O tangensu, vsotah potenc, Eulerjevih in Bernoullijevih številih

Matjaž Konvalinka

July 19, 2017

Povzetek. Eulerjeva števila so definirana preko alternirajočih permutacij, Bernoullijeva števila pa se na enostaven način izražajo z Eulerjevimi števili z lihim indeksom. V članku si ogledamo nekatere uporabe teh števil. Pojavljajo se namreč v razvoju tangensa in sekansa v potenčno vrsto, v formuli za vsoto potenc prvih nekaj naravnih števil in v vrednostih funkcije zeta.

Abstract. We define Euler numbers via alternating permutations, and Bernoulli numbers as rational multiples of Euler numbers with an odd index. In this paper, we study some applications of these numbers. They appear as coefficients in the power series expansion of the tangent and secant functions, in the formula for the sum of powers of the first few integers, and in values of the zeta function.

1 Uvod: trigonometrične funkcije kot potenčne vrste

Predstavljajmo si, da ne vemo nič o trigonometriji, vemo pa dovolj o potenčnih vrstah oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, da jih znamo med seboj seštevati, množiti in členoma odvajati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \quad \text{[seštevanje istoležnih koeficientov]} \tag{1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \quad \text{[konvolucijsko množenje]} \tag{2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{[odvajanje po členih]} \tag{3}$$

Tu so a_n koeficienti iz nekega obsega s karakteristiko 0, običajno $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Pri tem lahko na potenčne vrste gledamo kot na dejanske funkcije (se pravi: x, ki je po absolutni vrednosti manjši od *konvergenčnega polmera*, se preslika v limito delnih vsot; v tem primeru so (1)–(3) številske enakosti, ki veljajo na nekem območju) bodisi kot na formalne potenčne vrste (se pravi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je samo drug zapis za zaporedje $(a_n)_{n=0}^{\infty}$; v tem primeru so zgornje enakosti definicije operacij). Prvi način je običajen v analizi, drugi pa v kombinatoriki, obe gledišči pa imata svoje prednosti in slabosti. Za večino snovi, ki sledi, lahko račune formalno utemeljimo bodisi na en bodisi na drug način. V nadaljevanju se v podrobnosti ne bomo spuščali in bomo mirno seštevali, množili in odvajali vse potenčne vrste. Omenimo še, da konvolucijsko množenje uporabljamo tudi za množenje polinomov: na primer, koeficient pri x^3 produkta polinomov $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ in $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ je vsota $a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$.

Najpomembnejša potenčna vrsta je eksponentna funkcija:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots ;$$

tu je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ (preberemo: n fakulteta) in $0! = 1$. Eksponentna funkcija ima lepo lastnost, da je njen odvod enak funkciji sami: res, če je $a_n = 1/n!$, je $(n+1)a_{n+1} = (n+1)/(n+1)! = 1/n! = a_n$.

S pomočjo eksponentne funkcije zlahka definiramo sinus, kosinus, tangens in sekans:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{4}$$

Seveda je tu $i^2 = -1$. Pripomnimo, da kotangens in kosekans nista definirana v točki 0 in ju zato ne moremo razviti v potenčno vrsto okoli 0 (v jeziku formalnih potenčnih vrst bi rekli, da $\sin x$ nima inverza za množenje).

Za sode n velja $(ix)^n = (-ix)^n = (-1)^{n/2} x^n$, za lihe n pa $(ix)^n = -(-ix)^n = (-1)^{(n-1)/2} i x^n$, zato hitro izpeljemo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \tag{5}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots \tag{6}$$

Marsikatero dejstvo o trigonometričnih funkcijah sledi neposredno iz definicije (na primer $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). V razdelku 5 bomo uporabili tudi nekaj lastnosti trigonometričnih funkcij, ki ne sledijo na očiten način iz zgornjih razvojev. Pripomnimo, da če na sinus in kosinus gledamo kot na funkciji, sta njuna konvergenčna polmera ∞, torej vrsti konvergirata za vsa realna oziroma kompleksna števila x.

2 Tri naloge

Videli smo, da imata sinus in kosinus enostaven razvoj v vrsto. Kaj pa tangens in sekans? Zapišimo

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7}$$

Ker je po definiciji

$$\cos x \cdot \tan x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots \right) \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \right)$$
$$= a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{a_0}{2}) x^2 + (a_3 - \tfrac{a_1}{2}) x^3 + (a_4 - \tfrac{a_2}{2} + \tfrac{a_0}{24}) x^4 + \cdots = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots, \tag{8}$$

lahko izračunamo nekaj začetnih členov: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2 - 1/6 = 1/3$, $a_4 = 0$ itd. Tako dobimo

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \frac{929569x^{15}}{638512875} + \cdots$$

in podobno

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \frac{50521x^{10}}{3628800} + \frac{540553x^{12}}{95800320} + \frac{199360981x^{14}}{87178291200} + \cdots$$

Takoj vidimo, da ima razvoj tangensa same lihe potence, sekansa pa same sode (to ni presenetljivo, saj je tangens liha funkcija, sekans pa soda). Ni pa očitno, kako bi izrazili posamezne člene v razvoju obeh funkcij. Lahko morda najdemo formulo za n-ti člen? Izkaže se, da preproste formule ni, obstaja pa lepa kombinatorična interpretacija koeficientov: to se pravi, koeficiente lahko izrazimo preko moči določenih množic.

Naloga 1. Poišči formulo za koeficiente v razvoju tangensa in sekansa v vrsto.

Nalogo bomo rešili v razdelku 3.

Druga naloga je na videz povsem nepovezana s prvo. Verjetno vsi poznamo zgodbo o Carlu Friedrichu Gaussu (1777–1855), ki je kot otrok presenetil svojega učitelja, ko je izredno hitro seštel števila od 1 do 100 in ga tako prikrajšal za okrepčilen dremež med poukom. Gauss naj bi opazil, da lahko najprej seštejemo 1 in 100, potem 2 in 99, potem 3 in 98 itd. V vsakem primeru dobimo 101, vsot je 50, zato je skupna vsota $50 \cdot 101 = 5050$. Za splošen n se na podoben način ali pa z indukcijo lahko dokaže dobro znana formula

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \tag{9}$$

Prav tako z indukcijo se lahko izračunajo podobne vsote

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \tag{12}$$

Videti je, da je vsota $\sum_{j=1}^{n} j^k$ polinom v spremenljivki n, ki se vedno začne s členoma $n^{k+1}/(k+1) + n^k/2$, ni pa očitno, kaj bi bili naslednji členi.

Naloga 2. Poišči formulo za vsoto k-tih potenc naravnih števil od 1 do n.

Nalogo bomo rešili v razdelku 4.

Tretja naloga je nekoliko podobna drugi: tokrat nas zanimajo vsote negativnih potenc *vseh* naravnih števil od 1 naprej. Iz osnovne analize vemo, da harmonična vrsta

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

divergira, medtem ko vrste

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n}$$

konvergirajo za vse $n > 1$. Zelo znana je prelepa formula

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{13}$$

velja pa tudi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} = \frac{\pi^6}{945} \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^8} = \frac{\pi^8}{9450} \tag{16}$$

Domnevamo lahko, da za $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2n}$ vselej dobimo zmnožek π^{2n} in nekega racionalnega števila.

Naloga 3. Poišči vsoto sodih negativnih potenc naravnih števil.

Nalogo bomo rešili v razdelku 5.

Izkaže se, da lahko rešitve vseh treh nalog izrazimo preko *Eulerjevih števil* ali z njimi tesno povezanih *Bernoullijevih števil*, ki jih bomo definirali v naslednjem razdelku.

3 Alternirajoče permutacije in Eulerjeva števila

Permutacija velikosti n je zapis števil $1, \ldots, n$ v nekem vrstnem redu. Primeri permutacij so tako $[1,2,3]$, $[4,1,3,2]$, $[9,8,1,2,5,7,10,6,3,4]$. Običajno to zapišemo brez oklepajev in vejic (števila nad 10 v tem primeru damo v oklepaj), torej 123, 4132 in 981257(10)634. Vseh permutacij velikosti n je $n!$; za $n = 3$ so to 123, 132, 213, 231, 312 in 321.

Permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ je *alternirajoča*, če velja $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \ldots$. Število vseh alternirajočih permutacij velikosti n označimo z E_n in imenujemo *Eulerjevo število* (tudi *Eulerjevo cikcak število*). Velja $E_0 = 1$ (prazna permutacija je na prazno alternirajoča), $E_1 = 1$ (edina permutacija velikosti 1 je prav tako na prazno alternirajoča), $E_2 = 1$ (edina alternirajoča permutacija velikosti 2 je 21), $E_3 = 2$ (alternirajoči permutaciji velikosti 3 sta 213 in 312), z računalnikom lahko hitro preverimo še $E_4 = 5$, $E_5 = 16$, $E_6 = 61$, $E_7 = 272$ itd.

Eulerjeva števila se imenujejo po švicarskem matematiku Leonhardu Eulerju (1707–1783). Pripomnimo še, da obstajajo tudi *eulerska števila*, ki tudi štejejo permutacije z neko lastnostjo.

Za Eulerjeva števila ni znana nobena enostavna formula; brez dokaza povejmo, da se lahko izračunajo preko dvojne vsote

$$E_n = i^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (k-2j)^{n+1} (2i)^{-k} k^{-1},$$

kjer je $i^2 = -1$.

Eulerjeva števila se lahko izračunajo tudi preko precej lepše rekurzivne formule (lema 1), s pomočjo katere lahko dokažemo naš glavni izrek (izrek 2). Ta izrek reši nalogo 1, hkrati pa bo osnova za reševanje nalog 2 in 3.

Lema 1 *Za $n \geq 1$ velja*

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

Dokaz: Če velja $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \pi_4 > \ldots$, rečemo, da je permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ *obratno alternirajoča*. Obratno alternirajoči permutaciji velikosti 3 sta tako 231 in 132. Enostavno je videti, da je alternirajočih in obratno alternirajočih permutacij velikosti n enako mnogo: permutacija $\pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ je alternirajoča natanko tedaj, ko je njen obrat $\pi' = (n+1-\pi_1, \ldots, n+1-\pi_n)$ obratno alternirajoča permutacija. Z drugimi besedami, $2E_{n+1}$ šteje število vseh permutacij velikosti $n+1$, ki so bodisi alternirajoče bodisi obratno alternirajoče.
Po drugi strani pa nam desna stran šteje vse trojice (S, σ, τ), kjer S označuje podmnožico množice $\{1, \ldots, n\}$ velikosti k, σ obratno alternirajočo permutacijo velikosti k, τ pa obratno alternirajočo permutacijo velikosti $n-k$. Iz take trojice lahko skonstruiramo alternirajočo ali obratno alternirajočo permutacijo π velikosti $n+1$ na naslednji način. Na mesto $k+1$ postavimo $n+1$; na mesta $k, k-1, \ldots, 1$ postavimo števila iz S, urejena, kot določa σ, na mesta $k+2, k+3, \ldots, n+1$ pa števila iz $\{1, \ldots, n\} \setminus S$, urejena, kot določa τ. Z drugimi besedami, če je $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$ in $\{1, \ldots, n\} \setminus S = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$, kjer je $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ in $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k}$, potem je

$$\pi = (i_{\sigma_k}, \ldots, i_{\sigma_2}, i_{\sigma_1}, n+1, j_{\tau_1}, j_{\tau_2}, \ldots, j_{\tau_{n-k}}).$$

Za $n = 8$ in trojico $(\{1,5,8\}, 132, 25341)$ dobimo denimo 581937462.
Lahko je preveriti, da je π alternirajoča (če je k sodo število) oziroma obratno alternirajoča (če je k liho število) in da je naša preslikava med permutacijami in trojicami zgornje oblike bijektivna. Recimo, alternirajoča permutacija 826174935 je slika trojice $(\{1,2,4,6,7,8\}, 351426, 12)$. $\square$

Izrek 2 *Velja*

$$\tan x + \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n.$$

Dokaz: Pišimo $F(x) = \tan x + \sec x = \frac{1+\sin x}{\cos x}$. Potem je $F(0) = 1$ in

$$2F'(x) = 2\frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2+2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = F^2(x) + 1.$$

Trdimo, da isti diferencialni enačbi zadošča tudi desna stran $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$. Ker je $E_0 = 1$, je res $G(0) = 1$. Za vsak $n \geq 1$ pa je koeficient pri x^n v $2G'(x)$ enak $2(n+1)\frac{E_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2E_{n+1}}{n!}$, koeficient pri x^n v $G^2(x) + 1$ pa po konvolucijskem pravilu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{k!} \frac{E_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

Pa lemi 1 sta ta dva izraza enaka. Koeficient pri x^0 v $2G'(x)$ je $2E_1 = 2$, v $G^2(x)+1$ pa $E_0^2+1 = 2$. Ni težko videti, da če dve potenčni vrste obe ustrezata isti diferencialni enačbi in se ujemata v točki 0, sledi, da morata biti enaki. □

Razvoj tangensa je potem lihi del, sekansa pa sodi del razvoja iz izreka 2. Zato dobimo

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{in} \qquad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4 Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in vsote potenc

Bernoullijeva števila B_n, ki se imenujejo po švicarskem matematiku Jakobu Bernoulliju (1654–1705), so tesno povezana z Eulerjevimi števili z lihimi indeksi. Definirana so na naslednji način:

$$B_n = \begin{cases} 1 & : \ n = 0 \\ \frac{1}{2} & : \ n = 1 \\ 0 & : \ n > 1 \text{ liho} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} n E_{n-1}}{2^n(2^n-1)} & : \ n > 1 \text{ sodo} \end{cases}$$

Tako je denimo

$$B_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2(2^2-1)} = \frac{1}{6}.$$

Zaporedje Bernoullijevih števil se začne

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}, \ldots$$

Bernoullijeva števila se prav tako pojavijo v razvoju neke pomembne funkcije v potenčno vrsto (lema 3). Za motivacijo poskusimo s pomočjo rodovnih funkcij rešiti nalogo 2, torej izračunati $\sum_{j=1}^{n} j^k$.

Označimo z $G_n(x)$ (eksponentno) rodovno funkcijo vsot $\sum_{j=1}^{n} j^k$ po vseh k, torej

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} j^k \right) \frac{x^k}{k!}.$$

Z zamenjavo vrstnega reda seštevanja dobimo

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k x^k}{k!} \right) = \sum_{j=1}^{n} e^{jx}.$$

To je končna geometrijska vrsta, ki jo seveda znamo sešteti:

$$G_n(x) = e^x \cdot \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{xe^x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{nx}-1}{x}.$$

Funkcijo $\frac{e^{nx}-1}{x}$ znamo razviti v vrsto; če razvijemo v vrsto še $\frac{xe^x}{e^x-1}$, s konvolucijsko formulo dobimo formulo za iskano vsoto.

Lema 3 *Velja*

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

Dokaz: Lahko je videti, da ima funkcija $\frac{xe^x}{e^x-1}$ razvoj v potenčno vrsto, torej

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

za neko zaporedje $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Naš cilj je dokazati, da je $a_n = B_n$.
Ker se $2^n(2^n - 1)B_n$ izraža na preprostejši način preko Eulerjevih števil kot B_n, izračunajmo rodovno funkcijo za $2^n(2^n - 1)a_n$. Če zamenjamo x z $2x$, dobimo

$$\frac{2xe^{2x}}{e^{2x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n \frac{x^n}{n!},$$

zato je

$$\frac{2xe^{2x}}{e^{2x} - 1} - \frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Če ponovno zamenjamo x z $2x$, dobimo

$$\frac{4xe^{4x}}{e^{4x} - 1} - \frac{2xe^{2x}}{e^{2x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (2^n - 1) a_n \frac{x^n}{n!}.$$

V definiciji Bernoullijevih števil s sodimi indeksi nastopajo Eulerjeva števila z za 1 manjšim indeksom. Zato obe strani zadnje enakosti odvajajmo; nato še odštejmo 1. Na levi z nekaj računanja dobimo

$$\left(\frac{4xe^{4x}}{e^{4x} - 1} - \frac{2xe^{2x}}{e^{2x} - 1}\right)' - 1 = \frac{4e^{2x}x + e^{4x} - 1}{\left(e^{2x} + 1\right)^2},$$

na desni pa

$$-1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2^n - 1) a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Naredimo še nekaj računov s funkcijo

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Najprej obe strani odvajajmo in pomnožimo z x:

$$\frac{x}{\cos^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

Sedaj zadnji enakosti seštejmo in zamenjajmo trigonometrične funkcije z njihovimi definicijami:

$$\frac{4x}{(e^{ix} + e^{-ix})^2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Zamenjamo x z ix in pomnožimo z $-i$:

$$\frac{4x}{(e^x + e^{-x})^2} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

tu smo na desni upoštevali $-i \cdot i^{2n+1} = -i^{2n+2} = -(-1)^{n+1} = (-1)^n$. Lahko je videti, da se leva stran spet poenostavi v

$$\frac{4e^{2x}x + e^{4x} - 1}{\left(e^{2x} + 1\right)^2}.$$

Iz tega sledi, da je

$$-1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n(2^n-1)a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Koeficienta na levi in desni strani pri x^0 sta $-1+2a_1$ in 0, torej je $a_1=1/2=B_1$. Koeficienta pri x^{2n}, $n\geq 1$, sta $2^{2n+1}(2^{2n+1}-1)a_{2n+1}/(2n)!$ in 0, torej je $a_{2n+1}=0=B_{2n+1}$ za $n\geq 1$. Koeficienta pri x^{2n-1}, $n\geq 1$, sta $2^{2n}(2^{2n}-1)a_{2n}/(2n-1)!$ in $(-1)^{n-1}2nE_{2n-1}/(2n-1)!$, torej je $a_{2n}=(-1)^{n+1}2nE_{2n-1}/(2^{2n}(2^{2n}-1))=B_{2n}$. Ker je tudi $a_0=\lim_{x\to 0}xe^x/(e^x-1)=1=B_0$, smo dokazali, da je $a_n=B_n$ za vse $n\geq 0$. □

Pripomnimo, da se v literaturi včasih vzame $B_1=-1/2$ namesto $B_1=1/2$. V tem primeru je $\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n/n!=\frac{xe^x}{e^x-1}-x=\frac{x}{e^x-1}$.

Sedaj lahko rešimo tudi nalogo 2.

Izrek 4 (Faulhaberjeva formula) *Za naravni števili n in k velja*

$$\sum_{j=1}^{n}j^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}B_ln^{k+1-l}=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\sum_{l=1}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{(-1)^{l+1}\binom{k}{2l-1}E_{2l-1}}{2^{2l}(2^{2l}-1)}n^{k+1-2l}.$$

Dokaz: Dokazali smo že, da je

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}j^k\right)\frac{x^k}{k!}=\frac{xe^x}{e^x-1}\cdot\frac{e^{nx}-1}{x},$$

torej moramo poiskati koeficient pri x^k na desni strani. Po izreku 3 znamo razviti v vrsto funkcijo $\frac{xe^x}{e^x-1}$, očitno je $\frac{e^{nx}-1}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^kx^{k-1}}{k!}$, konvolucijsko množenje zato da

$$G_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{B_l}{l!}\cdot\frac{n^{k+1-l}}{(k+1-l)!}\right)x^k.$$

Koeficient pri x^k na obeh straneh je tako

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}j^k=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k+1}{l}B_ln^{k+1-l},$$

iz česar sledi izrek. □

Prvih nekaj členov Faulhaberjeve formule je

$$\sum_{j=1}^{n}j^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\frac{\binom{k}{1}\cdot 1}{4\cdot 3}n^{k-1}-\frac{\binom{k}{3}\cdot 2}{16\cdot 15}n^{k-3}+\frac{\binom{k}{5}\cdot 16}{64\cdot 63}n^{k-5}-\frac{\binom{k}{7}\cdot 272}{256\cdot 255}n^{k-7}+\cdots$$

Za vsak fiksen k so binomski koeficienti v števcu prej ali slej enaki 0, tako da za vsoto res dobimo polinom v n stopnje $k+1$.

5 Eulerjeva oz. Bernoullijeva števila in funkcija zeta

Ena od uporab rodovnih funkcij je, da lahko z njimi izračunamo asimptotiko členov zaporedja. Naj bo $f(z)$ funkcija, holomorfna (analitična) v okolici točke 0, s Taylorjevim razvojem $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. Denimo, da ima $f(z)$ pol v točki z_0 in da je to edina singularnost v krogu s središčem v 0 in s polmerom $|z_0|+\epsilon$ za neki $\epsilon>0$. Z drugimi besedami, obstaja r (ki mu rečemo stopnja pola), da ima funkcija $f(z)(z-z_0)^r$ odpravljivo singularnost v z_0, konvergenčni radij Taylorjeve vrste te funkcije v točki 0 pa je strogo večji od $|z_0|$. Potem ni težko videti, da je dober približek za koeficient a_n izraz

$$b_n = \frac{(-1)^r c_{-r} n^{r-1}}{(r-1)!\, z_0^{n+r}}, \tag{17}$$

kjer je

$$c_{-r} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^r.$$

Dokaz bomo izpustili, glej na primer [4, Theorem 5.2.1]. Še več, velja

$$\lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| \cdot |z_0|^n = 0, \tag{18}$$

torej da razlika med a_n in b_n raste počasneje kot $(1/|z_0|)^n$, ko gre n proti neskončno.

Oglejmo si, kaj nam formula (17) da za funkcijo $f(z) = \tan z + \sec z = \frac{1+\sin z}{\cos z}$. Singularnosti funkcije z so ničle $\cos z$, v katerih je $\sin z \neq -1$. Edina kompleksna števila, ki ustrezajo tema pogojema, so $z = \pi/2 + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. Singularnost, najbližja izhodišču, je tako $\pi/2$, v tej točki ima $f(z)$ pol stopnje $r = 1$,

$$c_{-1} = \lim_{z \to \pi/2} \frac{(1 + \sin z)(z - \pi/2)}{\cos z} = \lim_{z \to \pi/2} \frac{(z - \pi/2)\cos z + (1 + \sin z)}{-\sin z} = -2,$$

kjer smo uporabili l'Hôpitalovo pravilo. Dobimo približek za koeficiente $f(z)$, ki jih poznamo iz izreka 2:

$$\frac{E_n}{n!} \sim \frac{(-1)^1(-2)n^0}{0!(\pi/2)^{n+1}} = \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}$$

oziroma

$$E_n \sim \frac{2^{n+2} n!}{\pi^{n+1}}.$$

Primerjajmo obe strani za $n = 0, \ldots, 10$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521
$\frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$	1,27	0,81	1,03	1,97	5,019	15,98	61,03	271,96	1385,07	7935,86	50521,28

Vidimo, da je približek zelo dober, čeprav ni res, kot bi morda kdo sklepal iz teh primerov, da je E_n kar $\frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$, zaokroženo na najbližje celo število: razlike med pravo in približno vrednostjo rastejo, količniki pa konvergirajo proti 1.

Dobimo lahko tudi boljši približek: razlika $f(z) - \frac{c_{-1}}{z-\pi/2} = f(z) - \frac{-2}{z-\pi/2}$ ima odpravljivo singularnost v točki $\pi/2$, tako da je zanjo $-3\pi/2$ singularnost, najbližja izhodišču. Spet velja

$$c_{-1} = \lim_{z \to -3\pi/2} \left(f(z) + \frac{2}{z - \pi/2} \right)(z + 3\pi/2) = \lim_{z \to -3\pi/2} f(z)(z + 3\pi/2) = -2.$$

Tako lahko odštejemo še funkcije $-2(z+3\pi/2)^{-1}$, $-2(z-5\pi/2)^{-1}$, $-2(z+7\pi/2)^{-1}$ itd. in dobivamo boljše in boljše približke za koeficiente $f(z)$. S pomočjo (18) je lahko dokazati, da konvergirajo proti koeficientom $f(z)$. Z drugimi besedami, dobili smo

$$\frac{E_n}{n!} = \frac{2}{(\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(-3\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(5\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(-7\pi/2)^{n+1}} + \frac{2}{(9\pi/2)^{n+1}} + \ldots$$

To je posebno zanimivo, če je n lih. Vstavimo $2n-1$, $n \geq 1$, namesto n:

$$\frac{E_{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots \right). \tag{19}$$

Po drugi strani lahko člene v vsoti

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots$$

(ζ je grška črka zeta) razdelimo na lihe in sode, potem pa pri imenovalcih sodih členov izpostavimo 2^{2n}. Dobimo

$$\zeta(2n) = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\zeta(2n),$$

iz česar sledi

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n).$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko vrstni red sumandov v konvergentni vrsti s pozitivnimi členi poljubno spreminjamo. Torej nam (19) da

$$\zeta(2n) = \frac{E_{2n-1}\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!} = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!} \tag{20}$$

za $n \geq 1$. S tem rešili tudi nalogo 3. To pojasni denimo

$$\zeta(4) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{E_3\pi^4}{2\cdot(2^4-1)\cdot(4-1)!} = \frac{2\pi^4}{2\cdot 15\cdot 6} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Končajmo še z nekaj dejstvi o funkciji zeta, ki je definirana kot

$$\zeta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^z} \tag{21}$$

za kompleksna števila $z = x + iy$ z $x > 1$; pri tem je j^z definiran kot $e^{z\cdot\log j}$. Ni težko videti, da je vrsta pod tem pogojem konvergentna, pravkar pa smo izračunali $\zeta(z)$ za soda naravna števila z.

Za liha naravna števila $z > 1$ ni znana nobena formula za $\zeta(z)$. Domneva se, da so π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$ itd. algebraično neodvisna števila, torej da ne obstaja netrivialen polinom v dveh spremenljivkah z racionalnimi koeficienti, ki bi uničil dve izmed njih.

Pač pa velja naslednje: funkcijo ζ, ki smo jo definirali na delu kompleksne ravnine $\{x+iy\colon x > 1\}$, lahko analitično razširimo na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Razširjena funkcija, ki jo spet označimo z ζ, ima v 1 pol stopnje 1, poleg tega pa velja

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

za nenegativna cela števila n. Velja torej $\zeta(0) = -B_1 = -\frac{1}{2}$, $\zeta(-2n) = 0$ in $\zeta(1-2n) = \frac{(-1)^n E_{2n-1}}{2^{2n}(2^{2n}-1)}$ za $n = 1, 2, \ldots$

Eulerjeva števila z lihim indeksom se torej pojavljajo ne le v razvoju tangensa v vrsto in v formuli za vsoto prvih n k-tih potenc, temveč tudi pri vrednostih funkcije ζ, in sicer tako pri pozitivnih sodih kot pri negativnih lihih številih.

Formula

$$\zeta(-(2n-1)) = \frac{(-1)^n E_{2n-1}}{2^{2n}(2^{2n}-1)}$$

ima zanimivo interpretacijo. Na primer, za $n = 1$ dobimo $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Če vstavimo $z = -1$ v (21) (česar seveda ne smemo storiti, ker vrsta na desni divergira), torej dobimo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

To je seveda nadvse nenavadno: delne vsote $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ naj bi konvergirale proti $-1/12$. Ta "trditev" (ki jo matematično torej pravilno razumemo v smislu funkcije ζ, glej pa tudi [3] za alternativno razumevanje teh rezultatov) je tako presenetljiva, da si je utrla pot tudi v nematematični svet: v zadnjih letih lahko decembra v centru Ljubljane med drugimi novoletnimi okraski vidimo tudi napis $\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$.

Na internetu (npr. [2]) pa je mogoče najti tudi utemeljitve, kot je naslednja. Označimo

$$\begin{aligned} S_0 &= 1+2+3+4+\cdots \\ S_1 &= 1-1+1-1+\cdots \\ S_2 &= 1-2+3-4+\cdots \end{aligned}$$

Potem je

$$\begin{aligned} 2S_1 &= 1-1+1-1+\cdots \\ &\quad +1-1+1-\cdots = 1, \end{aligned}$$

torej $S_1 = 1/2$. Podobno je

$$\begin{aligned} 2S_2 &= 1-2+3-4+\cdots \\ &\quad +1-2+3-\cdots = 1-1+1-1+\cdots = S_1 = 1/2, \end{aligned}$$

torej $S_2 = 1/4$. Torej je

$$\begin{aligned} S_0 - S_2 &= 1+2+3+4+\cdots \\ &\quad -1+2-3+4-\cdots = 4+8+12+16+\cdots = 4S_0. \end{aligned}$$

Iz tega dobimo $3S_0 = -S_2$ in $S_0 = -S_2/3 = -1/12$.

Taka izpeljava seveda ni matematično korektna, ker računamo z divergentnimi vsotami, nam pa vseeno daje neko intuitivno predstavo, zakaj je vrednost $\zeta(-1)$ ravno $-\frac{1}{12}$.

Na koncu omenimo še najpomembnejšo domnevo v zvezi s funkcijo ζ (mnogi jo imajo celo za najpomembnejši nerešeni matematični problem). Povedali smo že, da so soda negativna števila ničle funkcije ζ, rečemo jim *trivialne ničle*. Slavna *Riemannova hipoteza* pravi, da imajo vse netrivialne ničle funkcije ζ realni del enak 1/2. Domnevo je postavil nemški matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njena pomembnost pa je (med drugim) v tem, da je njena rešitev tesno povezana s porazdelitvijo praštevil.

Omenimo, da so Eulerjeva in Bernoullijeva števila standardna tema v preštevalni kombinatoriki in pomemben zgled uporabe rodovnih funkcij; odlična referenca je [1]. Za asimptotiko koeficientov rodovnih funkcij je dobra prva referenca [4].

References

[1] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics. Volume 1*, vol. 49 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, second ed., 2012.

[2] Numberphile: *ASTOUNDING:* $1+2+3+4+5+... = -1/12$, dostopno na `http://tinyurl.com/pekgb6o`

[3] T. Tao: *The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation*, dostopno na `http://tinyurl.com/j869xct`

[4] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, third ed., 2006.