KOMUTATIVNA ALGEBRA 2004/05 Zaključne naloge

Rešitve nalog morate narediti samostojno. To potrdite s podpisano izjavo, ki jo priložite rešitvam. Skrajni rok za oddajo nalog je 21. september 2005. Pri izdelavi rešitev se lahko posvetujete s predavateljema.

(1) (a) Naj bo kolobar R noetherski in $\mathfrak{a} \subseteq R$ poljuben ideal. Pokaži, da obstaja $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $(\operatorname{Nil}\mathfrak{a})^n \subseteq \mathfrak{a}$.
(b) Dokaži, da v vsakem noetherskem kolobarju obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je produkt poljubnih n nilpotentov enak 0.
(c) Pokaži, da v kolobarju $R := \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, \ldots]/(X_1, X_2^2, X_3^3, \ldots)$ točki (a) in (b) ne veljata.

(2) Multiplikativni podmnožici S kolobarja R pravimo *nasičena*, če za poljubna $x, y \in R$ iz $xy \in S$ sledi $x \in S$ in $y \in S$.
(a) Dokaži, da je multiplikativna podmnožica $S \subseteq R$ nasičena natanko takrat, ko je $R \setminus S$ unija praidealov.
(b) Dokaži, da za vsako multiplikativno množico S obstaja najmanjša nasičena multiplikativna množica $\overline{S}$, ki vsebuje S. Kaj je $R \setminus \overline{S}$?
(c) Naj bo $\mathfrak{a} \subseteq R$ poljuben ideal. Poišči nasičenje multiplikativne množice $1 + \mathfrak{a}$.

(3) (a) Naj bo kolobar R artinski in $f : R \to R$ poljuben endomorfizem. Pokaži: če je f injektiven ali surjektiven, potem je avtomorfizem.
(b) Naj bo M noetherski modul nad nekim kolobarjem in $f : M \to M$ homomorfizem. Pokaži, da obstaja $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $\ker f^n \cap \operatorname{im} f^n = \{0\}$.
(c) Dokaži, da točka (b) ne velja, če modul M ni noetherski.

(4) Naj bo R kolobar in $\mathfrak{m} \subseteq R$ poljuben maksimalen ideal.
(a) Naj bo $\mathfrak{a} \subseteq R$ ideal in $\operatorname{Nil}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$. Dokaži, da je kolobar $R/\mathfrak{a}$ lokalen.
(b) Naj bosta $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}$ ideala in naj velja $\operatorname{Nil}\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$. Pokaži, da je kanonična preslikava $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \to (\mathfrak{b}R_\mathfrak{m})/(\mathfrak{a}R_\mathfrak{m})$ bijektivna.

(5) Za kolobar A z $\operatorname{Rad} A$ označimo *Jacobsonov radikal* kolobarja A, torej

$$\operatorname{Rad} A = \bigcap (\operatorname{Spec} A)^{\max} .$$

Naj bosta A, B kolobarja in $f : A \to B$ surjektiven homomorfizem.
(a) Pokaži, da velja $f(\operatorname{Rad} A) \subseteq \operatorname{Rad} B$.
(b) Konstruiraj primer za katerega velja v točki (a) stroga inkluzija.
(c) Če ima A le končno mnogo maksimalnih idealov, potem velja v točki (a) enakost. (*Nasvet:* Kitajski izrek o ostankih.)

(6) Kolobar R imenujemo *von Neumannovo regularen*, če za vsak $x \in R$ obstaja $y \in R$ z lastnostjo $xyx = x$. Naj bo R von Neumannovo regularen. Dokaži:
   (a) Za vsak $x \in R$ obstaja $y \in R$ z lastnostjo $xyx = x$ in $yxy = y$.
   (b) Vsak praideal kolobarja R je maksimalen.
   (c) Vsak kolobar ulomkov $S^{-1}R$ kolobarja R, kjer je $S \subseteq R$ multiplikativna množica, je von Neumannovo regularen kolobar. Vsaka lokalizacija $R_{\mathfrak{m}}$ za maksimalen ideal $\mathfrak{m}$ je obseg.
   (d) Kolobar je von Neumannovo regularen natanko takrat, ko je vsak glavni ideal idempotenten (ideal $\mathfrak{a}$ je *idempotenten*, če velja $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$).
   (e) Kolobar je von Neumannovo regularen natanko takrat, ko je vsak končno generiran ideal direkten sumand (ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ je *direkten sumand*, če obstaja tak ideal $\mathfrak{b} \subseteq A$, da je A–modul A izomorfen notranji direktni vsoti $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$).

(7) Naslednja naloga sestoji iz vrste korakov, ki razložijo, kako najti algoritem za izračun globine $\mathrm{dp}\,(I, M)$. Če ni drugače navedeno je R komutativen noetherski kolobar, M končno generiran modul nad R in I tak ideal v R, da velja $IM \neq M$.
   (a) Pokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:
      (i) $\mathrm{dp}\,(I, M) = 0$,
      (ii) $\mathrm{Ann}\,(I, M) \neq 0$,
      (iii) $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \neq 0$.
   (b) Naj bo R kolobar polinomov v n spremenljivkah nad komutativnim obsegom. Naj bo N podmodul v R^r dan z generatorji $g_1, g_2, \ldots, g_s$ in $M = R^r/N$. Nadalje naj bo I ideal v R generiran z $f_1, f_2, \ldots, f_t$. Opiši algoritem, ki bo preveril ali je $\mathrm{dp}\,(I, M) = 0$. Pri tem uporabi zgornjo trditev in znanje iz teorije Groebnerjevih baz.
   (c) Naj bo $r \geq 1$ in naj bo $0 \to N \to R^r \to M \to 0$ kratko eksaktno zaporedje. Dokaži naslednji trditvi:
      (i) Če je $\mathrm{dp}\,(I, R) = \mathrm{dp}\,(I, M)$, potem je $\mathrm{dp}\,(I, N) = \mathrm{dp}\,(I, M)$.
      (ii) Če je $\mathrm{dp}\,(I, R) > \mathrm{dp}\,(I, M)$, potem je $\mathrm{dp}\,(I, N) = \mathrm{dp}\,(I, M) + 1$.
   (d) Za $d \geq 1$ pokaži, da je $\mathrm{dp}\,(I, M) = d$ natanko tedaj, ko je $\mathrm{Ext}\,^i_R(R/I, M) = 0$ za $i = 0, 1, \ldots, d-1$ in $\mathrm{Ext}\,^d_R(R/I, M) \neq 0$.
   (e) Naj bo R spet kolobar polinomov v n spremenljivkah, N podmodul v R^r z generatorji $g_1, g_2, \ldots, g_s$, $M = R^r/N$ in I ideal v R generiran z $f_1, f_2, \ldots, f_t$. Opiši algoritem, ki bo izračunal $\mathrm{dp}\,(I, M)$. Pri tem uporabi trditev iz prejšnje točke in znanje iz teorije Groebnerjevih baz.
   (f) Izračunaj $\mathrm{dp}\,(I, M)$ za naslednja primera:
      (i) $I = \langle x, y, z \rangle$ in $M = \langle xy - z, yz - x, xz - y \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$.
      (ii) $I = \langle x, 5y - 3, 5z - 4 \rangle$ in $M = \langle (x, y, z) \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]^3$.

(8) Naj bo S regularen lokalen kolobar, m njegov maksimalen ideal in $f \in m$. Označimo $R = S/\langle f \rangle$. Naj bo M tak Cohen-Macaulayjev modul nad R (ki je tudi modul nad S prek

kanoničnega kvocientnega homomorfizma $S \to R$), za katerega velja $\operatorname{dp} M = \operatorname{Dim} R$. Potem pokaži naslednje štiri trditve in reši dve nalogi:

(a) Projektivna dimenzija M kot modula nad S je enaka 1.

(b) M ima prosto resolucijo $0 \to S^n \to^{\phi} S^n \to M \to 0$.

(c) Obstaja tak homomorfizem $\psi : S^n \to S^n$ modulov nad S, da je $\phi \circ \psi = f \cdot \mathrm{id}_{S^n}$ in $\psi \circ \phi = f \cdot \mathrm{id}_{S^n}$. Par (ϕ, ψ) imenujemo matrična faktorizacija za f.

(d) Naj bo $\widehat{\phi}$, oziroma $\widehat{\psi}$, preslikava $R^n \to R^n$ inducirana s ϕ, oziroma ψ. Potem je verižni kompleks

$$\cdots \to R^n \to^{\widehat{\phi}} R^n \to^{\widehat{\psi}} R^n \to^{\widehat{\phi}} R^n \to^{\widehat{\psi}} R^n \to \cdots$$

eksakten.

(e) Preveri, da je

$$\cdots \to R^n \to^{\widehat{\phi}} R^n \to^{\widehat{\psi}} R^n \to^{\widehat{\phi}} R^n \to M \to 0$$

periodična prosta resolucija za M s periodo 2.

(f) Naj bo $S = \mathbb{Q}[x, y]_{\langle x,y \rangle}$ in $f(x, y) = x^2 + y^3$. Poišči periodično prosto resolucijo za $S/\langle f \rangle$ modul $M = S/\langle x, y \rangle$.

(g) Naj bo $S = \mathbb{Q}[x, y]_{\langle x,y \rangle}$, $f(x, y) = x^3 + y^5$ in $\phi = \begin{pmatrix} y & -x & 0 \\ 0 & y & -x \\ x & 0 & y^3 \end{pmatrix}$. Poišči tak ψ, da bo (ϕ, ψ) matrična faktorizacija za f.

(9) Ali je kateri od kolobarjev $\mathbb{Z}_2(a)[x, y]_{\langle x+a,y \rangle}/\langle x^2 + y^2 + a \rangle$ in $\mathbb{Z}_3(a)[x, y]_{\langle x^3+a,y \rangle}/\langle x^3 + y^3 + a \rangle$ regularen lokalen kolobar? Tu so x, y in a spremenljivke.