UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Marjeta Krajnc

Numerične metode 1

Praktična matematika

ZBIRKA NALOG Z REŠITVAMI

Ljubljana, 2014

Zbirka nalog z rešitvami, ki je pred vami, je namenjena predvsem študentom praktične matematike za pomoč pri učenju in razumevanju numeričnih metod za reševanje osnovnih problemov iz analize in linearne algebre.

Kazalo

Poglavje 1

Uvod v numerično računanje

Naloga 1.1. *V formatu $P(2,6,-10,10)$ zapišite število $x = 7.712_{(10)}$. Poiščite prvo večje in prvo manjše predstavljivo število od števila x ter izračunajte relativni napaki za oba primera. Izračunajte osnovno zaokrožitveno napako ter največje in najmanjše predstavljivo število v danem formatu.*

Rešitev:
Pretvorimo najprej celi del:

$$\begin{aligned} 7:2 &= 3 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 3:2 &= 1 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 1:2 &= 0 \quad \text{ost.} \quad 1. \end{aligned}$$

Dobimo $7_{(10)} = 111_{(2)}$. Za decimalni del izračunamo

$$\begin{aligned} 0.712 * 2 &= 0.424 + 1 \\ 0.424 * 2 &= 0.848 + 0 \\ 0.848 * 2 &= 0.696 + 1 \\ 0.696 * 2 &= 0.392 + 1 \\ 0.392 * 2 &= 0.784 + 0 \\ 0.784 * 2 &= 0.568 + 1 \\ 0.568 * 2 &= 0.136 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

in od tod sledi $0.712_{(10)} = 0.1011011\ldots_{(2)}$. Skupaj je

$$7.712_{(10)} = 111.1011011\ldots_{(2)} = 0.1111011011\ldots_{(2)} \cdot 2^3.$$

Prvo manjše predstavljivo število dobimo tako, da odrežemo decimalke od šeste naprej. Dobimo $x_1 = 0.111101_{(2)} \cdot 2^3 = 7.625$. Prvo večje predstavljivo število pa je enako $x_2 = 0.111110_{(2)} \cdot 2^3 = 7.75$. Relativni napaki sta

$$\frac{|x - x_1|}{|x|} = 0.0112811, \quad \frac{|x - x_2|}{|x|} = 0.00492739$$

in predstavljivo število v tem formatu je $\mathrm{fl}(x) = 7.75$. Osnovna zaokrožitvena napaka je enaka $u = 2^{-6} = 0.015625$.

Največje predstavljivo število je enako $0.111111 \cdot 2^{10} = 1008$, najmanjše (normalizirano) pa $0.100000 \cdot 2^{-10} = 0.000488281$.

Naloga 1.2. *V formatu $P(2, 7, -10, 10)$ zapišite število $x = 13.7$. Izračunajte relativno napako*

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|}$$

in jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako u v danem formatu.

Rešitev:
Najprej pretvorimo celi del

$$\begin{aligned} 13 : 2 &= 6 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 6 : 2 &= 3 \quad \text{ost.} \quad 0 \\ 3 : 2 &= 1 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 1 : 2 &= 0 \quad \text{ost.} \quad 1 \end{aligned}$$

in dobimo $13_{(10)} = 1101_{(2)}$. Za decimalni del dobimo

$$\begin{aligned} 0.7 * 2 &= 0.4 + 1 \\ 0.4 * 2 &= 0.8 + 0 \\ 0.8 * 2 &= 0.6 + 1 \\ 0.6 * 2 &= 0.2 + 1 \\ 0.2 * 2 &= 0.4 + 0 \\ 0.4 * 2 &= 0.8 + 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

in od tod sledi $0.7_{(10)} = 0.101100\ldots_{(2)}$. Skupaj je

$$13.7_{(10)} = 1101.101100\ldots_{(2)} = 0.1101101100\ldots_{(2)} \cdot 2^4.$$

Ker mora biti mantisa dolga 7, zaokrožimo in dobimo

$$\mathrm{fl}(x) = 0.1101110_{(2)} \cdot 2^4 = 13 + (2^{-1} + 2^{-2}) = 13.75.$$

Sledi

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} = 0.00364964.$$

Osnovna zaokrožitvena napaka pa je $u = 2^{-7} = 0.0078125$.

Naloga 1.3. *V formatu $P(3,7,-10,10)$ zapišite število $x = 25.13$. Izračunajte relativno napako*

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|}$$

in jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako u v danem formatu.

Rešitev:
Najprej pretvorimo celi del:

$$\begin{aligned} 25 : 3 &= 8 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 8 : 3 &= 2 \quad \text{ost.} \quad 2 \\ 2 : 3 &= 0 \quad \text{ost.} \quad 2. \end{aligned}$$

Od tod sledi $25_{(10)} = 211_{(3)}$. Za decimalni del dobimo

$$\begin{aligned} 0.13 * 3 &= 0.39 + 0 \\ 0.39 * 3 &= 0.17 + 1 \\ 0.17 * 3 &= 0.51 + 0 \\ 0.51 * 3 &= 0.53 + 1 \\ 0.53 * 3 &= 0.59 + 1 \\ 0.59 * 3 &= 0.77 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

in od tod $0.13_{(10)} = 0.010111\ldots_{(3)}$. Skupaj je

$$25.13_{(10)} = 211.010111\ldots_{(3)} = 0.211010111\ldots_{(3)} \cdot 3^3.$$

Ker mora biti mantisa dolga 7, zaokrožimo na najbližje predstavljivo število in dobimo

$$\mathrm{fl}(x) = 0.2110101_{(3)} \cdot 3^3 = 25 + (3^{-2} + 3^{-4}) = 25\frac{10}{81} = 25.12345679.$$

Sledi

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} = 0.000261728,$$

osnovna zaokrožitvena napaka pa je $u = \frac{1}{2}3^{-6} = 0.000685871$.

Naloga 1.4. *V formatu $P(2,9,-10,10)$ zapišite število $x = 13.3_{(10)}$. Poiščite prvo večje in prvo manjše predstavljivo število od števila x ter izračunajte relativni napaki za oba primera.*

Rešitev:
Pretvorimo celi del

$$\begin{aligned} 13 : 2 &= 6 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 6 : 2 &= 3 \quad \text{ost.} \quad 0 \\ 3 : 2 &= 1 \quad \text{ost.} \quad 1 \\ 1 : 2 &= 0 \quad \text{ost.} \quad 1 \end{aligned}$$

in dobimo $13_{(10)} = 1101_{(2)}$. Za decimalni del dobimo

$$\begin{aligned}
0.3 * 2 &= 0.6 + 0\\
0.6 * 2 &= 0.2 + 1\\
0.2 * 2 &= 0.4 + 0\\
0.4 * 2 &= 0.8 + 0\\
0.8 * 2 &= 0.6 + 1\\
0.6 * 2 &= 0.2 + 1\\
0.2 * 2 &= 0.4 + 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

in od tod $0.3_{(10)} = 0.0100110\ldots_{(2)}$. Skupaj je

$$13.3_{(10)} = 1101.0100110\ldots_{(2)} = 0.11010100110\ldots_{(2)} \cdot 2^4.$$

Ker mora biti mantisa dolga 9, zaokrožimo na najbližje predstavljivo število in dobimo

$$\mathrm{fl}(x) = 0.110101010_{(2)} \cdot 2^4 = 13.3125.$$

Sledi

$$\frac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} = 0.00093985,$$

osnovna zaokrožitvena napaka pa je $u = 2^{-9} = 0.00195313$.

Naloga 1.5. *Zapišite število* 0.1 *v formatu IEEE, enojna natančnost.*

Rešitev:
V tem formatu je osnova dvojiška, mantisa pa je dolžine 24. Pretvorimo decimalni del

$$\begin{aligned}
0.1 * 2 &= 0.2 + 0\\
0.2 * 2 &= 0.4 + 0\\
0.4 * 2 &= 0.8 + 0\\
0.8 * 2 &= 0.6 + 1\\
0.6 * 2 &= 0.2 + 1\\
0.2 * 2 &= 0.4 + 0\\
0.4 * 2 &= 0.8 + 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

in dobimo $0.1_{(10)} = 0.000\overline{1100}\ldots_{(2)} = 0.\overline{1100}\ldots_{(2)} \cdot 2^{-3}$. Predstavljivo število je tako enako

$$\mathrm{fl}(0.1) = 0.110011001100110011001101_{(2)} \cdot 2^{-3} = 0.1 + \frac{1}{40}2^{-24},$$

relativna napaka pa je

$$\frac{|0.1 - \mathrm{fl}(0.1)|}{|0.1|} = \frac{1}{4} \cdot 2^{-24} = \frac{1}{4}u.$$

V IEEE formatu (enojna natančnost) se število zapiše kot

$$0.1 = (-1)^0(1 + 0.10011001100110011001101) \cdot 2^{123-127}.$$

Ker je $123_{(10)} = 1111011_{(2)}$ je oblika zapisa števila 0.1 v računalniku enaka

$$\boxed{0|01111011|10011001100110011001101}$$

Naloga 1.6. *Katera števila predstavljajo zapisi*

$$\boxed{0|10000111|0101000\ldots0},$$
$$\boxed{1|01010001|1100100\ldots0},$$
$$\boxed{1|11111111|0000000\ldots0},$$
$$\boxed{0|00000000|0000010\ldots0},$$

v enojni IEEE natančnosti.

Rešitev:
Prvo število predstavlja

$$(-1)^0(1 + 0.0101000\ldots0_{(2)})2^{10000111_{(2)}-127} = 336,$$

drugo

$$(-1)^1(1 + 0.1100100\ldots0_{(2)})2^{1010001_{(2)}-127} = -\frac{57}{32} \cdot 2^{-46},$$

tretje je enako $-\infty$, četrto število pa je denormalizirano in je enako

$$(-1)^0 0.0000010\ldots0_{(2)}2^{-126} = 2^{-6} \cdot 2^{-126} = 2^{-132}.$$

Naloga 1.7. *Katera števila predstavljajo zapisi*

$$\boxed{1|01000010010|110010\ldots0},$$
$$\boxed{0|10000000101|010010\ldots0},$$
$$\boxed{0|11111111111|010010\ldots0},$$
$$\boxed{0|00000000000|000000\ldots0},$$

v dvojni IEEE natančnosti.

Rešitev:
Prvo število predstavlja

$$(-1)^1(1 + 0.110010\ldots0_{(2)})2^{1000010010_{(2)}-1023} = -\frac{57}{32}2^{-493},$$

drugo

$$(-1)^0(1 + 0.010010\ldots0_{(2)})2^{10000000101_{(2)}-1023} = -\frac{41}{32}2^6 = 82,$$

tretje je enako NaN, četrto število pa je enako 0.

Naloga 1.8. *V formatu* $P(10,5,-100,100)$ *izračunajte vrednost polinoma*

$$p(x) = 5.5555x^2 - 3.2111x + 9.8765$$

za $x = 12.345$ *po Hornerjevem algoritmu. Izračunajte relativno napako*

$$\frac{|\widehat{p}(x) - p(x)|}{|p(x)|}$$

ter jo primerjajte z osnovno zaokrožitveno napako v dani aritmetiki.

Rešitev:
S Hornerjevim algoritmom izračunamo vrednost polinoma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ s sledečimi elementarnimi operacijami:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_2x, \\ v_1 &= p_1 + a_1, \\ p_2 &= v_1x, \\ v_2 &= p_2 + a_0. \end{aligned}$$

Zadnja izračunana vrednost je vrednost polinoma v točki x: $v_2 = p(x)$. V danem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{p}_1 &= fl\,(68.5826475) = 0.68583 \cdot 10^2, \\ \widehat{v}_1 &= fl\,(65.3718999) = 0.65372 \cdot 10^2, \\ \widehat{p}_2 &= fl\,(807.01734) = 0.80702 \cdot 10^3, \\ \widehat{v}_2 &= fl\,(816.8965) = 0.81690 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Izračunana vrednost je tako enaka

$$\widehat{p}(x) = 816.9,$$

točna pa se glasi

$$p(x) = 816.8882538875.$$

Relativna napaka je velikosti $1.438 \cdot 10^{-5}$ in je manjša od osnovne zaokrožitvene napake, ki je enaka $u = 5 \cdot 10^{-5}$.

Naloga 1.9. *Vrednost izraza* $z = x^2 - y^2$ *računamo na dva načina:*

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2, \\ z &= (x - y)(x + 1). \end{aligned}$$

Analizirajte zaokrožitvene napake pri obeh primerih. Ali sta izračuna (relativno) direktno in (relativno) obratno stabilna?

Rešitev:
Poglejmo si najprej prvi primer izračuna. Eksaktni izračun je enak

$$\begin{aligned} v_1 &= x^2, \\ v_2 &= y^2, \\ z &= v_1 - v_2, \end{aligned}$$

dejanski pa

$$\begin{aligned} \widehat{v}_1 &= x^2(1+\gamma_1), \\ \widehat{v}_2 &= y^2(1+\gamma_2), \\ \widehat{z} &= (\widehat{v}_1 - \widehat{v}_2)(1+\gamma_3), \end{aligned}$$

pri čemer za napake velja $|\gamma_1|, |\gamma_3|, |\gamma_3| \le u$, kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka. Izračunana vrednost je torej enaka

$$\widehat{z} = (x^2(1+\gamma_1) - y^2(1+\gamma_2))(1+\gamma_3) = x^2(1+\gamma_1)(1+\gamma_3) - y^2(1+\gamma_2)(1+\gamma_3).$$

Če upoštevamo, da je

$$(1+\gamma_1)(1+\gamma_3) = 1+\delta_1, \quad (1+\gamma_2)(1+\gamma_3) = 1+\delta_2, \quad |\delta_1|, |\delta_2| \le 2u,$$

dobimo

$$\widehat{z} = x^2(1+\delta_1) - y^2(1+\delta_2),$$

relativna napaka pa je enaka

$$\frac{|z-\widehat{z}|}{|z|} \le 2u\frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}.$$

Ker je lahko zadnji izraz zelo velik, če je $x^2 - y^2$ majhno, ta način izračuna v splošnem ni direktno stabilen. Je pa obratno stabilen, saj je izračunana vrednost točna vrednost malo spremenjenih podatkov:

$$\widehat{z} = \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2, \quad \widehat{x} = x\sqrt{(1+\delta_1)}, \quad \widehat{y} = y\sqrt{(1+\delta_2)}.$$

Eksaktni izračun v drugem primeru je enak

$$\begin{aligned} v_1 &= x + y, \\ v_2 &= x - y, \\ z &= v_1 v_2, \end{aligned}$$

dejanski pa

$$\begin{aligned} \widehat{v}_1 &= (x+y)(1+\gamma_4), \\ \widehat{v}_2 &= (x-y)(1+\gamma_5), \\ \widehat{z} &= \widehat{v}_1\widehat{v}_2(1+\gamma_6), \end{aligned}$$

kjer so $|\gamma_4|, |\gamma_5|, |\gamma_6| \leq u$. Izračunana vrednost je enaka

$$\widehat{z} = (x+y)(1+\gamma_4)(x-y)(1+\gamma_5)(1+\gamma_6) = (x^2-y^2)(1+\delta_3),$$

pri čemer je $|\delta_3| \leq 3u$. Ker je relativna napaka ocenjena z

$$\frac{|z-\widehat{z}|}{|z|} \leq 3u,$$

je tak način izračuna relativno direktno stabilen.

Naloga 1.10. *V formatu $P(10,5,-10,10)$ izračunajte vrednost izraza $z = x^2 - y^2$ za $x = 0.11113$ in $y = 0.11112$ dva načina:*

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2, \\ z &= (x-y)(x+1). \end{aligned}$$

Določite relativne napake pri obeh izračunih.

Rešitev:
V prvem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{v}_1 &= fl\left(0.12349876\ldots 10^{-1}\right) = 0.12350 \cdot 10^{-1}, \\ \widehat{v}_2 &= fl\left(0.12347654\ldots 10^{-1}\right) = 0.12348 \cdot 10^{-1}, \\ \widehat{z} &= fl\left(0.2 \cdot 10^{-5}\right) = 0.2 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

relativna napaka pa je enaka

$$\frac{|z-\widehat{z}|}{|z|} = 0.100112.$$

V drugem primeru pa dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{v}_1 &= fl\left(0.1 \cdot 10^{-4}\right) = 0.1 \cdot 10^{-4}, \\ \widehat{v}_2 &= fl\left(0.22225\right) = 0.22225 \cdot 10^{0}, \\ \widehat{z} &= fl\left(0.22225 \cdot 10^{-5}\right) = 0.22225 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

in relativna napaka je enaka

$$\frac{|z-\widehat{z}|}{|z|} = 0.$$

Vidimo, da je v prvem primeru relativna napaka precej velika v primerjavi z osnovno zaokrožitveno napako $u = \frac{1}{2}10^{-4}$, kar numerično potrjuje, da prvi način izračuna ni direktno stabilen.

Naloga 1.11. *Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije*

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}$$

za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. S kalkulatorjem stabilno izračunajte vrednosti $f(x)$ za $x = 10^{-5}, 10^{-8}$ ter določite limito $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Rešitev:
Pri majhnih x je $\sqrt{4-x^2} \sim 2$ in pride do odštevanja skoraj enakih števil, kar vodi do tega, da se izgubi precej točnih decimalk. Pri zelo majhnih x-sih dobimo v števcu kar 0 in zato je vrednost f-a 0. Izraz preoblikujemo v stabilno obliko z racionalizacijo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{(2-\sqrt{4-x^2})(2+\sqrt{4-x^2})}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})} = \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Iz stabilne oblike takoj dobimo limito

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}.$$

S kalkulatorjem izračunamo

$$f(10^{-5}) = \frac{1}{4}, \quad f(10^{-8}) = \frac{1}{4}.$$

Če bi računali direktno, bi dobili

$$f(10^{-5}) = 0, \quad f(10^{-8}) = 0.$$

Naloga 1.12. *Kako bi numerično stabilno izračunali vrednosti funkcije*

$$f(x) = \frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$$

za majhne x? Utemeljite, zakaj pride do težav. S kalkulatorjem stabilno in nestabilno izračunajte vrednost $f(x)$ za $x = 10^{-5}$. Kakšna je limita $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Rešitev:
Do problema pride zaradi odštevanja skoraj enakih števil. Pri majhnih x je $\sqrt{9-x^2} \sim 3$ in zato je $3-\sqrt{9-x^2} \sim 0$.

Stabilen izraz dobimo z racionalizacijo:

$$f(x) = \frac{(3-\sqrt{9-x^2})(3+\sqrt{9-x^2})}{x^2(3+\sqrt{9-x^2})} = \frac{9-(9-x^2)}{x^2(3+\sqrt{9-x^2})} = \frac{1}{(3+\sqrt{9-x^2})}.$$

Od tod tudi preberemo limito:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6} = 0.166666666.$$

S kalkulatorjem dobimo po nestabilni formuli $f\left(10^{-5}\right) = 0$, po stabilni pa $f\left(10^{-5}\right) = 0.166666666$.

Naloga 1.13. *Dokažite, da integral*

$$I_n = \pi \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x) dx$$

zadošča rekurzivni enačbi

$$I_n = 1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}.$$

Utemeljite, kako bi numerično stabilno izračunali člene I_n za velike n. Na stabilen način izračunajte I_{20}.

Rešitev:
Rekurzivno zvezo izpeljemo tako, da dvakrat izvedemo integracijo per partes. V prvem koraku dobimo

$$\begin{aligned}
I_n &= \pi \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) x^{2n} \Big|_0^1 + \frac{2n}{\pi} \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx \right) = \\
&= \pi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx \right) = \\
&= 1 + 2n \int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx
\end{aligned}$$

S ponovno integracijo per partes izpeljemo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{2n-1} \cos(\pi x) dx &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) x^{2n-1} \Big|_0^1 - \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 x^{2n-2} \sin(\pi x) dx = \\
&= -\frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 x^{2n-2} \sin(\pi x) dx = \\
&= -\frac{2n-1}{\pi} \frac{1}{\pi} I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$I_n = 1 - \frac{2n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1}.$$

Prvi člen zaporedja je enak $I_0 = 2$. Ker velja ocena

$$0 \leq \pi \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x) dx \leq \pi \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{\pi}{2n+1},$$

morajo členi z naraščajočim n padati proti 0. Če člene računamo numerično od prvega naprej, pa to ne drži. Napaka, ki se pojavi pri členu I_1, se na vsakem koraku pomnoži s faktorjem $\frac{2i(2i-1)}{\pi^2}$, $i = 2, 3, \ldots$. Napaka tako slej kot prej prevlada nad točnimi vrednostmi (ki so majhne) in numerično izračunani členi začnejo po absolutni vrednosti naraščati. Stabilno lahko člene izračunamo v obratnem vrstnem redu. Postavimo $I_N = 0$ za nek dovolj velik N in računamo

$$I_{n-1} = \frac{\pi^2(1 - I_n)}{2n(2n-1)}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1.$$

Čeprav je člen I_N napačen, se napaka na vsakem koraku deli s faktorjem $\frac{\pi^2}{2i(2i-1)}$, $i = N, N-1, \ldots$ in zato prej ali slej izgine.

Če izberemo $I_{25} = 0$, dobimo

$$\begin{aligned}
I_{24} &= \frac{\pi^2(1 - I_{25})}{50(50-1)} = 4.02840996 \cdot 10^{-3}, \\
I_{23} &= \frac{\pi^2(1 - I_{24})}{48(48-1)} = 4.357201056 \cdot 10^{-3}, \\
I_{22} &= \frac{\pi^2(1 - I_{23})}{46(46-1)} = 4.747150024 \cdot 10^{-3}, \\
I_{21} &= \frac{\pi^2(1 - I_{22})}{44(44-1)} = 5.191729338 \cdot 10^{-3}, \\
I_{20} &= \frac{\pi^2(1 - I_{21})}{42(42-1)} = 5.701721305 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Če bi izračunali integral I_{20} brez uporabe rekurzivne formule, bi dobili $5.701721304 \cdot 10^{-3}$. Z rekurzivnim računanjem v obratni smeri smo torej dobili natančen rezultat.

Poglavje 2

Reševanje nelinearnih enačb

Naloga 2.1. *Iščemo ničle funkcije $f(x) = x^5 - 10x + 1$. Dokažite, da leži ena ničla na intervalu $[0, 0.2]$. Izpeljite iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{x^5+1}{10}$ ter določite začetne približke x_0, za katere zaporedje iteracij $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$ zagotovo konvergira k rešitvi. Ocenite napako drugega približka, če je $x_0 = 0$.*

Rešitev:
Ker je f zvezna funkcija in $f(0) = 1$ ter $f(0.2) = -0.99968$, ima f na $[0, 0.2]$ zagotovo vsaj eno ničlo. Iz

$$\begin{aligned} x^5 - 10x + 1 &= 0 \\ x^5 + 1 &= 10x \\ \frac{x^5+1}{10} &= x \end{aligned}$$

dobimo iteracijsko funkcijo g. Ker je

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2}x^4\right| < 1$$

za vse $|x| < \sqrt[4]{2}$, je interval, iz katerega lahko izbiramo začetne približke enak

$$\left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right).$$

Če izberemo $x_0 = 0$ dobimo

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{10}, \quad x_2 = g(x_1) = 0.100001, \quad \ldots$$

Za oceno napake drugega približka uporabimo formulo

$$|x_r - \alpha| \le \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|,$$

pri čemer je α točna resitev, m pa je število, za katerega velja $|g'(x)| \le m < 1$, za vse $x \in I$, kjer je I interval, ki vsebuje α. Izberemo $I = [0, 0.2]$ ter izračunamo $m = 8 \cdot 10^{-4}$. Od tod sledi

$$|x_2 - \alpha| \le \frac{8 \cdot 10^{-4}}{1 - 8 \cdot 10^{-4}}|0.100001 - 0.1| \sim 8 \cdot 10^{-10},$$

kar pomeni, da je že pri drugem približku točnih deset decimalk.

Naloga 2.2. *Dana je iteracija*

$$x_{r+1} = x_r\left(3 - 3ax_r + a^2x_r^2\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

kjer je $a \neq 0$.

1. *Izračunajte fiksne točke iteracije ter določite, katere so privlačne in katere odbojne.*
2. *V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence ter začetne približke, za katere zaporedje iteracij zagotovo konvergira.*
3. *Preizkusite za* $a = 5$ *in* $x_0 = 0.1$.

Rešitev:

1. Fiksne točke so rešitve enačbe $g(x) = x$, kjer je $g(x) = x\left(3 - 3ax + a^2x^2\right)$. Dobimo tri rešitve $x = 0$, $x = \frac{1}{a}$ ter $x = \frac{2}{a}$. Izračunamo odvod

   $$g'(x) = 3(ax-1)^2.$$

   Ker je

   $$|g'(0)| = 3 > 1, \quad \left|g'\left(\frac{1}{a}\right)\right| = 0 < 1, \quad \left|g'\left(\frac{2}{a}\right)\right| = 3 > 1,$$

   je edina privlačna fiksna točka $x = \frac{1}{a}$.

2. Iz

   $$g'\left(\frac{1}{a}\right) = 0, \quad g''\left(\frac{1}{a}\right) = 0, \quad g'''\left(\frac{1}{a}\right) = 6a \neq 0$$

   sledi, da je red konvergence v okolici fiksne točke kubičen.

   Začetne približke določimo iz neenačbe

   $$|g'(x)| = |3(ax-1)^2| < 1$$

   in dobimo pogoj

   $$3 - \sqrt{3} < 3ax_0 < 3 + \sqrt{3}.$$

3. Če izberemo $x_0 = 0$ in $a = 5$ dobimo

   $$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = 0.175, \\ x_2 &= g(x_1) = 0.199609\ldots, \\ x_3 &= g(x_2) = 0.1999999985\ldots, \\ x_4 &= g(x_3) = 0.2, \end{aligned}$$

   če računamo v dvojni natančnosti. To pomeni, da zaporedje iteracij skonvergira proti rešitvi $\frac{1}{5}$ že v štirih korakih, kar je za pričakovati, saj je konvergenca kubična.

Naloga 2.3. *Dana je iteracija*

$$x_{r+1} = \frac{2}{3}\left(x_r + \frac{1}{x_r} - \frac{1}{2}\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

1. *Izračunajte fiksne točke iteracije ter določite, katere so privlačne in katere odbojne.*

2. *V okolici privlačnih fiksnih točk določite red konvergence.*

Rešitev:
Iteracijska funkcija je $g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$. Fiksne točke so rešitve enačbe $g(\alpha) = \alpha$. Iz

$$\begin{aligned} g(\alpha) - \alpha &= -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3\alpha} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\alpha}\left(\alpha^2 + \alpha - 2\right) = \\ &= -\frac{1}{3\alpha}(\alpha + 2)(\alpha - 1) \end{aligned}$$

dobimo, da sta fiksni točki $\alpha = -2$ in $\alpha = 1$. Ker je $g'(-2) = \frac{1}{2}$ in $g'(1) = 0$ sta obe točki privlačni fiksni točki.

Ker je $g'(-2) \neq 0$, je v bližini $\alpha = -2$ red konvergence linearen. V bližini $\alpha = 1$ je red konvergence kvadratičen, saj je $g'(1) = 0$ in $g''(1) = \frac{4}{3} \neq 0$.

Naloga 2.4. *Enačbo $x^3 - A = 0$, $A \in \mathbb{R}$, rešujemo z iteracijo oblike*

$$x_{r+1} = \alpha x_r + \frac{\beta}{x_r^2}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Določite parametra α in β, da bo red konvergence v okolici rešitve enačbe vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence? Z dobljeno iteracijo izračunajte $\sqrt[3]{12}$ na 4 decimalke natančno, če začnete z $x_0 = 2$.

Rešitev:
Rešitev enačbe je očitno $x = \sqrt[3]{A}$. Iteracijska funkcija g je enaka

$$g(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x^2}.$$

Da bo $\sqrt[3]{A}$ fiksna točka in da bo red konvergence v njeni okolici vsaj kvadratičen, mora veljati

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt[3]{A}\right) &= \alpha\sqrt[3]{A} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{A^2}} = \sqrt[3]{A}, \\ g'\left(\sqrt[3]{A}\right) &= \alpha - 2\frac{\beta}{\sqrt[3]{A^3}} = 0. \end{aligned}$$

Enačbe se poenostavijo v

$$\alpha + \frac{\beta}{A} = 1, \quad \alpha - 2\frac{\beta}{A} = 0.$$

Rešitev je enaka

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{A}{3}.$$

Ker je

$$g''(x) = 6\frac{\beta}{x^4}, \quad g''\left(\sqrt[3]{A}\right) = 6\frac{\beta}{\sqrt[3]{A^4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{A}} \neq 0,$$

je red konvergence točno kvadratičen.

Za $A = 12$ je $x_{r+1} = g(x_r) = \frac{2}{3}x_r + \frac{4}{x_r^2}$. Z izbranim $x_0 = 2$ dobimo

$$x_1 = \frac{7}{3} = 2.33333333, \quad x_2 = 2.29024943,$$
$$x_3 = 2.28942878, \quad x_4 = 2.28942849, \ldots$$

točna rešitev pa je enaka $\sqrt[3]{12} = 2.28942849$.

Naloga 2.5. *Enačbo $x^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, rešujemo z iteracijo*

$$x_{r+1} = \frac{x_r^3}{Ax_r^2 + B}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Določite neznana koeficienta A in B tako, da bo red konvergence v okolici rešitve $\sqrt{a}$ vsaj kvadratičen. Kakšen je točno red konvergence? Z iteracijo, ki jo dobite, izračunajte $\sqrt{5}$ z začetnim $x_0 = 2$ na pet decimalnih mest natančno.

Rešitev:
Iteracijska funkcija je enaka

$$g(x) = \frac{x^3}{Ax^2 + B}.$$

Da bo red konvergence v okolici $\sqrt{a}$ vsaj kvadratičen, mora veljati

$$g\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}, \quad g'\left(\sqrt{a}\right) = 0.$$

Izračunamo

$$g'(x) = \frac{Ax^4 + 3Bx^2}{(Ax^2 + B)^2}, \quad g'(a) = \frac{Aa^2 + 3Ba}{(Aa + B)^2}.$$

Zgornji enačbi se poenostavita v

$$Aa + B = a, \quad Aa^2 + 3aB = 0$$

in rešitev se glasi

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{a}{2}.$$

Iteracija je torej oblike

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3}{3x_r^2 - a}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Ker je $g''\left(\sqrt{a}\right) = \frac{3}{\sqrt{a}} \neq 0$, je konvergenca točno kvadratična.

Za $a = 5$ dobimo z začetnim $x_0 = 2$ sledeče približke:

$$x_1 = \frac{16}{7}, \quad x_2 = 2.237639989, \quad x_3 = 2.236069633, \quad \ldots$$

Ker je $\sqrt{5} = 2.236067977$, je zahtevana natančnost dosežena že po treh korakih.

Naloga 2.6. *Iščemo ničle funkcije*

$$f(x) = 8 - x^2 - e^x.$$

1. *Preverite, da ima f vsaj eno pozitivno in eno negativno ničlo. Izpeljite iteracijsko funkcijo $g(x) = \ln\left(8 - x^2\right)$ in določite, za katere začetne približke iteracija konvergira k rešitvi enačbe.*

2. *Z začetnim $x_0 = \frac{3}{2}$ izračunajte prve tri približke k rešitvi.*

3. *Zapišite še tangentno metodo in izračunajte prvi približek, če začnete z $x_0 = \frac{3}{2}$.*

Rešitev:
Funkcija f doseže naslednje vrednosti:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 7, \quad f(1) = 7 - e = 4.28172, \quad f(2) = 4 - e^2 = -3.38906,\\
&f(-1) = 7 - e^{-1} = 6.63212, \quad f(-2) = 4 - e^{-2} = 3.86466,\\
&f(-3) = -1 - e^{-3} = -1.04979.
\end{aligned}$$

Vidimo, da ima f zagotovo eno ničlo na intervalu $[-3, -2]$ ter eno na $[1, 2]$.

Ker je

$$\begin{aligned}
8 - x^2 - e^x &= 0\\
8 - x^2 &= e^x\\
\ln\left(8 - x^2\right) &= x,
\end{aligned}$$

je $g(x) = \ln\left(8 - x^2\right)$ iteracijska funkcija. Definicijsko območje te funkcije je interval $\left(\sqrt{-8}, \sqrt{8}\right)$. Iteracija konvergira proti fiksni točki za tiste $x \in \left(\sqrt{-8}, \sqrt{8}\right)$, za katere je

$$|g'(x)| = \left|\frac{-2x}{8 - x^2}\right| < 1.$$

Rešimo to neenačbo:

$$\begin{aligned}
0 \le x \le \sqrt{8}: \qquad & 2x < 8 - x^2 \\
& x^2 + 2x - 8 < 0 \\
& (x+4)(x-2) < 0 \\
& (-4,2) \cap \left[0, \sqrt{8}\right) = [0,2) \\
-\sqrt{8} < x < 0: \qquad & -2x < 8 - x^2 \\
& x^2 - 2x - 8 < 0 \\
& (x-4)(x+2) < 0 \\
& (-2,4) \cap \left(-\sqrt{8}, 0\right) = (-2,0)\,.
\end{aligned}$$

Iteracije $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergirajo proti fiksni točki (ki leži na intervalu $[1,2]$) za vse $x_0 \in (-2,2)$. Druga fiksna točka (ki leži na intervalu $[-3,-2]$) je za to iteracijo odbojna.

Za $x_0 = \frac{3}{2}$ dobimo

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.749199855, \quad x_2 = 1.597426031, \\
x_3 &= 1.695290799, \quad x_4 = 1.634323503.
\end{aligned}$$

Tangentna metoda je oblike

$$x_{r+1} = x_r + \frac{8 - x_r^2 - e^{x_r}}{2x_r + e^{x_r}}$$

in velja

$$\begin{aligned}
&x_0 = \frac{3}{2}, \quad x_1 = 1.669522005, \quad x_2 = 1.658314166, \\
&x_3 = 1.658260722, \quad x_4 = 1.658260720.
\end{aligned}$$

Naloga 2.7. *Rešujemo enačbo $p(x) = 0$, kjer je $p(x) = 3x^3 + 2x - 1$.*

1. *Preverite, da ima enačba vsaj eno rešitev na intervalu $[0,1]$.*
2. *Zapišite tangentno metodo. Z začetnim približkom $x_0 = 0$ izračunajte prva dva približka k rešitvi.*
3. *Zapišite pridruženo matriko C_p polinoma p. Kakšna je povezava med matriko C_p ter ničlami polinoma p?*

Rešitev:
Ker je

$$p(0) = -1, \quad p(1) = 4,$$

funkcija p spremeni predznak na $[0,1]$. Ker je zvezna, ima na tem intervalu vsaj eno ničlo.

Tangentna metoda:

$$x_{r+1} = \frac{6x_r^3 + 1}{9x_r^2 + 2}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Z začetnim $x_0 = 0$ dobimo

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{7}{17} = 0.411765, \quad x_3 = 0.402413, \quad \ldots.$$

Za primerjavo zapišimo še točno rešitev: 0.4023199380628143011.

Pridružena matrika polinoma

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lastne vrednosti te matrike so natanko ničle polinoma.

Naloga 2.8. *Dan je polinom*

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

1. *Določite število različnih ničel na intervalu* $(0,1)$.
2. *Dokažite, da ni nobene ničle na intervalu* $[3,\infty) \cup (-\infty,-1]$.
3. *S tangentno metodo in začetnim približkom* $x_0 = 1$ *izračunajte eno od rešitev na tri decimalna mesta natančno.*
4. *K polinomu* p *zapišite pridruženo matriko* C_p.

Rešitev:
Za dan polinom izračunamo Sturmovo zaporedje:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x^3 - 3x^2 + 1, \\ p_1(x) &= 3x^2 - 6x, \\ p_2(x) &= 2x - 1, \\ p_3(x) &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dalje izračunamo

$$\begin{aligned}
\{p_0(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0)\} &= \left\{1, 0, -1, \frac{9}{4}\right\}, \\
\{p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)\} &= \left\{-1, -3, 1, \frac{9}{4}\right\}, \\
\{p_0(3), p_1(3), p_2(3), p_3(3)\} &= \left\{1, 9, 5, \frac{9}{4}\right\}, \\
\{p_0(-1), p_1(-1), p_2(-1), p_3(-1)\} &= \left\{-3, 9, -3, \frac{9}{4}\right\},
\end{aligned}$$

od koder preberemo spremembe predznaka

$$\sigma(0) = 2, \quad \sigma(1) = 1, \quad \sigma(3) = 0, \quad \sigma(-1) = 3.$$

Vidimo tudi, da $p(-1), p(0), p(1), p(3) \neq 0$. Število različnih ničel na intervalu $(0, 1)$ je torej enako $\sigma(0) - \sigma(1) = 1$. Ker je $\sigma(-1) - \sigma(3) = 3$ so na intervalu $(-1, 3)$ tri različne ničle. Ker pa je p polinom stopnje 3, so to vse njegove ničle.

Tangentna metoda se glasi

$$x_{r+1} = \frac{2x_r^3 - 3x_r^2 - 1}{3x_r(x_r - 2)}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Z začetnim približkom $x_0 = 1$ dobimo

$$x_1 = 0.6666666667, \quad x_2 = 0.6527777778, \quad x_3 = 0.6527036468.$$

Ker je relativna razlika

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.000113575 < 10^{-3},$$

je x_3 izračunan na zahtevano natančnost.

Pridružena matrika k polinomu se glasi

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poglavje 3

Reševanje linearnih sistemov enačb

3.1. Vektorske in matrične norme

Naloga 3.1. *Za vektor* $x = (5, -4, 2, -1)^T$ *izračunajte* $\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty, \|x\|_3$.

Rešitev:

$$\|x\|_2 = \sqrt{46}, \quad \|x\|_1 = 12, \quad \|x\|_\infty = 5, \quad \|x\|_3 = \sqrt[3]{198}.$$

Naloga 3.2. *Za vektor* $x = (-1, 5, -2, 0, 8)^T$ *izračunajte* $\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty, \|x\|_3$.

Rešitev:

$$\|x\|_2 = \sqrt{94}, \quad \|x\|_1 = 16, \quad \|x\|_\infty = 8, \quad \|x\|_3 = \sqrt[3]{646}.$$

Naloga 3.3. *Dana je matrika*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$.

Rešitev:

$$\|A\|_1 = 11, \quad \|A\|_\infty = 7, \quad \|A\|_F = \sqrt{60}.$$

Naloga 3.4. *Dana je matrika*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$.

Rešitev:

$$\|A\|_1 = 8, \quad \|A\|_\infty = 11, \quad \|A\|_F = \sqrt{92}.$$

Naloga 3.5. *Dokažite, da*

$$N_\infty(A) := \max_{i,j} |a_{i,j}|$$

ni matrična norma.

Rešitev:
Pokažimo, da ne velja nujno submultiplikativnost, to je

$$N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B).$$

Izberimo matriki

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ker je $N_\infty(A) = 1$, $N_\infty(B) = 2$ in $N_\infty(AB) = 4$, je $N_\infty(AB) \nleq N_\infty(A) N_\infty(B)$.

Naloga 3.6. *Naj bo* $x \in \mathbb{R}^n$ *in* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. *Izpeljite oceno*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty.$$

2. *S pomočjo zgornje ocene dokažite, da velja*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty.$$

3. *Izpeljite še oceno*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1.$$

Rešitev:

1. Ocena sledi iz
$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2} = \|x\|_2 \le \sqrt{n\max_{1\le i\le n}|x_i|^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

2. Po definiciji je $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ in $\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Z uporabo prejšnje ocene za vektorske norme dobimo
$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \le \max_{x\neq 0}\frac{\sqrt{n}\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$
in
$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \ge \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\sqrt{n}\|x\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty.$$

3. Ker je
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|,$$
velja $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$. Dalje je $\|A\|_2^2 = \max_{1\le i\le n}\lambda_i(A^HA) = \max_{1\le i\le n}\lambda_i(AA^H)$, zato velja $\|A\|_2 = \|A^H\|_2$ oziroma $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$, saj je matrika realna. Če uporabimo oceno iz prejšnje točke za matriko A^T dobimo
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A^T\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A^T\|_2 = \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A^T\|_\infty = \sqrt{n}\|A\|_1.$$

Naloga 3.7. *Dokažite, da je*
$$\|A\|_F^2 = \mathrm{sled}(A^HA).$$
Pokažite tudi, da velja ocena
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F.$$

Rešitev:
Matrika $A^HA = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$ ima elemente $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n \overline{a}_{k,i}a_{k,j}$. Diagonalni elementi so torej enaki $b_{i,i} = \sum_{k=1}^n \overline{a}_{k,i}a_{k,i} = \sum_{k=1}^n |a_{k,i}|^2$ in sled matrike A^HA je
$$\mathrm{sled}(A^HA) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{k,i}|^2 = \|A\|_F^2.$$
Ker je po drugi strani $\mathrm{sled}(A^HA) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^HA)$, je očitno
$$\|A\|_2 \le \|A\|_F.$$

Ker pa velja

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^H A) \le n \max_{1\le i\le n} \lambda_i(A^H A),$$

je

$$\|A\|_F^2 \le n\|A\|_2^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2.$$

Naloga 3.8. *Dokažite, da velja ocena*

$$N_\infty(A) \le \|A\|_2 \le n\, N_\infty(A),$$

kjer je $N_\infty(A) := \max_{i,j} |a_{i,j}|$.

Rešitev:
Po nalogi 3.7 vemo, da je $\|A\|_2 \le \|A\|_F$. Od tod sledi

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \le \sqrt{n^2 \max_{i,j} |a_{i,j}|^2} = n \max_{i,j} |a_{i,j}| = n\, N_\infty(A).$$

Da dokažemo levo neenakost uporabimo dejstvo, da je $a_{i,j} = e_i^T A e_j$. Z uporabo Cauchy-Schwartzove neenakosti in neenakosti $\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2$ dobimo

$$|a_{i,j}| = \left|e_i^T A e_j\right| \underset{Cauchy-Schwartz}{\le} \|e_j\|_2 \|Ae_i\|_2 = 1 \cdot \|Ae_i\|_2 \le \|A\|_2 \|e_i\|_2 = \|A\|_2.$$

Naloga 3.9. *Naj bo* $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrika z elementi* $a_{i,j}$*:*

$$\begin{aligned} &a_{i,i} = -2i, \quad i = 1, 2, \dots n, \\ &a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = n - i, \quad i = 1, 2, \dots n-1, \\ &a_{i,k} = 0, \quad |i-k| > 1. \end{aligned}$$

Izračunajte $\|A_n\|_1, \|A_n\|_\infty, \|A_n\|_F$.

Rešitev:
Matrika A_n je simetrična tridiagonalna matrika oblike

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & n-1 & & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & & \\ & n-2 & -6 & n-3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -2(n-1) & 1 \\ & & & & 1 & -2n \end{pmatrix}.$$

Najprej izračunamo

$$\|A\|_1 = \max\left\{|-2| + |n-1|, \max_{2\le i\le n-1}\{|-2i| + |n-(i-1)| + |n-i|\}, 1 + |-2n|\right\} = \\ = 2n+1.$$

Ker je matrika simetrična, je $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty = 2n+1$. Pri izračunu Frobeniousove norme uporabimo enakost

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3.1}$$

Dobimo

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n}(-2i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2n^2 = \\ &= n(n+1)(2n+1) - 2n^2 = 2n^3 + n^2 + n, \\ \|A\|_F &= \sqrt{2n^3+n^2+n}.\end{aligned}$$

Naloga 3.10. *Dana je matrika*

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{i,j} = (-1)^i(i+j).$$

Izračunajte norme $\|A_n\|_\infty$, $\|A_n\|_1$ *ter* $\|A_4\|_F$.

Rešitev:
Matrika A_n je oblike

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & \dots & -(n+1) \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ -4 & -5 & -6 & \dots & -(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n(n+1) & (-1)^n(n+2) & (-1)^n(n+3) & \dots & (-1)^n 2n \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\|A_n\|_\infty &= \max_{i=1,2,\dots,n}\{i+1+i+2+i+3+\cdots+i+n\} = \\ &= \max_{i=1,2,\dots,n}\{ni+1+2+3+\cdots+n\} = \max_{i=1,2,\dots,n}\left\{ni + \frac{n(n+1)}{2}\right\} = \\ &= n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}.\end{aligned}$$

Ker je matrika absolutnih vrednosti $|A| = (|a_{i,j}|)_{i,j=1}^n$ simetrična, je $\|A\|_\infty = \|A\|_1$. Frobeniousova norma je enaka

$$\|A_4\|_F = \sqrt{2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + 4\cdot 5^2 + 3\cdot 6^2 + 2\cdot 7^2 + \cdot 8^2} = \sqrt{440} = 20.976177.$$

Naloga 3.11. *Izračunajte* $\|I\|_1, \|I\|_2, \|I\|_\infty, \|I\|_F$, *kjer je* $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *identiteta.*

Rešitev:
Po definiciji operatorske norme je

$$\|I\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ix\|}{x} = 1,$$

zato je

$$\|I\|_1 = \|I\|_2 = \|I\|_\infty = 1.$$

Frobeniousova norma pa je enaka

$$\|I\|_F = \sqrt{n}.$$

Naloga 3.12. *1. Dokažite, da za poljubno matrično normo velja* $\|I\| \geq 1$, *kjer je* $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *identiteta.*

2. Dokažite, da je $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$ *za poljubno nesingularno matriko* A.

3. Dokažite: če je $\|A\| < 1$, *potem je* $I + A$ *nesingularna matrika in velja*

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{\|I\| - \|A\|}.$$

Rešitev:

1. Ker je $I = I^2$, je $\|I\| = \|I^2\| \leq \|I\|\|I\| = \|I\|^2$ in zato $\|I\| \geq 1$.
2. Iz
$$\|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$
in $1 \leq \|I\|$ sledi $\frac{1}{\|A\|} \leq \|A^{-1}\|$.
3. Recimo, da je $I + A$ singularna matrika. Tedaj obstaja $x \neq 0$, da je $(I + A)x = 0$ oziroma $x = -Ax$. Na tej enakosti uporabimo vektorsko normo, ki je usklajena z dano matrično normo in dobimo $\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Od tod sledi $\|A\| \geq 1$, kar je protislovje s predpostavko.

   Označimo $B = (I + A)^{-1}$. Tedaj je
$$\begin{aligned} B(I + A) &= I \\ B + BA &= I \\ B &= I - BA \\ \|B\| &\leq \|I\| + \|B\|\|A\| \\ \|B\|(1 - \|A\|) &\leq \|I\| \\ \|B\| &\leq \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}. \end{aligned}$$

3.2. LU razcep

Naloga 3.13. *Z LU razcepom brez pivotiranja rešite sistem $Ax = b$ za*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
Naredimo LU razcep brez pivotiranja:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.\text{korak}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.\text{korak}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.14. *Podana je matrika A in vektor b:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 18 & 19 \\ 6 & -2 & 7 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 33 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$. Izračunajte še determinanto matrike A.

Rešitev:
Naredimo LU razcep brez pivotiranja:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 18 & 19 \\ 6 & -2 & 7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.\text{korak}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 18 & 19 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.\text{korak}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.\text{korak}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 33 \\ 37 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrike A je enaka

$$\det A = \det L \det U = 1 \cdot \det U = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 5 = -30.$$

Naloga 3.15. *Podana je matrika A in vektor b:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ 9 & 17 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$.

Rešitev:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.16. *Podana je matrika A in vektor b:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 9 & 8 & 2 & 11 & 1 \\ -2 & 6 & -6 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & -8 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 33 \\ 75 \\ -4 \\ 22 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$.

Rešitev:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.17. *Podana je matrika A in vektor b:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 9 & 8 \\ -9 & -14 & 1 & 13 & 6 \\ 15 & 29 & 7 & 11 & 21 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 23 \\ -25 \\ 77 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte LU razcep matrike A brez pivotiranja in rešite sistem $Ax = b$.

Rešitev:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.18. *Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearni sistem $Ax = b$ za podatke*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
Naredimo LU razcep z delnim pivotiranjem:
1.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -4 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -4 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

3.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 6 & -2 \\ \frac{2}{3} & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 6 & -2 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

in velja $PA = LU$. Rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ -8 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & -6 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ -8 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.19. *Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearen sistem $Ax = b$ za*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & 12 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte tudi determinanto matrike A.

Rešitev:
Naredimo LU razcep z delnim pivotiranjem:
1.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ \frac{1}{2} & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ \frac{1}{2} & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & \frac{1}{4} & 6 & 15 \\ \frac{1}{2} & 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

3.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ \frac{1}{2} & 1 & -8 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & 6 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ \frac{1}{2} & 1 & -8 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 12 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

in velja $PA = LU$. Rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrike A je enaka

$$\det A = \det P^T \det L \det U = 1 \cdot 1 \cdot (12 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot 12) = -4608.$$

Naloga 3.20. *Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearni sistem $Ax = b$ za podatke*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 8 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 13 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Čimbolj ekonomično izračunajte vrednost izraza $b^T A^{-1} b$.

Rešitev:
Naredimo LU razcep z delnim pivotiranjem:
1.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 4 & -6 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 13 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -8 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

2.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -2 & 13 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & -8 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

3.korak

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & -8 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 12 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & -8 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 12 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dobimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Rešimo spodnje trikotni sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Rešimo še zgornje trikotni sistem $Ux = y$,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ker je $A^{-1}b = x$ je

$$b^T A^{-1} b = b^T x = (-4, 2, 16, -3)(2, 1, -1, 1)^T = -25.$$

Naloga 3.21. *Z LU razcepom z delnim pivotiranjem rešite linearen sistem $Ax = b$ za*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 12 \\ 18 & 3 & 9 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 13 & -3 & 13 \\ 18 & 3 & 0 & 0 & 18 \\ 18 & 5 & 19 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -32 \\ 39 \\ -1 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte tudi determinanto matrike A.

Rešitev:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 18 & 3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -4860.$$

Naloga 3.22. *Sestavite učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb*

$$\begin{pmatrix} U & -I \\ B & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

kjer je B nesingularna matrika reda n z LU razcepom $B = LU$. Preštejte število operacij.

Rešitev:
Bločno pomnožimo in dobimo

$$\begin{aligned} Ux - y &= a \\ LUx + Ly &= b. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $Ux = a + y$ in vstavimo v drugo enačbo ter dobimo

$$L(a + 2y) = b.$$

S premimi substitucijami izračunamo $z = a + 2y$, od koder dobimo $y = \frac{1}{2}(z - a)$. Nato rešimo zgornje trikotni sistem

$$Ux = w, \quad w = y + a,$$

in dobimo x. Povzemimo korake v algoritem:

1: Reši sistem $Lz = b \implies z$ $\quad$ (n^2 operacij)

2: Izračunaj $y = \frac{1}{2}(z - a)$ $\quad$ ($2n$ operacij)

3: Izračunaj $w = y + a$ $\quad$ (n operacij)

4: Reši sistem $Ux = w \implies x$ $\quad$ ($n^2 + n$ operacij)

Za izračun rešitve x, y torej potrebujemo $2n^2 + 4n$ operacij.

Naloga 3.23. *Kako bi preko LU razcepa matrike A izračunali njen inverz? Izračunajte inverz matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rešitev:
Za $A^{-1} =: X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ velja $AA^{-1} = I = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Inverz izračunamo tako, da rešimo n linearnih sistemov enačb, pri čemer so desne strani enotski vektorji e_j. Najprej izračunamo LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem, nato pa izvedemo n premih in n obratnih substitucij. Bolj natančno, j-ti stolpec inverza X_j dobimo tako, da rešimo trikotna sistema

$$\begin{aligned} LY_j = Pe_j &\implies Y_j, \\ UX_j = Y_j &\implies X_j. \end{aligned}$$

Za dan primer dobimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo 1. stolpec inverza. Rešimo $LY_1 = Pe_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nato rešimo $UX_1 = Y_1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo sedaj 2. stolpec inverza. Rešimo $LY_2 = Pe_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nato rešimo $UX_2 = Y_2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ x_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{16} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Da dobimo 3. stolpec inverza rešimo $LY_3 = Pe_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,3} \\ y_{2,3} \\ y_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nato rešimo $UX_3 = Y_3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies X_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Inverz matrike A je tako enak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{11}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.24. *Reševanje kompleksnega linearnega sistema $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ter $b, x \in \mathbb{C}^n$, prevedite na reševanje realnega linearnega sistema.*

Rešitev:
Označimo

$$A = A_1 + iA_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad x = x_1 + ix_2,$$

kjer so $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ter $b_1, b_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Iz

$$\begin{aligned} (A_1 + iA_2)(x_1 + ix_2) &= b_1 + ib_2 \\ (A_1x_1 - A_2x_2) + i(A_2x_1 + A_1x_2) &= b_1 + ib_2 \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} A_1x_1 - A_2x_2 &= b_1 \\ A_2x_1 + A_1x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

kar rešujemo kot $(2n) \times (2n)$ realni linearni sistem

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.25. *Dana je nesingularna matrika A ter njen inverz A^{-1}. Kako bi učinkovito izračunali inverz B^{-1} razširjene matrike*

$$B = \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{pmatrix},$$

kjer sta $u, v \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Koliko operacij je potrebnih za izračun?

Rešitev:
Označimo neznan inverz bločno z

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} C & x \\ y^T & \beta \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{n\times b}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Iz

$$\begin{pmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & x \\ y^T & \beta \end{pmatrix} = I_n$$

dobimo

$$\begin{aligned} &AC + uy^T = I_{n-1}, \\ &Ax + \beta u = 0, \\ &v^T C + \alpha y^T = 0, \\ &v^T x + \alpha\beta = 1. \end{aligned}$$

Prvo in drugo enačbo pomnožimo z A^{-1}, označimo $z := A^{-1}u$ in izrazimo C ter x:

$$\begin{aligned} C &= A^{-1} - zy^T \\ x &= -\beta z. \end{aligned}$$

Vstavimo x v zadnjo enačbo in dobimo

$$\beta = \frac{1}{\alpha - v^T z}.$$

Iz tretje enačbe dobimo po vstavljenem C, da je

$$y^T = \frac{v^T A^{-1}}{v^T z - \alpha} = -\beta v^T A^{-1}.$$

Ko enkrat izračunamo y in β, imamo tudi C in x. Algoritem je torej sledeč:

1: Izračunaj $z = A^{-1}u$ $\quad$ ($2n^2$ operacij)

2: Izračunaj $\beta = \frac{1}{\alpha - v^T z}$ $\quad$ ($2n + 2$ operacij)

3: Izračunaj $y^T = -\beta v^T A^{-1}$ $\quad$ ($2n^2 + n$ operacij)

4: Izračunaj $x = -\beta z$ $\quad$ (n operacij)

5: Izračunaj $C = A^{-1} - zy^T$ $\quad$ ($2n^2$ operacij)

Za izračun inverza B^{-1} torej potrebujemo $6n^2 + 4n + 2$ operacij.

Naloga 3.26. *Zapišite algoritem za LU razcep brez pivotiranja za tridiagonalno matriko A.*

Rešitev:
Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Če izvedemo LU razcep brez pivotiranja, potem sta matriki L in U oblike

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & & \\ & \ell_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ell_{n-1} & 1 & \\ & & & & \ell_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & & \\ & u_2 & c_2 & & & \\ & & u_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & u_n \end{pmatrix}.$$

Njune elemente izračunamo na sledeč način:

$$\begin{aligned} & u_1 = a_1 \\ & \text{for } i = 2 : n \\ & \qquad \ell_i = \frac{b_i}{u_{i-1}} \\ & \qquad u_i = a_i - \ell_i c_{i-1} \\ & \text{end} \end{aligned}$$

Za izračun potrebujemo $2n - 2$ operacij.

3.3. Simetrično pozitivno definitne matrike

Naloga 3.27. *Izračunajte razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 25 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 9 & 28 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Rešitev:
Razcep Choleskega je $A = VV^T$ za

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.28. *Izračunajte razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 \\ 15 & 7 & 35 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 14 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

ter rešite sistem $Ax = b$ *za* $b = (-3, -13, -20, -4, 8)^T$.

Rešitev:
Faktor Choleskega je enak

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev sistema dobimo z uporabo premih in obratnih substitucij. Najprej rešimo $Vy = b$ in dobimo $y = (-1, -6, -3, 2, 1)^T$, nato pa rešimo $V^T x = y$ in dobimo $x = (1, -2, -1, 0, 1)^T$.

Naloga 3.29. *Izračunajte razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & 15 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ter rešite sistem $Ax = b$ *za* $b = (-3, -7, -2, -10, -1)^T$.

Rešitev:
Razcep Choleskega je $A = VV^T$, kjer je

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev sistema dobimo iz

$$\begin{aligned} Vy = b &\quad\Longrightarrow\quad y = (-3, -1, 0, 1, 1)^T \\ V^T x = y &\quad\Longrightarrow\quad x = (1, -2, -1, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Naloga 3.30. *Ali je matrika*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 12 & 16 & 2 \\ 3 & 12 & 27 & 36 & 6 \\ 4 & 16 & 36 & 64 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

simetrično pozitivno definitna?

Rešitev:
Da. Obstaja razcep Choleskega:

$$A = VV^T, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 3.31. *Ali je matrika*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

simetrično pozitivno definitna?

Rešitev:
Ne. Razcep Choleskega se ne izvede.

Naloga 3.32. *Dana je matrika*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & 18 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ -4 & 3 & -4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. *Določite vsa realna števila α, za katere je matrika A simetrično pozitivno definitna.*

2. Za $\alpha = 23$ in $b = (6, 15, 2, 1)^T$ rešite sistem $Ax = b$.

Rešitev:

1. Matrika je simetrično pozitivno definitna natanko tedaj, ko obstaja razcep Choleskega. V našem primeru je faktor Choleskega enak

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & \sqrt{\alpha - 14} \end{pmatrix}.$$

   Matrika bo torej simetrično pozitivno definitna za vse $\alpha > 14$.

2. Za $\alpha = 23$ je

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = VV^T.$$

   Linearen sistem $Ax = b$ rešimo z uporabo razcepa Choleskega. Z uporabo premih substitucij dobimo

$$Vy = b \quad \Longrightarrow \quad y = (3, 2, 1, 0)^T$$

   iz obratnih substitudij pa sledi

$$V^T x = y \quad \Longrightarrow \quad x = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 0\right)^T.$$

Poglavje 4

Reševanje nelinearnih sistemov enačb

Naloga 4.1. *Rešujemo nelinearen sistem*

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 4,\\
x^2 - y^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *izračunajte prva dva približka k rešitvi. Skicirajte obe implicitno podani krivulji, ki nastopata v sistemu. Koliko je vseh realnih rešitev?*

Rešitev:
Izračunamo

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

V prvem koraku rešimo sistem

$$JF\,(3,2) \begin{pmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{pmatrix} = -F(3,2),$$

ki se glasi

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Rešitev izračunamo z LU razcepom z delnim pivotiranjem in dobimo $\Delta x^{(0)} = -\frac{13}{12}$, $\Delta y^{(0)} = -\frac{5}{8}$. Od tod dobimo nov približek

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{12} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

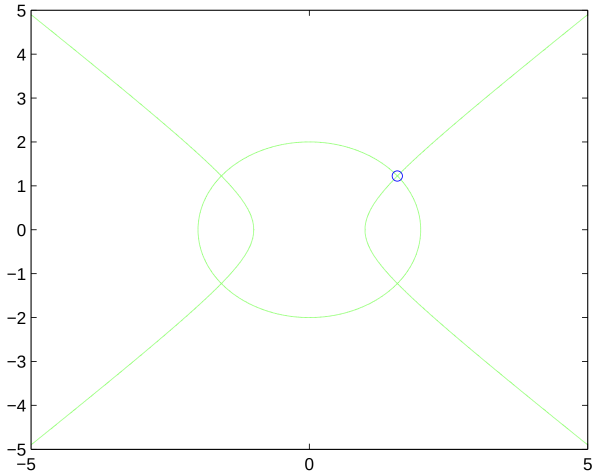
V drugem koraku rešimo sistem

$$JF\left(\frac{23}{12}, \frac{11}{8}\right) \begin{pmatrix} \Delta x^{(1)} \\ \Delta y^{(1)} \end{pmatrix} = -F\left(\frac{23}{12}, \frac{11}{8}\right),$$

in dobimo

$$\begin{pmatrix}\Delta x^{(1)}\\ \Delta y^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.3061594\\ -0.14204545\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x^{(2)}\\ y^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Delta x^{(1)}\\ \Delta y^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.610507\\ 1.2329545\end{pmatrix}.$$

Postopek nadaljujemo. Rešitev je prikazana na sliki 4.1. Iz slike tudi vidimo, da ima



Slika 4.1: Presečišče implicitno podane krožnice in hiperbole iz naloge 4.1.

sistem enačb štiri realne rešitve.

Naloga 4.2. *Rešujemo nelinearen sistem*

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 2,\\ y^2 - 2x &= -1. \end{aligned}$$

Z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\begin{pmatrix}x^{(0)}\\ y^{(0)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ *izračunajte prvi približek k rešitvi. Skicirajte obe krivulji. Koliko je vseh realnih rešitev?*

Rešitev:
Izračunamo

$$F(x,y) = \begin{pmatrix}x^2+2y^2-2\\ y^2-2x+1\end{pmatrix}, \quad JF(x,y) = \begin{pmatrix}2x & 4y\\ -2 & 2y\end{pmatrix}.$$

V prvem koraku rešimo sistem

$$JF(1,1)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = -F(1,1),$$

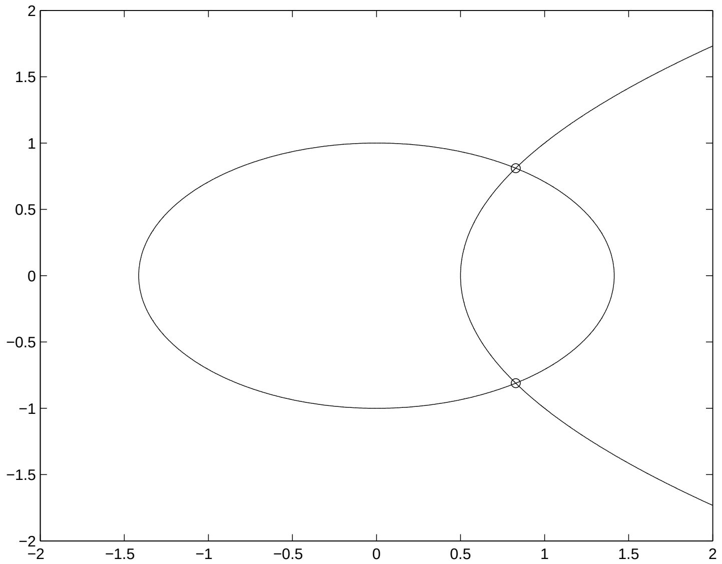
ki se glasi

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Rešitev je enaka $\Delta x = -\frac{1}{6}$, $\Delta y = -\frac{1}{6}$. Od tod dobimo nov približek

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Pri nalogi dejansko računamo presečišča elipse in parabole. Iz grafa 4.2 se vidi, da ima sistem dve realni rešitvi.



Slika 4.2: Presečišča implicitno podanih krivulj iz naloge 4.2.

Naloga 4.3. *Z Newtonovo metodo rešujemo sistem nelinearnih enačb*

$$\sin(\pi x)\cos(\pi y) = \cos(\pi x)$$
$$\sin(\pi x)\sin(\pi y) = \frac{1}{2}.$$

Z začetnim približkom $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^T$ *izračunajte nov približek k rešitvi.*

Rešitev:
Iščemo rešitev sistema $F(x, y) = 0$ za

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x)\cos(\pi y) - \cos(\pi x) \\ \sin(\pi x)\sin(\pi y) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pri Newtonovi metodi potrebujemo še Jacobijevo matriko

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} \pi\cos(\pi x)\cos(\pi y) + \pi\sin(\pi x) & -\pi\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ \pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) & \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y) \end{pmatrix}.$$

Iz začetnega približka $(x_0, y_0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^T$ dobimo nov približek

$$(x_1, y_1)^T = (x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)^T$$

z rešitvijo linearnega sistema

$$JF(x_0, y_0)\left(\Delta x_0, \Delta y_0\right) = -F(x_0, y_0),$$

$$JF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \pi & -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \end{pmatrix}, \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rešitev je enaka

$$\Delta x_0 = \frac{1-2\sqrt{2}}{2\pi}, \quad \Delta y_0 = \frac{\sqrt{2}-2}{2\pi}$$

od koder sledi nov približek

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1-2\sqrt{2}}{2\pi} = 0.208997, \quad y_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}-2}{2\pi} = 0.156769.$$

Naloga 4.4. *Nastavite iteracijo za reševanje sistema nelinearnih enačb*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z &= 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev:
Definiramo

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix}, \quad JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & 4 & 2z \end{pmatrix}.$$

Izberemo začetni približek $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)^T$. Približek na koraku $r+1$, kjer je $r \geq 0$, dobimo tako, da rešimo linearen sistem

$$JF\left(x^{(r)}, y^{(r)}, z^{(r)}\right)\left(\Delta x^{(r)}, \Delta y^{(r)}, \Delta z^{(r)}\right)^T = -F\left(x^{(r)}, y^{(r)}, z^{(r)}\right)$$

in izračunamo

$$\left(x^{(r+1)}, y^{(r+1)}, z^{(r+1)}\right)^T = \left(x^{(r)}, y^{(r)}, z^{(r)}\right)^T + \left(\Delta x^{(r)}, \Delta y^{(r)}, \Delta z^{(r)}\right)^T.$$

Postopek ponavljamo, dokler ne velja

$$\left\|\left(\Delta x^{(r)}, \Delta y^{(r)}, \Delta z^{(r)}\right)\right\| < \mathrm{tol} \cdot \left\|\left(x^{(r)}, y^{(r)}, z^{(r)}\right)\right\|,$$

za izbrano toleranco 'tol'.

Naloga 4.5. *Dane so točke* (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. *Kako bi izračunali funkcijo* $f(x) = \alpha e^{\beta x}$, *ki se najbolj prilega tem točkam, v smislu, da je izraz*

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha e^{\beta x_i})^2$$

minimalen.

Rešitev:
Iščemo minimum

$$\min_{\alpha,\beta} F(\alpha,\beta), \quad F(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha e^{\beta x_i})^2.$$

Iz

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \alpha e^{\beta x_i})(-e^{\beta x_i}), \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \alpha e^{\beta x_i})(-\alpha x_i e^{\beta x_i}),$$

dobimo nelinearen sistem enačb

$$\begin{aligned} f_1(\alpha,\beta) &:= \sum_{i=1}^{n} e^{\beta x_i}(y_i - \alpha e^{\beta x_i}) = 0, \\ f_2(\alpha,\beta) &:= \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\beta x_i}(y_i - \alpha e^{\beta x_i}) = 0, \end{aligned}$$

ki določa stacionarno točko. Definiramo $F := (f_1, f_2)$ in izračunamo Jacobijevo matriko

$$JF(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n} e^{2\beta x_i} & \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i e^{\beta x_i} - 2\alpha x_i e^{2\beta x_i}) \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i e^{2\beta x_i} & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i e^{\beta x_i} - 2\alpha x_i^2 e^{2\beta x_i}) \end{pmatrix}.$$

Izberemo začetni približek $(\alpha_0, \beta_0)^T$, nov približek pa dobimo kot

$$(\alpha_1, \beta_1)^T = (\alpha_0, \beta_0)^T + (\Delta\alpha_0, \Delta\beta_0)^T,$$

pri čemer je $(\Delta\alpha_0, \Delta\beta_0)^T$ rešitev linearnega sistema

$$JF(\alpha_0,\beta_0)(\Delta\alpha_0, \Delta\beta_0)^T = -F(\alpha_0,\beta_0).$$

Postopek nadaljujemo tako dolgo, dokler ni

$$\|(\Delta\alpha_r, \Delta\beta_r)\| < \mathrm{tol} \cdot \|(\alpha_r, \beta_r)\|$$

za izbrano toleranco 'tol'.

Začetni približek določimo tako, da problem lineariziramo. Na funkciji f uporabimo logaritem in minimiziramo izraz

$$G(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - \ln\alpha - \beta x_i)^2.$$

Minimum je dosežen pri rešitvi linearnega sistema

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \end{pmatrix},$$

ki nam da dober začetni približek za nelinearen problem.

Poglavje 5

Reševanje predoločenih sistemov

Naloga 5.1. *Podane so meritve funkcije f v štirih točkah*

$$f(-1) = \frac{11}{4}, \quad f(0) = \frac{7}{4}, \quad f(1) = \frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{13}{4}.$$

V bližini teh točk bi radi potegnili parabolo. Določite njene koeficiente po metodi najmanjših kvadratov. Uporabite normalni sistem in ga rešite preko razcepa Choleskega.

Rešitev:
Naj bo iskana parabola enaka $p(x) = a + bx + c$. Da določimo koeficiente a, b, c moramo rešiti predoločen sistem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}.$$

Pripadajoč normalni sistem je enak

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}}_{c},$$

matrika B pa ima razcep Choleskega $B = VV^T$,

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

Rešimo sistem $Vy = c$ (preme substitucije) in dobimo $y = (4, 0, 2)^T$. Iz $V^T(a, b, c)^T = y$ sledi rešitev $(a, b, c)^T = (1, -1, 1)^T$. Iskana parabola je tako enaka

$$p(x) = 1 - x + x^2.$$

Naloga 5.2. *V sledeči tabeli je zapisano število ribičev, ki so na določen dan lovili ribe in število ujetih rib:*

dan	št. ribičev	št. ujetih rib
1	18	39
2	14	9
3	9	9
4	10	7
5	5	8
6	22	35
7	14	36
8	12	22

.

Poiščite linearno funkcijo, ki najbolje opisuje povezavo med številom ribičev, ki lovijo, in številom ujetih rib.

Rešitev:
Iščemo premico $y = kx + n$, ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira dane podatke. Pripadajoč predoločen sistem je enak $Ax = b$ za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 14 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 5 \\ 1 & 22 \\ 1 & 14 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ 35 \\ 36 \\ 22 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

Rešimo ga preko normalnega sistema $A^T Ax = A^T b$,

$$\begin{pmatrix} 8 & 104 \\ 104 & 1550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 \\ 2557 \end{pmatrix}.$$

Razcep Choleskega matrike $B = A^T A$ je enak

$$B = VV^T, \quad V = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 26\sqrt{2} & 3\sqrt{22} \end{pmatrix}.$$

Preko premih in obratnih substitucij dobimo

$$Vy = A^T b \quad \Longrightarrow \quad y = \left(\frac{165}{2\sqrt{2}}, \frac{206\sqrt{\frac{2}{11}}}{3} \right)^T$$

$$V^T x = y \quad \Longrightarrow \quad x = (-5089/792, 206/99)^T = (-6.42551, 2.08081)^T.$$

Iskana premica je tako enaka

$$y = -6.42551 + 2.08081x.$$

Naloga 5.3. *Podjetje meri prodajo izdelka v petih mestih, radi pa bi napovedali prodajo v novem območju. Podatki so dani v sledeči tabeli:*

območje	prodaja (y_i)	populacija (a_i)	zaslužek na prebivalca (b_i)
1	162	274	850
2	120	180	1120
3	223	375	740
4	131	205	970
5	67	86	1032

Napovejte prodajo izdelka v območju s populacijo 60 *in povp. zaslužkom na prebivalca* 1050 *eur, če med količinami velja zveza* $y_i = x_1 + a_i x_2 + b_i x_3$.

Rešitev:
V danem modelu moramo določiti neznanke x_1, x_2, x_3. Le te izračunamo iz predoločenega sistema $y_i = x_1 + a_i x_2 + b_i x_3$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, ki se v matrični obliki glasi $Ax = b$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 274 & 850 \\ 1 & 180 & 1120 \\ 1 & 375 & 740 \\ 1 & 205 & 970 \\ 1 & 86 & 1032 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 162 \\ 120 \\ 223 \\ 131 \\ 67 \end{pmatrix}.$$

Izračunamo normalni sistem $A^T A x = A^T b$,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 1120 & 4712 \\ 1120 & 297522 & 999602 \\ 4712 & 999602 & 4530424 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 703 \\ 182230 \\ 633334 \end{pmatrix},$$

in razcep Choleskega $A^T A = V V^T$,

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 224\sqrt{5} & \sqrt{46642} & 0 \\ \frac{4712}{\sqrt{5}} & -27943\sqrt{\frac{2}{23321}} & \sqrt{\frac{2667121006}{116605}} \end{pmatrix}.$$

Z uporabo premih in obratnih substitucij dobimo

$$\begin{aligned} Vy = A^T b \quad &\Longrightarrow \quad y = \left(\frac{703}{\sqrt{5}}, 12379\sqrt{\frac{2}{23321}}, 28661492\sqrt{\frac{2}{155499822452315}} \right)^T \\ V^T x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = \left(-\frac{5766582731}{1333560503}, \frac{742208033}{1333560503}, \frac{28661492}{1333560503} \right)^T = \\ &\qquad = (-4.3242, 0.556561, 0.0214925)^T. \end{aligned}$$

Napoved prodaje izdelka v novem območju je tako

$$x_1 + 60x_2 + 1050x_3 = 51.6366.$$

Naloga 5.4. *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang}(A) = n$. *Pokažite, da ima sistem*

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

rešitev, ki ustreza rešitvi predločenega sistema $Ax = b$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Bločno pomnožimo in dobimo

$$r + Ax = b, \quad A^T r = 0.$$

Če pomnožimo prvo enačbo z A^T in upoštevamo drugo enačbo dobimo

$$\begin{aligned} A^T r + A^T Ax &= A^T b \\ A^T Ax &= A^T b, \end{aligned}$$

kar pa je ravno normalni sistem, katerega rešitev x je rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 5.5. *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang}(A) = n$, $b \in \mathbb{R}^m$ *in naj bo* $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *nesingularna diagonalna matrika. Zapišite normalni sistem, ki določa rešitev uteženega problema najmanjših kvadratov, to je*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|D(Ax - b)\|_2.$$

Rešitev:
Iščemo $x \in \mathbb{R}^n$, pri katerem je dosežen minimum

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|DAx - Db\|_2.$$

Normalni sistem je oblike

$$\begin{aligned} (DA)^T (DA)x &= (DA)^T Db \\ A^T D^2 Ax &= A^T D^2 b. \end{aligned}$$

Naloga 5.6. *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang}(A) = n$ *in* $b \in \mathbb{R}^m$. *Dalje naj bo* $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *simetrično pozitivno definitna matrika, ki definira normo*

$$\|x\|_C := \sqrt{x^T Cx}.$$

Zapišite normalni sistem, ki določa rešitev problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_C.$$

Rešitev:
Iščemo $x \in \mathbb{R}^n$, pri katerem je dosežen minimum

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_C.$$

Ker je matrika C s.p.d., jo lahko zapišemo kot $C = VV^T$, kjer je V faktor Choleskega. Po definiciji norme $\|\cdot\|_C$ je tedaj

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_C^2 &= (Ax - b)^T C (Ax - b) = (Ax - b)^T V V^T (Ax - b) = \\ &= (V^T(Ax - b))^T (V^T(Ax - b)) = \left\|V^T Ax - V^T b\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Torej je

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_C = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\|V^T Ax - V^T b\right\|_2,$$

kar pa je čisto navaden problem najmanjših kvadratov, katerega rešitev določa normalni sistem

$$\begin{aligned}(V^T A)^T (V^T A) x &= (V^T A)^T V^T b \\ A^T V V^T A x &= A^T V V^T b \\ A^T C A x &= A^T C b.\end{aligned}$$

Naloga 5.7. *Po modificiranem Gram-Schmidtovem postopku ortogonalizirajte vektorje*

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad v_2 = (2, 1, 0, 2)^T, \quad v_3 = (1, -1, 1, -1)^T.$$

Rešitev:
1.korak:

$$r_{1,1} = \left\|(1, 0, 1, 0)^T\right\| = \sqrt{2}, \quad q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{1,2} = q_1^T v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 0, 1, 0)^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{2},$$

$$r_{1,3} = q_1^T v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 0, 1, 0)^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2},$$

$$q_2 = v_2 - r_{1,2} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$q_3 = v_3 - r_{1,3} q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.korak:

$$r_{2,2} = \left\|(1,1,-1,2)^T\right\| = \sqrt{7}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$r_{2,3} = q_2^T q_3 = \frac{\sqrt{7}}{7}(1,1,-1,2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3\sqrt{7}}{7},$$

$$q_3 = q_3 - r_{2,3} q_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.korak:

$$r_{3,3} = \frac{1}{7}\left\|(3,-4,-3,-1)^T\right\| = \frac{\sqrt{35}}{7}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{35}}{35}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ortonormirani vektorji so tako enaki

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{35}}{35}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 5.8. *Preko QR razcepa rešite predoločen sistem $Ax = b$ za*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej QR razcep matrike A z uporabo modificiranega Gram-Schmidtovega postopka:

1.korak:

$$r_{1,1} = \left\|(1,1,0,0)^T\right\| = \sqrt{2}, \quad q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$r_{1,2} = q_1^T a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0,$$

$$r_{1,3} = q_1^T a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\1\end{pmatrix} = -2\sqrt{2},$$

$$q_2 = a_2 - r_{1,2}q_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$q_3 = a_3 - r_{1,3}q_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2.korak:

$$r_{2,2} = \left\|(0,0,1,-1)^T\right\| = \sqrt{2}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$r_{2,3} = q_2^T q_3 = 0,$$

$$q_3 = q_3 - r_{2,3}q_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3.korak:

$$r_{3,3} = \left\|(1,-1,1,1)^T\right\| = 2, \quad q_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dobili smo, da je $A = QR$ za

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov dobimo z rešitvijo zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b = \left(5\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$, ki je enaka

$$x = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)^T.$$

Naloga 5.9. *Po modificiranem Gram-Schmidtovem postopku izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
1.korak:

$$r_{1,1} = \left\|(2,2,2,2,0)^T\right\| = 4, \quad q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{1,2} = q_1^T a_2 = 6, \quad r_{1,3} = q_1^T a_3 = 6, \quad r_{1,4} = q_1^T a_4 = 2,$$

$$q_2 = a_2 - r_{1,2} q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; q_3 = a_3 - r_{1,3} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; q_4 = a_4 - r_{1,4} q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.korak:

$$r_{2,2} = \|(2,2,-2,-2,0)\| = 4, \quad q_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{2,3} = q_2^T q_3 = 2, \quad r_{2,4} = q_2^T q_4 = 2,$$

$$q_3 = q_3 - r_{2,3} q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad q_4 = q_4 - r_{2,4} q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.korak:

$$r_{3,3} = \left\| (0,0,0,0,3)^T \right\| = 3, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r_{3,4} = q_3^T q_4 = 1, \quad q_4 = q_4 - r_{3,4} q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.korak:

$$r_{4,4} = \left\| (-1,1,0,0,0)^T \right\| = \sqrt{2}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobili smo, da je $A = QR$ za

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Naloga 5.10. *Po modificiranem Gram-Schmidtovem postopku izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

S pomočjo izračunanega razcepa določite diagonalne elemente matrike

$$H = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Rešitev:

1.korak:

$$r_{1,1} = \left\|(2,1,-2,-1)^T\right\| = 5, \quad q_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$r_{1,2} = q_1^T a_2 = \frac{1}{5}(2,1,-2,-4)\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 10,$$

$$r_{1,3} = q_1^T a_3 = \frac{1}{5}(2,1,-2,-4)\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -5,$$

$$q_2 = a_2 - r_{1,2}q_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_3 = a_3 - r_{1,3}q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.korak:

$$r_{2,2} = \left\|(3,6,6,0)^T\right\| = 9, \quad q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{2,3} = q_2^T q_3 = \frac{1}{3}(1,2,2,0)\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3,$$

$$q_3 = q_3 - r_{2,3}q_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.korak:

$$r_{3,3} = \left\|(4,-4,2,0)^T\right\| = 6, \quad q_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobili smo, da je $A = QR$ za

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Določimo še diagonalne elemente matrike H. Matrika H je enaka

$$\begin{aligned} H &= A(A^TA)^{-1}A^T = QR\left(R^TQ^TQR\right)^{-1}R^TQ^T = \\ &= QR\left(R^TR\right)^{-1}R^TQ^T = QRR^{-1}R^{-T}R^TQ^T = QQ^T \in \mathbb{R}^{4\times 4}. \end{aligned}$$

Diagonalni element $H_{i,i}$ izračunamo kot

$$H_{i,i} = Q(i,:)Q^T(:,i) = Q(i,:)(Q(i,:))^T = \|Q(i,:)\|^2.$$

In sicer dobimo

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= \|Q(1,:)\|^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{161}{225}, \\ H_{2,2} &= \|Q(2,:)\|^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{209}{225}, \\ H_{3,3} &= \|Q(3,:)\|^2 = \frac{4}{25} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{161}{225}, \\ H_{4,4} &= \|Q(4,:)\|^2 = \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

Naloga 5.11. *Po modificiranem Gram-Schmidtovem postopku izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
Dobimo

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Naloga 5.12. *Poiščite Givensovo rotacijo, ki uniči* 3. *element v vektorju* $x = (4, 2, 3, 1)^T$.

Rešitev:
Izračunamo

$$r = \|(4,3)\| = 5, \quad c = \frac{4}{5}, \quad s = \frac{3}{5}.$$

Givensova rotacija je oblike

$$R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in

$$R_{1,3}^T x = (5, 2, 0, 1)^T.$$

Naloga 5.13. *Izračunajte Givensovo rotacijo R, ki v vektorju $x = (3, 2, -4, 1, 5)^T$ uniči tretjo in peto komponento. Ekonomično izračunajte še produkt Rz za $z = (2, 1, -1, 1, 4)^T$.*

Rešitev:
Najprej določimo rotacijo $R_{1,3}^T$, ki v vektorju x uniči tretjo komponento. Izračunamo

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad c = \frac{3}{5}, \quad s = -\frac{4}{5}$$

in dobimo

$$R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedaj je

$$R_{1,3}^T x = (5, 2, 0, 1, 5)^T =: x_1, \quad R_{1,3}^T z = (2, 1, 1, 1, 4)^T =: z_1.$$

Sedaj izračunamo še rotacijo $R_{1,5}^T$, ki v vektorju x_1 uniči peto komponento. Dobimo

$$r = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad R_{1,5}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

in velja

$$R_{1,5}^T x_1 = \left(5\sqrt{2}, 2, 0, 1, 0\right)^T, \quad R_{1,5}^T z_1 = \left(3\sqrt{2}, 1, 1, 1, \sqrt{2}\right)^T.$$

Iskana rotacija R je enaka

$$R = R_{1,5}^T R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{10} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{10} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Iz prejšnjih izračunov pa sledi

$$Rx = \left(5\sqrt{2}, 2, 0, 1, 0\right)^T, \quad Rz = \left(3\sqrt{2}, 1, 1, 1, \sqrt{2}\right)^T.$$

Naloga 5.14. *S pomočjo Givensovih rotacij izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ter rešite predoločen sistem $Ax = b$ *za* $b = \left(2, 2, \sqrt{2}\right)^T$.

Rešitev:
Izračunamo

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \quad c = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

in dobimo Givensovo rotacijo $R_{1,2}^T$, ki uniči element na mestu $(2,1)$:

$$R_{1,2}^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalje je

$$R_{1,2}^T A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad R_{1,2}^T b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} =: b^{(1)}.$$

Givensovo rotacijo $R_{1,3}^T$, ki uniči element na mestu $(3,1)$ v matriki $A^{(1)}$ dobimo iz

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

in se glasi

$$R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Tedaj je

$$R_{1,3}^T A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: A^{(2)}, \quad R_{1,3}^T b^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =: b^{(2)}.$$

Sedaj izračunamo še Givensovo rotacijo $R_{2,3}^T$, ki uniči element na mestu $(3,2)$ v matriki $A^{(2)}$,

$$r = 2, \quad c = 0, \quad s = 1 \quad \Longrightarrow \quad R_{2,3}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

in dobimo

$$R_{2,3}^T A^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{R}, \quad R_{2,3}^T b^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =: b^{(3)}.$$

Razširjen QR razcep je torej enak $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, kjer sta

$$\widetilde{Q} = R_{1,2}R_{1,3}R_{2,3}, \quad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov dobimo z rešitvijo zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b$, kjer so

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \widetilde{Q}(:, 1:2), \quad Q^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rešitev je enaka $x = \left(-\frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)^T$ in

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 = \|b^{(3)}(3)\|_2 = 0.$$

Naloga 5.15. *S pomočjo Givensovih rotacij izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ter rešite predoločen sistem $Ax = b$ za $b = (1, 0, 1, 1)^T$.

Rešitev:
Izračunajmo razširjen QR razcep z eliminacijo elementov matrike A z Givensovimi rotacijami.

1. korak: rotacija $R_{1,2}^T$, ki uniči element $A(2, 1)$:

$$r = \sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad R_{1,2}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{1,2}^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad R_{1,2}^T b = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: b^{(1)}$$

2. korak: rotacija $R_{1,3}^T$, ki uniči element $A^{(1)}(3,1)$:

$$r=\sqrt{3},\quad c=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad s=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad R_{1,3}^T=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R_{1,3}^T A^{(1)}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 0 & -4\sqrt{\frac{2}{3}} & -8\sqrt{\frac{2}{3}}\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=:A^{(2)},\quad R_{1,3}^T b^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 1\end{pmatrix}=:b^{(2)}$$

3. korak: rotacija $R_{1,4}^T$, ki uniči element $A^{(2)}(4,1)$:

$$r=2,\quad c=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad s=\frac{1}{2},\quad R_{1,4}^T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

$$R_{1,4}^T A^{(2)}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 0 & -4\sqrt{\frac{2}{3}} & -8\sqrt{\frac{2}{3}}\\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=:A^{(3)},\quad R_{1,4}^T b^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}=:b^{(3)}$$

4. korak: rotacija $R_{2,3}^T$, ki uniči element $A^{(3)}(3,2)$:

$$r=4\sqrt{\frac{2}{3}},\quad c=0,\quad s=-1,\quad R_{2,3}^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R_{2,3}^T A^{(3)}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 8\sqrt{\frac{2}{3}}\\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=:A^{(4)},\quad R_{2,3}^T b^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}=:b^{(4)}$$

5. korak: rotacija $R_{2,4}^T$, ki uniči element $A^{(4)}(4,2)$:

$$r=4,\quad c=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad s=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad R_{2,4}^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix},$$

$$R_{2,4}^T A^{(4)}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}\end{pmatrix}=:A^{(5)},\quad R_{2,4}^T b^{(4)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}=:b^{(5)}$$

6. korak: rotacija $R_{3,4}^T$, ki uniči element $A^{(5)}(4,3)$:

$$r = 6, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_{3,4}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$R_{3,4}^T A^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{R}, \quad R_{3,4}^T b^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} =: b^{(6)}$$

Razširjen QR razcep je torej enak $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, kjer sta

$$\widetilde{Q} = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,3}R_{2,4}R_{3,4}, \quad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov dobimo z rešitvijo zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b$, kjer so

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \widetilde{Q}(:, 1:3), \quad Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rešitev je enaka $x = \left(\frac{43}{48}, -\frac{1}{48}, -\frac{1}{12}\right)^T$ in

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 = \|b^{(6)}(4)\|_2 = \frac{1}{2}.$$

Naloga 5.16. *S pomočjo Givensovih rotacij izračunajte QR razcep matrike*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ter rešite linearni sistem $Ax = b$ za $b = (1, 0, 1)^T$.

Rešitev:
Izračunajmo QR razcep z eliminacijo elementov matrike A z Givensovimi rotacijami.

1. korak: rotacija $R_{1,2}^T$, ki uniči element $A(2,1)$:

$$r = 5, \quad c = \frac{4}{5}, \quad s = \frac{3}{5}, \quad R_{1,2}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{1,2}^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad R_{1,2}^T b = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} =: b^{(1)}$$

2. korak: rotacija $R_{1,3}^T$, ki uniči element $A^{(1)}(3,1)$:

$$r = \sqrt{26}, \quad c = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{26}}, \quad R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{26}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix},$$

$$R_{1,3}^T A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{26} & \frac{11}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{2}{13}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{26}} & -\frac{14\sqrt{\frac{2}{13}}}{5} \end{pmatrix} =: A^{(2)}, \quad R_{1,3}^T b^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{21}{5\sqrt{26}} \end{pmatrix} =: b^{(2)}$$

3. korak: rotacija $R_{2,3}^T$, ki uniči element $A^{(2)}(3,2)$:

$$r = \sqrt{\frac{35}{26}}, \quad c = \sqrt{\frac{26}{35}}, \quad s = \frac{3}{\sqrt{35}}, \quad R_{2,3}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{26}{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{35}} & \sqrt{\frac{26}{35}} \end{pmatrix},$$

$$R_{2,3}^T A^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{26} & \frac{11}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{2}{13}} \\ 0 & \sqrt{\frac{35}{26}} & 2\sqrt{\frac{2}{455}} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} =: R, \quad R_{2,3}^T b^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{910}} \\ \frac{6}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} =: b^{(3)}$$

Razcep QR je torej enak $A = QR$, kjer sta

$$Q = R_{1,2} R_{1,3} R_{2,3}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{26} & \frac{11}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{2}{13}} \\ 0 & \sqrt{\frac{35}{26}} & 2\sqrt{\frac{2}{455}} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}.$$

Rešitev linearnega sistema $Ax = b$ je enaka rešitvi zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b$, kjer je

$$Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{910}} \\ \frac{6}{\sqrt{35}} \end{pmatrix},$$

in je enaka $x = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{4}\right)^T$.

Naloga 5.17. *Poiščite Householderjevo zrcaljenje, ki uniči vse komponente razen prve v vektorju $x = (-4, 2, -2, 1)^T$. Izračunajte Px ter Pa za $a = (1, 1, 0, 2)^T$.*

Rešitev:
Izračunamo

$$k = \|x\|_2 = \sqrt{16 + 4 + 4 + 1} = 5, \quad m = k(k+4) = 45, \quad w = (-9, 2, -2, 1)^T$$

in dobimo Householderjevo zrcaljenje

$$P = I - \frac{1}{m}ww^T = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{41}{45} & \frac{4}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{45} & \frac{41}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{45} & \frac{2}{45} & \frac{44}{45} \end{pmatrix}.$$

Dalje je

$$Px = x - \frac{1}{m}w(w^T x) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} 45 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Pa = a - \frac{1}{m}w(w^T a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (-5) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{19}{9} \end{pmatrix}.$$

Naloga 5.18. *S pomočjo QR razcepa s Householderjevimi zrcaljenji rešite predoločen sistem $Ax = b$ za podatke*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 0 & -5 \\ -5 & -1 \\ 0 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kakšen je $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$*?*

Rešitev:
Najprej izračunamo Householderjevo zrcaljenje, s katerim eliminiramo elemente v prvem stolpcu matrike A. Izračunamo

$$k = \|(10, 0, -5, 0, 10)\| = 15, \quad m = k(k + 10) = 375,$$
$$w = (25, 0, -5, 0, 10)^T = 5(5, 0, -1, 0, 2)^T.$$

S householderjevim zrcaljenjem $P_1 = I_5 - \frac{1}{375}ww^T$ pomnožimo matriko A ter vektor b:

$$P_1A = A - \frac{1}{15}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5, & 0, & -1, & 0, & 2\end{pmatrix} A = A - \frac{1}{15}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5, & 2\end{pmatrix} =$$

$$= A - \begin{pmatrix}25 & 10\\0 & 0\\-5 & -2\\0 & 0\\10 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15 & -3\\0 & -5\\0 & 1\\0 & 5\\0 & -7\end{pmatrix} := A_1,$$

$$P_1b = b - \frac{1}{15}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5, & 0, & -1, & 0, & 2\end{pmatrix} b = \begin{pmatrix}4\\-6\\2\\6\\-4\end{pmatrix} =: b_1.$$

Nadaljujemo postopek na manjši podmatriki $A_1(2:5,2)$. Izračunamo

$$k = \|(-5,1,5,-7)\| = 10, \quad m = k(k+5) = 150, \quad w = (-15,1,5,-7)^T$$

in dobimo $\widetilde{P}_2 = I_4 - \frac{1}{150}ww^T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ter $P_2 = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \widetilde{P}_2\end{pmatrix}$. Izračunamo še produkte

$$\widetilde{P}_2A_1(2:5,2) = \begin{pmatrix}-5\\1\\5\\-7\end{pmatrix} - \frac{1}{150}\begin{pmatrix}-15\\1\\5\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15, & 1, & 5, & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\\5\\-7\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-5\\1\\5\\-7\end{pmatrix} - \frac{1}{150}\begin{pmatrix}-15\\1\\5\\-7\end{pmatrix} 150 = \begin{pmatrix}10\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}_2b_1(2:5) = \begin{pmatrix}-6\\2\\6\\-4\end{pmatrix} - \frac{1}{150}\begin{pmatrix}-15\\1\\5\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15, & 1, & 5, & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\2\\6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Sledi, da je

$$P_2P_1A = \widetilde{R} = \begin{pmatrix}-15 & -3\\0 & 10\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_2P_1b = \widetilde{Q}^Tb = \begin{pmatrix}4\\9\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Iskan x je rešitev linearnega sistema

$$\begin{pmatrix} -15 & -3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

ki se glasi

$$x = \left(\frac{13}{150}, \frac{9}{10} \right)^T.$$

Iz razcepa dobimo še

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 = \left\| (\widetilde{Q}^T b)(3:5) \right\| = \left\| (1,1,3)^T \right\|_2 = \sqrt{11}.$$

Naloga 5.19. *Naj bo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite predoločen sistem $Ax = b$. Izračunajte tudi $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2$.

Rešitev:
Izračunajmo najprej razširjen QR razcep matrike A z eliminacijo elementov s Householderjevimi zrcaljenji.

1. korak: Izračunamo

$$k = \|(1,1,1,1)\| = 2, \quad m = 2(2+1) = 6, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = I_4 - \frac{1}{m} w w^T$$

in dobimo

$$P_1 A = A - \frac{1}{6} w (w^T A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad \widetilde{A}^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_1 b = b - \frac{1}{6} w (w^T b) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = b^{(1)}, \quad \widetilde{b}^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. korak: Izračunamo

$$k = 6, \quad m = 48, \quad w = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2 = I_3 - \frac{1}{m} w w^T, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$$

in dobimo

$$\widetilde{P}_2\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{R},$$

$$\widetilde{P}_2\widetilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2b^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = b^{(2)}.$$

Razširjen QR razcep matrike A je enak $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ za $\widetilde{Q} = P_1P_2$. Rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov dobimo z rešitvijo zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^Tb$, kjer sta

$$R = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \widetilde{Q}(:, 1:3), \quad Q^Tb = b^{(2)}(1:3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In sicer je

$$x = \left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)^T, \quad \min_{x\in\mathbb{R}^3}\|Ax - b\|_2 = \left\|b^{(2)}(3:4)\right\|_2 = 3.$$

Naloga 5.20. *S Householderjevimi zrcaljenji in QR razcepom rešitev linearni sistem* $Ax = b$ *za*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Rešitev:
Izračunajmo QR razcep matrike A z eliminacijo elementov s Householderjevimi zrcaljenji.

1. korak: Izračunamo

$$k = \|(1,2,2)\| = 3, \quad m = 3(3+1) = 12, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = I_3 - \frac{1}{m}ww^T$$

in dobimo

$$P_1A = A - \frac{1}{m}w(w^TA) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad \widetilde{A}^{(1)} := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P_1b = b - \frac{1}{m}w(w^Tb) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = b^{(1)}, \quad \widetilde{b}^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. korak: Izračunamo

$$k = 5, \quad m = 45, \quad w = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2 = I_2 - \frac{1}{m} w w^T, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix}$$

in dobimo

$$\widetilde{P}_2 \widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =: R,$$

$$\widetilde{P}_2 \widetilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2 b^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = b^{(2)}.$$

Dobili smo, da je $A = QR$ za $Q = P_1 P_2$. Rešitev linearnega sistema $Ax = b$ je enaka rešitvi zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b = b^{(2)}$ in se glasi

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 5.21. *Naj bo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite predoločen sistem $Ax = b$. Izračunajte tudi $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2$.

Rešitev:
Izračunajmo QR razcep matrike A z eliminacijo elementov s Householderjevimi zrcaljenji.

1. korak: Izračunamo

$$k = 3, \quad m = 12, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = I_4 - \frac{1}{m} w w^T$$

in dobimo

$$P_1 A = A - \frac{1}{m} w (w^T A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =: A^{(1)}, \quad \widetilde{A}^{(1)} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$P_1 b = b - \frac{1}{m} w (w^T b) = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = b^{(1)}, \quad \widetilde{b}^{(1)} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. korak: Izračunamo

$$k = 5, \quad m = 40, \quad w = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_2 = I_2 - \frac{1}{m} w w^T, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

in dobimo

$$\widetilde{P}_2 \widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \widetilde{R},$$

$$\widetilde{P}_2 \widetilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_2 b^{(1)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = b^{(2)}.$$

Razširjen QR razcep je tako enak $A = \widetilde{Q}\widetilde{R}$, $\widetilde{Q} = P_1 P_2$. Rešitev predločenega sistema $Ax = b$ sledi iz rešitve zgornje trikotnega sistema $Rx = Q^T b$,

$$R = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad Q^T b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

in se glasi

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2 = 0.$$

Naloga 5.22. *Dana sta vektorja*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Poiščite Householderjevo zrcaljenje P, ki uniči vse komponente razen prve v vektorju x. Izračunajte še sliko Pa.*
2. *Poiščite Givensovo rotacijo $R_{1,3}^T$, ki uniči tretjo komponento v x. Izračunajte $R_{1,3}^T a$.*

Rešitev:

Householderjevo zrcaljenje je določeno s $k = 3, m = 12$ in $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in je enako

$$P = I_4 - \frac{1}{m} w w^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalje je

$$Px = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Pa = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Givensova rotacija je določena s $c = \frac{\sqrt{5}}{5}$ in $s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$R_{1,3}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in velja

$$R_{1,3}^T x = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_{1,3}^T a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poglavje 6

Aproksimacija in interpolacija

6.1. Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naloga 6.1. *Naj bodo* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ *dane točke v ravnini.*

1. *Poiščite premico* $y = kx + n$*, ki po metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira te točke.*
2. *Uporabite rezultate na primeru točk* $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8)$.

Rešitev:

1. Iščemo premico $p(x) = kx + n$, pri kateri je dosežen minimum izraza

$$\min_{k,n} \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)^2.$$

Nalogo lahko rešimo na dva načina.

1. **način:** Definiramo funkcijo $g(k, n) := \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i)^2$ in poiščemo njen minimum. Parcialno odvajamo in dobimo sistem dveh linearnih enačb

$$\frac{\partial g}{\partial k}(k, n) = 2 \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i) x_i = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial n}(k, n) = 2 \sum_{i=1}^{m} (kx_i + n - y_i) = 0,$$

ki se v matrični obliki glasi

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Po Cramerjevem pravilu preprosto izračunamo rešitev

$$k = \frac{m\sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2},$$
$$m = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2},$$

ki določa premico p.

2. **način:** Preko Gramove matrike.
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Aproksimirajmo funkcijo f, za katero velja

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

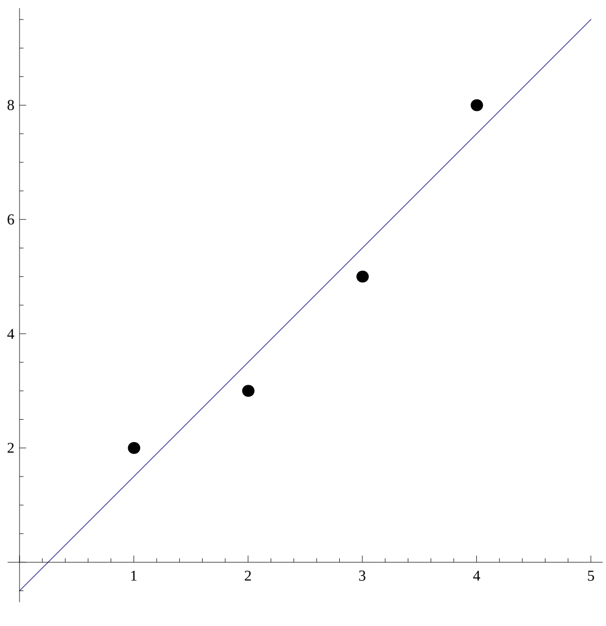
po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \sum_{i=1}^m f(x_i)g(x_i).$$

Premica $p(x) = kx + n$ najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f,\varphi_0\rangle \\ \langle f,\varphi_1\rangle \end{pmatrix},$$

ki pa je enak sistemu (6.1).



2.

Slika 6.1: Premica, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Pri danih podatkih dobimo linearen sistem

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 18 \end{pmatrix},$$

ki določa premico

$$p(x) = 2x - \frac{1}{2}.$$

Rešitev je prikazana na sliki 6.1.

Naloga 6.2. *Dan je interval $I = [-1, 1]$ in funkcija $f(x) = e^x$. Poiščite polinom $p^* \in \mathbb{P}_1$ najboljše aproksimacije po zvezni metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Podprostor $\mathbb{P}_1$ napenjata funkciji $\varphi_0(x) = 1$ in $\varphi_1(x) = x$. Premica

$$p(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x),$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru $\mathbb{P}_1$ glede na skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

je določena z rešitvijo Gramovega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0, \varphi_0\rangle & \langle\varphi_0, \varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_0, \varphi_1\rangle & \langle\varphi_1, \varphi_1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_0\rangle \\ \langle f, \varphi_1\rangle \end{pmatrix}.$$

Skalarni produkti, ki nastopajo v matričnem sistemu, so enaki

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_0, \varphi_0\rangle &= \int_{-1}^{1} dx = 2, \\
\langle\varphi_0, \varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} xdx = 0, \\
\langle\varphi_1, \varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}, \\
\langle e^x, \varphi_0\rangle &= \int_{-1}^{1} e^xdx = e - e^{-1}, \\
\langle e^x, \varphi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} e^xxdx = 2e^{-1},
\end{aligned}$$

in rešitev se glasi

$$p(x) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}x.$$

Naloga 6.3. *Za funkcijo $f(x) = \sin^4 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ poiščite element najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov iz podprostora*

$$S = \mathrm{Lin}\{1, \sin x, \cos x\}.$$

Rešitev:
Element

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x,$$

ki aproksimira funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov v podprostoru S glede na skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx,$$

je določen z rešitvijo normalnega sistema

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, \sin x \rangle & \langle 1, \cos x \rangle \\ \langle \sin x, 1 \rangle & \langle \sin x, \sin x \rangle & \langle \sin x, \cos x \rangle \\ \langle \cos x, 1 \rangle & \langle \cos x, \sin x \rangle & \langle \cos x, \cos x \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle \sin x, f \rangle \\ \langle \cos x, f \rangle \end{pmatrix}.$$

Integrale, ki nastopajo v skalarnih produktih, enostavno izračunamo z uporabo Beta funkcije

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx = \frac{1}{2} B(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Normalni sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{16} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = \frac{-704 + 90\pi + 45\pi^2}{120\,(-16 + 2\pi + \pi^2)}, \quad \alpha_1 = \frac{-320 + 42\pi + 19\pi^2}{30\,(32 - 20\pi + \pi^3)}, \quad \alpha_2 = \frac{320 - 38\pi - 21\pi^2}{30\,(32 - 20\pi + \pi^3)}.$$

Funkcija in aproksimant sta prikazana na sliki 6.2.

Naloga 6.4. *Točke*

$$(1, 0), (2, 2), (1, 2), (3, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 0), (3, 0), (3, 1)$$

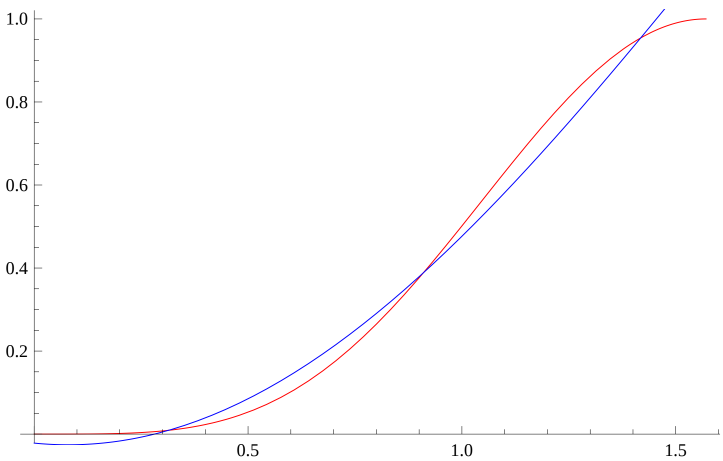
aproksimirajte z elementi iz podprostora $\mathrm{Lin}\{1, e^x\}$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Iščemo

$$p(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_0 \varphi_1(x), \quad \varphi_0(x) := 1, \quad \varphi_1(x) := e^x,$$

ki aproksimira podatke po metodi najmanjših kvadratov glede na diskretni skalarni produkt. Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (1, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 3)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1)^T$$



Slika 6.2: Funkcija (rdeč graf) in aproksimant po metodi najmanjših kvadratov (moder graf).

ter vektorja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_0 &:= \varphi_0(\boldsymbol{x}) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1)^T,\\ \boldsymbol{\varphi}_1 &:= \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \left(e,e^2,e,e^3,e,e^2,e^2,e^3,e^3\right)^T,\end{aligned}$$

ki določata vrednosti baznih funkcij v $\boldsymbol{x}$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 9,\\ \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_0^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e+e^2+e^3),\\ \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{\varphi}_1^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e^2+e^4+e^6),\\ \langle f,\varphi_0\rangle &= \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 9,\\ \langle f,\varphi_1\rangle &= \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_1 = 3(e+e^2+e^3),\end{aligned}$$

kjer smo z f označili funkcijo, za katero velja $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. Gramov sistem je tako enak

$$\begin{pmatrix}9 & 3(e+e^2+e^3)\\ 3(e+e^2+e^3) & 3(e^2+e^4+e^6)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\ 3(e+e^2+e^3)\end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0,$$

od koder sledi, da je iskana funkcija enaka $p(x)=1$.

Naloga 6.5. *Točke* $(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,2),(1,3)$ *aproksimirajte s polinomi iz prostora* $\mathbb{P}_2$ *po metodi najmanjših kvadratov.*

Rešitev:
Definirajmo vektorja

$$\boldsymbol{x} := (-1,-1,0,1,1)^T, \quad \boldsymbol{y} := (0,1,1,2,3)^T$$

in naj bo diskretni skalarni produkt enak

$$\langle f, g \rangle := f(\boldsymbol{x})^T \cdot g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} f(x_i) g(x_i).$$

Dalje naj vektorji

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_0 &:= (1,1,1,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 &:= (-1,-1,0,1,1)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 &:= (1,1,0,1,1)^T\end{aligned}$$

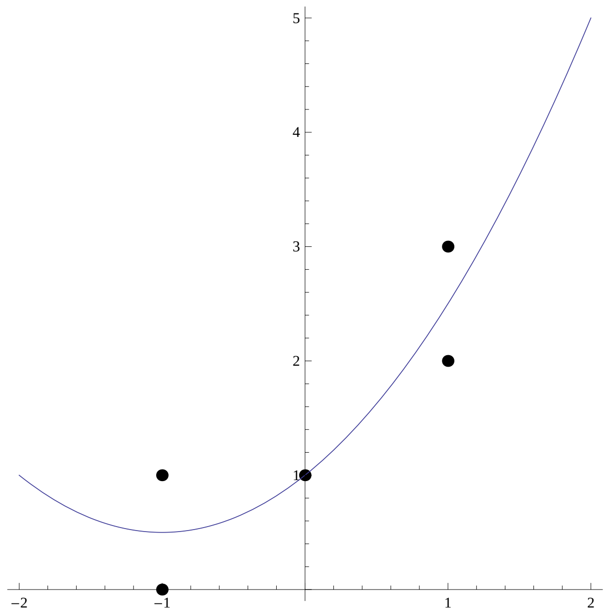
označujejo vrednosti baznih funkcij $1, x, x^2$ komponentah vektorja $\boldsymbol{x}$. Označimo s f funkcijo, za katero velja $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Iščemo parabolo $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, ki aproksimira f po metodi najmanjših kvadratov glede na definiran skalarni produkt. Gramov sistem je enak

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

in ima rešitev

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

od koder sledi, da je iskana parabola (glej sliko 6.3) enaka $p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.



Slika 6.3: Parabola, ki aproksimira točke po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 6.6. *Izračunajte parabolo, ki po zvezni metodi najmanjših kvadratov najboljše aproksimira funkcijo* $f(x) = 7x^4$ *na intervalu* $[-2, 2]$ *glede na skalarni produkt*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx.$$

Rešitev:
Izračunamo skalarne produkte med baznimi funkcijami $\{1, x, x^2\}$:

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-2}^{2} dx = 4, \quad \langle 1, x\rangle = \int_{-2}^{2} xdx = 0, \quad \langle 1, x^2\rangle = \int_{-2}^{2} x^2dx = \frac{16}{3},$$
$$\langle x, x\rangle = \int_{-2}^{2} x^2dx = \frac{16}{3}, \quad \langle x, x^2\rangle = \int_{-2}^{2} x^3dx = 0, \quad \langle x^2, x^2\rangle = \int_{-2}^{2} x^4dx = \frac{64}{5}.$$

Dobimo Gramovo matriko

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \end{pmatrix}.$$

Izračunamo še desno stran normalnega sistema:

$$d = \begin{pmatrix} \langle 1, f\rangle \\ \langle x, f\rangle \\ \langle x^2, f\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-2}^{2} 7x^4dx \\ \int_{-2}^{2} 7x^5dx \\ \int_{-2}^{2} 7x^6dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{448}{5} \\ 0 \\ 256 \end{pmatrix}.$$

Izračunamo rešitev sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{448}{5} \\ 0 \\ 256 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

in dobimo polinom

$$p(x) = -\frac{48}{5} + 24x^2$$

najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 6.7. *Skalarni produkt naj bo definiran kot*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Po Gram-Schmidtovem postopku ortogonalizirajte potence x^i, $i = 0, 1, 2$, *na intervalu* $[-1, 1]$.

Rešitev:
Naj bo $\{v_1, v_2, v_3\} = \{1, x, x^2\}$. Modificiran Gram-Schmidtov postopek je sledeč.

1. korak:

$$
\begin{aligned}
\|v_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} dx = 2, \\
f_1(x) &= \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
v_2^{(1)}(x) &= v_2(x) - \langle f_1, v_2 \rangle f_1(x) = x - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x dx = x, \\
v_3^{(1)}(x) &= v_3(x) - \langle f_1, v_3 \rangle f_1(x) = x^2 - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

2. korak:

$$
\begin{aligned}
\left\| v_2^{(1)} \right\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\
f_2(x) &= \frac{v_2^{(1)}(x)}{\left\| v_2^{(1)} \right\|} = \frac{\sqrt{6}}{2} x, \\
v_3^{(2)}(x) &= v_3^{(1)}(x) - \left\langle f_2, v_3^{(1)} \right\rangle f_2(x) = \\
&= x^2 - \frac{1}{3} - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} x \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

3. korak:

$$
\begin{aligned}
\left\| v_3^{(3)} \right\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{8}{45}, \\
f_3(x) &= \frac{v_3^{(2)}(x)}{\left\| v_3^{(2)} \right\|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Prvi trije ortonormirani polinomi so tako enaki

$$
f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} x, \quad f_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1 \right).
$$

Ortogonalni polinomi glede na dan skalarni produkt so t.i. Legendrovi polinomi. Izračunali smo prve tri, splošna formula pa se glasi

$$
f_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - x^2 \right)^n.
$$

6.2. Interpolacija

Naloga 6.8. *Za funkcijo $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ poiščite Lagrangeev interpolacijski polinom, ki se s f ujema v točkah $(x_i)_{i=0}^{3} = (-1, 0, 2, 5)$.*

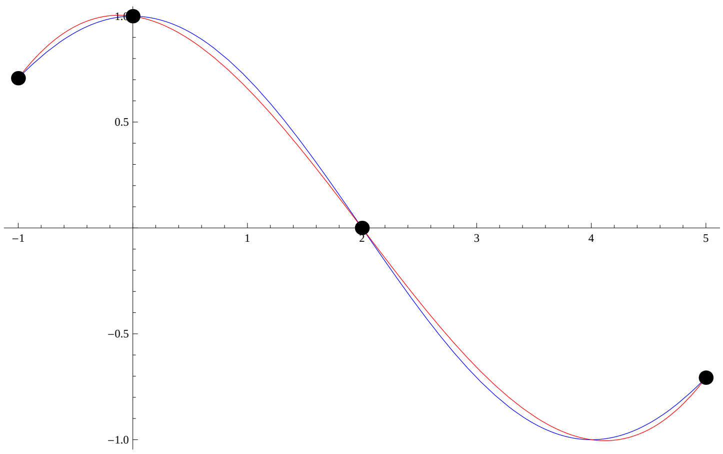
Rešitev:
Ker so točke x_i paroma različne, lahko interpolacijski polinom p zapišemo v Lagrangeevi obliki. Ker interpoliramo štiri podatke, je $p \in \mathbb{P}_3$. Lagrangeevi bazni polinomi so enaki

$$\ell_{0,3}(x) = -\frac{1}{18}(2-x)(5-x)x, \quad \ell_{1,3}(x) = \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$
$$\ell_{2,3}(x) = \frac{1}{18}(5-x)x(x+1), \quad \ell_{3,3}(x) = \frac{1}{90}(x-2)x(x+1).$$

Interpolacijski polinom

$$p(x) = -\frac{(2-x)(5-x)x}{18\sqrt{2}} - \frac{(x-2)(x+1)x}{90\sqrt{2}} + \frac{1}{10}(2-x)(5-x)(x+1),$$

skupaj s funkcijo f in interpolacijskimi točkami je prikazan na sliki 6.4.



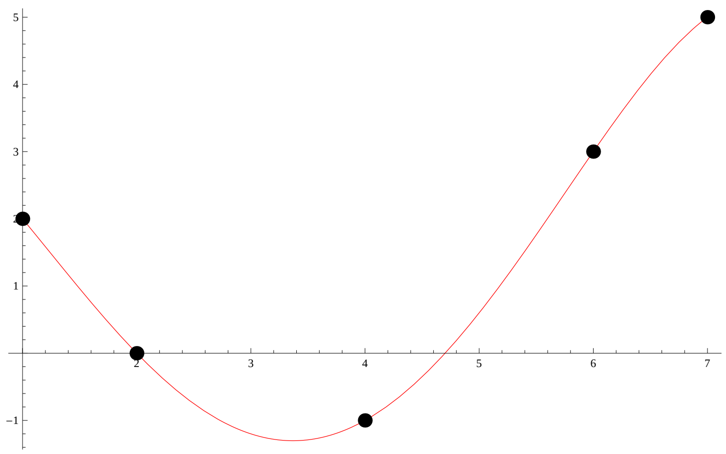
Slika 6.4: Interpolacijski polinom (rdeč graf) za funkcijo f (moder graf).

Naloga 6.9. *Določite polinom, ki interpolira točke*

$$(1,2), \quad (2,0), \quad (4,-1), \quad (6,3), \quad (7,5).$$

Rešitev:
Iščemo interpolacijski polinom $p \in \mathbb{P}_4$. Lagrangeevi bazni polinomi se poračunajo v

$$\ell_{0,4}(x) = \frac{1}{90}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x), \quad \ell_{1,4}(x) = \frac{1}{40}(4-x)(6-x)(7-x)(x-1),$$
$$\ell_{2,4}(x) = \frac{1}{36}(6-x)(7-x)(x-2)(x-1), \quad \ell_{3,4}(x) = \frac{1}{40}(7-x)(x-4)(x-2)(x-1)$$
$$\ell_{3,4}(x) = \frac{1}{90}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1).$$



Slika 6.5: Interpolacijski polinom na danih točkah.

Interpolacijski polinom je enak

$$\begin{aligned} p(x) =& \frac{1}{45}(2-x)(4-x)(6-x)(7-x) - \frac{1}{36}(6-x)(x-2)(x-1)(7-x) + \\ &+ \frac{3}{40}(x-4)(x-2)(x-1)(7-x) + \frac{1}{18}(x-6)(x-4)(x-2)(x-1) \end{aligned}$$

in je prikazan na sliki 6.5.

Naloga 6.10. *Dana je funkcija* $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

1. *Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom stopnje* 5, *ki interpolira funkcijo* f *v točkah* $x = 0$ *in* $x = 1$ *trikratno, to je v vrednosti, prvem in v drugem odvodu. Izračunajte njegovo vrednost v točki* $x = \frac{1}{2}$.

2. *Čim bolje ocenite napako*

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)|.$$

Rešitev:

1. Interpolacijski polinom p mora zadoščati naslednjim pogojem:

$$\begin{aligned} p(0) = f(0) = 4, \quad p'(0) = f'(0) = -4, \quad p''(0) = f''(0) = 8, \\ p(1) = f(1) = 2, \quad p'(1) = f'(1) = -1, \quad p''(1) = f''(1) = 1. \end{aligned}$$

Ker interpoliramo še odvode, ga bomo zapisali v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_i & & & & & & \\
\hline
0 & 4 & & & & & \\
0 & 4 & -4 & & & & \\
0 & 4 & -4 & 4 & & & \\
1 & 2 & -2 & 2 & -2 & & \\
1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\
1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

pri čemer uporabljamo rekurzivno formulo za deljene diference. Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^3, x^3(x-1), x^3(x-1)^2\right\}.$$

In sicer je

$$p(x) = 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2.$$

Vrednost polinoma pri $t = \frac{1}{2}$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 4 & -4 & 4 \\
\hline
x = \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{21}{16} & \frac{43}{32} & -\frac{85}{64} \\
\hline
 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{21}{8} & \frac{43}{16} & -\frac{85}{32} & \frac{171}{64}
\end{array}
$$

preberemo vrednost polinoma

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{171}{64}.$$

2. Pri oceni napake uporabimo izrek, da za poljubno $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, kjer I vsebuje vse interpolacijske točke, velja

$$f(x) = p_n(x) + \omega(x)\,[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,f, \quad \omega(x) := (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

pri čemer je p_n interpolacijski polinom, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$. V našem primeru je

$$f(x) - p(x) = x^3(x-1)^3[0, 0, 0, 1, 1, 1, x]f.$$

Za deljeno diferenco velja

$$[0, 0, 0, 1, 1, 1, x]f = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!},$$

kjer je $\xi \in [0,1]$ poljubna točka. Ker je

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{4 \cdot n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

padajoča funkcija, je

$$\|f^{(6)}\|_{\infty,[0,1]} = 4 \cdot 6! = 2880.$$

Dalje je

$$\left|x^3(x-1)^3\right| = |x(x-1)|^3 \leq \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

za vse $x \in [0,1]$. Ocena za napako interpolacijskega polinoma je tako enaka

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{64} \frac{2880}{6!} = \frac{1}{16}.$$

Naloga 6.11. *Poiščite Hermitov interpolacijski polinom, za katerega velja*

$$p(0) = -2, \quad p'(0) = \frac{1}{2}, \quad p(1) = 2, \quad p'(1) = \frac{1}{4}, \quad p(3) = 4, \quad p'(3) = \frac{1}{3}.$$

Izračunajte njegovo vrednost v točki $x = 2$.

Rešitev:
Interpolacijski polinom zapišemo v Newtonovi obliki. Izračunamo tabelo deljenih diferenc:

x_i	0	0	0	0	0	
0	-2	0	0	0	0	0
0	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
1	2	4	$\frac{7}{2}$	0	0	0
1	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{29}{4}$	0	0
3	4	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{23}{8}$	0
3	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{17}{48}$	$-\frac{83}{144}$	$-\frac{497}{432}$

Diagonalni elementi nam dajo koeficiente polinoma v Newtonovi obliki v bazi iz prestavljenih potenc

$$\left\{1, x, x^2, x^2(x-1), x^2(x-1)^2, x^2(x-1)^2(x-3)\right\}.$$

In sicer je

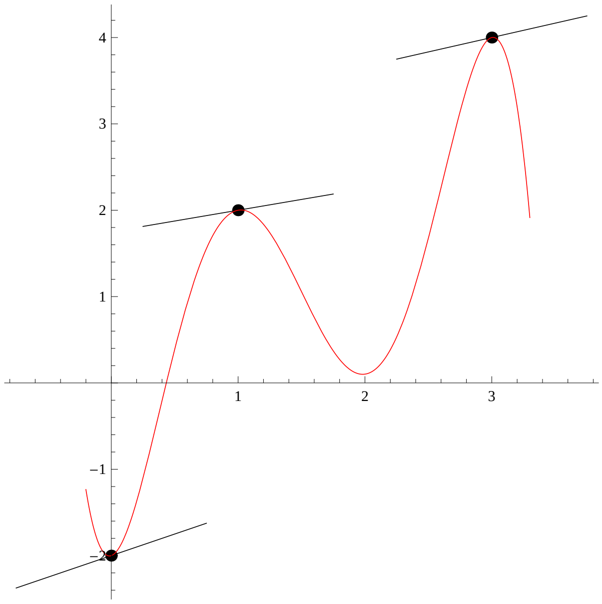
$$p(x) = -2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{4}x^2(x-1) + \frac{23}{8}x^2(x-1)^2 - \frac{497}{432}x^2(x-1)^2(x-3)$$

(glej sliko 6.6). Vrednost polinoma pri $t = 2$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

	$-\frac{497}{432}$	$\frac{23}{8}$	$-\frac{29}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2
$x = 2$	0	$\frac{497}{432}$	$\frac{1739}{432}$	$-\frac{1393}{432}$	$\frac{119}{216}$	$\frac{227}{108}$
	$-\frac{497}{432}$	$\frac{1739}{432}$	$-\frac{1393}{432}$	$\frac{119}{432}$	$\frac{227}{216}$	$\frac{11}{108}$

preberemo

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{108}.$$



Slika 6.6: Hermitov interpolacijski polinom.

Naloga 6.12. *Določite interpolacijski polinom p, za katerega velja*

$$p(0) = 1, \quad p(2) = -1, \quad p'(2) = 3, \quad p''(2) = 8, \quad p(3) = 4.$$

Izračunajte njegovo vrednost v točki $x = 4$.

Rešitev:
Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i					
0	1				
2	−1	−1			
2	−1	3	2		
2	−1	3	4	1	
3	4	5	2	−2	−1

in dobimo

$$p(x) = 1 - x + 2x(x-2) + x(x-2)^2 - x(x-2)^3.$$

Vrednost polinoma pri $x = 4$ dobimo s Hornerjevim algoritmom, prilagojenim za bazo iz prestavljenih potenc. Iz sheme

	−1	1	2	−1	1
$x = 4$		−2	−2	0	−4
	−1	−1	0	−1	−3

preberemo vrednost polinoma

$$p(4) = -3.$$

Naloga 6.13. *S pomočjo deljenih diferenc zapišite enačbo polinoma čim nižje stopnje, za katerega velja*

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 2, \quad p''(0) = 3, \quad p(1) = -1, \quad p'(1) = 3, \quad p(2) = 4.$$

Rešitev:
Izračunamo tabelo deljenih diferenc

x_i						
0	1					
0	1	2				
0	1	2	$\frac{3}{2}$			
1	-1	-2	-4	$-\frac{11}{2}$		
1	-1	3	5	9	$\frac{29}{2}$	
2	4	5	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{79}{8}$

in dobimo

$$p(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2.$$

Naloga 6.14. *Funkcijo $f(x) = \sin(x)$ interpoliramo v točkah $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}$. Ocenite napako na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ pri Lagrangeovi in Hermitovi interpolaciji.*

Rešitev:
Ker so interpolacijske točke ekvidistantne, lahko pišemo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{12} = x_0 + h, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} = x_0 + 2h,$$

kjer je $h = \frac{\pi}{12}$. Razlika med funkcijo in Lagrangeevim interpolacijskim polinomom je enaka

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f| = \\ &= |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \, \frac{1}{6} \left| f^{(3)}(\xi) \right| \end{aligned}$$

za nek $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Izračunajmo najprej ekstrem funkcije $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. Iz

$$\omega'(x) = 3x^2 - 6hx + 2h^2 = 0$$

dobimo dve stacionarni točki

$$x = h^3 \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ker je v krajiščih funkcija ω enaka nič, je

$$\|\omega\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \max\left\{\left|\omega\left(h^3\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right|, \left|\omega\left(h^3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right|\right\} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}.$$

Določimo še

$$\left\|f^{(3)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\cos x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = 1.$$

Od tod sledi

$$\|f-p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{\pi^3}{12^3} = 1.15\cdot 10^{-3}.$$

Pri Hermitovi interpolaciji se napaka izraža kot

$$\begin{aligned}|f(x)-p(x)| &= \left|(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2,x_2,x]f\right| = \\ &= \left|(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2\right|\frac{1}{6!}\left|f^{(6)}(\xi)\right|.\end{aligned}$$

Ker je

$$\left\|f^{(6)}\right\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \|\sin x\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} = \frac{1}{2},$$

dobimo z uporabo zgornjih ocen

$$\|f-p\|_{\infty,\left[0,\frac{\pi}{6}\right]} \leq \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{12^3}\right)\frac{1}{6!}\frac{1}{2} = \frac{1}{9720}\frac{\pi^6}{12^6} = 1.15\cdot 10^{-3}. = 3.312\cdot 10^{-8}.$$

Literatura

[1] Z. Bohte: *Numerična analiza*, Višja Matematika III, DMFA založništvo, Ljubljana, 1976.

[2] Z. Bohte: *Numerične metode*, DMFA založništvo, Ljubljana, 1987.

[3] Z. Bohte: *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb*, DMFA založništvo, Ljubljana, 1994.

[4] S.D. Conte, C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1980.

[5] J. W. Demmel, priredba E. Zakrajšek: *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA založništvo, Ljubljana, 2000.

[6] L. Fox, D. F. Mayers: *Computing Methods for Scientists and Engineers*, Clarendon Press, Oxford, 1968.

[7] E. Isaacson, H.B. Keller: *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York, 1966.

[8] D. Kincaid, W. Cheney: *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1996.

[9] J. Kozak: *Numerična analiza*, DMFA - založništvo, Ljubljana 2008.

[10] E. Zakrajšek: *Uvod v numerične metode*, DMFA založništvo, Ljubljana, 1998.