toda $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = 2 > \epsilon$, prostor ni enakomerno konveksen.

Naloga 2.5. *Dokažite, da je prostor X s skalarnim produktom enakomerno konveksen.*

Rešitev:
Za dokaz uporabimo paralelogramsko enakost

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

ki velja v prostoru, kjer je norma definirana s skalarnim produktom. Izberimo poljubna normirana $x, y \in X$ ter poljuben $\epsilon > 0$. Poiskati moramo tak $\delta > 0$, da bo iz pogoja $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$ sledilo $\|x-y\| < \epsilon$. Iz paralelogramske enakosti

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 4 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

dobimo, da mora biti

$$4 - 4(1-\delta)^2 = 8\delta - 4\delta^2 < \epsilon^2,$$

kar velja za vse $0 < \delta < 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$.

Naloga 2.6. *Naj bo $X = \mathbb{R}^n$ opremljen z neskončno normo.*

1. *Ali je prostor strogo normiran?*

2. *Pokažite, da za* $\boldsymbol{z} = (1,3,2)^T$ *ne obstaja enoličen element najboljše aproksimacije iz podprostora* $S = \mathrm{Lin}\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T\}$.

Rešitev:
Vektorski prostor X je strogo normiran, če za vsak $x, y \in X$ iz pogoja

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \tag{2.2}$$

sledi, da obstajata α in β, ki nista oba hkrati enaka nič, tako da velja $\alpha\, x = \beta\, y$ oziroma obstaja tak λ, da je $x = \lambda\, y$.

1. Odgovor je negativen. Poiščimo protiprimer. Če izberemo

   $$\boldsymbol{x} = (1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{y} = (1,0,0)^T,$$

   potem je

   $$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1, \quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = 2,$$

   in pogoj (2.2) velja. Ker pa sta vektorja $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ linearno neodvisna, ne more obstajati tak λ, da bi veljalo $\boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{y}$.

2. Podprostor S je končno dimenzionalen, zato element najboljše aproksimacije vedno obstaja. Vsak $\boldsymbol{s} \in S$ lahko zapišemo kot $\boldsymbol{s} = (\alpha, \beta, 0)^T$. Iščemo torej tak $\boldsymbol{s}^* = (\alpha^*, \beta^*, 0)^T$, da bo veljalo

   $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{s}^*\|_\infty &= \min_{\boldsymbol{s}\in S}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{s}\|_\infty = \min_{\alpha,\beta}\left\|(1-\alpha, 3-\beta, 2)^T\right\|_\infty = \\ &= \min_{\alpha,\beta}\, \max\{|1-\alpha|, |3-\beta|, 2\} = 2.\end{aligned}$$

   Očitno pa je minimum dosežen za vse $\alpha \in [-1,3]$ ter $\beta \in [1,5]$, kar dokazuje, da element najboljše aproksimacije ni enoličen.

Naloga 2.7. *Dokažite, da je prostor* X *strogo normiran natanko takrat, ko je zaprta enotska krogla strogo konveksna.*

Rešitev:
($\Longrightarrow$) Predpostavimo najprej, da je prostor strogo normiran in dokažimo, da je zaprta enotska krogla $\bar{B}$ strogo konveksna. Izberimo poljubna $x, y \in \bar{B}$ ter poljuben $\lambda \in (0,1)$. Ker je

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \le \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \le 1,$$

moramo pokazati le, da $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \ne 1$. Enačaj bi lahko veljal le v primeru, ko $\|x\| = \|y\| = 1$ in tedaj bi moralo veljati tudi

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\|.$$

Z upoštevanjem stroge normiranosti dobimo, da mora obstajati tak α, da velja

$$\lambda x = \alpha(1-\lambda)y.$$

Če to zadnjo relacijo normiramo, dobimo

$$\lambda = |\alpha|(1-\lambda) \quad \text{oziroma} \quad 1 = (|\alpha|+1)\,(1-\lambda).$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &= 1 \\ \|\alpha(1-\lambda)y + (1-\lambda)y\| &= 1 \\ |\alpha+1|(1-\lambda) &= 1. \end{aligned}$$

Sledi, da mora biti $|\alpha|+1 = |\alpha+1|$ oziroma, da mora biti $\alpha \geq 0$. To implicira, da morata biti x in y enaka. Dokazali smo torej, da je

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$$

za poljubna $x, y \in \bar{B}$, $x \neq y$, kar dokazuje strogo konveksnost zaprte enotske krogle.

($\Longleftarrow$) Dokažimo sedaj, da iz stroge konveksnosti zaprte enotske krogle $\bar{B}$ sledi, da je prostor X strogo normiran. Izberimo poljubna $x, y \in X$, za katera velja

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Če definiramo

$$\bar{x} = \frac{x}{\|x\|} \in \bar{B}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\|y\|} \in \bar{B},$$

potem dobimo

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|x\| + \|y\| \\ \|\|x\|\bar{x} + \|y\|\bar{y}\| &= \|x\| + \|y\| \\ \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\bar{x} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\bar{y} \right\| &= 1 \\ \|\lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}\| &= 1, \end{aligned}$$

kjer smo definirali $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$. Ker pa je $\bar{B}$ strogo konveksna, mora veljati $\bar{x} = \bar{y}$ oziroma

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|},$$

kar dokazuje strogo normiranost.

Naloga 2.8. *Naj bo X prostor konvergentnih zaporedij z limito 0 in naj bo opremljen z neskončno normo:*

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...), \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\},$$
$$\|\boldsymbol{x}\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Naj bo

$$A = \{\boldsymbol{x} \in X : \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n = 0\}$$

zaprt podprostor v X. Pokažite, da za vsak $\boldsymbol{x} \in X \setminus A$ velja, da ne obstaja element najboljše aproksimacije za $\boldsymbol{x}$ iz A.

Rešitev:
Podprostor A je zaprt, saj je $A = f^{-1}(\{0\})$ praslika zaprte množice zvezne preslikave

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n.$$

Izberimo poljuben $\boldsymbol{x} \in X \setminus A$. Ker $\boldsymbol{x} \notin A$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n = \alpha \neq 0.$$

Definirajmo zaporedje

$$\boldsymbol{g}^{(r)} := \left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, 0, \ldots \right) \in X,$$

za katerega velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n^{(r)} = 1 - 2^{-r}.$$

Dalje definirajmo

$$\boldsymbol{m}^{(r)} := \boldsymbol{x} - \frac{\alpha}{1 - 2^{-r}} \boldsymbol{g}^{(r)} \in X,$$

ki leži v podprostoru A, saj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} m_n^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(x_n - \frac{\alpha}{1 - 2^{-r}} g_n^{(r)} \right) = 0.$$

Za element najboljše aproksimacije velja

$$\inf_{\boldsymbol{a}\in A} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq \lim_{r\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}^{(r)}\| = \lim_{r\to\infty} \frac{|\alpha|}{1 - 2^{-r}} \left\|\boldsymbol{g}^{(r)}\right\| = |\alpha|.$$

Izberimo sedaj poljuben $\boldsymbol{a} \in A$ in pokažimo, da pa je $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| > |\alpha|$. Ker je $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a} \in X$, za vsak $\delta > 0$ obstaja tak N, da za vsak $n \geq N$ velja, da je $|x_n - a_n| < \delta$. Od tod sledi

$$
\begin{aligned}
|\alpha| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{N} 2^{-n}(x_n - a_n)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}(x_n - a_n)\right| \leq \\
&\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \delta \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}.
\end{aligned}
$$

Če izberemo $\delta = \frac{|\alpha|}{2}$ in upoštevamo $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ dobimo

$$
\begin{aligned}
|\alpha| \left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\right) &\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \delta \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \\
|\alpha| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \frac{|\alpha|}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} &\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \\
|\alpha| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} &< \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \\
|\alpha| &< \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|.
\end{aligned}
$$

Ker je bil $\boldsymbol{a} \in A$ poljuben, smo dokazali, da element najboljše aproksimacije v A ne more obstajati.

Naloga 2.9. *Naj bo S linearen podprostor v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ in $P : \mathcal{C}([a,b]) \to S$ aproksimacijski operator, za katerega velja:*

1. *$Pg = g$ za vse $g \in S$,*
2. *$P(g+h) = Pg + Ph$ ter $P(\lambda g) = \lambda Pg$ za vse $g, h \in \mathcal{C}([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$,*
3. *$\|P\| = \sup\limits_{g \in \mathcal{C}([a,b])} \frac{\|Pg\|}{\|g\|} = \sup\limits_{\substack{g \in \mathcal{C}([a,b]) \\ \|g\|=1}} \|Pg\| < \infty$.*

Pokažite, da za vsak $g \in \mathcal{C}([a,b])$ velja

$$
\|g - Pg\| \leq (1 + \|P\|)\operatorname{dist}(g, S), \quad \operatorname{dist}(g, S) = \inf_{s \in S} \|s - g\|,
$$

čemur pravimo aproksimacija optimalnega reda.

Rešitev:
Izberimo poljuben $s \in S$. Z upoštevanjem naštetih lastnosti dobimo

$$
\begin{aligned}
\|g - Pg\| = \|g - s + s - Pg\| &= \|g - s + Ps - Pg\| \leq \\
\leq \|g - s\| + \|Ps - Pg\| &= \|g - s\| + \|P(s - g)\| \leq \\
\leq \|g - s\| + \|P\|\|s - g\| &= (1 + \|P\|)\|s - g\|.
\end{aligned}
$$

Ker velja ta ocena za vsak $s \in S$, velja tudi za infimum in trditev je dokazana.

Poglavje 3

Enakomerna aproksimacija

Naj bo vektorski prostor $X = \mathcal{C}([a,b])$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$ opremljen z neskončno normo

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

Za podprostor izberemo $S = \mathbb{P}_n$ prostor polinomov stopnje $\leq n$. Ker je S končno dimenzionalen, obstaja za vsako zvezno funkcijo f element najboljše aproksimacije p^* iz podprostora S, ki ga imenujemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije**. Izkaže se, da je tudi enoličen. Skonstruiramo ga s prvim ali drugim **Remesovim postopkom**. Oba postopka sta iterativna in ju ponavljamo, dokler ne dosežemo predpisane natančnosti.
Naj bo množica $E \subset [a,b]$ in $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Minimaks za funkcijo f na množici E in podprostoru $\mathbb{P}_n$ definiramo kot

$$M_n(E;f) := \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_{\infty,E} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in E} |f(x)-p(x)| .$$

Razliki $r := f - p$, kjer je p aproksimacijski polinom, pravimo residual.

Izrek 3.1. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Polinom $p \in \mathbb{P}_n$ je polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora $\mathbb{P}_n$ natanko tedaj, ko residual $r = f - p$ alternirajoče doseže svojo normo v vsaj $n+2$ točkah $x_i \in [a,b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$. za f.*

Prvi Remesov postopek.
Izberemo začetno množico $n+2$ točk

$$E_0 = \{x_i : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b\} .$$

Na k-tem koraku naredimo sledeče. Najprej poiščemo polinom $p_k^* \in \mathbb{P}_n$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_k. To je polinom, ki zadošča pogojem

$$f(x_i) - p_k^*(x_i) = (-1)^i m, \quad x_i \in E_k, \quad i = 0,1,\ldots,n+1.$$

Nato poiščemo točko $y \in [a, b]$, pri kateri je dosežen ekstrem residuala

$$|f(y) - p_k^*(y)| = \|f - p_k^*\|_{\infty,[a,b]}\,.$$

Če je

$$|f(y) - p_k^*(y)| - m < \epsilon,$$

potem postopek končamo, saj smo izračunali polinom na zahtevano natančnost ϵ. V nasprotnem primeru naredimo zamenjavo točk v množici E_k. In sicer zamenjamo eno točko iz E_k z izračunanim y, tako da ohranimo alternacijo residuala. Novo množico proglasimo za E_{k+1} in nadaljujemo postopek.

Drugi Remesov postopek.
Razlika med prvim in drugim Remesovim postopkom je le v konstrukciji nove množice točk E_{k+1}, saj pri drugem Remesovem postopku zamenjamo vse točke. In sicer med vsakima dvema zaporednima ničlama residuala izračunamo točko, pri kateri je dosežen lokalni ekstrem. Te točke nato sestavljajo novo množico E_{k+1}.

Naloga 3.1. *Poiščite premico $p(x) = kx + n$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$. Uporabite prvi Remesov postopek.*

Rešitev:
Najprej izberimo začetno množico E_0, ki vsebuje tri točke iz intervala $[0, 1]$. Te točke lahko izberemo kar ekvidistantno:

$$E_0 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Začnimo s prvim korakom. Iščemo polinom $p_0^*(x) = k_0 x + n_0 \in \mathbb{P}_1$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_0. Določen je z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} 1 - n_0 &= m_0 \\ \sqrt{e} - \frac{1}{2}k_0 - n_0 &= -m_0 \\ e - k_0 - n_0 &= m_0, \end{aligned}$$

ki je enaka

$$k_0 = e - 1 = 1.71828, \quad n_0 = -\frac{e}{4} + \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{3}{4} = 0.89479, \quad m_0 = \frac{e}{4} - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{1}{4} = 0.10521.$$

Točko y, kjer je dosežen ekstrem residuala $r_0 = f - p_0^*$, dobimo z odvajanjem. In sicer sledi iz enačbe

$$(e^x - p_0^*(x))' = e^x - (e - 1) = 0,$$

da je $y = \ln(e-1)$, saj je $|p_0^*(0)| = |p_0^*(1)| = m_0 < \ln(e-1)$. Iz E_0 nato določimo novo množico

$$E_1 = \{0, \ln(e-1), 1\},$$

pri čemer smo x_1 zamenjali z y, saj smo tako ohranili alternacijo residuala.
Nadaljujemo z drugim korakom. Rešimo linearen sistem

$$\begin{aligned} 1 - n_1 &= m_1 \\ e - 1 - k_1 \ln(e-1) - n_1 &= -m_1 \\ e - k_1 - n_1 &= m_1, \end{aligned}$$

in dobimo $p_1^*(x) = k_1 x + n_1$, kjer sta

$$k_1 = e - 1 = 1.71828, \quad n_1 = \frac{1}{2}(e + \ln(e-1) - e\ln(e-1)) = 0.894067.$$

V tem primeru vidimo, da je ekstrem residuala $r_1 = f - p_1^*$ dosežen kar v vseh treh točkah iz množice E_1. Ker residual r_1 alternirajoče doseže svojo normo v treh točkah je $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora linearnih funkcij. Na sliki 3.1 sta prikazana oba koraka Remesovega postopka. Na levi strani so grafi funkcije in polinomov, na desni pa so prikazani grafi residualov, točke množice E_k ter na novo izračunana točka.

Naloga 3.2. *Iščemo polinom $p \in \mathbb{P}_2$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$. Naredite nekaj korakov prvega Remesovega postopka.*

Rešitev:
Najprej izberemo začetno množico E_0, ki vsebuje štiri točke iz intervala $[0, \pi]$. Naj bodo kar ekvidistantne:

$$E_0 = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}.$$

Dobimo sledeče rezultate.
1. korak:

$$\begin{aligned} &p_0^*(x) = -0.39486x^2 + 1.24049x, \\ &E_1 = \{0., 1.0472, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0 \end{aligned}$$

2. korak:

$$\begin{aligned} &p_1^*(x) = -0.383899x^2 + 1.19458x + 0.0180304, \\ &E_2 = \{0., 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0180304 \end{aligned}$$

3. korak:

$$\begin{aligned} &p_2^*(x) = -0.395243x^2 + 1.22558x + 0.0253175, \\ &E_3 = \{0.371796, 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0253175 \end{aligned}$$

1. korak:

2. korak:

Slika 3.1: Prikaz korakov Remesovega postopka.

4. korak:

$$p_3^*(x) = -0.404888x^2 + 1.2715x - 0.0259707,$$
$$E_4 = \{0.468154, 1.62032, 2.73266, 3.14159\}, \quad m = 0.0275111$$

5. korak:

$$p_4^*(x) = -0.405397x^2 + 1.27393x - 0.0286771,$$
$$E_5 = \{0., 0.468154, 1.62032, 2.73266\}, \quad m = 0.0276268$$

6. korak:

$$p_5^*(x) = -0.404987x^2 + 1.27261x - 0.0278896,$$
$$E_6 = \{0., 0.468154, 1.62032, 2.67233\}, \quad m = 0.0278896$$

7. korak:

$$p_6^*(x) = -0.405191x^2 + 1.27294x - 0.0279447,$$
$$E_7 = \{0., 0.468154, 1.5708, 2.67233\}, \quad m = 0.0279447$$

8. korak:

$$p_7^*(x) = -0.405285x^2 + 1.27324x - 0.0280036,$$
$$E_8 = \{0., 0.471973, 1.5708, 2.67233\}, \quad m = 0.0280036$$

Po osmem koraku je razlika med ekstremom residuala ter minimaksom m enaka $2.6 \cdot 10^{-6}$. Na sliki 3.2 so prikazani grafi residualov, na sliki 3.3 pa polinom po osmem koraku iteracij skupaj s funkcijo f.

1. korak:

2. korak:

3. korak:

4. korak:

5. korak:

6. korak:

7. korak:

8. korak:

Slika 3.2: Grafi residualov.

Slika 3.3: Primerjava funkcije (rdeč graf) ter polinoma (moder graf) dobljenega po osmih korakih Remesovega postopka.

Naloga 3.3. *Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ konveksna funkcija. Aproksimiramo jo s premico po metodi najboljše enakomerne aproksimacije. Uporabimo prvi Remesov postopek, ki ga začnemo v točkah $a, \frac{a+b}{2}, b$. Dokažite, da se algoritem ustavi po dveh korakih. Ali to velja tudi za drugi Remesov postopek?*

Rešitev:
Začetna množica točk je enaka

$$E_0 = \left\{a, \frac{a+b}{2}, b\right\}.$$

Začnimo s prvim korakom. Iščemo polinom $p_0^*(x) = k_0 x + n_0 \in \mathbb{P}_1$ najboljše enakomerne aproksimacije za funkcijo f na množici E_0. Določen je z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} f(a) - ak_0 - n_0 &= m \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}k_0 - n_0 &= -m \\ f(b) - bk_0 - n_0 &= m, \end{aligned}$$

ki je enaka

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \quad n_0 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)\right) - \frac{(3a+b)(f(a)-f(b))}{4(a-b)}, \\ m &= \frac{1}{4}\left(-2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) + f(b)\right). \end{aligned}$$

Poiščimo točko, kjer je dosežen ekstrem residuala $r_0 = f - p_0^*$. Odvajamo in dobimo enačbo

$$(f(x) - p_0^*(x))' = f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0.$$

Označimo rešitev te enačbe s c. Če je slučajno $c = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, potem residual alternirajoče doseže svojo normo v treh točkah in smo končali. Sicer pa iz konveksnosti funkcije sledi, da je

$$\operatorname{sign}(r_0(c)) = \operatorname{sign}\left(r_0\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

in nova množica točk je enaka

$$E_1 = \{a, c, b\}.$$

Nadaljujemo z drugim korakom. Rešimo linearen sistem

$$\begin{aligned} f(a) - ak_0 - n_0 &= m \\ f(c) - ck_0 - n_0 &= -m \\ f(b) - bk_0 - n_0 &= m, \end{aligned}$$

in dobimo $p_1^*(x) = k_1 x + n_1$, kjer sta

$$k_1 = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \quad n_1 = \frac{f(a)(-(b+c)) + (a+c)f(b) + (a-b)f(c)}{2(a-b)}.$$

Z odvajanjem residuala $r_1 = f - p_1^*$ spet dobimo isto enačbo

$$(f(x) - p_1^*(x))' = f'(x) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0,$$

ki ima rešitev v točki c. To pomeni, da residual r_1 alternirajoče doseže svojo normo v vseh treh točkah iz množice E_1 in je zato $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije za f iz prostora linearnih funkcij.

Z podobnim sklepanjem ugotovimo, da velja trditev tudi za drugi Remesov postopek.

Naloga 3.4. *Naj bo $f(x) = \sin(3x)$. Na intervalu $[0, 2\pi]$ poiščite polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$.*

Rešitev:
Polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$ ima to lastnost, da alternirajoče doseže svojo normo v šestih točkah. Ker funkcija $\sin(3x)$ alternirajoče doseže ekstremne vrednosti ± 1 v točkah $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$, je polinom najboljše enakomerne aproksimacije iz prostora $\mathbb{P}_4$ kar ničelna funkcija $p^* \equiv 0$.

Naloga 3.5. *Na intervalu $[-1, 1]$ poiščite parabolo, ki najboljše aproksimira funkcijo $f(x) = |x|$. Za reševanje uporabite drugi Remesov postopek z začetnimi točkami $E_0 = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.*

Rešitev:
1. korak: Naj bo $p_0^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Rešimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
-a_0 + \frac{2a_1}{3} - \frac{4a_2}{9} + \frac{2}{3} &= m, \\
-a_0 + \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{9} + \frac{1}{3} &= -m, \\
-a_0 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{9} + \frac{1}{3} &= m, \\
-a_0 - \frac{2a_1}{3} - \frac{4a_2}{9} + \frac{2}{3} &= -m,
\end{aligned}$$

in dobimo

$$a_0 = \frac{2}{9}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad m = 0.$$

Polinom najboljše enakomerne aproksimacije na množici E_0 je tako enak

$$p_0^*(x) = x^2 + \frac{2}{9}.$$

Ničle residuala $r_0 = f - p_0^*$ so v točkah

$$z_1 = -\frac{2}{3}, \quad z_2 = -\frac{1}{3}, \quad z_3 = \frac{1}{3}, \quad z_4 = \frac{2}{3}.$$

Definirajmo še $z_0 = -1$ in poiščimo ekstreme residuala na intervalih $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Ekstremi so doseženi v točkah

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{2},$$

in sestavljajo novo množico $E_1 = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.
2. korak: Rešimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -a_0 + a_1 - a_2 + 1 &= m, \\ -a_0 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{1}{2} &= -m, \\ -a_0 &= m, \\ -a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{1}{2} &= -m \end{aligned}$$

in dobimo

$$a_0 = \frac{1}{8}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad m = -\frac{1}{8}.$$

Polinom najboljše enakomerne aproksimacije na množici E_1 je zato enak

$$p_1^*(x) = x^2 + \frac{1}{8}$$

in ima ekstreme točno v točkah iz množice E_1. Ker v teh točkah residul alternira, je $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije.

Naloga 3.6. *Funkcijo $f(x) = x^6$ na intervalu $[-1, 1]$ aproksimirajte po metodi najboljše enakomerne aproksimacije s polinomi iz prostora $\mathbb{P}_3$. Uporabite drugi Remesov postopek.*

Rešitev:
1. korak: Izberimo začetno množico točk

$$E_0 = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

in naj bo $p_0^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Rešimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + 1 &= m, \\ -a_0 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{1}{64} &= -m, \\ -a_0 &= m, \\ -a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} - \frac{a_3}{8} + \frac{1}{64} &= -m, \\ -a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + 1 &= m \end{aligned}$$

in dobimo

$$a_0 = -\frac{15}{128}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad m = \frac{15}{128}.$$

Polinom najboljše enakomerne aproksimacije na množici E_0 je enak

$$p_0^*(x) = x^2 - \frac{15}{128}.$$

Poiščemo ekstremne točke, ki ležijo med ničlami residula, in določimo novo množico

$$E_1 = \left\{-1, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}, 1\right\}.$$

2. korak: Rešimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + 1 &= m, \\
-a_0 + \frac{a_1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{a_2}{\sqrt{3}} + \frac{a_3}{3^{3/4}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} &= -m, \\
-a_0 &= m, \\
-a_0 - \frac{a_1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{a_2}{\sqrt{3}} - \frac{a_3}{3^{3/4}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} &= -m, \\
-a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + 1 &= m
\end{aligned}$$

in dobimo

$$a_0 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad m = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Polinom najboljše enakomerne aproksimacije na množici E_1 je enak

$$p_1^*(x) = x^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

in ima ekstreme točno v točkah iz množice E_1. Ker v teh točkah residual alternira, je $p_1^* = p^*$ kar polinom najboljše enakomerne aproksimacije.

Posplošitev polinomske enakomerne aproksimacije:
Funkcije

$$\mathcal{F} := (f_0, f_1, \ldots, f_n)$$

zadoščajo **Haarovemu pogoju** na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, če so zvezne in je posplošena Vandermondova determinanta

$$V_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0,$$

za paroma različne točke x_i iz intervala $[a, b]$. Funkcijo

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

imenujemo posplošen polinom, $\mathcal{F} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ pa imenujemo **Čebišev sistem funkcij**.

Če je $\mathcal{F}$ Čebišev sistem funkcij, potem lahko element najboljše aproksimacije iz podprostora $\mathrm{Lin}\{\mathcal{F}\}$ poiščemo z Remesovim postopkom.

Naloga 3.7. *Funkcijo $f(x) = x$ na intervalu $[0, 2]$ aproksimiramo z elementi iz podprostora $S = \mathrm{Lin}\{e^x, e^{2x}\}$ po metodi najboljše enakomerne aproksimacije. Pokažite, da lahko uporabimo prvi Remesov postopek in naredite en korak tega algoritma.*

Rešitev:
Pokazati moramo, da je $\{e^x, e^{2x}\}$ Čebišev sistem funkcij. To je res, saj za $x_0 \neq x_1$ velja

$$V_{\mathcal{F}}(x_0, x_1) = \det \begin{pmatrix} e^{x_0} & e^{2x_0} \\ e^{x_1} & e^{2x_1} \end{pmatrix} = e^{x_0} e^{x_1} (e^{x_1} - e^{x_0}) \neq 0.$$

Remesov postopek:
1. korak: Izberimo začetno množico $E_0 = \{0, 1, 2\}$ in naj bo $g(x) = ae^x + be^{2x}$. Iščemo g_0^*, ki bo najboljše aproksimiral f na množici E_0. Iz rešitve linearnega sistema

$$\begin{aligned} -a - b &= m, \\ -ea - e^2 b + 1 &= -m, \\ -e^2 a - e^4 b + 2 &= m, \end{aligned}$$

ki je enaka

$$a = \frac{3 - e^2}{e - e^3}, \quad b = \frac{3 - e}{(e-1)e\,(1 + e^2)}, \quad m = -\frac{-2 + e + e^2}{(1+e)\,(1+e^2)} = -0.25991,$$

dobimo, da je

$$g_0^*(x) = \frac{3 - e^2}{e - e^3} e^x + \frac{3 - e}{(e-1)e\,(1+e^2)} e^{2x}.$$

Za izračun stacionarnih točk residuala $r_0 = f - g_0^*$ moramo rešiti kvadratno enačbo

$$1 - \frac{2(3-e)}{(e-1)e\,(1+e^2)} e^{2x} - \frac{(3-e^2)}{e - e^3} e^x = 0$$

v spremenljivki e^x. Le ena od rešitev kvadratne enačbe je pozitivna in določa točko $x = 1.2021$, v kateri je dosežen ekstrem residuala $\|f - g_0^*\|_{\infty,[0,2]} = 0.281688$. Ker je razlika med ekstremom in vrednostjo m precej velika, nadaljujemo postopek z novo množico točk $E_1 = \{0, 1.2021, 2\}$.

Naloga 3.8. *Dokažite, da je množica funkcij* $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$*, ki so zvezne na kompaktni množici* X *Čebišev sistem funkcij (zadošča Haarovemu pogoju) natanko takrat, ko ima vsak netrivialen posplošen polinom* $\sum_{i=0}^{n} a_i f_i$ *kvečjemu* n *različnih ničel v* X*.*

Rešitev:
($\Longrightarrow$) Recimo, da ima netrivialen posplošen polinom $f = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j$ vsaj $(n+1)$ paroma različnih ničel $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Torej je

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

kar pomeni, da ima matrika $A_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (f_j(x_i))_{i,j=0}^{n}$ netrivialen vektor v jedru. Od tod pa sledi, da je $\det(A_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = V_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, kar je protislovje s predpostavko, da je $\mathcal{F}$ Čebišev sistem funkcij.
($\Longleftarrow$) Predpostavimo sedaj, da ima netrivialen posplošen polinom kvečjemu n paroma različnih ničel. Izberimo poljubne paroma različne točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in si poglejmo rešitve sistema

$$A_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,(a_j)_{j=0}^{n} = \mathbf{0}.$$

Te enačbe dejansko določajo ničle funkcije $f = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j$:

$$f(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Iz predpostavke sledi, da morajo biti $a_j = 0$ za vse $j = 0, 1, \ldots, n$. To pa pomeni, da je matrika $A_{\mathcal{F}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nesingularna.

Naloga 3.9. *Dokažite, da so funkcije* $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, *Čebišev sistem funkcij na poljubnem intervalu* $[a, b]$*.*

Rešitev:
Po nalogi 3.8 je dovolj dokazati, da ima vsak netrivialen posplošen polinom $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{a_i x}$ kvečjemu $n-1$ različnih ničel na intervalu $[a, b]$. Dokažimo to z indukcijo. Za $n = 1$ je to očitno res, saj je $\alpha_1 e^{a_1 x} \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ ter $\alpha_1 \neq 0$. Predpostavimo, da trditev velja za $n-1$ in naj bo $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{a_i x}$. Če bi imel p vsaj n različnih ničel, bi enako veljalo tudi za $e^{-a_1 x} p(x)$. Po Rollejevem izreku bi imel tako $q(x) = (e^{-a_1 x} p(x))'$ vsaj $n-1$ različnih ničel. Ker je q linearna kombinacija funkcij oblike $e^{(a_i - a_1)x}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, ki tvorijo Čebišev sistem po indukcijski predpostavki, bi moral biti $q \equiv 0$, to pa bi impliciralo, da je tudi $p \equiv 0$. S tem je dokaz končan.

Naloga 3.10. *Dana sta trigonometrična polinoma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)),$$

kjer so $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$*. Če velja* $f(x_i) = g(x_i)$ *za* $2n+1$ *različnih točk na intervalu* $[0, 2\pi)$*, potem je* $f \equiv g$*.*

Rešitev:
Poglejmo si razliko

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= \sum_{k=0}^{n}((a_k-c_k)\cos(kx)+(b_k-d_k)\sin(kx)) = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left((a_k-c_k)\left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)+(b_k-d_k)\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)\right) = \\
&= e^{inx}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{a_k-c_k}{2}+\frac{b_k-d_k}{2i}\right)e^{i(n+k)x}+\left(\frac{a_k-c_k}{2}-\frac{b_k-d_k}{2i}\right)e^{i(n-k)x}\right) =: r\left(e^{ix}\right).
\end{aligned}
$$

S substitucijo $y=e^{ix}$ dobimo, da je

$$
r(y) = y^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{a_k-c_k}{2}+\frac{b_k-d_k}{2i}\right)y^{n+k}+\left(\frac{a_k-c_k}{2}-\frac{b_k-d_k}{2i}\right)y^{n-k}\right)
$$

polinom stopnje $2n$. Če je torej $f(x_i)=g(x_i)$ za $2n+1$ različnih točk na intervalu $[0,2\pi)$, potem morajo biti vsi koeficienti v polinomu $r(y)$ enaki nič, od koder sledi

$$
a_k = c_k, \quad b_k = d_k.
$$

Naloga 3.11. *Dokažite, da ima izmed vseh polinomov p stopnje $\leq n$, takih da je $\max_{-1\leq x\leq 1}|p(x)|\leq 1$, Čebišev polinom T_n največji vodilni koeficient 2^{n-1}.*

Rešitev:
Uporabili bomo izrek, da ima izmed vseh polinomov stopnje $\leq n$ z vodilnim koeficientom enakim 1, polinom $2^{1-n}T_n$ najmanjšo neskončno normo na intervalu $[-1,1]$ (za dokaz glej [4]). Vzemimo poljuben polinom $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, za katerega velja $\|p\|_{\infty,[-1,1]}\leq 1$. Polinom $q:=\frac{1}{a_n}p$ ima vodilni koeficient enak 1 in za njegovo normo velja

$$
M := \max_{-1\leq x\leq 1}|q(x)| \geq 2^{1-n}.
$$

Ker je

$$
\max_{-1\leq x\leq 1}|p(x)| = \max_{-1\leq x\leq 1}|a_n||q(x)| = |a_n|M \leq 1,
$$

sledi da je

$$
|a_n| \leq \frac{1}{M} \leq 2^{n-1}.
$$

Za Čebišev polinom T_n velja $\|T_n\|_{\infty,[-1,1]}=1$, njegov vodilni koeficient pa je ravno enak 2^{n-1}.

Poglavje 4

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktov, norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ pa naj bo inducirana iz skalarnega produkta. Dalje naj bo $S \subset X$ končnodimenzionalen podprostor. Za poljuben $f \in X$ iščemo tak $f^* \in S$, za katerega velja

$$\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|.$$

Element f^* imenujemo element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov.

Velja, da je $f^* \in S$ element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov za $f \in X$ natanko tedaj, ko je $f - f^* \perp S$. Iz tega pogoja pa sledi tudi konstrukcija.

Naj bo $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ baza podprostora S. Ker je razlika $f - f^*$ pravokotna na S, mora biti pravokotna na vsak bazni element:

$$f - f^* \perp \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Element f^* iščemo z nastavkom

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j.$$

Pogoje pravokotnosti zapišemo kot

$$\left\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_i \right\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kar nam da linearen sistem za neznane koeficiente $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^n$. In sicer

$$G\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{d}, \quad G = \left(\langle \varphi_j, \varphi_i\rangle\right)_{i,j=1}^n, \quad \boldsymbol{d} = \left(\langle f, \varphi_i\rangle\right)_{i=1}^n.$$

Ta sistem imenujemo normalni sistem, matriko G pa Gramova matrika.

Naloga 4.1. *Naj bodo* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ *dane točke v ravnini.*

1. *Poiščite premico* $y = kx + n$, *ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira te točke.*
2. *Uporabite rezultate na primeru točk* $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8)$.

Rešitev:

1. Iščemo premico $p(x) = kx + n$, pri kateri je dosežen minimum izraza

$$\min_{k,n} \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)^2.$$

Nalogo lahko rešimo na dva načina.

1. **način:** Definiramo funkcijo $g(k, n) := \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)^2$ in poiščemo njen minimum. Parcialno odvajamo in dobimo sistem dveh linearnih enačb

$$\frac{\partial g}{\partial k}(k, n) = 2 \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)x_i = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial n}(k, n) = 2 \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i) = 0,$$

ki se v matrični obliki glasi

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Po Cramerjevem pravilu preprosto izračunamo rešitev

$$k = \frac{m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2},$$
$$m = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{m \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2},$$

ki določa premico p.

2. **način:** Preko Gramove matrike.
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Aproksimirajmo funkcijo f, za katero velja

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{m} f(x_i) g(x_i).$$

Premica $p(x) = kx + n$ najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix},$$

ki pa je enak sistemu (4.1).

2.

Slika 4.1: Premica, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Pri danih podatkih dobimo linearen sistem

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 18 \end{pmatrix},$$

ki določa premico

$$p(x) = 2x - \frac{1}{2}.$$

Rešitev je prikazana na sliki 4.1.

Naloga 4.2. *Dan je interval $I = [-1, 1]$ in funkcija $f(x) = e^x$. Poiščite polinom $p^* \in \mathbb{P}_1$ najboljše aproksimacije po zvezni metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Premica

$$p(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x),$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx,$$

je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix}.$$

Skalarni produkti, ki nastopajo v matričnem sistemu, so enaki

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} dx = 2, \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} x dx = 0, \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ \langle e^x, \varphi_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1}, \\ \langle e^x, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} e^x x dx = 2e^{-1}, \end{aligned}$$

in rešitev se glasi

$$p(x) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}x.$$

Naloga 4.3. *Za funkcijo* $f(x) = \sin^4 x$ *na intervalu* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *poiščite element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov iz podprostora*

$$S = \mathrm{Lin}\{1, \sin x, \cos x\}.$$

Rešitev:
Element

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x,$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru S glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx,$$

je določen z rešitvijo normalnega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, \sin x \rangle & \langle 1, \cos x \rangle \\ \langle \sin x, 1 \rangle & \langle \sin x, \sin x \rangle & \langle \sin x, \cos x \rangle \\ \langle \cos x, 1 \rangle & \langle \cos x, \sin x \rangle & \langle \cos x, \cos x \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle \sin x, f \rangle \\ \langle \cos x, f \rangle \end{pmatrix}.$$

Integrale, ki nastopajo v skalarnih produktih, enostavno izračunamo z uporabo Beta funkcije

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx = \frac{1}{2} B(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Normalni sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{16} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = \frac{-704 + 90\pi + 45\pi^2}{120\left(-16 + 2\pi + \pi^2\right)}, \quad \alpha_1 = \frac{-320 + 42\pi + 19\pi^2}{30\left(32 - 20\pi + \pi^3\right)}, \quad \alpha_2 = \frac{320 - 38\pi - 21\pi^2}{30\left(32 - 20\pi + \pi^3\right)}.$$

Funkcija in aproksimant sta prikazana na sliki 4.2.

Slika 4.2: Funkcija (rdeč graf) in aproksimant po metodi najmanjših kvadratov (moder graf).

Naloga 4.4. *Točke*

$$(1,0), (2,2), (1,2), (3,2), (1,1), (2,1), (2,0), (3,0), (3,1)$$

aproksimirajte z elementi iz podprostora $\mathrm{Lin}\{1, e^x\}$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Iščemo

$$p(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_0\varphi_1(x), \quad \varphi_0(x) := 1, \quad \varphi_1(x) := e^x,$$

ki aproksimira podatke po metodi najmanjših kvadratov glede na diskretni skalarni produkt. Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (1,2,1,3,1,2,2,3,3)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,2,2,2,1,1,0,0,1)^T$$

ter vektorja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0 &:= \varphi_0(\boldsymbol{x}) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 &:= \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \left(e, e^2, e, e^3, e, e^2, e^2, e^3, e^3\right)^T, \end{aligned}$$

ki določata vrednosti baznih funkcij v $\boldsymbol{x}$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 9,\\
\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e+e^2+e^3),\\
\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_1^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e^2+e^4+e^6),\\
\langle f,\varphi_0\rangle &= \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 9,\\
\langle f,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e+e^2+e^3),
\end{aligned}$$

kjer smo z f označili funkcijo, za katero velja $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. Gramov sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix} 9 & 3(e+e^2+e^3)\\ 3(e+e^2+e^3) & 3(e^2+e^4+e^6)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ 3(e+e^2+e^3)\end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0,$$

od koder sledi, da je iskana funkcija enaka $p(x)=1$.

Naloga 4.5. *Točke* $(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,2),(1,3)$ *aproksimirajte s polinomi iz prostora* $\mathbb{P}_2$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (-1,-1,0,1,1)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,1,1,2,3)^T$$

in naj bo diskretni skalarni produkt enak

$$\langle f,g\rangle := f(\boldsymbol{x})^T\cdot g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i).$$

Dalje naj vektorji

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_0 &:= (1,1,1,1,1)^T,\\
\boldsymbol{\varphi}_1 &:= (-1,-1,0,1,1)^T,\\
\boldsymbol{\varphi}_2 &:= (1,1,0,1,1)^T
\end{aligned}$$

označujejo vrednosti baznih funkcij $1,x,x^2$ komponentah vektorja $\boldsymbol{x}$. Označimo s f funkcijo, za katero velja $f(x_i)=y_i$, $i=1,2,\ldots,5$. Iščemo parabolo $p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov glede na definiran skalarni produkt. Gramov sistem je enak

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 4\\ 6\end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

od koder sledi, da je iskana parabola (glej sliko 4.3) enaka $p(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Slika 4.3: Parabola, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 4.6. *Točke* $(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,2),(1,3)$ *aproksimirajte s polinomi iz prostora* $\mathbb{P}_3$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (-1,-1,0,1,1)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,1,1,2,3)^T$$

in naj bo diskretni skalarni produkt enak

$$\langle f, g\rangle := f(\boldsymbol{x})^T \cdot g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i).$$

Vektorji

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_0 &:= (1,1,1,1,1)^T, \\
\boldsymbol{\varphi}_1 &:= (-1,-1,0,1,1)^T, \\
\boldsymbol{\varphi}_2 &:= (1,1,0,1,1)^T, \\
\boldsymbol{\varphi}_3 &:= (-1,-1,0,1,1)^T
\end{aligned}$$

naj označujejo vrednosti baznih funkcij $1, x, x^2, x^3$ v komponentah vektorja $\boldsymbol{x}$, f pa naj bo funkcija, za katero velja $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,\ldots,5$. Iščemo torej polinom $p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov glede na definiran skalarni produkt. Normalni sistem je enak

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Očitno je matrika singularna in nimamo enolične rešitve. V tem primeru so rešitev vsi polinomi oblike

$$p(x) = 1 + (1-\zeta)x + \frac{1}{2}x^2 + \zeta x^3, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Problem ni v nasprotju s teorijo. Enolične rešitve ne dobimo, saj so vektorji $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, linearno odvisni.

Naloga 4.7. *Dokažite, da so funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linearno odvisne natanko takrat, ko je $\det G = 0$, kjer je $G = (\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=1}^n$ Gramova matrika.*

Rešitev:
($\Longrightarrow$) Naj bodo funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linearno odvisne. Tedaj obstaja tak $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$, ki ni identično enak nič, da je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0.$$

Na tej enačbi uporabimo skalarni produkt $\langle f_i, \cdot \rangle$ in dobimo enačbe

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ki predstavljajo linearni sistem

$$G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

Matrika G ima neničelen vektor v jedru, zato je $\det G = 0$.

($\Longleftarrow$) Predpostavimo sedaj, da je $\det G = 0$. Tedaj obstaja neničelen vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ v jedru matrike G. To pomeni, da velja

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pomnožimo vsako od enačb z α_i, seštejmo enačbe in dobimo

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 = 0.$$

Od tod sledi, da mora biti $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$. To pa pomeni, da so funkcije linearno odvisne.

Naloga 4.8. *Na intervalu $[a, b]$ je skalarni produkt definiran kot*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Naj bo $f^* \in \mathbb{P}_n$ polinom stopnje n, ki je aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov za funkcijo $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \neq 0$. Dokažite, da ima $f - f^*$ vsaj $n + 1$ ničel na intervalu $[a, b]$.

Rešitev:
Ker je f^* polinom najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov za funkcijo f, mora veljati

$$f - f^* \perp \mathbb{P}_n.$$

To pomeni, da je za vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n$ skalarni produkt

$$\langle f - f^*, p \rangle = 0.$$

Recimo, da bi imela razlika $f - f^*$ le n ničel na $[a, b]$. Označimo te ničle z $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Naj bo $p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \in \mathbb{P}_n$ polinom, ki ima enake ničle kot $f - f^*$. Tedaj je produkt $p(f - f^*)$ na celotnem intervalu $[a, b]$ bodisi pozitiven bodisi negativen in zato

$$\langle f - f^*, p \rangle = \int_a^b \left(f(t) - f^*(t)\right) p(t) dt \neq 0$$

Sledi, da mora imeti $f - f^*$ vsaj $n + 1$ ničel na $[a, b]$.

Naloga 4.9. *Izpeljite algoritem za izračun ortogonalnih polinomov.*

Rešitev:
Konstrukcija gre induktivno. Recimo, da smo že izračunali družino ortogonalnih polinomov $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$, kjer je $p_i \in \mathbb{P}_i$. Naj bo $p_n \in \mathbb{P}_n$ polinom z enakim vodilnim koeficientom, kot ga ima polinom p_{n-1}. Tedaj je

$$p_n - x p_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j,n} p_j.$$

Če uporabimo na tej enačbi skalarne produkte $\langle p_i, \cdot \rangle$, $i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$, dobimo

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1,n} &= -\frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2}, \\
\alpha_{n-2,n} &= -\frac{\langle x p_{n-2}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-2}\|^2}, \\
\alpha_{i,n} &= 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-3,
\end{aligned}$$

kar nam da tričlensko rekurzivno formulo. Ker je

$$p_{n-1} - x p_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{i,n-1} p_i,$$

dobimo po množenju s $\langle p_{n-1}, \cdot \rangle$ enakost $\langle x p_{n-2}, p_{n-1} \rangle = \|p_{n-1}\|^2$. Od tod sledi, da je

$$p_n = (x + \alpha_n) p_{n-1} + \beta_n p_{n-2}, \quad \alpha_n := -\frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2}, \quad \beta_n := -\frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}.$$

Ta izpeljava nam da sledeč algoritem.

Algoritem za izračun prvih n ortogonalnih polinomov:

1. $p_0 = 1$
2. $\alpha_1 = -\dfrac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\|p_0\|^2}$
3. $\beta_1 = 0$
4. $p_1 = (x+\alpha_1)p_0$
5. **for** $i = 2, 3, \dots, n$
6. $\qquad \alpha_i := -\dfrac{\langle xp_{i-1}, p_{i-1}\rangle}{\|p_{i-1}\|^2}$
7. $\qquad \beta_i := -\dfrac{\|p_{i-1}\|^2}{\|p_{i-2}\|^2}$
8. $\qquad p_i = (x+\alpha_i)p_{i-1} + \beta_i p_{i-2}$
9. **end**

Naloga 4.10. *Skalarni produkt je definiran kot* $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{5} f(i)g(i)$.

1. *Poiščite prve tri ortogonalne polinome.*
2. *S parabolo aproksimirajte funkcijo* $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:

1. Uporabimo algoritem za izračun ortogonalnih polinomov preko tričlenske rekurzivne formule. Definirajmo vektor $\boldsymbol{x} = (1,2,3,4,5)^T$ in naj bo prvi polinom enak

$$p_0(x) = 1, \quad \boldsymbol{p}_0 = (1,1,1,1,1)^T.$$

Izračunamo

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0\rangle = \boldsymbol{p}_0^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 5, \quad \alpha_1 = -\frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} = -\frac{1}{5}\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = -3$$

in dobimo drugi ortogonalni polinom

$$p_1(x) = (x+\alpha_1)p_0(x) = x - 3, \quad \boldsymbol{p}_1 = (-2,-1,0,1,2)^T.$$

Dalje je

$$\|p_1\|^2 = \boldsymbol{p}_1^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = 10, \quad \alpha_2 = -\frac{\langle xp_1, p_1\rangle}{\|p_1\|^2} = -3, \quad \beta_2 = -\frac{\langle xp_0, p_1\rangle}{\|p_0\|^2} = -2,$$

od koder sledi

$$p_2(x) = (x+\alpha_2)p_1(x) + \beta_2 p_0(x) = (x-3)^2 - 2, \quad \boldsymbol{p}_2 = (2,-1,-2,-1,2)^T.$$

Izračunamo še $\|p_2\|^2 = \boldsymbol{p}_2^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 14$. Prvi trije ortogonalni polinomi so tako

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - 3, \quad p_2(x) = x^2 - 6x + 7,$$

ortonormirani polinomi pa so enaki

$$\widetilde{p}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \widetilde{p}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}(x-3), \quad \widetilde{p}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}(x^2 - 6x + 7).$$

Prikazani so na sliki 4.4 (levo).

Slika 4.4: Prvi trije ortogonalni polinomi glede na diskretni skalarni produkt (levo) ter funkcija in aproksimacijska parabola po metodi najmanjših kvadratov (desno).

2. Pri računanju polinoma po metodi najmanjših kvadratov izrazimo polinome v ortogonalni bazi
$$p(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x).$$
Pripadajoča Gramova matrika je diagonalna matrika $G = \operatorname{diag}(5, 10, 14)$. Desna stran linearnega sistema, ki določa iskano parabolo, sestoji iz skalarnih produktov
$$\begin{aligned} \langle f, p_0 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 1, \\ \langle f, p_1 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0, \\ \langle f, p_2 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 6, \end{aligned}$$
pri čemer je $\boldsymbol{f} = f(\boldsymbol{x}) = (1, 0, -1, 0, 1)^T$. Od tod takoj sledi, da je rešitev
$$p(x) = \frac{1}{5} p_0(x) + \frac{3}{7} p_2(x) = \frac{3}{7} x^2 - \frac{18}{7} x + \frac{16}{5}.$$
Funkcija skupaj s točkami, ki jih aproksimiramo, ter parabola po metodi najmanjših kvadratov sta prikazani na sliki 4.4 (desno).

Naloga 4.11. *Skalarni produkt je definiran kot*

$$\langle f, g\rangle = f(1)g(1) + 2f(2)g(2) + 2f(3)g(3) + 2f(4)g(4) + f(5)g(5).$$

1. *Poiščite prve tri ortogonalne polinome.*
2. *S parabolo aproksimirajte funkcijo $f(x) = 2\cos^2(\frac{\pi x}{4})$ po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:

1. Uporabimo algoritem za izračun ortogonalnih polinomov preko tričlenske rekurzivne formule. Definirajmo vektor $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, 4, 5)^T$ ter diagonalno matriko $D = \mathrm{diag}(1, 2, 2, 2, 1)$. Prvi polinom je enak

$$p_0(x) = 1, \quad \boldsymbol{p}_0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T.$$

Izračunamo

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0\rangle = (D\boldsymbol{p}_0)^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 8, \quad \alpha_1 = -\frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} = -\frac{1}{8}(D\boldsymbol{x})^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = -3$$

in dobimo drugi ortogonalni polinom

$$p_1(x) = (x + \alpha_1)p_0(x) = x - 3, \quad \boldsymbol{p}_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)^T.$$

Dalje je

$$\|p_1\|^2 = (D\boldsymbol{p}_1)^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = 12, \quad \alpha_2 = -\frac{\langle xp_1, p_1\rangle}{\|p_1\|^2} = -3, \quad \beta_2 = -\frac{\langle xp_0, p_1\rangle}{\|p_0\|^2} = -\frac{3}{2},$$

od koder sledi

$$p_2(x) = (x + \alpha_2)p_1(x) + \beta_2 p_0(x) = (x - 3)^2 - \frac{3}{2}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{2}(5, -1, -3, -1, 5)^T.$$

Izračunamo še $\|p_2\|^2 = (D\boldsymbol{p}_2)^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 18$. Prvi trije ortogonalni polinomi so tako

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - 3, \quad p_2(x) = x^2 - 6x + \frac{15}{2},$$

ortonormirani polinomi pa so enaki

$$\widetilde{p}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \widetilde{p}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{12}}(x - 3), \quad \widetilde{p}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{18}}\left(x^2 - 6x + \frac{15}{2}\right).$$

2. Pri računanju polinoma po metodi najmanjših kvadratov izrazimo polinome v ortogonalni bazi

$$p(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x).$$

Pripadajoča Gramova matrika je diagonalna matrika $G = \operatorname{diag}(8, 12, 18)$. Desna stran linearnega sistema, ki določa iskano parabolo, sestoji iz skalarnih produktov

$$\begin{aligned}\langle f, p_0\rangle &= (D\boldsymbol{f})^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 8,\\ \langle f, p_1\rangle &= (D\boldsymbol{f})^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = 4,\\ \langle f, p_2\rangle &= (D\boldsymbol{f})^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0,\end{aligned}$$

pri čemer je $\boldsymbol{f} = f(\boldsymbol{x}) = (1, 0, 1, 2, 1)^T$. Od tod sledi, da je rešitev

$$p(x) = p_0(x) + \frac{1}{3}p_1(x) = \frac{1}{3}x.$$

Naloga 4.12. *Dane so točke $(-1, 12), (0, 7), (1, 6), (2, 9)$. Aproksimirajte jih s parabolo po diskretni metodi najmanjših kvadratov. Nalogo rešite preko ortogonalnih polinomov.*

Rešitev:
V ozadju problema je diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \sum_{i=1}^{4} f(x_i)g(x_i).$$

Definirajmo

$$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^4 = (-1, 0, 1, 2), \quad \boldsymbol{f} = (f_i)_{i=1}^4 = (12, 7, 6, 9),$$

s f pa označimo funkcijo, ki gre skozi dane točke. Uporabimo algoritem za izračun ortogonalnih polinomov. Prvi tak polinom je enak

$$p_0(x) = 1, \quad \boldsymbol{p}_0 = (1, 1, 1, 1)^T.$$

Izračunamo

$$\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0\rangle = \boldsymbol{p}_0^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 4, \quad \alpha_1 = -\frac{\langle xp_0, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = -\frac{1}{2}$$

in dobimo drugi ortogonalni polinom

$$p_1(x) = (x + \alpha_1)p_0(x) = x - \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)^T.$$

Dalje je

$$\|p_1\|^2 = \boldsymbol{p}_1^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = 5, \quad \alpha_2 = -\frac{\langle xp_1, p_1\rangle}{\|p_1\|^2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{\langle xp_0, p_1\rangle}{\|p_0\|^2} = -\frac{5}{4},$$

od koder sledi

$$\begin{aligned}&p_2(x) = (x + \alpha_2)p_1(x) + \beta_2 p_0(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x - 1,\\ &\boldsymbol{p}_2 = (1, -1, -1, 1)^T.\end{aligned}$$

Izračunamo še $\|p_2\|^2 = \boldsymbol{p}_2^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 4$. Prvi trije ortogonalni polinomi so tako

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad p_2(x) = x^2 - x - 1,$$

ortonormirani polinomi pa so enaki

$$\widetilde{p}_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{p}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \widetilde{p}_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x - 1\right).$$

Polinom najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov izrazimo v ortogonalni bazi

$$p(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x),$$

kjer so koeficienti rešitev normalnega sistema. Gramova matrika je diagonalna matrika $G = \operatorname{diag}(4, 5, 4)$. Desna stran linearnega sistema, ki določa iskano parabolo, sestoji iz skalarnih produktov

$$\begin{aligned} \langle f, p_0 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_0 = 34, \\ \langle f, p_1 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_1 = -5, \\ \langle f, p_2 \rangle &= \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{p}_2 = 8. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je rešitev

$$p(x) = \frac{17}{2} p_0(x) - p_1(x) + 2p_2(x) = 2x^2 - 3x + 7.$$

Naloga 4.13. *Skalarni produkt naj bo definiran kot*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

S pomočjo tričlenske rekurzivne formule izračunajte prve tri ortogonalne polinome glede na dan skalarni produkt. Aproksimirajte funkcijo $f(x) = e^x$ s parabolo po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev:
Z uporabo algoritma dobimo

$$\begin{aligned} &p_0(x) = 1, \quad \|p_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2, \\ &\alpha_1 = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0, \\ &p_1(x) = x, \quad \|p_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ &\alpha_2 = -\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, \quad \beta_2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}, \\ &p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \|p_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}. \end{aligned}$$

Gramova matrika je tako enaka $G = \mathrm{diag}\big(2, \frac{2}{3}, \frac{8}{45}\big)$. Desna stran normalnega sistema sestoji iz skalarnih produktov

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e}, \\
d_2 &= \int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{2}{e}, \\
d_2 &= \int_{-1}^{1} e^x \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2\,(e^2 - 7)}{3e}
\end{aligned}
$$

in parabola po metodi najmanjših kvadratov je enaka

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{e^2 - 1}{2e} p_0(x) + \frac{3}{e} p_1(x) + \frac{15\,(e^2 - 7)}{4e} p_2(x) = \\
&= \frac{15\,(e^2 - 7)\,x^2}{4e} + \frac{3x}{e} + \frac{e^2 - 1}{2e} - \frac{5\,(e^2 - 7)}{4e}.
\end{aligned}
$$

Funkcija ter aproksimacijska parabola sta prikazani na sliki 4.5.

Slika 4.5: Parabola (rdeč graf), ki aproksimira funkcijo e^x (moder graf) po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 4.14. *Skalarni produkt naj bo definiran kot*

$$
\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.
$$

Po Gram-Schmidtovem postopku ortogonalizirajte potence x^i, $i = 0, 1, 2$, na intervalu $[-1, 1]$.

Rešitev:
Naj bo $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$. Modificiran Gram-Schmidtov postopek je sledeč.

1. korak:

$$\|v_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$
$$f_1(x) = \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$v_2^{(1)}(x) = v_2(x) - \langle f_1, v_2 \rangle f_1(x) = x - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x dx = x,$$
$$v_3^{(1)}(x) = v_3(x) - \langle f_1, v_3 \rangle f_1(x) = x^2 - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}.$$

2. korak:

$$\left\| v_2^{(1)} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$
$$f_2(x) = \frac{v_2^{(1)}(x)}{\left\| v_2^{(1)} \right\|} = \frac{\sqrt{6}}{2} x,$$
$$v_3^{(2)}(x) = v_3^{(1)}(x) - \left\langle f_2, v_3^{(1)} \right\rangle f_2(x) =$$
$$= x^2 - \frac{1}{3} - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} x \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = x^2 - \frac{1}{3}.$$

3. korak:

$$\left\| v_3^{(3)} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{8}{45},$$
$$f_3(x) = \frac{v_3^{(2)}(x)}{\left\| v_3^{(2)} \right\|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1 \right).$$

Prvi trije ortonormirani polinomi so tako enaki

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} x, \quad f_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1 \right).$$

Ortogonalni polinomi glede na dan skalarni produkt so t.i. Legendrovi polinomi. Izračunali smo prve tri, splošna formula pa se glasi

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - x^2 \right)^n.$$

Naloga 4.15. *Funkcijo f aproksimiramo v podprostoru, ki ga razpenjajo funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Dokažite, da je funkcija*

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$$

konveksna funkcija v spremenljivki $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^n$.

Rešitev:
Funkcija g je konveksna, če za vsak $\lambda \in [0,1]$ ter za poljubna $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ velja

$$g\left(\lambda \boldsymbol{\alpha} + (1-\lambda)\boldsymbol{\beta}\right) \leq \lambda g\left(\boldsymbol{\alpha}\right) + (1-\lambda) g\left(\boldsymbol{\beta}\right).$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} g\left(\lambda \boldsymbol{\alpha} + (1-\lambda)\boldsymbol{\beta}\right) &= \left\| f - \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) f_i \right\| = \\ &= \left\| (\lambda + (1-\lambda)) f - \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| = \\ &\leq \lambda \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| + (1-\lambda) \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| = \\ &= \lambda g\left(\boldsymbol{\alpha}\right) + (1-\lambda) g\left(\boldsymbol{\beta}\right), \end{aligned}$$

kar dokazuje konveksnost.

Poglavje 5

Interpolacija

Splošni interpolacijski problem je sledeč. Naj bo $S = \text{Lin}\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq X$ podprostor v X in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ linearni funkcionali, ki sestavljajo podprostor $\Lambda = \text{Lin}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subseteq X^*$ dualnega prostora k X. Za dan vektor vrednosti $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ iščemo element $v \in S$, da velja

$$\lambda_i v = r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kadar tak v obstaja in je določen enolično, pravimo, da je *interpolacijski problem korekten*. To bo res, kadar sta izpolnjena dva od naslednjih pogojev:

1. linearna neodvisnost funkcij $s_1, s_2, \ldots, s_n$,
2. linearna neodvisnost funkcionalov $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,
3. neizrojenost kolokacijske matrike $(\lambda_i s_j)_{i,j=1}^n$.

Prva dva pogoja sta izpolnjena natanko takrat, ko je izpolnjen tudi tretji.
Zelo pogosto za funkcionale izberemo

$$\lambda_i f = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Polinomska interpolacija
Izberemo točke $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in prostor $\mathbb{P}_n$. Naj bodo vrednosti r_i enake vrednostim neke funkcije $f \in \mathcal{C}([a, b])$ v točkah x_i. Iščemo interpolacijski polinom p, za katerega velja

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lahko ga zapišemo v Lagrangeevi ali Newtonovi obliki.

Lagrangeeva oblika interpolacijskega polinoma:
Če so točke x_i med sabo paroma različne, govorimo o Lagrangeevi polinomski interpolaciji. Lagrangeev interpolacijski problem je korekten, saj je kolokacijska matrika kar

Vandermondova matrika in njena determinanta

$$V(x_0,x_1,\dots,x_n) = \det\,(x_i^j)_{i,j=0}^n = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

je različna od nič za paroma različne točke x_i. Interpolacijski polinom lahko zapišemo v zaključeni obliki

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{i,n}(x),$$

kjer so

$$\ell_{i,n}(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,1,\dots,n,$$

Lagrangeevi bazni polinomi, ki sestavljajo bazo za prostor $\mathbb{P}_n$.

Deljene diference in Newtonova oblika interpolacijskega polinoma:
Naj bodo $x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+k}$ dane točke, ki so vse med seboj različne. Tedaj je k-ta deljena diferenca $[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]\,f$ enaka vodilnemu koeficientu interpolacijskega polinoma, ki se s funkcijo f ujema v naštetih točkah.
Če velja $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}$, potem je k-ta deljena diferenca enaka $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i)$, kar je vodilni koeficient Taylorjevega polinoma razvitega okrog točke x_i.
Pravimo, da se dve funkciji x_i ujemata v dani točki m-kratno, če se ujemata v vrednosti in v prvih $(m-1)$-odvodih.
Deljene diference računamo s pomočjo rekurzivne formule:

$$[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]\,f = \begin{cases} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i), & x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k} \\ \frac{[x_i,x_{i+1},\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_{i+k}]f-[x_i,x_{i+1},\dots,x_{r-1},x_{r+1},\dots,x_{i+k}]f}{x_r-x_s}, & x_r\ne x_s \end{cases}$$

Z uporabo deljenih diferenc lahko zapišemo interpolacijski polinom v Newtonovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})\,[x_0,x_1,\dots,x_i]\,f.$$

Napaka interpolacije se za $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ izračuna po formuli

$$f(x)-p(x) = \omega(x)\,[x_0x_1,\dots,x_n,x]\,f, \quad \omega(x) := \prod_{i=0}^n (x-x_i).$$

Naloga 5.1. *Naj bodo x_i, $i=0,1,\dots,n$, paroma različne točke. Dokažite, da velja*

$$\sum_{i=0}^n \ell_{i,n}(x) = 1,$$

kjer so $\ell_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ *Lagrangeevi bazni polinomi.*

Rešitev:
Trditev lahko dokažemo na dva načina.

1. Za Lagrangeeve bazne polinome očitno velja

$$\ell_{i,n}(x_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Ker je

$$r(x) := \sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x) - 1 = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} - 1$$

   polinom stopnje n, ki ima $n+1$ ničel $x_0, x_1, \ldots, x_n$, je $r \equiv 0$ in trditev sledi.

2. Naj bo $f(x) = 1$. Interpolacijski polinom stopnje $\leq n$, ki se s f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, je enak

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(x).$$

   Ker pa je funkcija f že sama polinom stopnje $\leq n$, iz enoličnosti sledi, da je $f = p$, kar dokazuje trditev.

Naloga 5.2. *Za funkcijo* $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ *poiščite Lagrangeev interpolacijski polinom, ki se s* f *ujema v točkah* $(x_i)_{i=0}^3 = (-1, 0, 2, 5)$.

Rešitev:
Ker so točke x_i paroma različne, lahko interpolacijski polinom p zapišemo v Lagrangeevi obliki. Ker interpoliramo štiri podatke, je $p \in \mathbb{P}_3$. Lagrangeevi bazni polinomi so enaki

$$\ell_{0,3}(x) = -\frac{1}{18}(2-x)(5-x)x, \quad \ell_{1,3}(x) = \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$
$$\ell_{2,3}(x) = \frac{1}{18}(5-x)x(x+1), \quad \ell_{3,3}(x) = \frac{1}{90}(x-2)x(x+1).$$

Interpolacijski polinom

$$p(x) = -\frac{(2-x)(5-x)x}{18\sqrt{2}} - \frac{(x-2)(x+1)x}{90\sqrt{2}} + \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$

skupaj s funkcijo f in interpolacijskimi točkami je prikazan na sliki 5.1.

Slika 5.1: Interpolacijski polinom (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Naloga 5.3. *Določite polinom, ki interpolira točke*

$$(1,2), \quad (2,0), \quad (4,-1), \quad (6,3), \quad (7,5).$$

Rešitev:
Iščemo interpolacijski polinom $p \in \mathbb{P}_4$. Lagrangeevi bazni polinomi se poračunajo v

$$\begin{aligned}
\ell_{0,4}(x) &= \frac{1}{90}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x), \quad & \ell_{1,4}(x) &= \frac{1}{40}(4-x)(6-x)(7-x)(x-1), \\
\ell_{2,4}(x) &= \frac{1}{36}(6-x)(7-x)(x-2)(x-1), \quad & \ell_{3,4}(x) &= \frac{1}{40}(7-x)(x-4)(x-2)(x-1) \\
\ell_{3,4}(x) &= \frac{1}{90}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1).
\end{aligned}$$

Interpolacijski polinom je enak

$$\begin{aligned}
p(x) =& \frac{1}{45}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x) - \frac{1}{36}(6-x)(x-2)(x-1)(7-x) + \\
&+ \frac{3}{40}(x-4)(x-2)(x-1)(7-x) + \frac{1}{18}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1)
\end{aligned}$$

in je prikazan na sliki 5.2.

Naloga 5.4. *Dana je množica paroma različnih točk*

$$A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

in njena podmnožica $B = \{w_1, w_2, w_3\} \subseteq A$. Naj bo f funkcija in p_i interpolacijski polinom za f na množici $(A - B) \cup \{w_i\}$. S pomočjo polinomov p_i poiščite polinom p, ki bo interpolacijski za f na vsej množici A.

Slika 5.2: Interpolacijski polinom na danih točkah.

Rešitev:
Polinomi p_i so stopnje $n-2$ in zanje velja

$$\begin{aligned} p_i(x_k) &= f(x_k), \quad x_k \in A \setminus B, \\ p_i(w_i) &= f(w_i). \end{aligned}$$

Polinom p stopnje n, za katerega velja

$$p(x_k) = f(x_k), \quad x_k \in A, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

je enak

$$p(x) = \ell_1(x)p_1(x) + \ell_2(x)p_2(x) + \ell_3(x)p_3(x),$$

kjer so ℓ_i Lagrangeevi bazni polinomi na točkah w_1, w_2, w_3:

$$\begin{aligned} \ell_1(x) &= \frac{(x-w_2)(x-w_3)}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}, \quad \ell_2(x) = \frac{(x-w_1)(x-w_3)}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}, \\ \ell_3(x) &= \frac{(x-w_1)(x-w_2)}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}. \end{aligned}$$

Naloga 5.5. *Naj bo*

$$\Phi(\boldsymbol{a}, x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2.$$

Poiščite množico šestih različnih točk $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$*, za katere interpolacijski problem* $\Phi(\boldsymbol{a}, x_i, y_i) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, *ni korekten. Pri tem so* $z_i \in \mathbb{R}$ *poljubne vrednosti.*

Rešitev:
Problem je korekten, kadar interpolacijski polinom obstaja in je enoličen. V eni dimenziji je interpolacijski problem korekten natanko takrat, kadar so interpolacijske točke $(x_i)_{i=0}^n$

paroma različne, saj je v tem primeru Vandermondova matrika $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ glede na standardno bazo neizrojena.

V višjih dimenzijah je korektnost problema odvisna od izbire interpolacijskih točk. V našem primeru je interpolacijski polinom določen (teoretično) z rešitvijo linearnega sistema $V\,(a_i)_{i=0}^5 = (z_i)_{i=0}^5$, pri čemer je matrika enaka

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{pmatrix}.$$

Ta matrika je singularna, če za interpolacijske točke izberemo na primer

$$\{(1, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 5\}$$

ali

$$\{(x_i, x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 5\}.$$

Množica točk, pri kateri je interpolacijski problem korekten (matrika je nesingularna) se imenuje **unisolventna** množica. Mera množic točk, ki niso unisolventne, je nič.

Naloga 5.6. *Hermitova interpolacija: Naj bo $f \in \mathcal{C}^1$ funkcija in naj bodo $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dane točke. Poiščite take bazne polinome $A_i, B_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$, da bo*

$$H_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)B_i$$

interpolacijski polinom, ki se z dano funkcijo ujema dvakratno, to je

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pomagajte si z Lagrangeevimi baznimi polinomi.

Rešitev:
Iz interpolacijskih pogojev in zapisa interpolacijskega polinoma sledi, da morajo bazni polinomi zadoščati naslednjim pogojem:

$$\begin{matrix} A_i(x_j) = \delta_{ij}, & A'_i(x_j) = 0, \\ B_i(x_j) = 0, & B'_i(x_j) = \delta_{ij}, \end{matrix} \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

S pomočjo Lagrangeevih baznih polinomov, za katere velja

$$\ell_{i,n}(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

jih lahko zapišemo kot

$$\begin{matrix} A_i(x) = \left(1 - 2\ell'_{i,n}(x_i)(x - x_i)\right)\ell_{i,n}^2(x) \\ B_i(x) = (x - x_i)\ell_{i,n}^2(x), \end{matrix} \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Naloga 5.7. *Dana je funkcija* $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

1. *Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom stopnje* 5*, ki interpolira funkcijo* f *v točkah* $x = 0$ *in* $x = 1$ *trikratno, to je v vrednosti, prvem in v drugem odvodu. Izračunajte njegovo vrednost v točki* $x = \frac{1}{2}$.

2. *Čim bolje ocenite napako*
$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)|.$$

Rešitev:

1. Interpolacijski polinom p mora zadoščati naslednjim pogojem:
$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) = 4, \quad & p'(0) &= f'(0) = -4, \quad & p''(0) &= f''(0) = 8, \\ p(1) &= f(1) = 2, \quad & p'(1) &= f'(1) = -1, \quad & p''(1) &= f''(1) = 1. \end{aligned}$$
Ker interpoliramo še odvode, ga bomo zapisali v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i						
0	4					
0	4	-4				
0	4	-4	4			
1	2	-2	2	-2		
1	2	-1	1	-1	1	
1	2	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

pri čemer uporabljamo rekurzivno formulo za deljene diference. Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc
$$\left\{1, x, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\right\}.$$
In sicer je
$$p(x) = 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2.$$
Vrednost polinoma pri $t = \frac{1}{2}$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-4	4
$x = \frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{21}{16}$	$\frac{43}{32}$	$-\frac{85}{64}$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{43}{16}$	$-\frac{85}{32}$	$\frac{171}{64}$

preberemo vrednost polinoma
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{171}{64}.$$

2. Pri oceni napake uporabimo izrek, da za poljubno $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, kjer I vsebuje vse interpolacijske točke, velja

$$f(x) = p_n(x) + \omega(x)\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,f, \quad \omega(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

pri čemer je p_n interpolacijski polinom, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$. V našem primeru je

$$f(x) - p(x) = x^3(x-1)^3[0, 0, 0, 1, 1, 1, x]f.$$

Za deljeno diferenco velja

$$[0, 0, 0, 1, 1, 1, x]f = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!},$$

kjer je $\xi \in [0, 1]$ poljubna točka. Ker je

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{4 \cdot n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

padajoča funkcija, je

$$\|f^{(6)}\|_{\infty,[0,1]} = 4 \cdot 6! = 2880.$$

Dalje je

$$\left|x^3(x-1)^3\right| = |x(x-1)|^3 \leq \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

za vse $x \in [0, 1]$. Ocena za napako interpolacijskega polinoma je tako enaka

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{64}\frac{2880}{6!} = \frac{1}{16}.$$

Naloga 5.8. *Poiščite Hermitov interpolacijski polinom, za katerega velja*

$$p(0) = -2, \quad p'(0) = \frac{1}{2}, \quad p(1) = 2, \quad p'(1) = \frac{1}{4}, \quad p(3) = 4, \quad p'(3) = \frac{1}{3}.$$

Izračunajte njegovo vrednost v točki $x = 2$.

Rešitev:
Interpolacijski polinom zapišemo v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc:

x_i	0	0	0	0	0	
0	-2	0	0	0	0	0
0	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
1	2	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
1	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{29}{4}$	0	0
3	4	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{23}{8}$	0
3	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{17}{48}$	$-\frac{83}{144}$	$-\frac{497}{432}$

Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^2(x-1), x^2(x-1)^2, x^2(x-1)^2(x-3)\right\}.$$

In sicer je

$$p(x) = -2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{4}x^2(x-1) + \frac{23}{8}x^2(x-1)^2 - \frac{497}{432}x^2(x-1)^2(x-3)$$

(glej sliko 5.3). Vrednost polinoma pri $t = 2$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & -\frac{497}{432} & \frac{23}{8} & -\frac{29}{4} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\
\hline
x = 2 & 0 & \frac{497}{432} & \frac{1739}{432} & -\frac{1393}{432} & \frac{119}{216} & \frac{227}{108} \\
\hline
 & -\frac{497}{432} & \frac{1739}{432} & -\frac{1393}{432} & \frac{119}{432} & \frac{227}{216} & \frac{11}{108}
\end{array}$$

preberemo

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{108}.$$

Slika 5.3: Hermitov interpolacijski polinom.

Naloga 5.9. *Poiščite interpolacijski polinom p, za katerega velja*

$$p(0) = -2, \quad p(1) = 2, \quad p(3) = 4, \quad p(4) = -10.$$

Razvijte ta polinom v Taylorjev polinom okrog točke $x = 2$.

Rešitev:
Izračunamo tabelo deljenih diferenc:

x_i				
0	-2			
1	2	4		
3	4	1	-1	
4	-10	-14	-5	-1

in iz diagonalnih elementov dobimo interpolacijski polinom

$$p(x) = -2 + 4x - x(x-1) - x(x-1)(x-3)$$

zapisan v bazi

$$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-3)\}\,.$$

Vrednost polinoma pri $x = 2$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

	-1	-1	4	-2
$x=2$		1	0	8
	-1	0	4	6

preberemo vrednost polinoma

$$p\,(2) = 6.$$

Koeficienti v spodnji tabeli določajo polinom p v novi bazi

$$\{1, x-2, (x-2)x, (x-2)x(x-1)\}\,,$$

in sicer

$$p(x) = 6 + 4(x-2) + 0(x-2)x - 1(x-2)x(x-1).$$

Če postopek ponovimo in izračunamo

	-1	0	4	6
$x=2$		-1	-2	0
	-1	-1	2	6

dobimo, da je p enak

$$p(x) = 6 + 2(x-2) - (x-2)^2 - x(x-2)^2.$$

Če postopek izvedemo še enkrat

	-1	-1	2	6
$x=2$		-2	0	0
	-1	-3	2	6

dobimo polinom p v Taylorjevi obliki:

$$p(x) = 6 + 2(x-2) - 3(x-2)^2 - (x-2)^3.$$

Na drug način bi lahko Taylorjev polinom izračunali iz razširjene tabele deljenih diferenc, ki jo dopolnjujemo navzgor v smeri od desne proti levi:

2	6			
2	6	2		
2	6	2	-3	
0	-2	4	-1	-1
1		4	0	-1
3			-1	-1
4				-1

Naloga 5.10. *S pomočjo deljenih diferenc zapišite enačbo polinoma čim nižje stopnje, za katerega velja*

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 2, \quad p''(0) = 3, \quad p(1) = -1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 4.$$

Rešitev:
Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i						
0	1					
0	1	2				
0	1	2	$\frac{3}{2}$			
1	-1	-2	-4	$-\frac{11}{2}$		
1	-1	3	5	9	$\frac{29}{2}$	
2	4	5	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{79}{8}$

in dobimo

$$p(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2.$$

Naloga 5.11. *Poiščite splošno formulo za deljeno diferenco*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

kjer so $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, paroma različne točke.

Rešitev:

Izračunajmo najprej deljene diference za $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1]f &= \frac{\frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)},\\
[x_0, x_1, x_2]f &= \frac{[x_1, x_2]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} - \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)}}{x_2 - x_0} =\\
&= \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)},\\
[x_0, x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1, x_2]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_3 - x_0} =\\
&= \frac{\frac{-1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)} - \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)}}{x_3 - x_0} =\\
&= \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}.
\end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da je

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_0)(1+x_1)\cdots(1+x_n)}.$$

Dokažimo to formulo z indukcijo. Za $n = 1$ formula velja. Deljena diferenca na $n+2$ točkah pa je enaka

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]f &= \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]\left(\frac{x}{1+x}\right) - [x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right)}{x_{n+1} - x_0} =\\
&\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n+1})} - \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_0)(1+x_1)\cdots(1+x_n)}}{x_{n+1} - x_0} =\\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{(1+x_0)(1+x_1)\cdots(1+x_{n+1})},
\end{aligned}$$

kar dokazuje formulo.

Naloga 5.12. *Naj bodo x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, paroma različne točke. Dokažite, da velja*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

kjer je $\omega(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Rešitev:
Deljena diferenca je po definiciji vodilni koeficient interpolacijskega polinoma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

ki se z funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Vodilni koeficient je enak

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Ker je

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = \omega'(x_i),$$

trditev drži.

Naloga 5.13. *Naj bo f poljubna funkcija in naj bo*

$$\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

kjer so $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne točke. Dokažite, da velja

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i\, f(x_i)}{\omega'(x_i)} = \frac{x_n\,[x_1, x_2, ..., x_n]f - x_0\,[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]f}{(x_n - x_0)}.$$

Namig: Uporabite Leibnitzovo pravilo.

Rešitev:
Leibnitzovo pravilo za računanje deljene diference produkta dveh funkcij se glasi

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n](gh) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_i]g[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n]h.$$

V našem primeru vzamemo $g(x) = x$ ter $h(x) = f(x)$. Dobimo

$$\begin{aligned}
&[x_0, x_1, \ldots, x_n](xf) = ([x_0]x)([x_0, x_1, \ldots, x_n]f) + ([x_0, x_1]x)([x_1, x_2, \ldots, x_n]f) + \\
&([x_0, x_1, x_2]x)([x_2, x_3, \ldots, x_n]f) + \cdots + ([x_0, x_1, \ldots, x_n]x)([x_n]f) = \\
&([x_0]x)([x_0, x_1, \ldots, x_n]f) + ([x_0, x_1]x)([x_1, x_2, \ldots, x_n]f),
\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $[x_0, x_1, \ldots, x_i]x = 0$ za $i \geq 2$. Ker je

$$[x_0]x = x_0, \quad [x_0, x_1]x = 1$$

ter

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n]f - [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0},$$

dobimo, da je

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n](xf) = \frac{x_n\,[x_1, x_2, ..., x_n]f - x_0\,[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]f}{(x_n - x_0)}.$$

Po nalogi 5.12 je leva stran enaka

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i f(x_i)}{\omega'(x_i)}.$$

S tem je naloga dokazana.

Naloga 5.14. *Naj bo $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ in naj bo v okolici točke $x_1 \in [a,b]$ dvakrat zvezno odvedljiva. Dokažite, da je*

$$\frac{d}{dx}([x_1, x]f) \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Rešitev:
Ker je

$$[x_1, x]f = \begin{cases} \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}, & x \neq x_1, \\ f'(x_1), & x = x_1, \end{cases}$$

je $[x_1, x]f$ zvezna funkcija spremenljivke x. Iz

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\right) = \frac{-f'(x)(x_1-x) + (f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)^2}$$

sledi, da je funkcija $\frac{d}{dx}([x_1, x]f)$ zvezna povsod razen morda v točki x_1. Če naj bo zvezna tudi v x_1, potem mora veljati

$$\lim_{x\to x_1} \frac{-f'(x)(x_1-x) + (f(x_1)-f(x))}{(x_1-x)^2} = \lim_{x\to x_1} \frac{\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} - f'(x_1)}{x-x_1},$$

kjer je izraz na desni strani enačbe po definiciji enak odvodu v točki x_1. Pokažimo, da gre razlika leve in desne strani, ki se poenostavi v

$$\lim_{x\to x_1} \frac{(x-x_1)\left(f'(x)+f'(x_1)\right) + 2f(x_1) - 2f(x)}{(x-x_1)^2},$$

proti nič, ko gre $x \to x_1$. Ker je f v okolici točke x_1 dvakrat zvezno odvedljiva, je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_1)^2, \quad \xi \in [x, x_1], \\ f'(x) &= f'(x_1) + f''(\xi_1)(x-x_1), \quad \xi_1 \in [x, x_1]. \end{aligned}$$

Upoštevamo ta dva razvoja in dobimo

$$\lim_{x\to x_1} \frac{(x-x_1)\left(f'(x)+f'(x_1)\right) + 2f(x_1) - 2f(x)}{(x-x_1)^2} = \lim_{x\to x_1} \left(f''(\xi_1) - f''(\xi)\right) = 0.$$

Sledi, da je $\frac{d}{dx}([x_1, x]f)$ zvezna na celem intervalu $[a,b]$.

Naloga 5.15. *Funkcijo* $f(x) = \sin(x)$ *interpoliramo v točkah* $0, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{6}$. *Ocenite napako na intervalu* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ *pri Lagrangeovi in Hermitovi interpolaciji.*

Rešitev:
Ker so interpolacijske točke ekvidistantne, lahko pišemo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{12} = x_0 + h, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} = x_0 + 2h,$$

kjer je $h = \frac{\pi}{12}$. Razlika med funkcijo in Lagrangeevim interpolacijskim polinomom je enaka

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f| = \\ &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \, \frac{1}{6} \left| f^{(3)}(\xi) \right| \end{aligned}$$

za nek $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Izračunajmo najprej ekstrem funkcije $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Iz

$$\omega'(x) = 3x^2 - 6hx + 2h^2 = 0$$

dobimo dve stacionarni točki

$$x = h^3 \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ker je v krajiščih funkcija ω enaka nič, je

$$\|\omega\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \max\left\{ \left|\omega\left(h^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right|, \left|\omega\left(h^3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right| \right\} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}.$$

Določimo še

$$\left\|f^{(3)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\cos x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = 1.$$

Od tod sledi

$$\|f - p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{\pi^3}{12^3} = 1.15 \cdot 10^{-3}.$$

Pri Hermitovi interpolaciji se napaka izraža kot

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= \left|(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)^2[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x]f\right| = \\ &= \left|(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)^2\right| \, \frac{1}{6!} \left|f^{(6)}(\xi)\right|. \end{aligned}$$

Ker je

$$\left\|f^{(6)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\sin x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \frac{1}{2},$$

dobimo z uporabo zgornjih ocen

$$\|f - p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\right)\frac{1}{6!}\frac{1}{2} = \frac{1}{9720}\frac{\pi^6}{12^6} = 1.15 \cdot 10^{-3}. = 3.312 \cdot 10^{-8}.$$

Naloga 5.16. *Gladko funkcijo f interpoliramo s polinomom p v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ki so paroma različne in niso nujno urejene po velikosti. Naj bo $h := \max\limits_{i=0,1,\ldots,n-1} |x_{i+1} - x_i|$ in $I = \left[\min\limits_{i=0,1,\ldots,n-1} x_i, \max\limits_{i=0,1,\ldots,n-1} x_i\right]$ najmanjši interval, ki vsebuje vse točke. Izpeljite oceno*

$$\|f - p\|_{\infty,I} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

Rešitev:
Po formuli za napako velja

$$\begin{aligned}\|f - p\|_{\infty,I} = |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)[x_0, x_1, \ldots, x_n]f| \leq \\ \leq |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Izberimo poljuben $x \in I$ in ocenimo $|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$. Očitno obstaja tak indeks j, da je $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ali pa $x_{j+1} \leq x \leq x_j$. Brez škode za splošnost privzemimo, da velja prva možnost. Tedaj je

$$|(x - x_j)(x - x_{j+1})| \leq \left|\frac{x_j - x_{j+1}}{2}\right| \left|\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right| \leq \frac{h^2}{4}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}&|x - x_{j-1}| \leq |x - x_j + x_j - x_{j-1}| \leq |x - x_j| + |x_j - x_{j-1}| \leq 2h,\\ &|x - x_{j-2}| \leq |x - x_{j-1} + x_{j-1} - x_{j-2}| \leq |x - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_{j-2}| \leq 3h,\\ &\quad\vdots\\ &|x - x_0| \leq (j+1)h.\end{aligned}$$

Podobno je

$$\begin{aligned}&|x - x_{j+2}| \leq |x - x_{j+1} + x_{j+1} - x_{j+2}| \leq |x - x_{j+1}| + |x_{j+1} - x_{j+2}| \leq 2h,\\ &|x - x_{j+3}| \leq |x - x_{j+2} + x_{j+2} - x_{j+3}| \leq |x - x_{j+2}| + |x_{j+2} - x_{j+3}| \leq 3h,\\ &\quad\vdots\\ &|x - x_n| \leq (n-j)h.\end{aligned}$$

Skupaj velja

$$\begin{aligned}|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \leq \max_{j=0,1,\ldots,n-1} \left\{\frac{h^2}{4} \cdot h^j (j+1)! \cdot h^{n-j-1}(n-j)!\right\} = \\ = \frac{h^{n+1}}{4} n!,\end{aligned}$$

od koder sledi

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n! \cdot \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \|f^{(n+1)}\|_\infty, \quad \forall x \in I.$$

EKVIDISTANTNE TOČKE. Če so interpolacijske točke ekvidistantne s korakom h,

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

in je $x = x_0 + th$, potem lahko interpolacijski polinom zapišemo kot

$$p\left(x_0 + th\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{t}{i} \Delta^i f_0, \tag{5.1}$$

kjer je Δ prema končna diferenca, definirana rekurzivno kot

$$\begin{aligned} &\Delta^0 f_\ell = f_\ell, \quad \Delta^1 f_\ell = \Delta f_\ell = f_{\ell+1} - f_\ell, \\ &\Delta^r f_\ell = \Delta^{r-1} f_{\ell+1} - \Delta^{r-1} f_\ell, \quad r \geq 1, \end{aligned}$$

in $f_\ell = f(x_\ell)$. Obliko (5.1) imenujemo prva Newtonova oblika interpolacijskega polinoma za ekvidistantne točke. Če so točke indeksirane v obratnem vrstnem redu,

$$x_0 = 0, \quad x_{-i} = x_0 - ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

potem je

$$p\left(x_0 + th\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-t}{i} \nabla^i f_0, \tag{5.2}$$

kjer je ∇ obratna končna diferenca, definirana rekurzivno kot

$$\begin{aligned} &\nabla^0 f_\ell = f_\ell, \quad \nabla^1 f_\ell = \nabla f_\ell = f_\ell - f_{\ell-1}, \\ &\nabla^r f_\ell = \nabla^{r-1} f_\ell - \nabla^{r-1} f_{\ell-1}, \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

Obliko (5.2) imenujemo druga Newtonova oblika interpolacijskega polinoma za ekvidistantne točke.

Naloga 5.17. *Podane so naslednje vrednosti gladke funkcije f:*

$x:$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x):$	-1	3	2	4	6	1

S pomočjo interpolacijskega polinoma izračunajte približek za vrednost funkcije f v točki $x = 0.5$.

Rešitev:
Upoštevajmo, da so točke ekvidistantne s korakom $h = 0.2$:

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 5.$$

Naj bo $x = th$. Interpolacijski polinom je enak

$$p(th) = \sum_{i=0}^{5} \binom{t}{i} \Delta^i f_0.$$

Preme diference izračunamo s shemo

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & \Delta^0 & \Delta^1 & \Delta^2 & \Delta^3 & \Delta^4 & \Delta^5 \\
\hline
0 & -1 & & & & & \\
0.2 & 3 & 4 & & & & \\
0.4 & 2 & -1 & -5 & & & \\
0.6 & 4 & 2 & 3 & 8 & & \\
0.8 & 6 & 2 & 0 & -3 & -11 & \\
1 & 1 & -5 & -7 & -7 & -4 & 7
\end{array}.$$

Diagonalni elementi so vrednosti, ki jih potrebujemo. Interpolacijski polinom je tako enak

$$\begin{aligned} p(th) = -1 + 4t - 5\frac{t(t-1)}{2} + 8\frac{t(t-1)(t-1)}{6} - 11\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} + \\ + 7\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}. \end{aligned}$$

Ker nas zanima približek za vrednost funkcije pri $x = 0.5$, moramo izračunati vrednost polinoma za $t = 2.5$. Z uporabo algoritma za računanje vrednosti interpolacijskega polinoma dobimo

$$f\,(0.5) \sim p\,(2.5) = \frac{675}{256}.$$

Naloga 5.18. *Naj bodo $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ekvidistantne točke. Dokažite, da velja:*

1. $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = \dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$,
2. $\nabla^n f(x_0) = \Delta^n f(x_{-n})$,
3. $\nabla^n f(x_\ell) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x_{\ell-j})$.

Rešitev:
Vse tri trditve lahko dokažemo z indukcijo.

1. Za $n = 1$ formula velja, saj je

$$[x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}.$$

Če predpostavimo, da formula velja za n, potem velja tudi za $n+1$, saj je

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]f &= \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]f - [x_0, x_1, \ldots, x_n]f}{x_{n+1} - x_0} = \\
&\overset{I.P.}{=} \frac{1}{(n+1)h} \left(\frac{\Delta^n f(x_1)}{n! h^n} - \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} \right) = \\
&= \frac{\Delta^{n+1} f(x_0)}{(n+1)! h^{n+1}}.
\end{aligned}$$

2. Za $n = 1$ dobimo
$$\nabla f(x_0) = f(x_0) - f(x_{-1}) = \Delta f(x_{-1}).$$
Z uporabo indukcije pa sledi
$$\begin{aligned}
\nabla^{n+1} f(x_0) &= \nabla^n f(x_0) - \nabla^n f(x_{-1}) \overset{I.P.}{=} \Delta^n f(x_{-n}) - \Delta^n f(x_{-n-1}) = \\
&= \Delta^{n+1} f(x_{-(n+1)}).
\end{aligned}$$

3. Pri $n = 1$ je
$$\nabla f(x_\ell) = f(x_\ell) - f(x_{\ell-1}) = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} (-1)^j f(x_{\ell-j}).$$
Z indukcijo dobimo
$$\begin{aligned}
\nabla^{n+1} f(x_\ell) &= \nabla^n f(x_\ell) - \nabla^n f(x_{\ell-1}) = \\
&\overset{I.P.}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x_{\ell-j}) - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x_{\ell-1-j}) = \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j f(x_{\ell-j}) - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-1)^{j-1} f(x_{\ell-j}) = \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) f(x_{\ell-j}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} f(x_{\ell-j}).
\end{aligned}$$

Naloga 5.19. *Naj bo*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}), \quad d_i := [x_0, x_1, \ldots, x_i],$$

interpolacijski polinom v Newtonovi obliki. Zapišite algoritem za izračun koeficientov tega polinoma v standardni bazi.

Rešitev:
Iščemo koeficiente c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, da bo

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n.$$

Polinom lahko napišemo kot

$$p_n(x) = d_0 + (x - x_0)\left(d_1 + (x - x_1)\left(d_2 + (x - x_2)\left(\ldots\left(d_{n-1} + (x - x_{n-1})d_n\right)\ldots\right)\right)\right).$$

Definirajmo

$$\begin{aligned} p_1(x) &:= d_{n-1} + (x - x_{n-1})d_n =: c_{1,0} + c_{1,1}x, \\ p_i(x) &:= d_{n-i} + (x - x_{n-i})p_{i-1} =: c_{i,0} + c_{i,1}x + \cdots + c_{i,i}x^i, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Poglejmo si povezavo med koeficienti $c_{i,j}$ ter $c_{i-1,j}$. Iz

$$\begin{aligned} p_i(x) &= d_{n-i} + (x - x_{n-i})\left(c_{i-1,0} + c_{i-1,1}x + \cdots + c_{i-1,i-1}x^{i-1}\right) = \\ &= (d_{n-i} - x_{n-i}c_{i-1,0}) + x(c_{i-1,0} - x_{n-i}c_{i-1,1}) + x^2(c_{i-1,1} - x_{n-i}c_{i-1,2}) + \cdots + \\ &+ x^{i-1}(c_{i-1,i-2} - x_{n-i}c_{i-1,i-1}) + x^i c_{i-1,i-1} \end{aligned}$$

sledijo zveze

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= d_{n-i} - x_{n-i}c_{i-1,0}, \\ c_{i,j} &= c_{i-1,j-1} - x_{n-i}c_{i-1,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1, \\ c_{i,i} &= c_{i-1,i-1}, \end{aligned}$$

za $i = 2, 3, \ldots, n$.

Algoritem je sledeč:
1. $c_{1,0} = d_{n-1} - x_{n-1}d_n$
2. $c_{1,1} = xd_n$
3. **for** $i = 2, 3, \ldots, n$
4. $\quad c_{i,0} = d_{n-i} - x_{n-i}c_{i-1,0}$
5. $\quad$ **for** $j = 1, 2, \ldots, i-1$
6. $\quad\quad c_{i,j} = c_{i-1,j-1} - x_{n-i}c_{i-1,j}$
7. $\quad$ **end**
8. $\quad c_{i,i} = c_{i-1,i-1}$
9. **end**
10. **for** $i = 0, 1, \ldots, n$
11. $\quad c_i = c_{n,i}$
12. **end**

Algoritem z manjšo prostorsko zahtevnostjo pa se glasi:
1. $c_0 = d_{n-1} - x_{n-1}d_n$

2. $c_1 = xd_n$
3. **for** $i = 2, 3, \ldots, n$
4. $\quad c_i = c_{i-1}$
5. $\quad$ **for** $j = i-1, i-2, \ldots, 1$
6. $\quad\quad c_j = c_{j-1} - x_{n-i}c_j$
7. $\quad$ **end**
8. $\quad c_0 = d_{n-i} - x_{n-i}c_0$
9. **end**

Naloga 5.20. *Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne točke in $y_0, y_1, \ldots, y_n$ vrednosti, ki jih želimo interpolirati. Zapišite algoritem za izračun deljenih diferenc*

$$d_i := [x_0, x_1, \ldots, x_i]f, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Rešitev:
Če označimo elemente v tabeli deljenih diferenc kot

x_i				
x_0	$d_{0,0}$			
x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$		
x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$
x_n	$d_{n,0}$	$d_{n,1}$	$\ldots$	$d_{n,n}$

potem velja

$$d_{j,i} = \frac{d_{j,i-1} - d_{j-1,i-1}}{x_j - x_{j-i}}.$$

Od tod sledi algoritem za računanje deljenih diferenc.

1. **for** $i = 0, 1, \ldots, n$
2. $\quad d_{i,0} = y_i$
3. **end**
4. **for** $i = 1, 2, \ldots, n$
5. $\quad$ **for** $j = i, i+1, \ldots, n$
6. $\quad\quad d_{j,i} = \frac{d_{j,i-1} - d_{j-1,i-1}}{x_j - x_{j-i}}$
7. $\quad$ **end**
8. **end**

Ker potrebujemo le diagonalne elemente, lahko algoritem poenostavimo tako, da vse elemente shranjujemo v en sam vektor velikosti $n+1$. Glavni trik je v tem, da pri drugi for zanki računamo v obratnem vrstnem redu.

Algoritem za računanje deljenih diferenc

1. **for** $i = 0, 1, \dots, n$
2. $\quad d_{i,0} = y_i$
3. **end**
4. **for** $i = 1, 2, \dots, n$
5. $\quad$ **for** $j = n, n-1, \dots, i$
6. $\quad\quad d_j = \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-i}}$
7. $\quad$ **end**
8. **end**

Naloga 5.21. *Funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $[a, b] = [-5, 5]$ interpoliramo s polinomi stopnje n. Narišite grafe interpolacijskih polinomov stopenj $n = 3, 4, 9, 10, 15, 20$, v primeru, ko so*

1. *interpolacijske točke ekvidistantne: $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$;*
2. *interpolacijske točke Čebiševe: $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right)$, $i = 0, 1, \dots, n$.*

Rešitev:
Grafi so prikazani na sliki 5.4. Rdeč graf predstavlja interpolacijski polinom pri ekvidistantnih točkah, zelen graf pa pri Čebisevih. Vidimo, da z naraščajočim n v prvem primeru razlika med funkcijo f in interpolacijskim polinomom raste, v drugem pa pada proti nič. Primer je znan pod imenom Rungejev primer.

$n = 3:$

$n = 4:$

$n = 9:$

$n = 10:$

$n = 15:$

$n = 20:$

Slika 5.4: Rungejev primer.

Poglavje 6

Odsekoma polinomske funkcije in zlepki

Naloga 6.1. *Dano je zaporedje stičnih točk* $\boldsymbol{x} = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$. *Zapišite odsekoma linearno interpolacijsko funkcijo* $\mathcal{I}_1 f$ *za* $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Rešitev:
Za $x_i \le x \le x_{i+1}$ je $\mathcal{I}_1 f(x) = f(x_i) + [x_i, x_{i+1}]f$. V našem primeru dobimo

$$\mathcal{I}_1 f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}}, & x \in [1, 2) \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in [2, 3) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)(x-2) + 1, & x \in [3, 4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x-3}{\sqrt{2}}, & x \in [4, 5) \\ -\frac{x-4}{\sqrt{2}}, & x \in [5, 6] \end{cases} .$$

Rešitev je prikazana na sliki 6.1.

Slika 6.1: Interpolacija z odsekoma linearno funkcijo.

Naloga 6.2. *Dokažite, da interpolacija z odsekoma linearnimi funkcijami ohranja monotonost:*

$$f \text{ naraščajoča (padajoča)} \implies \mathcal{I}_1 f \text{ naraščajoča (padajoča)}$$

Rešitev:
Naj bodo $(x_i)_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ stične točke. Recimo, da je f monotono naraščajoča, to je

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Predpostavimo najprej, da je $x_i \leq x \leq y \leq x_{i+1}$ za poljuben $i = 0, 1, \ldots, n$. Tedaj je očitno

$$\mathcal{I}_1 f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \leq f(x_i) + (y - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \mathcal{I}_1 f(y).$$

Naj bo sedaj $x_i \leq x \leq x_{i+1} \leq x_j \leq y \leq x_{j+1}$. Z uporabo zgornje neenakosti dobimo

$$\mathcal{I}_1 f(x) \leq \mathcal{I}_1 f(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \leq f(x_j) = \mathcal{I}_1 f(x_j) \leq \mathcal{I}_1 f(y),$$

kar dokazuje trditev.

Naloga 6.3. *Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, zaporedje stičnih točk in $\mathcal{I}_1 f \in S_{1,\boldsymbol{x}}$ odsekoma linearna funkcija, ki interpolira dano funkcijo f. Izpeljite naslednje ocene:*

1. $f \in \mathcal{C}^2([a, b]) \implies \|f - \mathcal{I}_1\| \leq \frac{1}{8}\max_i(\Delta x_i)^2 \|f^{(2)}\|$,
2. $f \in \mathcal{C}([a, b]) \implies \|f - \mathcal{I}_1\| \leq \omega\left(f, \max_i \Delta x_i\right)$,
3. $\|f - \mathcal{I}_1\| \leq 2\,\mathrm{dist}(f, S_{1,\boldsymbol{x}})$.

Rešitev:

1. Izberimo poljuben $x \in [a, b]$. Tedaj obstaja tak indeks i, da je $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Po Newtonovi formuli za napako interpolacijskega polinoma velja naslednja ocena:

$$|f(x) - \mathcal{I}_1 f(x)| = |(x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x]f| = \left|(x - x_i)(x - x_{i+1})\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\right| \leq$$
$$\leq \left(\frac{\Delta x_i}{2}\right)^2 \frac{\|f^{(2)}\|}{2} \leq \frac{1}{8}\max_i(\Delta x_i)^2 \|f^{(2)}\|.$$

2. Izberimo poljuben $x \in [a,b]$ in naj bo indeks i tak, da je $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
|f(x) - \mathcal{I}_1 f(x)| &= \left| f(x) - f(x_i) - (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| = \\
&= \left| f(x) - f(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} - f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| = \\
&= \left| (f(x) - f(x_i))\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} - (f(x) - f(x_{i+1}))\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \\
&\leq |f(x) - f(x_i)| \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + |f(x) - f(x_{i+1})| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \\
&\leq \omega\left(f, \Delta x_i\right) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \omega\left(f, \Delta x_{i+1}\right) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \\
&\leq \omega\left(f, \max_i \Delta x_i\right)
\end{aligned}
$$

3. Izberimo poljuben $s \in S_{1,\boldsymbol{x}}$. Potem velja

$$
\begin{aligned}
\|f - \mathcal{I}_1 f\| = \|f - s + s - \mathcal{I}_1 f\| &\leq \|f - s\| + \|\mathcal{I}_1 s - \mathcal{I}_1 f\| \leq \\
&\leq \|f - s\| + \|\mathcal{I}_1\| \, \|s - f\| = (1 + \|\mathcal{I}_1\|) \, \|s - f\| \, .
\end{aligned}
$$

Izračunati moramo še $\|\mathcal{I}_1\|$. Iz

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_1 f(x)| &= \left| f(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \\
&\leq |f(x_i)| \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + |f(x_{i+1})| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \|f\|
\end{aligned}
$$

sledi, da je $\|\mathcal{I}_1\| = \sup\limits_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{I}_1 f\|}{\|f\|} \leq 1$. Če izberemo $f \equiv 1$, dobimo $\|\mathcal{I}_1\| = 1$ in ocena sledi.

Naloga 6.4. *Funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ interpoliramo z odsekoma linearno funkcijo p. Na koliko delov moramo razdeliti interval (ekvidistantno), da bo napaka $\|f - p\| \leq 5 \cdot 10^{-6}$. Kaj pa, če interpoliramo z odsekoma kubičnim Hermitovim zlepkom.*

Rešitev:
Naj bo $a = x_0 = 0$, $b = x_n = \frac{\pi}{4}$, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Napaka interpolacije na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ je enaka

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p(x)| = |(x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x]f| &\leq |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \frac{\|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}}{2} \leq \\
&\leq \frac{h^2}{4} \frac{\|\sin\|_{\infty,[a,b]}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16} h^2.
\end{aligned}
$$

Napaka bo na $[a,b]$ manjša od predpisane vrednosti, če bo

$$
\frac{\sqrt{2}}{16} h^2 \leq 5 \cdot 10^{-6}.
$$

To bo res za vse $h \leq 7.5 \cdot 10^{-3}$. Ker je $nh = \frac{\pi}{4}$, mora biti $n \geq 104.42$. Interval moramo torej razdeliti na vsaj 105 delov.

V primeru interpolacije s kubičnim Hermitovim zlepkom S, $S\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i \in \mathbb{P}_3$, ki zadošča pogojem

$$p_i(x_i) = f(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad p_i'(x_i) = f'(x_i), \quad p_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1})$$

za vse $i = 0, 1, \ldots, n-1$, imamo oceno

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_i(x)| &= \left|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x]f\right| \leq \\
&\leq \left|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right| \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}}{4!} \leq \\
&\leq \frac{h^4}{16}\frac{\|\sin\|_{\infty,[a,b]}}{4!} = \frac{\sqrt{2}}{768}h^4,
\end{aligned}$$

pri čemer je $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Napaka bo na celem intervalu $[a, b]$ manjša od predpisane vrednosti, če bo

$$\frac{\sqrt{2}}{768}h^4 \leq 5 \cdot 10^{-6}.$$

To je res za vse $h \leq 0.228$. Ker je $nh = \frac{\pi}{4}$, mora biti $n \geq 3.44$. Interval je torej dovolj razdeliti le na 4 dele.

Naloga 6.5. *Skalarni produkt naj bo definiran kot* $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx$. *Poiščite odsekoma linearno funkcijo s stičnimi točkami* $0, 1, 2$, *ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira funkcijo* $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$.

Rešitev:
Prostor odsekoma linearnih funkcij s stičnimi točkami

$$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^2, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,$$

je 3-dimenzionalen. Baza je enaka

$$H_0(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad H_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 2-x, & x \in [1,2) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases},$$

$$H_2(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Iščemo odsekoma linearno funkcijo $\mathcal{L}_1 f = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2$, za katero velja

$$\|f - \mathcal{L}_1 f\|_2 = \min_{s \in S_{1,x}} \|f - s\|_2, \quad \|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}.$$

Neznane koeficiente α_i dobimo z rešitvijo Gramovega sistem

$$\begin{pmatrix} \langle H_0, H_0\rangle & \langle H_0, H_1\rangle & \langle H_0, H_2\rangle \\ \langle H_0, H_1\rangle & \langle H_1, H_1\rangle & \langle H_1, H_2\rangle \\ \langle H_0, H_2\rangle & \langle H_1, H_2\rangle & \langle H_2, H_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, H_0\rangle \\ \langle f, H_1\rangle \\ \langle f, H_2\rangle \end{pmatrix}$$

Izračunamo skalarne produkte, ki nastopajo v matričnem sistemu:

$$\begin{aligned}
\langle H_0, H_0\rangle &= \int_0^2 H_0(x)H_0(x)dx = \frac{\Delta x_0}{3} = \frac{1}{3}, \\
\langle H_0, H_1\rangle &= \int_0^2 H_0(x)H_1(x)dx = \frac{\Delta x_0}{6} = \frac{1}{6}, \\
\langle H_0, H_2\rangle &= \int_0^2 H_0(x)H_2(x)dx = 0, \\
\langle H_1, H_1\rangle &= \int_0^2 H_1(x)H_1(x)dx = \frac{\Delta x_0 + \Delta x_1}{3} = \frac{2}{3}, \\
\langle H_1, H_2\rangle &= \int_0^2 H_1(x)H_2(x)dx = \frac{\Delta x_1}{6} = \frac{1}{6}, \\
\langle H_2, H_2\rangle &= \int_0^2 H_2(x)H_2(x)dx = \frac{\Delta x_1}{3} = \frac{1}{3}, \\
\langle f, H_0\rangle &= \int_0^2 f(x)H_0(x)dx = -\frac{13}{12}, \\
\langle f, H_1\rangle &= \int_0^2 f(x)H_1(x)dx = -\frac{1}{2}, \\
\langle f, H_2\rangle &= \int_0^2 f(x)H_2(x)dx = \frac{19}{12}.
\end{aligned}$$

Rešitev Gramovega sistema se glasi

$$\alpha_0 = -\frac{5}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{11}{2}$$

in iskana funkcija je enaka

$$\mathcal{L}_1 f(x) = -\frac{5}{2}H_0(x) - \frac{3}{2}H_1(x) + \frac{11}{2}H_2(x).$$

Na sliki 6.2 so prikazane bazne funkcije (levo) ter odsekoma linearna funkcija $\mathcal{L}_1 f$ skupaj s funkcijo, ki jo aproksimira.

Naloga 6.6. *Skalarni produkt naj bo definiran kot* $\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx$. *Poiščite odsekoma linearno funkcijo s stičnimi točkami* $\boldsymbol{x} = (-1, 0, 1, 2, 4, 5)$, *ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira funkcijo* $f(x) = 10 - \frac{1}{2}x^2$.

Slika 6.2: Na levi sliki je prikazana baza prostora odsekoma linearnih funkcij, na desni pa $\mathcal{L}_1 f$ (rdeč graf) skupaj s funkcijo f (moder graf).

Rešitev:
Dimenzija prostora odsekoma linearnih funkcij je v tem primeru enaka 6. Bazne funkcije so prikazane na sliki 6.3 (levo). Odsekoma linearna funkcija $\mathcal{L}_1 f = \sum_{i=0}^{5} \alpha_i H_i$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov, je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{8} \\ \frac{119}{12} \\ \frac{113}{12} \\ \frac{85}{8} \\ \frac{37}{8} \\ -\frac{11}{24} \end{pmatrix}.$$

In sicer,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 f(x) = \frac{18271}{1908} H_0(x) + \frac{19267}{1908} H_1(x) + \frac{18187}{1908} H_2(x) + \frac{15787}{1908} H_3(x) + \\ + \frac{4363}{1908} H_4(x) - \frac{4805}{1908} H_5(x). \end{aligned}$$

Slika 6.3: Na levi sliki je prikazana baza prostora odsekoma linearnih funkcij na desni pa $\mathcal{L}_1 f$ (rdeč graf) skupaj s funkcijo f (moder graf).

Naloga 6.7. Parabolični zlepki. *Naj bo funkcija f definirana na intervalu $[a, b]$. Razdelimo interval $[a, b]$ na n delov s točkami $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{n}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Funkcijo f interpoliramo s paraboličnim zlepkom $S : [a,b] \to \mathbb{R}$, $S\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_2$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, ki zadošča pogojem

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = v_i,$$

pri čemer so $v_i \in \mathbb{R}$ poljubne vrednosti. Zapišite zlepek in določite parametre v_i tako, da bo dobljen zlepek zvezno odvedljiv na celem intervalu $[a,b]$. Posebej zapišite rezultat v primeru ekvidistantnih točk.

Rešitev:
Zlepek zapišemo lokalno. Za $x \in [x_i, x_{i+1}]$ je $S(x) = P_i(x)$, parabola P_i pa je po formuli za Newtonov interpolacijski polinom enaka

$$\begin{aligned} P_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{2(v_i - f(x_i))}{\Delta x_i} + \\ + (x - x_i)\left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\frac{2(f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2v_i)}{(\Delta x_i)^2}. \end{aligned}$$

Parametre v_i določimo iz enačb

$$P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0,1,\ldots,n-2.$$

Izračunamo oba odvoda

$$\begin{aligned} P_i'(x_{i+1}) &= \frac{f(x_i) + 3f(x_{i+1} - 4v_i)}{\Delta x_i}, \\ P_{i+1}'(x_{i+1}) &= \frac{4v_{i+1} - 3f(x_{i+1} - f(x_{i+1}))}{\Delta x_{i+1}} \end{aligned}$$

in dobimo

$$\frac{4}{\Delta x_{i+1}}v_{i+1} + \frac{4}{\Delta x_i}v_i = \frac{f(x_i)}{\Delta x_i} + 3f(x_{i+1})\left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_{i+1}}\right) + \frac{f(x_{i+2})}{\Delta x_{i+1}},$$

za $i = 0,1,\ldots,n-2$. Imamo $n-1$ enačb za n neznank $(v_i)_{i=0}^{n-1}$. Zato si lahko v_0 ali v_n izberemo poljubno. V primeru ekvidistantnih stičnih točk $x_i = x_0 + ih$ se sistem poenostavi v

$$4v_i + 4v_{i+1} = f(x_i) + 6f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}), \quad i = 0,1,\ldots,n-2.$$

Naloga 6.8. *Naj bo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $\boldsymbol{x} = (-2,-1,0,1,2)$ delitev intervala $[-2,2]$. Izračunajte polni pravi interpolacijski kubični zlepek za funkcijo f nad zaporedjem stičnih točk $\boldsymbol{x}$.*

Rešitev:
Iščemo kubični zlepek

$$S : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad S\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0,1,2,3,$$

ki zadošča pogojem

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i'(x_i) = s_i, \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P_i'(x_{i+1}) = s_{i+1},$$

kjer so odvodi s_i določeni tako, da je zlepek $\mathcal{C}^2([-2,2])$. Izračunamo jih kot rešitev sistema linearnih enačb

$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1} + 2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i}\right) s_i + \frac{1}{\Delta x_i} s_{i+1} = 3\left(\frac{[x_i,x_{i+1}]f}{\Delta x_i} + \frac{[x_{i-1},x_i]f}{\Delta x_{i-1}}\right), \quad i = 1,2,3,$$

pri čemer sta $s_0 = f'(x_0) = \frac{4}{25}$ in $s_n = f'(x_n) = -\frac{4}{25}$. Zadnja dva pogoja implicirata *polni* kubični zlepek. Sistem je v matrični obliki enak

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{56}{25} \\ 0 \\ -\frac{56}{25} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$s_1 = \frac{14}{25}, \quad , s_2 = 0, \quad s_3 = -\frac{14}{25}.$$

S pomočjo Newtonove interpolacijske formule dobimo

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{3}{25}(x+1)(x+2)^2 + \frac{7}{50}(x+2)^2 + \frac{4(x+2)}{25} + \frac{1}{5}, \\
P_1(x) &= -\frac{11}{25}x(x+1)^2 - \frac{3}{50}(x+1)^2 + \frac{14(x+1)}{25} + \frac{1}{2}, \\
P_2(x) &= \frac{11}{25}(x-1)x^2 - \frac{x^2}{2} + 1, \\
P_3(x) &= -\frac{3}{25}(x-2)(x-1)^2 + \frac{13}{50}(x-1)^2 - \frac{14(x-1)}{25} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zlepek je prikazan na sliki 6.4.

Naloga 6.9. *Naj bo* $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ *in* $\boldsymbol{x} = (0,1,2,3,4)$ *delitev intervala* $[0,4]$. *Izračunajte polni pravi interpolacijski kubični zlepek za funkcijo* f *nad zaporedjem stičnih točk* $\boldsymbol{x}$.

Rešitev:
Iščemo kubični zlepek

$$S : [0,4] \to \mathbb{R}, \quad S\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0,1,2,3,$$

ki zadošča pogojem

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i'(x_i) = s_i, \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P_i'(x_{i+1}) = s_{i+1},$$

Slika 6.4: Polni pravi kubični zlepek (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

pri čemer so odvodi s_i določeni z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1} + 2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i}\right) s_i + \frac{1}{\Delta x_i} s_{i+1} = 3\left(\frac{[x_i, x_{i+1}]f}{\Delta x_i} + \frac{[x_{i-1}, x_i]f}{\Delta x_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

kar implicira, da je zlepek $\mathcal{C}^2\left([0,4]\right)$. Pri tem izberemo

$$s_0 = f'(x_0) = \frac{\pi}{2}, \quad s_4 = f'(x_n) = \frac{\pi}{2},$$

kar nam da *polni* kubični zlepek. Sistem je v matrični obliki enak

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -6 \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$s_1 = \frac{3-\pi}{7}, \quad , s_2 = \frac{1}{14}(\pi - 24), \quad s_3 = \frac{3-\pi}{7}.$$

Polinome, ki sestavljajo zlepek, izračunamo s pomočjo Newtonove interpolacijske formule in dobimo

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{1}{14}(5\pi - 22)(x-1)x^2 + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 + \frac{\pi x}{2}, \\
P_1(x) &= \left(\frac{5}{7} - \frac{\pi}{14}\right)(x-2)(x-1)^2 + \frac{1}{7}(\pi - 10)(x-1)^2 + \frac{1}{7}(3-\pi)(x-1) + 1, \\
P_2(x) &= \left(\frac{5}{7} - \frac{\pi}{14}\right)(x-3)(x-2)^2 + \left(\frac{5}{7} - \frac{\pi}{14}\right)(x-2)^2 + \frac{1}{14}(\pi - 24)(x-2), \\
P_3(x) &= \frac{1}{14}(5\pi - 22)(x-4)(x-3)^2 + \frac{1}{7}(4+\pi)(x-3)^2 + \frac{1}{7}(3-\pi)(x-3) - 1.
\end{aligned}$$

Slika 6.5: Polni pravi kubični zlepek (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Zlepek je prikazan na sliki 6.5.

Naloga 6.10. *Naj bo* $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ *in* $\boldsymbol{x} = (0, 2, 6, 8)$ *delitev intervala* $[0, 8]$*. Izračunajte polni pravi interpolacijski kubični zlepek za funkcijo* f *nad zaporedjem stičnih točk* $\boldsymbol{x}$*.*

Rešitev:
Iščemo kubični zlepek

$$S : [0, 8] \to \mathbb{R}, \quad S\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0, 1, 2,$$

ki zadošča pogojem

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i'(x_i) = s_i, \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P_i'(x_{i+1}) = s_{i+1},$$

kjer so odvodi s_i določeni tako, da je zlepek $\mathcal{C}^2([0, 8])$. Izračunamo jih kot rešitev sistema linearnih enačb

$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1} + 2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i}\right) s_i + \frac{1}{\Delta x_i} s_{i+1} = 3\left(\frac{[x_i, x_{i+1}]f}{\Delta x_i} + \frac{[x_{i-1}, x_i]f}{\Delta x_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2,$$

pri čemer izberemo $s_0 = f'(x_0) = 0$ in $s_3 = f'(x_n) = 0$, kar implicira *polni* kubični zlepek. Sistem je v matrični obliki enak

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$s_1 = -\frac{3}{5}, \quad s_2 = \frac{3}{5}.$$

S pomočjo Newtonove interpolacijske formule dobimo

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{1}{10}(x-2)x^2 - \frac{x^2}{4} + 1,\\
P_1(x) &= \frac{3}{20}(x-2)^2 - \frac{3(x-2)}{5},\\
P_2(x) &= -\frac{1}{10}(x-8)(x-6)^2 - \frac{1}{20}(x-6)^2 + \frac{3(x-6)}{5},
\end{aligned}
$$

zlepek pa je prikazan na sliki 6.6.

Slika 6.6: Polni pravi kubični zlepek (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Naloga 6.11. *Naj bo* $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ *in* $\boldsymbol{x} = (0,2,4,6,8)$ *delitev intervala* $[0,8]$. *Izračunajte polni pravi interpolacijski kubični zlepek za funkcijo* f *nad zaporedjem stičnih točk* $\boldsymbol{x}$.

Rešitev:
Iščemo kubični zlepek

$$S:[0,8]\to\mathbb{R}, \quad S\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0,1,2,3,$$

ki zadošča pogojem

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad P_i'(x_i) = s_i, \quad P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad P_i'(x_{i+1}) = s_{i+1},$$

kjer so odvodi s_i določeni z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}}s_{i-1} + 2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i}\right)s_i + \frac{1}{\Delta x_i}s_{i+1} = 3\left(\frac{[x_i,x_{i+1}]f}{\Delta x_i} + \frac{[x_{i-1},x_i]f}{\Delta x_{i-1}}\right), \quad i = 1,2,$$

kar nam da zlepek, ki je $\mathcal{C}^2([0,8])$. Da dobimo *polni* kubični zlepek izberemo prvi in zadnji odvod kot $s_0 = f'(x_0) = 0$ in $s_n = f'(x_n) = 0$. Sistem je v matrični obliki enak

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$s_1 = -\frac{3}{4}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{3}{4}.$$

Polinome, ki sestavljajo zlepek, izračunamo s pomočjo Newtonove interpolacijske formule in dobimo

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{16}(x-2)x^2 - \frac{x^2}{4} + 1, \\ P_1(x) &= \frac{1}{16}(x-4)(x-2)^2 + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3(x-2)}{4}, \\ P_2(x) &= -\frac{1}{16}(x-6)(x-4)^2 + \frac{1}{4}(x-4)^2 - 1, \\ P_3(x) &= -\frac{1}{16}(x-8)(x-6)^2 - \frac{1}{8}(x-6)^2 + \frac{3(x-6)}{4}. \end{aligned}$$

Zlepek je prikazan na sliki 6.7

Slika 6.7: Polni pravi kubični zlepek (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Literatura

[1] S.D. Conte, C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1980.

[2] E. Isaacson, H.B. Keller: *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York, 1966.

[3] D. Kincaid, W. Cheney: *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[4] J. Kozak: *Numerična analiza*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.